

第3章 モーメント法を用いた相対論的輻射流体の数値解法

高橋博之 (CfCA, 国立天文台)

近年のスーパーコンピュータの発達と数値計算コードの高精度化に伴い、より高解像度・長時間の磁気流体計算を行う事が可能になってきた。その一方で、磁気流体に自己重力や、特殊・一般相対性理論、電気抵抗、熱伝導、粘性、輻射輸送など、より多くの物理を含めた現実的な計算も行われている。この章では相対論的 (磁気) 流体に輻射の効果が無矛盾に取り入れた相対論的輻射流体数値計算の方法を紹介する。ここで言う相対論は特殊相対論であり一般相対論的效果は考えない。そのため空間メトリックは平坦であると仮定する (e.g., $\text{diag } g_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$ 、添字のギリシャ文字は時空4次元を表す)。一般相対論への拡張は (9) や (15) 等を参照してほしい。

詳細は後で述べるが、輻射場にモーメント法と呼ばれる簡単化した方程式を扱う。この章では数値計算方法に主題をおくため、輻射場のモーメント方程式の導出には途中式をかなり省く。詳しい導出には (8) を参照してほしい。また、(6) はブラックホール降着円盤の教科書であるが、その巻末にモーメント法を用いた方程式の導出が簡便に書かれており、非常に有用である。その他、輻射に関する有用な教科書として (11)、(1)、(10) を挙げておく。

3.1 輻射場の支配方程式

3.1.1 輻射のモーメント式の導入

プラズマで第一原理計算を行う際もそうであるように、輻射を扱うためには光子のボルツマン方程式を解く必要がある。これは輻射輸送方程式と呼ばれており、以下のように表される。

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + (\mathbf{l} \cdot \nabla) I_\nu = \eta_\nu - \rho(\kappa_\nu + \sigma_\nu) I_\nu. \quad (3.1.1)$$

I_ν は輻射強度 [$\text{erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ ster}^{-1} \text{ Hz}^{-1}$] であり、次元は異なるが光子の分布関数に対応する物理量である。ベクトル \mathbf{l} は光の伝搬ベクトルであり、光子の4元ベクトル k^μ と $k^\mu = \nu(1, \mathbf{l})$ という関係がある。ただし ν は光の振動数である。 η_ν は放射率 (emissivity, [$\text{erg cm}^{-3} \text{ ster}^{-1} \text{ Hz}^{-1}$]) と呼ばれる量で、ガスが単位体積、単位立体角あたりに、ある振動数で放射するエネルギーを表している。 κ_ν と σ_ν はそれぞれ吸収係数と散乱係数 [$\text{cm}^2 \text{ g}^{-1}$] で、 ρ はガスの質量密度である。この式は観測者系でも共動座標系でも成り立つ、ローレンツ不変な式である。

式 (3.1.1) を眺めてみると、左辺は輻射強度の時間微分と空間微分が含まれており、これらは輻射の移流を表していることがわかる。粒子のボルツマン方程式と異なり、輻射輸送方程式には加速度に比例す

る項 ($\propto \dot{p}$) が含まれていない。これは光は真っ直ぐに進む (null) ため¹、光の4元運動量 $p^\mu = dx^\mu/d\lambda$ (λ はアフィン係数) の微分が $\dot{p}^\mu = d^2x^\mu/d\lambda^2 = 0$ となるためである。次に式 (3.1.1) の右辺を眺めてみる。第1項の j_ν に比例する項はガスが自発的に放射した分だけ輻射強度が増えることを表しており、第2項は吸収や散乱によって光とガスが相互作用する事を表している。

輻射輸送方程式はボルツマン方程式と同様に、 t, x^i, p^i の7つの独立変数を持つ (添字のラテン文字は空間3次元を表す)。従って (3.1.1) を数値的に解く場合、空間、運動量空間を N グリッドで分割すると必要なメモリ量は N^6 に比例するため、実際に数値計算を行う事は簡単ではない。そこでここでは仮定をして独立変数を減らすことを考える。非相対論的現象を扱う場合、流体速度は光速に比べて十分に遅いため、輻射場は定常であると仮定して時間依存性を落とすことができる。しかし、相対論的現象では流体速度 (や、音波の伝搬速度) が光速と同程度になるため、時間依存性を落とす事はできない²。もし、星のように空間の対称性がよい場合には空間を半径方向の1次元に落とすことが可能である。空間の構造が複雑で次元を落とす事が出来ない場合には運動量空間の自由度を減らすことになる。運動量空間の次元を落とすには、輻射強度を運動量空間で積分すればよい。そこで以下のように放射強度を (運動量空間の) 立体角で積分した量を定義する:

$$E_{r\nu}(t, x^k, \nu) = \frac{1}{c} \int d\Omega I_\nu, \quad (3.1.2)$$

$$F_{r\nu}^i(t, x^k, \nu) = \int d\Omega I_\nu l^i, \quad (3.1.3)$$

$$P_{r\nu}^{ij}(t, x^k, \nu) = \frac{1}{c} \int d\Omega I_\nu l^i l^j. \quad (3.1.4)$$

上から順に単位振動数あたりの輻射エネルギー密度、輻射フラックス、輻射ストレスで、それぞれ0, 1, 2次モーメントとも呼ばれる。この様に l^i をかけて立体角で積分することをモーメントをとると言う。原理的にはより高次のモーメントを取る事も出来るが、ここでは2次までにしておく。輻射ストレスは l^i, l^j について明らかに対称なので、独立な成分は6つであることに注意する。

この時点で独立変数は7つから5つまで減った。さらに式 (3.1.2)-(3.1.4) を振動数で積分する。

$$E_r(t, x^k) = \int d\nu E_r = \frac{1}{c} \int d\Omega d\nu I_\nu, \quad (3.1.5)$$

$$F_r^i(t, x^k) = \int d\nu F_r^i = \int d\Omega d\nu I_\nu l^i, \quad (3.1.6)$$

$$P_r^{ij}(t, x^k) = \int d\nu P_r^{ij} = \frac{1}{c} \int d\Omega d\nu I_\nu l^i l^j. \quad (3.1.7)$$

それぞれ輻射エネルギー密度、輻射フラックス、輻射ストレスと呼ぶ。これらのモーメントの独立変数は時間と空間のみであり、ガスを記述する物理量 (密度や圧力等) と同様に N^3 程度のメモリ量で計算

¹光の経路が曲がるような一般相対論果を考える際にはこの式は正しくないが、ここではそのような状況は考えない事にする。

²実はこれは利点だったりもする。定常を仮定すると問題は境界値問題になるため、大規模な行列反転が必要になる。これは数値計算上、並列化の観点から好ましくない。時間微分を残すと、適切なクーラン条件の下に初期値問題を解くことになるため、比較的並列化が容易となる。また、そもそも時間微分を落とした所でメモリの節約にはならない。それどころか超並列が難しくなるため、大規模計算を行うためにはノードあたりのメモリサイズが大きくないといけないという制限までかかってくる。

することができる。つまり、モーメント量を扱う事によって光のエネルギースペクトルは犠牲になるが、空間構造が複雑な系でも輻射とガスの力学進化を同時に (無矛盾に) 追うことが出来るのである。

では次にこれらモーメントが満たすべき方程式を輻射輸送方程式 (3.1.1) から導出する。輻射エネルギー密度の発展方程式は式 (3.1.1) を運動量空間 (立体角+振動数) で積分すれば得られる。同様に輻射フラックスの発展方程式は式 (3.1.1) に l^i をかけて運動量空間で積分すればよい。その結果得られる式は以下のようなになる³

$$\frac{\partial E_r}{\partial t} + \frac{\partial F_r^j}{\partial x^j} = \rho\gamma\kappa_0(4\pi B - cE_{r0}) - \rho\gamma(\kappa_0 + \sigma_0)(\beta_j F_{r0}^j), \quad (3.1.8)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial F_r^i}{\partial t} + \frac{\partial P_r^{ij}}{\partial x^j} = \rho\gamma\kappa_0 \frac{\beta^i}{c} (4\pi B - cE_{r0}) - \rho(\kappa_0 + \sigma_0) \frac{\gamma^2 (\beta_j F_{r0}^j)}{(\gamma + 1)c} \beta^i - \rho(\kappa_0 + \sigma_0) \frac{F_{r0}^i}{c}. \quad (3.1.9)$$

