

## 第4章 相対論的散逸流体の数値計算法

高本亮 (京都大学)

### 4.1 背景

近年観測機器の発展に伴い様々な高エネルギー天体现象の詳細な描像が得られており、それに伴い相対論的流体近似を用いた理論研究が盛んに行われている。現在の観測は主に電磁波を通じて行われており、観測を説明するためには散逸を考慮して流体のエネルギーを熱エネルギーに変換することが必要である。また大局的な計算では多くの場合計算機資源の問題から乱流や輻射の影響を精度よく考慮することは難しく、それらを散逸として現象論的モデル化を行うことも頻繁に行われている。他方核物理での分野では近年重イオン衝突の際に生成されるクォークグルーオンプラズマ (QGP) が相対論的流体で良く近似出来ることが知られており、近年その粘性の影響が非常に活発に議論されている。このように数値シミュレーションにおける相対論的散逸への興味は非常に大きいですが、相対論的散逸における因果律の問題や計算効率の問題のために近年まで相対論的散逸を考慮した研究が行われることはなかった。本発表では上記の問題が解決された、発表者が新たに開発した相対論的散逸流体の数値計算法について解説する (1)。

### 4.2 基礎方程式

この発表では  $c = 1$  という単位系を用い、Cartesian coordinate での Minkowski 計量テンソル  $\eta_{\mu\nu}$  の符号系として  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  を用いる。またギリシャ文字で表された変数は 0 から 3 までをとり、ローマ文字で表された変数は 1 から 3 までを取る。

また共变的な微分として、共变的時間微分  $\hat{D}$  と共变的空間微分  $\nabla_\alpha$  を以下のように定義する。

$$\hat{D}A^{\mu_1 \dots \mu_n} \equiv u^\beta A_{;\beta}^{\mu_1 \dots \mu_n}, \quad (4.2.1)$$

$$\nabla_\alpha A^{\mu_1 \dots \mu_n} \equiv \gamma_\alpha^\beta A_{;\beta}^{\mu_1 \dots \mu_n}. \quad (4.2.2)$$

ここでテンソル  $\gamma^{\mu\nu}$  は 4 元ベクトル  $u^\mu$  に垂直な超平面への射影テンソルで、次のように定義される。

$$\gamma^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu \quad (4.2.3)$$

### 4.2.1 理想流体

相対論的流体方程式は粒子数、運動量、エネルギーの保存則から次のように与えられる。

$$N^\mu_{;\mu} = 0, \quad (4.2.4)$$

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0, \quad (4.2.5)$$

ここで  $N^\mu$  は粒子数密度流束で、 $T^{\mu\nu}$  はエネルギー運動量テンソルである。完全流体を考える場合、これらのテンソルは次のように表される。

$$N^\mu = nu^\mu, \quad (4.2.6)$$

$$T^{\mu\nu} = \rho hu^\mu u^\nu + p\eta^{\mu\nu}, \quad (4.2.7)$$

ここで  $n$  は粒子数密度を表し、 $p$  は圧力、 $h = 1 + \epsilon + p/\rho$ 、 $\epsilon$  は無次元化されたエンタルピーと内部エネルギーを、 $\rho \equiv mn$  は質量密度を表す。以上の量は全て流体静止系で定義されている。また  $m$  は構成粒子の静止質量で、 $u^\mu$  は流体の4元速度を表しており、次の関係を満たす:  $u^\mu u_\mu = -1$ 。

Cartesian 座標で考える場合、相対論的流体の時間発展方程式は次のように表される。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} D \\ m^i \\ E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x^j} \begin{pmatrix} Dv^j \\ m^i v^j + pI^{ij} \\ m^j \end{pmatrix} = 0, \quad (4.2.8)$$

ここで  $\mathbf{v}$  は流体の3次元速度を、 $D, \mathbf{m}, E$  はそれぞれ実験室系での質量、運動量、エネルギー密度を表しており、 $I^{ij}$  は単位テンソルを表す。実験室系では  $D, \mathbf{m}, E$  は次のように表される。

$$D = \gamma\rho, \quad (4.2.9)$$

$$\mathbf{m} = \rho h\gamma^2 \mathbf{v}, \quad (4.2.10)$$

$$E = \rho h\gamma^2 - p, \quad (4.2.11)$$

ここで  $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$  はロレンツ因子である。上記の形の方程式は相対論的数値流体では一般的に用いられているものである。

### 4.2.2 Causal dissipative fluid

相対論