ここで $\beta^i = v^i/c$ は光速で規格化された流体のバルク速度であり、 $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ はローレンツ因子である。式 (3.1.8)-(3.1.9) の右辺に $(\beta_i F_r^i)$ のような項があるがこれは縮約を取っている $(\beta_i F_r^i = \sum_{i=1}^3 \beta_i F_r^i)$ 。下付添字の '0' は特に明示しない限り共動座標系で見た物理量を表し、添字の無いものは観測者系で見た物理量を表す。ガス密度 ρ については添字 '0' は付いていないが、共動座標系で見た固有密度を表す (同様にガス圧やガス温度も慣習的に添字 '0' をつけないで共動座標系の物理量を表す)。

ここで式 (3.1.8)-(3.1.9) を得る際に以下の関係式を用いて η_0 を消した:

$$\eta_0 = \kappa_0 B, \quad (3.1.10)$$

B は黒体輻射強度で Stefan-Boltzmann 係数 σ_{SB} を用いて

$$B = \frac{\sigma_{SB} T_g^4}{\pi}, \quad (3.1.11)$$

と表される。 T_g はガス温度である。式 (3.1.10) は Kirchhoff-Planck 関係式と呼ばれ、局所熱力学平衡 (Local Thermodynamic Equilibrium) にある場合には正しい。しかし、熱力学的平衡が成り立つかどうかは自明ではなく、光学的に薄い状況では LTE が成り立ちにくい。非局所熱力学平衡の物理を正しく理解するためには式 (3.1.1) に戻らなければならない。

式 (3.1.8) を見ると、左辺は輻射エネルギー密度の時間微分と輻射フラックスの空間微分が含まれており、これは輻射エネルギーがフラックスによって運ばれていることを示している。一方、右辺の第 1 項はガスが放射することによって輻射エネルギーが増える項、第 2 項は輻射がガスと吸収や放射を通してエネルギーをやり取りする効果を表している。第 3 項は輻射フラックスに比例しており、これは輻射がガスに仕事をすることによってエネルギーが増減する効果を表している。この様にモーメントを取って輻射場の運動量空間の情報を減らしたにも関わらず、輻射輸送方程式と同様の性質をきちんと持っている事がわかる。

ところで式 (3.1.8)-(3.1.9) をよく見てみると、左辺の物理量は観測者系、右辺の物理量は共動座標系で定義されていることがわかる。左辺については、通常我々は自分たちが見ている系で定義された時間軸と座標軸で物理を調べたいので、それに対応して輻射エネルギー密度とフラックスも観測者系で表す。

³ここで式 (3.1.8)-(3.1.9) の吸収係数と散乱係数の添字 ν が消えていることに注意する。通常 $\kappa_{0\nu}$ や $\sigma_{0\nu}$ は振動数や散乱角に依存するため、式 (3.1.1) を運動量空間で積分する際に $\int d\nu d\Omega (\kappa_{0\nu} + \sigma_{0\nu}) I_\nu$ の扱いが問題になる。式 (3.1.8)-(3.1.9) を導く際には散乱に対して振動数が変化しないという仮定をしたり、吸収・散乱係数について振動数空間である種の平均操作 (Rossland mean) を行っている。詳しくは (8) 等、参考文献を参照してほしい。

一方、吸収や散乱といった輻射とガスの相互作用は局所的な (粒子スケールの) 現象であるため、バルク速度を除いた共動座標系で表現した方が式は見通しが良くなる。

これら観測者系と共動座標系の物理量はそれぞれローレンツ変換で結ばれる。具体的には E_r, F_r^i, P_r^{ij} からなる輻射場のエネルギー運動量テンソル $T_r^{\mu\nu}$ をローレンツ変換マトリックス Λ_ν^μ を用いて変換する:

$$T_r^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} E_r & F_r^i/c \\ T F_r^i/c & P_r^{ij} \end{pmatrix}, \quad (3.1.12)$$

$$T_{r0}^{\mu\nu} = \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu T_r^{\alpha\beta}, \quad (3.1.13)$$

$$\Lambda_\nu^\mu(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \delta + (\gamma-1)\beta^{-2}\beta\beta \end{pmatrix}, \quad (3.1.14)$$

ここで δ はクロネッカーデルタである。この変換則を用いると E_r, F_r^i, P_r^{ij} と $E_{r0}, F_{r0}^i, P_{r0}^{ij}$ の間に以下の関係が得られる。

$$E_{r0} = \gamma^2 E_r - 2\gamma \frac{u_k F_r^k}{c^2} + \frac{u_j u_k P_r^{jk}}{c^2}, \quad (3.1.15)$$

$$F_{r0}^i = \gamma \left\{ F_r^i + \left[\frac{2\gamma+1}{\gamma+1} \frac{u_j F_r^j}{c^2} - \gamma E_r - \frac{u_j u_k P_r^{jk}}{(\gamma+1)c^2} \right] v^i - v_k P_r^{ik} \right\}, \quad (3.1.16)$$

$$P_{r0}^{ij} = P_r^{ij} + \frac{u^i u_k P_r^{jk} + u^j u_k P_r^{ik}}{(\gamma+1)c^2} + \frac{u^i u^j u_k u_l P_r^{kl}}{(\gamma+1)^2 c^4} \\ + \frac{u^i u^j}{c^2} E_r - \frac{u^i F_r^j + u^j F_r^i}{c^2} - \frac{2u^i u^j u_k F_r^k}{(\gamma+1)c^4}. \quad (3.1.17)$$

ここで $u^\mu = (\gamma c, \gamma v^i)$ は4元速度である。

式 (3.1.15)-(3.1.17) を式 (3.1.8)-(3.1.9) に代入すると、観測者系で定義された輻射場で表されたモーメント方程式が得られる:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_r}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial F_r^j}{\partial x^j} = -G^0, \quad (3.1.18)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial F_r^i}{\partial t} + \frac{\partial P_r^{ij}}{\partial x^j} = -G^i, \quad (3.1.19)$$

$$-G^0 = \frac{\rho\gamma\kappa_0}{c} (4\pi B - cE_r + \beta_j F_r^j) + \frac{\rho\gamma\sigma_0}{c} \left[\frac{u^2 E_r}{c} + \frac{u_j u_k P_r^{jk}}{c} - (2\gamma^2 - 1) \beta_j F_r^j \right], \quad (3.1.20)$$

$$-G^i = \frac{\rho\gamma\kappa_0}{c} (4\pi B \beta^i - F_r^i + v_k P_r^{ik}) \\ - \frac{\rho\gamma\sigma_0}{c} \left[F_r^i - \gamma E_r u^i - v_k P_r^{ik} + v^i \left(\frac{2\gamma u_k F_r^k}{c^2} - \frac{u_j u_k P_r^{jk}}{c^2} \right) \right]. \quad (3.1.21)$$

G^μ は輻射4元力密度とよばれる。式 (3.1.18)-(3.1.19) は輻射のエネルギー運動量テンソルを用いて $T_{r,\nu}^{\mu\nu} = -G^\mu$ とも書ける。

式 (3.1.18) と (3.1.19) を見ると輻射場は観測者系で定義されているが、吸収係数 κ_0 と散乱係数 σ_0 は共動座標系で定義されている。吸収・散乱係数は粒子-光子相互作用で決まる量であり、通常は共動座標

系(バルク速度=0)で調べられている。そのため、これらは共動座標系で定義しておく方が便利である。このような系を混合座標系 (mixed frame) と呼ぶ。

式 (3.1.8)、(3.1.9) に比べると、式 (3.1.18)-(3.1.21) はかなり複雑である。本質的には同じ式なのでこれらの方程式を解いてもよく、実際、式 (3.1.8)-(3.1.9) を解く方法も提案されている (2)。しかし、実は数値計算を行う上では、(3.1.18)-(3.1.21) のように輻射場のモーメント量の座標系をそろえた方が都合がよいことが §3.3 でわかる。そこで、ここでは後者の混合座標系で解くことにする。

3.1.2 輻射場の状態方程式 ~ クロージャー関係式~

§ 3.1.1 では輻射輸送方程式から始めて 0,1 次モーメントの式を導出した。輻射エネルギー密度 E_r は式 (3.1.18) に従って輻射フラックス F_r^i によって移流される。その輻射フラックスは式 (3.1.19) に従って輻射ストレス P_r^{ij} によって運ばれる。では輻射ストレスはどのように決まるのか。実はこの輻射ストレスを決める指導原理はない。この原因は輻射輸送方程式に対してモーメントを取ったために、情報が減ってしまったことに由来する。輻射輸送方程式に 2 次のモーメントを取れば P_r^{ij} の発展方程式を導出する事は出来るが、その場合は 3 次のモーメントが必要になり、幾ら高次のモーメントを取っても永遠に方程式が閉じることはない。この問題を解決する方法は P_r^{ij} が E_r と F_r^i の関数であると仮定して、その関係式を手で与える事である。これはクロージャー関係式と呼ばれており、輻射場の状態方程式を与える。例えば流体の場合はクロージャー関係式として等方圧力とポリトロピック関係 $p_g^{ij} = \delta^{ij} p_g(\rho)$ を仮定する事がある。輻射場の場合、一般には

$$P_r^{ij} = D^{ij}(E_r, F_r^k)E_r, \quad (3.1.22)$$

と書ける。 D^{ij} はエディントンテンソル⁴と呼ばれる無次元量で D^{ij} を手で与える事によって方程式を閉じさせる。

最も単純な状態方程式はエディントン近似と呼ばれる近似である。光学的に厚い場合、輻射はガスとよく相互作用するため、輻射場は等方的になる。従ってエディントンテンソルは

$$D_0^{ij} = \frac{\delta^{ij}}{3}, \quad (3.1.23)$$

と書ける。これは massless 粒子 (相対論的粒子) のポリトロピック関係と同じ状態方程式になる。

重なる注意点として、エディントン近似を用いた場合、光は等方的に伝わるために波面の速度は $c/\sqrt{3}$ となり、光速で伝わらない。これは、式 (3.1.23) で与えられるクロージャー関係式が、相対論的流体の状態方程式と同等であり、相対論的流体の音速が $c/\sqrt{3}$ となることから理解できる。この遅い光の伝播は後で数値計算結果でも紹介する。

式 (3.1.23) の D^{ij} を見ると、添字 '0' が付いている。光学的に厚い場合、輻射場が等方的に見えるのは共動座標系だけで成り立つ話であり、流体が動いていれば光は流体とともに動いて見えるはずである。従って一般の観測者系で輻射ストレスを $P_r^{ij} = \delta^{ij} E_r/3$ とするのは間違いである。実際には $P_{r0}^{ij} = \delta^{ij} E_{r0}/3$

⁴正確には相対論の範囲でテンソルではないことは 3×3 行列であることから明らかである。 P_r^{ij} も輻射のストレステンソルとしばしば呼ばれるが、相対論的な意味でテンソルではないため、この章では輻射ストレスと呼ぶ事にする。

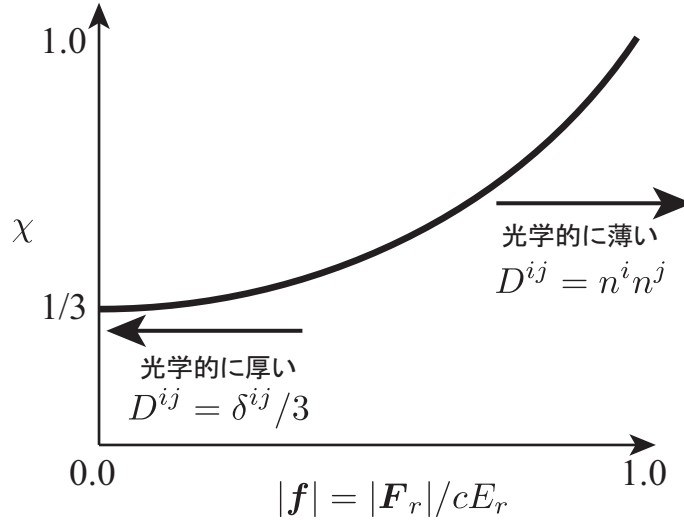


図 3.1: M-1 クロージャーにおける $|f|$ と χ の関係。 f が小さい (大きい) とき、光学的に厚い (薄い) 状況のクロージャーに漸近するようになっている。

が成り立つので、これをローレンツ変換して P_r^{ij} を得る。実際にローレンツ変換を行うと

$$\begin{aligned} P_r^{ij} &+ \left[-\frac{\delta^{ij}}{3} \frac{u_k u_l}{c^2} + \frac{u^i u^j u_k u_l}{(1+\gamma)^2 c^4} \right] P_r^{kl} + \frac{u^i u_k P_r^{jk} + u^j u_k P_r^{ik}}{(\gamma+1)c^2} \\ &= \frac{\delta^{ij}}{3} \gamma^2 \left(E_r - 2 \frac{\beta_j F_r^j}{c} \right) - \frac{u^i u^j E_r}{c^2} + \frac{u^i F_r^j + u^j F_r^i}{c^2} + \frac{2u^i u^j u_k F_r^k}{(\gamma+1)c^4}, \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

という非常に複雑な式になる。 E_r, F_r^j, u^i を与えて P_r^{ij} を得るためには、 P_r^{ij} は6つの独立変数を持っているため、 6×6 の線形方程式を解く必要がある。高々 $6^3 = 216$ 回の演算ではあるが、全グリッドで行う必要があるので、意外とこの計算量は馬鹿にならない。数値計算を行う場合には LU 分解などを用いて行列反転を行い、 P_r^{ij} を計算する (13)。

もし流体がそれほど速く動いていないのであれば、式 (3.1.24) を (v/c) の2次以上のオーダーを無視することで

$$P_r^{ij} = \frac{\delta^{ij}}{3} E_r + \frac{\beta^i F_r^j + \beta^j F_r^i}{c} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \frac{\beta_k F_r^k}{c}, \quad (3.1.25)$$

が得られる。この場合は面倒な線形方程式を解く必要がなく、すぐさま P_r^{ij} を得る事が出来る。

エディントン近似は輻射場が等方的であることを仮定していた。これは光学的に厚い場合には正しい。しかし、光学的に薄い状況ではこの仮定は破綻する。光学的に薄い場合、光は指向性を持って真っ直ぐに進むが、エディントン近似を用いると光は等方的に伝わってしまう。この事はエディントンテンソルが相対論的流体と同じ状態方程式に帰着することからも理解できる。また、先に述べたようにエディントンテンソルを用いると光の波面は光速よりもゆっくりと $(c/\sqrt{3})$ 伝わってしまうという問題もあった。

これらの問題を解決するために、ここでは M-1 クロージャーと呼ばれる方法を紹介する (Levermore '84)。具体的にはエディントンテンソルは以下の式で与えられる：

$$D^{ij} = \frac{3(1-\chi)}{2} \frac{\delta^{ij}}{3} + \frac{3\chi-1}{2} n^i n^j, \quad (3.1.26)$$

$$\chi = \frac{3+4|\mathbf{f}|^2}{5+2\sqrt{4-3|\mathbf{f}|^2}}, \quad (3.1.27)$$

$$n^i = \frac{F_r^i}{|\mathbf{F}_r|}, \quad (3.1.28)$$

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{F}_r}{cE_r}. \quad (3.1.29)$$

エディントンテンソル (3.1.26) を見ると、右辺第1項の $\delta^{ij}/3$ に比例する項は等方圧力に対応する (光学的に厚い) 成分を表し、第2項は指向性をもつ、光の動圧に対応する (光学的に薄い) 成分を表している。 D^{ij} はそれらの重ね合わせで表されており、その混ざり具合は χ 、すなわち $f = |\mathbf{f}| = |\mathbf{F}_r|/cE_r$ によって決められている。

例えば光学的に厚くてフラックスが0の時、 $f = 0$ より $D^{ij} = \delta^{ij}/3$ が得られる。一方、光学的に薄く、 $F_r = cE_r$ の時は $|\mathbf{f}| = 1$ より $D^{ij} = n^i n^j$ となり、動圧がストレスを決める事がわかる (図 3.1 参照)。波面の速度は $f = 0$ ならば $c/\sqrt{3}$ 、 $f = 1$ であれば c で伝わる事はすぐに確かめられる。このように M-1 クロージャーは光学的に薄い状況と厚い状況の両極限をうまく再現できるようになっており、その間は適当な関数 χ が繋いでいる。

E_r, F_r^i が与えられると、輻射ストレスは式 (3.1.26) を用いて $P_r^{ij} = D^{ij}(E_r, F_r^i)E_r$ で計算できる。ここで E_r, F_r^i, P_r^{ij} に添字 '0' を付けなかった事に注意する。これは M-1 クロージャーが観測者系でも使える事を示している。なぜ観測者系でも使えるのかというのは、 χ の関数形に秘密がある。 E_r, F_r^i, P_r^{ij} から作られるエネルギー運動量テンソルが共変になるように χ の形が決められている。エディントン近似を用いる場合はローレンツ変換して観測者系のエディントンテンソル (3.1.24) を導出し、 6×6 の線形方程式を解いて P_r^{ij} を導出する必要がある。しかし、M-1 クロージャーでは元々クロージャーが共変のためにローレンツ変換を行う必要は無く、 E_r と F_r^i からすぐさま P_r^{ij} を得ることが出来る。この様に M-1 は様々な面でエディントン近似よりも優れているため、数値計算では M-1 クロージャーを用いることをお勧めする (14)⁵。

最後に、モーメント方程式+クロージャー関係で輻射場を記述する事は近似であり、必ずしも正しくない事に注意しておく。このような近似は流体でも行うが、流体はガス同士が衝突し、自分自身で緩和することが出来る。従って衝突系プラズマではモーメント法 (流体近似) はよい近似となる。しかし、光は (量子効果をのぞけば) 光同士で衝突する事はないので、緩和する機構がない。従ってモーメントをとることや、クロージャーを与えて方程式を閉じさせることにどれほどの意味があるのかは不明瞭である。また、式 (3.1.10) を用いることや、吸収、散乱係数の振動数依存性について平均操作することも近似であるため、近い将来、輻射輸送方程式を解いて、モーメント法で得られた結果と比較する事が必要である。

3.2 相対論的輻射流体方程式

ここでは相対論的輻射流体力学方程式を紹介する。磁場を入れたり、さらに電気抵抗を入れる方法ここでは紹介しないが、その方法は非常に単純なので、余力のある方は各自でチャレンジしてほしい。

⁵ただし、M-1 クロージャーをそのまま一般相対論にまで拡張するには注意が必要である (12)。

基礎方程式は
連続の式

$$(\rho u^\nu)_{,\nu} = 0, \quad (3.2.1)$$

全エネルギー-運動量保存

$$(T_r^{\mu\nu} + T_h^{\mu\nu})_{,\nu} = 0, \quad (3.2.2)$$

輻射のモーメント方程式

$$T_{r,\nu}^{\mu\nu} = -G^\mu, \quad (3.2.3)$$

となる。ここで下付きの $_{,\nu}$ は微分を表している(以下、 ν は振動数ではなく4元の添字を表す)。一般には共変微分を考えるが今は特殊相対論の範囲を扱っているので普通の微分である。 $T_h^{\mu\nu}$ は流体のエネルギー-運動量テンソルで

$$T_h^{\mu\nu} = \rho h u^\mu u^\nu + p_g g^{\mu\nu}, \quad (3.2.4)$$

である。 p_g はガス圧で比エンタルピー h は比熱比 Γ を用いて

$$h = 1 + \frac{e}{\rho c^2} + \frac{p_g}{\rho c^2} = 1 + \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} \frac{p_g}{\rho c^2}, \quad (3.2.5)$$

と表される。ただし e は内部エネルギー密度で $p_g = (\Gamma - 1)e$ を仮定した。式(3.2.2)から(3.2.3)を引くと

$$T_{h,\nu}^{\mu\nu} = G^\mu, \quad (3.2.6)$$

が得られる。この式から G^μ が4元力密度と呼ばれる理由がわかると思う。

数値計算では式(3.2.1)-(3.2.3)の流体5本+輻射4本+流体の状態方程式+輻射のクロージャー関係式を同時に解けばよい。しかし、解析に便利のため、流体の運動方程式も導出しておく。まず[式(3.2.6)の空間成分] - [$hu^i \times$ 式(3.2.1)]を計算するとすぐに以下の式が得られる

$$\rho\gamma \frac{D(hu^i)}{Dt} = -\nabla p_g + G^i. \quad (3.2.7)$$

これが相対論的輻射流体の運動方程式である。流体に働く力は圧力勾配力と輻射力である。左辺を見ると非相対論的な場合に比べて γ や h の余計なファクターが入っている。これは相対論的な補正である。流体速度が光速に近い場合や、温度 $k_B T_g$ がイオンの静止質量エネルギー $m_p c^2$ 程度になると実効的に慣性が増える事を示している。

式(3.2.7)が運動方程式を表している事は間違いないが、左辺の時間微分に h が入っているのはなんとも気持ちが悪い。非相対論的なEuler方程式と対応づけるためにも速度の時間微分の形で表したくなるだろう。その場合には式(3.2.6)の空間成分から時間成分に β^i を掛けたものを引いて(結構頑張った)整理すると以下の形の運動方程式が得られる。

$$\rho h \gamma^2 \frac{Dv^i}{Dt} = -\partial^i p_g - \frac{\beta^i}{c} \frac{\partial p_g}{\partial t} + \rho(\kappa_0 + \sigma_0) \left[\gamma \frac{F_r^i}{c} - \frac{E_r u^i + u_j P_r^{ij}}{c} + \frac{u^i u_j F_r^j}{\gamma c^3} \right]. \quad (3.2.8)$$

左辺は速度の時間微分にガスの慣性 $\rho h \gamma^2$ を掛けたもので表されており、非相対論的な運動方程式と対応している。一方、右辺は圧力勾配力に加えて第二項にガス圧の時間微分が入っている。この項はガス圧

が下がると加速されることを示している。相対論的な場合、熱エネルギーが慣性として働くことは先に述べたが、断熱膨張等によってガス圧（熱エネルギー）が下がると慣性も下がるため、ガスはさらに加速されやすくなる、という効果を表している。[]内の第一項目は輻射とガスの間の運動量交換を表す項である。第二項は速度と輻射エネルギー密度に比例して負の力が働いている。これは輻射抵抗と呼ばれる項で、輻射場中をガスが走ると抵抗を受けて減速することを示している。この項は v^i/c の1次のオーダーであり、相対論的（速度が光速に近いか、輻射エネルギー密度がガスエネルギー密度に比べて大きい）になって初めて現れる効果である。

3.3 輻射モーメント方程式の数値解法

前章までで、輻射モーメント方程式 (3.1.18), (3.1.19) とクロージャー関係 (3.1.22) を導入し、さらに流体と合わせた相対論的輻射流体方程式 (3.2.1)-(3.2.3) を導入した。この章ではこれらの方程式の数値解法を紹介する。ただし、流体の数値解法はよく知られているため（例えば数値天文学マニュアル 5 章）、ここでは輻射場の数値解法のみ主題をおく。

3.3.1 離散化

多次元への拡張は容易なため、以下では1次元 x 方向のみを考える。方程式を抽象的に書くと1次元輻射流体方程式は

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}^x}{\partial x} = \mathcal{S}. \quad (3.3.1)$$

となる。ここで

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_D \\ \mathcal{U}_{mx} \\ \mathcal{U}_{my} \\ \mathcal{U}_{mz} \\ \mathcal{U}_E \\ \mathcal{U}_{Er} \\ \mathcal{U}_{Fx} \\ \mathcal{U}_{Fy} \\ \mathcal{U}_{Fz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\gamma \\ \rho hc^2 \gamma u^x + F_r^x \\ \rho hc^2 \gamma u^y + F_r^y \\ \rho hc^2 \gamma u^z + F_r^z \\ \rho hc^2 \gamma^2 - p_g + E_r \\ E_r \\ F_r^x \\ F_r^y \\ F_r^z \end{pmatrix}, \quad (3.3.2)$$

$$\mathcal{F}^x = \begin{pmatrix} \rho u^x \\ \rho hc^2 (u^x)^2 + c^2 p_g + c^2 P_r^{xx} \\ \rho hc^2 u^y u^x + c^2 P_r^{yx} \\ \rho hc^2 u^z u^x + c^2 P_r^{zx} \\ \rho hc^2 \gamma u^x + F^x \\ F_r^x \\ c^2 P_r^{xx} \\ c^2 P_r^{yx} \\ c^2 P_r^{zx} \end{pmatrix}, \quad (3.3.3)$$

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ S_E \\ S_F^x \\ S_F^y \\ S_F^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -cG^0 \\ -c^2G^x \\ -c^2G^y \\ -c^2G^z \end{pmatrix}. \quad (3.3.4)$$

上から順に保存量 (\mathcal{U})、フラックス (\mathcal{F}^x 、輻射フラックスではない)、ソース項 (\mathcal{S}) を表している。基本量 \mathcal{P} は

$${}^T\mathcal{P} = (\rho, u^x, u^y, u^z, p_g, E_r, F_r^x, F_r^y, F_r^z), \quad (3.3.5)$$

となる。よく見ると、輻射場については基本量と保存量が同じになっていることがわかる。これは式 (3.1.8)-(3.1.9) を解くのではなく、ローレンツ変換して式 (3.1.18)-(3.1.19) に変形する事によって、輻射場の物理量を全て観測者系に揃えたためである。従って後で見るように輻射場については保存量から基本量へ戻す操作が必要ない⁶。

式 (3.3.1) を時間、空間で差分化すると

$$\mathcal{U}_i^{n+1} = \mathcal{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n) + \mathcal{S}_i^n \Delta t, \quad (3.3.6)$$

が得られる。上付添字は時間ステップ $t = n\Delta t$ 、下付添字はメッシュ番号 $x_i = i\Delta x$ (Δx はグリッドサイズ) を表している。 f は後で述べる数値フラックスを表す。

3.3.2 数値解法

式 (3.3.6) を解く手順を以下に示す。

1. セル中心のソース項を計算する: $\mathcal{P}_i^n \rightarrow \mathcal{S}_i^n$
2. セル中心 i で定義された基本量をセル境界 $i \pm 1/2$ に補間し、左状態 ($s = L$) と右状態 ($s = R$) の基本量を得る: $\mathcal{P}_i \rightarrow \mathcal{P}_{i \pm 1/2, s}$
3. セル境界で定義された基本量から数値フラックスを計算: $\mathcal{P}_{i \pm 1/2, s} \rightarrow f_{i \pm 1/2}$
4. 得られた数値フラックスとソース項を用いて式 (3.3.6) を積分する: $\mathcal{S}_i^n, f_{i \pm 1/2}^n \rightarrow \mathcal{U}_i^{n+1}$
5. 保存量から基本量へ変換する: $\mathcal{U}_i^{n+1} \rightarrow \mathcal{P}_i^{n+1}$

ステップ 1 は単純に式 (3.1.20)-(3.1.21) を用いて輻射 4 元力密度を計算すればよいので、難しい事はない。

⁶座標系をそろえない方法も提案されている (2) が、この場合は基本量と保存量の変換が必要になったり、後で述べる陰解法が難しくなるという問題が出てくる

ステップ 2 は流体によく用いられる reconstruction の方法を用いる。左状態と右状態の基本量は以下の式で与えられる。

$$\mathcal{P}_{i+1/2,L} = \mathcal{P}_i + \frac{\Delta\mathcal{P}}{2}, \quad (3.3.7)$$

$$\mathcal{P}_{i+1/2,R} = \mathcal{P}_{i+1} - \frac{\Delta\mathcal{P}}{2}. \quad (3.3.8)$$

$\Delta\mathcal{P}$ は slope limiter と呼ばれており様々な関数形が提案されているが、ここでは vanLeer(17) の方法を紹介する:

$$\Delta\mathcal{P} = \frac{2\max(0, \Delta\mathcal{P}_+, \Delta\mathcal{P}_-)}{\Delta\mathcal{P}_+ + \Delta\mathcal{P}_-}, \quad (3.3.9)$$

ここで $\Delta\mathcal{P}_\pm = \pm(\mathcal{P}_{i\pm 1} - \mathcal{P}_i)$ である。この式からセル境界における基本量が計算できる。

ステップ 3 は数値フラックスの計算方法である。ここでは以下の式を用いて数値フラックスを評価する。

$$f_{i+1/2} = \frac{\lambda_+ \mathcal{F}_{i+1/2,L} - \lambda_- \mathcal{F}_{i+1/2,R} + \lambda_+ \lambda_- (\mathcal{U}_{i+1/2,R} - \mathcal{U}_{i+1/2,L})}{\lambda_+ - \lambda_-}. \quad (3.3.10)$$

ここで、 $\mathcal{U}_{i+1/2,s} = \mathcal{U}(\mathcal{P}_{i+1/2,s})$, $\mathcal{F}_{i+1/2,s} = \mathcal{F}(\mathcal{P}_{i+1/2,s})$ はそれぞれ、ステップ 2 で得られた基本量 $\mathcal{P}_{i+1/2,s}$ から作られる保存量とフラックスである。 λ_+, λ_- はそれぞれ正 (負) の方向に伝搬する最も速い波の特性速度である。式 (3.3.10) を用いて数値フラックスを計算する方法を (4, の頭文字を取って) HLL 法と呼ぶ。波の伝搬速度を計算するには \mathcal{U} と \mathcal{F} からなるヤコビアン行列の固有値を計算すればよい。しかし、この固有値の計算はそれほど簡単ではない (エディントン近似を用いる場合は Farris et al. 2, M-1 クロージャーを用いる場合は González et al. 3 参照)。

光の伝わる速度は最大で光速なので、ここでは固有値を計算せずに $\lambda_\pm = \pm c$ と置く。すると式 (3.3.10) は以下のように書ける:

$$\mathcal{F}_{i+1/2} = \frac{\mathcal{F}_{i+1/2,L} + \mathcal{F}_{i+1/2,R} - c(\mathcal{U}_{i+1/2,R} - \mathcal{U}_{i+1/2,L})}{2}. \quad (3.3.11)$$

式 (3.3.11) で数値フラックスを計算する方法を Lax-Friedrich 法と呼ぶ。本来光速より遅い可能性のある波の速度を光速だと思ってフラックスを計算するため、真面目に固有値を計算する HLL フラックスを用いるよりも数値拡散が大きくなる (3)。しかし、多少の犠牲はあるものの、非常に簡単にフラックスを評価できるのは利点である。

ステップ 4 では得られた \mathcal{S}_i^n と $f_{i\pm 1/2}^n$ を (3.3.6) に代入し、積分すればよい。

ステップ 5 は保存量から基本量への変換である。ここで、輻射場については基本量と保存量が同じであるという利点が生かされる。つまり、9 つの基本量 (3.3.5) の内、 E_r, F_r^i の 4 つは既にわかっている。そこで以下の量を定義する

$$E_h \equiv \mathcal{U}_E - \mathcal{U}_{Er} = \rho hc^2 \gamma^2 - p_g, \quad (3.3.12)$$

$$m^i \equiv \mathcal{U}_{m^i} - \mathcal{U}_{Fx} = \rho hc^2 \gamma u^x, \quad (3.3.13)$$

$$D \equiv \mathcal{U}_D = \rho \gamma. \quad (3.3.14)$$

物理的にはそれぞれ流体のエネルギー密度、運動量密度、観測者系からみたガス密度を表す。 E_h, m^i, D は既知量であるので、5 つの既知量から 5 つの未知量 ρ, u^i, p_g を求めれば良い。これには通常の流体や磁

気流体で用いられる基本量への変換手法を適用することができる。このように輻射場と流体を完全に分離できるのは、式 (3.1.18)-(3.1.19) で輻射場を全て観測者系の物理量に書き下したおかげであり、輻射流体でなく輻射磁気流体や抵抗性輻射磁気流体の場合でも同様に輻射場を分離することができる。相対論的磁気流体における基本量への変換方法については数値天文学マニュアル 6 章を参照してもらえば良い(より洗練された方法も Mignone & Bodo 7 によって提案されている)。

ここでは (18) によって提案された、相対論的流体(または相対論的抵抗性磁気流体や相対論的 2 流体でも使う事ができる)における基本量変換の方法を紹介する。式 (3.3.14) を用いて式 (3.3.12)-(3.3.13) の ρ を消すと

$$E_h = \left(\frac{Dc^2}{\gamma} + \Gamma_1 p_g \right) \gamma^2 - p_g, \quad (3.3.15)$$

$$m^i = \left(\frac{Dc^2}{\gamma} + \Gamma_1 p_g \right) \gamma u^i, \quad (3.3.16)$$

ここで $\Gamma_1 = \Gamma/(\Gamma - 1)$ である。式 (3.3.16) より p_g について解くと

$$p_g = \frac{1}{\Gamma_1} \left(\frac{m}{\gamma u} - \frac{Dc^2}{\gamma} \right), \quad (3.3.17)$$

ここで $m = |\mathbf{m}|$, $u = |\mathbf{u}|$ である。次に (3.3.17) を式 (3.3.15) に代入して整理すると u についての 4 次方程式が得られる:

$$a_4(u/c)^4 + a_3(u/c)^3 + a_2(u/c)^2 + a_1(u/c) + a_0 = 0, \quad (3.3.18)$$

$$a_4 = \Gamma_1^2 (E_h^2 - (mc)^2), \quad (3.3.19)$$

$$a_3 = -2\Gamma_1 m Dc^3, \quad (3.3.20)$$

$$a_2 = \Gamma_1^2 E_h^2 - D^2 c^4 - 2\Gamma_1 (\Gamma_1 - 1) (mc)^2, \quad (3.3.21)$$

$$a_1 = -2(\Gamma_1 - 1) m Dc^3, \quad (3.3.22)$$

$$a_0 = (\Gamma_1 - 1)^2 (mc)^2. \quad (3.3.23)$$

まず、式 (3.3.18) をニュートン法や、Ferrari の公式等を使って解き、 u を求める。すると γ が計算できるので式 (3.3.17), (3.3.14), (3.3.16) より順にそれぞれ p_g, ρ, u^i が求まる。

こうして求まった基本量 \mathcal{P}^{n+1} を用いてステップ 1 に戻れば時間発展させることができる。1-5 ステップを進めた時点で時間を Δt だけ進めると時間 1 次精度の積分になる。時間方向に 2 次精度化するには、式 (3.3.6) を以下のように 2 段階にわけて積分すればよい:

$$\mathcal{U}_i^{n+1/2} = \mathcal{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n \right) + \mathcal{S}_i^n \Delta t, \quad (3.3.24)$$

$$\mathcal{U}_i^{n+1} = \mathcal{U}_i^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f_{i+1/2}^{n+1/2} - f_{i-1/2}^{n+1/2} \right) + \mathcal{S}_i^{n+1/2} \Delta t, \quad (3.3.25)$$

3.3.3 クーラン条件と陰解法への拡張

この節の最後に、タイムステップの大きさ(クーラン条件)について考える。輻射流体方程式は 3 つのタイムスケールを持っている。一つ目は流体が動くタイムスケールで力学的時間と呼ばれる。典型的な

速度 v 、系の大きさを L (Δt を決める時は $L = \Delta x$ と置く) とすると力学的時間は $t_{dyn} = L/v$ と表される。この他に、波が系を横切る時間 t_c がある。波は音波や磁気音波等があるが、ここでは輻射を考えているので、波の速さを光速とおくと $t_c = L/c$ となる。これら 2 つのタイムスケールは、相対論的現象 $v \simeq c$ を考える際には同程度である。

この 2 つのタイムスケールに加えて、光がガスと相互作用するタイムスケールがある。これは吸収と散乱のタイムスケールで決まっており、それぞれ $t_{ab} \simeq 1/(\rho\kappa c)$, $t_{sc} \simeq 1/(\rho\sigma c)$ と表される。陽的解法を用いて安定に数値積分を行うためには、タイムステップの大きさを他のどの物理タイムスケールよりも小さく取る必要がある。従って Δt の満たすべき式は⁷

$$\Delta t = \min(t_{dyn}, t_c, t_{ab}, t_{sc}), \quad (3.3.26)$$

となる。

ところで、吸収のタイムスケールと力学的時間の比をとると

$$\frac{\text{力学的時間}}{\text{吸収にかかる時間}} \simeq \frac{L/c}{1/\rho\kappa c} = \rho\kappa L = \tau. \quad (3.3.27)$$

と書ける。ここで流体速度 $\sim c$ と仮定した。最後の τ は光学的厚みを表す。つまり光学的に厚い状況では、力学的時間に比べて吸収や散乱のタイムスケールが非常に短い。従って、力学的タイムスケールの現象を追いたいと思っても、 Δt の大きさは式 (3.3.26) によって律速されてしまうため、光学的に厚い状況では非常にたくさんのステップ数が必要になってしまう。

この問題を解決するために式 (3.3.6) を以下のように 2 つに分ける方法が提案されている (13; 14):

$$\frac{U_i^* - U_i^n}{\Delta t} + \frac{f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n}{\Delta x} = 0, \quad (3.3.28)$$

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^*}{\Delta t} = S_i^{n+1}. \quad (3.3.29)$$

このように、方程式を移流の項とソース項に分ける方法を operator splitting と呼ぶ。式 (3.3.28) は移流を表すので、この方程式が持つタイムスケールは t_{dyn} と t_c である。式 (3.3.29) はガスと輻射の相互作用を表すので、この式が持つタイムスケールは t_{ab} と t_{sc} である。

ここで式 (3.3.29) の右辺に注目してほしい。ソース項を n ステップでなく $n+1$ ステップ目の値で評価する。このような時間積分方法を陰的時間積分と呼び、 $\Delta t > t_{ab}, t_{sc}$ でも安定に時間積分する事が可能である。ただし、 $n+1$ ステップ目の保存量 U^{n+1} を得るために $n+1$ ステップ目のソース項 S^{n+1} を必要とするため、行列反転やイテレーション等の多少の工夫が必要になり、計算量は増える。しかし、その犠牲を払ったとしても Δt は t_{ab}, t_{sc} に律速されないため、この方法は非常に威力を発揮する。式 (3.3.28)-(3.3.29) のように陽的解法と陰的解法を合わせた時間積分方法を陽陰的解法 (Explicit-Implicit scheme) と呼ぶ。

最後に並列化について述べておく。陽的解法 (3.3.6) を用いる場合、輻射のモーメント方程式は流体方程式と同じ形をしているため、並列化は流体と同じように行えば良い。つまり、計算領域をノード毎の担当箇所に分けて計算し、計算領域の端のデータだけを他のノードと通信すればよい (領域分割)。陽陰的解法 (3.3.28)-(3.3.29) の場合も全く同じである。「陰解法だから並列化は難しい」という先入観を持つ

⁷正しくは $\Delta t < \min(t_{dyn}, t_c, |E_r/S_E|, |F_r^i/S_F^i|)$ を満たす必要がある。

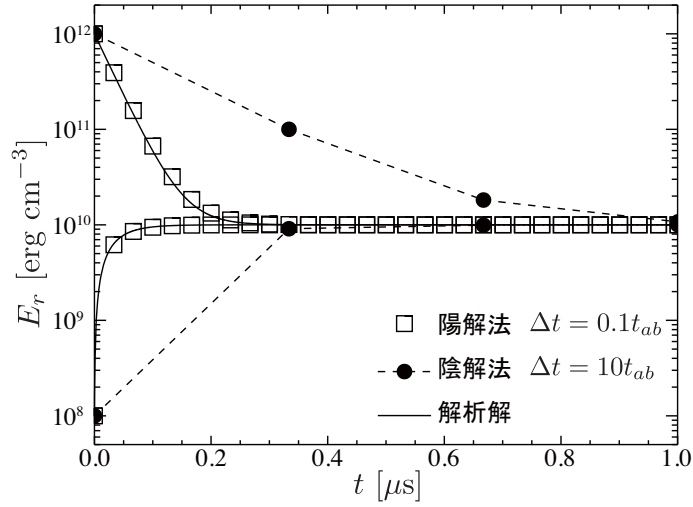


図 3.2: 非熱平衡状態にある輻射が熱平衡へと遷移していく過程を計算した結果。四角は陽解法で解析解(実線)とよく一致していることがわかる。黒丸は陰解法を用いた結果で、この場合にはタイムステップを大きくしても平衡解へと安定に近づくことがわかる。

てしまうかもしれないが、陰的に時間積分するのは式 (3.3.29) のみである。この式は'局部的'にガスと輻射がエネルギーのやり取りをする項であり、他の場所の物理量に影響されない。従って他のノードとのデータ通信は必要ないのである。陽的解法にしても陽陰的解法にしても、モーメント法を用いた相対論的輻射流体の並列化は非常に簡単である。ただし、非相対論輻射流体では $t_c \ll t_{dyn}$ であるため、移流項 (3.3.28) も陰的に積分する必要がある。移流項は当然、他の場所の物理量の影響を受けるため、陰的に積分するためには大規模な行列反転が必要になり、ノード間の並列化は至難である。

3.4 計算例

この章では数値計算例を幾つか紹介する。

3.4.1 熱平衡状態への遷移

最初のテストは (16) によって提案されたテスト問題で、定在した一様なガスと初期に非熱平衡にある輻射が、吸収・再放射過程によって熱平衡状態に遷移していく過程の計算である。ここでは簡単のために流体は解かず、ガス温度は常に一定とした(つまりガスは熱浴とする)。この場合、式 (3.1.18), (3.1.20) より、輻射エネルギー密度は以下の式に従って進化する：

$$E_r(t) = \frac{4\pi}{c}B - \left[\frac{4\pi}{c}B - E_r(t=0) \right] e^{-\rho\kappa_0 ct}. \quad (3.4.1)$$

図 3.2 に数値計算の結果を示す。初期の輻射エネルギー密度は $10^8, 10^{12}$ erg cm $^{-3}$ とした(それぞれ図中の下側と上側)。他の計算パラメータは $\rho = 0.025$ g cm $^{-3}$, $a_R T_g^4 = 10^{10}$ erg cm $^{-3}$, $u^i = 0$, $\Gamma = 5/3$, $\mu = 1$, $\kappa_0 = 0.04$ cm 2 s $^{-1}$, $\sigma_0 = 0$ である。ここで $a_R = 4\sigma_{SB}/c$ は輻射密度定数である。

図からわかるように輻射エネルギーは平衡状態へと遷移していること、さらに解析解 (実線) とよく一致していることがわかる。図中の黒丸は陰的解法を用いて、吸収のタイムスケール $t_{ab} = 1/(\rho\kappa c)$ よりも 10 倍大きなタイムステップを用いた場合の結果である。陽的解法で $\Delta t = 10t_{ab}$ とすると解は振動しすぐに発散してしまうが、陰的解法を用いると大きなタイムステップを用いても解は安定に収束することがわかる。この様に、吸収のタイムスケールより長いタイムスケールの現象を追いたい場合に陰的解法は非常に威力を発揮する。

3.4.2 日陰問題

この問題は (5) によって提案され、(3) によって M-1 クロージャーのテスト問題に応用された。光学的に厚いクランプに向けて光を当てた際、クランプの背面に陰が出来る過程を計算する。2次元 $x = [0, 0.5]$ cm, $y = [-0.5, 1.5]$ cm の箱の中に、初期に一樣なガス ($\rho = \rho_0 = 1$ g cm⁻³, $e = E_{lte} = a_R T_g^4 = 10^{10}$ erg cm⁻³) を置き、輻射は熱平衡状態にあるとする。この一樣なガスに加えて原点から半径 $r = 0.2$ cm に高密度のクランプ ($\rho = 10^4 \rho_0$) を置く。このクランプに向けて境界 $x = -0.5$ cm から光を照射する ($E_{inj} = 10^5 E_{lte}$)。吸収係数は $\kappa_0 = 0.01$ cm² g としたので、一樣なガスに対しては光学的に薄い、クランプに対しては光学的に厚い ($\tau = \rho\kappa(2r) = 40$)、という状況である。境界条件は $x = -0.5$ cm で固定境界、 $y = 0$ で対称境界とし、それ以外は自由境界とした。

図 3.3 は輻射エネルギー密度のカラーコンターで上はエディントン近似、下は M-1 クロージャーを用いた場合の結果であり、左と右はそれぞれ $t = 33.4, 116.8$ ps におけるスナップショットである。まず左の図を見てみると、どちらのクロージャーを用いた場合でもクランプの部分で輻射エネルギー密度が小さくなっていることがわかる。これは吸収によって輻射エネルギーが失われている事を示している。光が吸収されるという振る舞いはどちらのクロージャーを用いても変わらない。しかし光の波面を見てみると、M-1 クロージャーとエディントン近似で大きく異なることがわかる。M-1 クロージャーを用いた場合、光学的に薄いガス中を光は光速で伝わるが、エディントン近似では光は等方的に伝わりと仮定したため、光の進む速度は $c/\sqrt{3}$ となる。このために波面の進む速度に両者で大きな隔たりが出来てしまう。

終状態 (図 3.3 右) を見ると、M-1 クロージャーを用いた場合には、クランプの背面に輻射エネルギー密度が低い「日陰」が再現できていることがわかる。しかしエディントン近似を用いると日陰を再現することは出来ない。これも等方分布を仮定したためである。エディントン近似を用いると日陰と日向で輻射圧勾配が生じるために光はクランプを回り込んで日陰を消してしまう。M-1 クロージャーを用いた場合には両者の間で圧力や応力が働かないため (日向では $D^{xx} = 1$ 、それ以外は $D^{ij} = 0$)、日陰を再現できる。この様に M-1 クロージャーはエディントン近似に比べて、特に光学的に薄い場合に非常によい性質を持つ。

3.4.3 光の伝播と衝突

次に 2次元的な光の伝播を見てみる。2次元計算ボックスのサイズを $x = [-1, 1]$ cm, $y = [-1, 1]$ cm とし、ガスと輻射は初期に熱平衡状態にある。基本的なパラメータは日陰問題と同じである。この状態

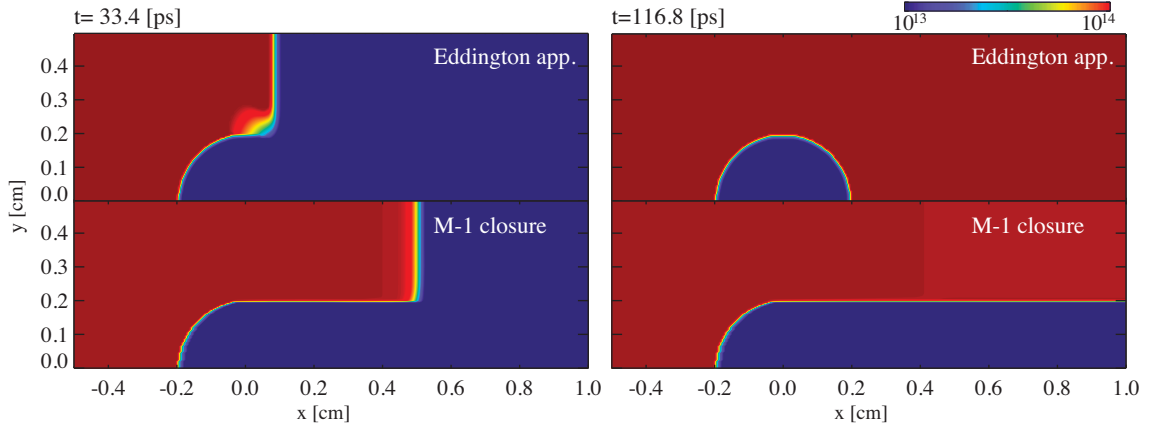


図 3.3: 原点付近にある球形の光学的に厚いクランプに向けて $x = -0.5$ から光りを照らした結果。上はクロージャーにエディントン近似を用いた結果で下は M-1 クロージャーを用いた。左と右はそれぞれ $t = 33.4, 116.8$ ps のスナップショット。

で、境界から 2 つの光線を注入する:

$$(E_r, F_r^x, F_r^y) = \begin{cases} \left(E_{inj}, \frac{cE_{inj}}{\sqrt{2}}, \frac{cE_{inj}}{\sqrt{2}} \right), & \text{for } x \leq -1 \text{ cm and } -0.9 \text{ cm} \leq y \leq -0.8 \text{ cm} \\ \left(E_{inj}, -\frac{cE_{inj}}{\sqrt{2}}, \frac{cE_{inj}}{\sqrt{2}} \right), & \text{for } x \leq 1 \text{ cm and } -0.9 \text{ cm} \leq y \leq -0.8 \text{ cm}. \end{cases} \quad (3.4.2)$$

$x = \pm 1$ cm は固定境界、 $y = \pm 1$ cm は自由境界とした。

図 3.3 に数値計算の結果を示す。カラーは輻射エネルギー密度、矢印は輻射フラックスを輻射エネルギー密度で規格化した量 (f) を示す。

境界から注入された光は光学的に薄いガスの中を真っ直ぐに進む (図 3.4 左)。二つの光線が重なると、通常、光同士は相互作用しないので光はお互いをすり抜けて最終的には X 型の波形になることが期待される。しかし、M-1 クロージャーを用いると図 3.4 右のように光同士が衝突してしまう。

なぜこのような光の衝突が起きてしまうのか。簡単のために流体は静的であるとする。M-1 クロージャーの式 (3.1.26)-(3.1.29) に立ち返ってみる。エディントンテンソルは、光学的に厚い状況を再現する $\delta^{ij}/3$ に比例する成分と、光学的に薄い状況を再現する $n^i n^j$ に比例する成分の重ね合わせで表されており、その割合は χ 、つまり $f = |\mathbf{F}_r|/cE_r$ によって決められていた。光学的に厚い場合は $f = 0$ が期待されるので、この場合はエディントン近似に帰着する。

では逆に「 $f = 0$ ならば光学的に厚い」は成り立つか？物理的にはこれは成り立たない。光学的に薄い状況で二つの光が正面衝突すれば、ネットのフラックスは 0 になるが、光はお互いを通り抜けるはずである。しかし、M-1 クロージャーは $f = 0$ ならば光学的に厚いと盲目的に判断してしまうため、等方的なエディントン近似を採用してしまう。つまり、重要なことは、**M-1 クロージャーにおいてエディントンテンソルは f の値のみで決まっており、光学的厚みには直接は依っていない** という事である。

図 3.4 右ではまさにそのような状況が起きている。式 (3.4.2) によって注入された 2 つの光線が重なった点では $(E_r, F_r^x, F_r^y) = (2E_{inj}, 0, \sqrt{2}cE_{inj})$ となるため、 $f = 1/\sqrt{2} < 1$ となる。対応する χ は 0.61 であるので、エディントンテンソルに等方的な輻射圧成分が 58% も混ざってしまう。その結果、光学的に

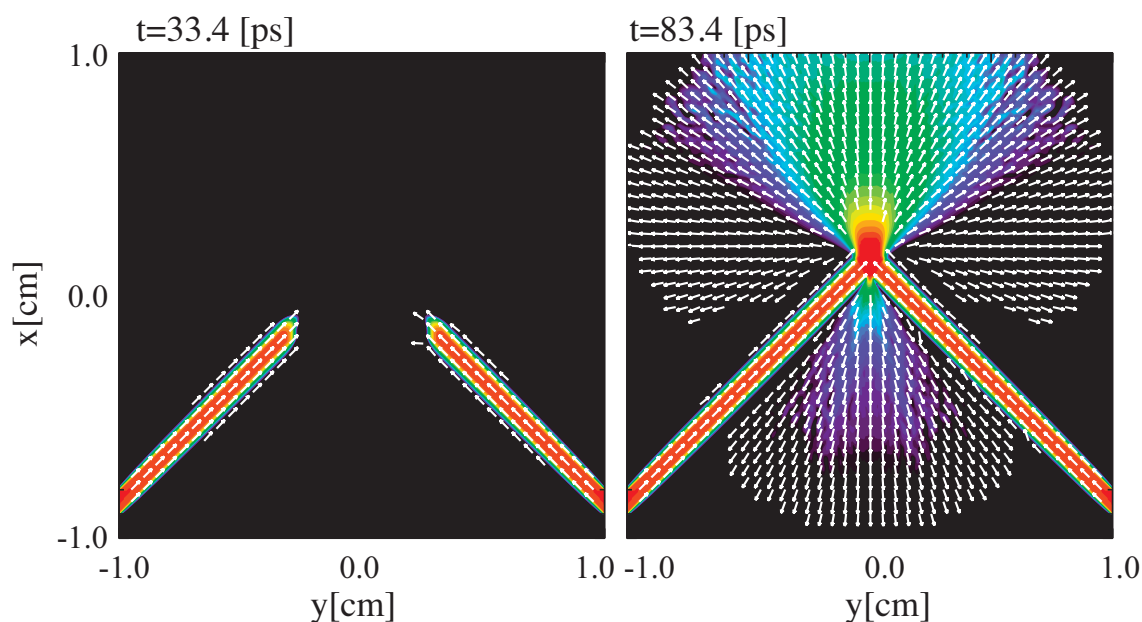


図 3.4: 2本の光線の伝播。カラーは輻射エネルギー密度、矢印は f^i を表す。

薄いガス中にも関わらず、光は(主に y 方向に伝播するにしても)等方的に膨張を始めるため、まるで二つの光線が衝突したように見えるのである。この問題は輻射輸送方程式 (3.1.1) のモーメントを取ってクロージャーで方程式を閉じてしまったことに由来する。この問題を解決するためには、輻射のモーメントを取らずに輻射輸送方程式を解く必要がある。

以上で輻射のモーメント方程式の計算例を見せてきたが、これらは基本的には流体は静的であると仮定している。輻射と流体が強くカップルしているような系では静的という仮定はなりたらず、流体と輻射を同時に解く必要がある。そのような場合でもいくつかのテスト問題が提案されている(たとえば非相対論的輻射流体:(16)、相対論的輻射流体:Farris et al. (2))ので、そちらを参照してほしい。

3.5 まとめ

この章では輻射のモーメント方程式を導出し、相対論的輻射流体方程式の陽的数値解法を紹介した。ここでは単純な相対論的流体を仮定したが、磁気流体や抵抗性磁気流体にする事は簡単である。また、一般相対論化や、粘性や熱伝導といった散逸性流体への拡張、さらに現実的な状態方程式を考慮した、より現実的な流体計算を行うことも現在のスパコンであれば十分に可能である。しかし、いつでも心に留めておかなければいけないのは、輻射場の流体近似(モーメント方程式)は非常に大きな仮定であるということである。非常にたくさんの近似の上に成り立っているモーメント法を正当化するには、輻射輸送方程式を解くことで確かめなければならない。また、モーメント法を正当化するという目的だけでなく、輻射輸送方程式を解くことで、モーメント法では無視していた効果が現れたり、観測とのスペクトルの直接比較が出来るようになる。近い将来実現可能となるであろう輻射輸送方程式を解く数値計算に備えて、輻射輸送方程式を安定に解く数値計算スキームの開発を今から行うべきであろう。

関連図書

- [1] Castor, J. I. 2004, *Radiation Hydrodynamics*, ed. Castor, J. I.
- [2] Farris, B. D., Li, T. K., Liu, Y. T., & Shapiro, S. L. 2008, *Phys. Rev. D*, 78, 024023
- [3] González, M., Audit, E., & Huynh, P. 2007, *A&A*, 464, 429
- [4] Harten, A., Lax, P. D., & van Leer, B. 1983, *SIAM Rev.*, 25, 35
- [5] Hayes, J. C. & Norman, M. L. 2003, *ApJS*, 147, 197
- [6] Kato, S., Fukue, J., & Mineshige, S. 2008, *Black-Hole Accretion Disks — Towards a New Paradigm —*, ed. Kato, S., Fukue, J., & Mineshige, S.
- [7] Mignone, A. & Bodo, G. 2006, *MNRAS*, 368, 1040
- [8] Mihalas, D. & Mihalas, B. W. 1984, *Foundations of radiation hydrodynamics* (New York, Oxford University Press, 1984, 731 p.)
- [9] Park, M.-G. 2006, *MNRAS*, 367, 1739
- [10] Pomraning, G. C. 1973, *The equations of radiation hydrodynamics*, ed. Pomraning, G. C.
- [11] Rybicki, G. B. & Lightman, A. P. 1979, *Radiative processes in astrophysics*, ed. Rybicki, G. B. & Lightman, A. P.
- [12] Shibata, M., Kiuchi, K., Sekiguchi, Y., & Suwa, Y. 2011, *Progress of Theoretical Physics*, 125, 1255
- [13] Takahashi, H. R., Ohsug, K., Sekiguchi, Y., Inoue, T., & Tomida, K. 2011, submitted to *ApJ*
- [14] Takahashi, H. R. & Ohsuga, K. 2012, in prep.
- [15] Takahashi, R. 2008, *MNRAS*, 383, 1155
- [16] Turner, N. J. & Stone, J. M. 2001, *ApJS*, 135, 95
- [17] van Leer, B. 1977, *Journal of Computational Physics*, 23, 263
- [18] Zenitani, S., Hesse, M., & Klimas, A. 2009, *ApJ*, 696, 1385

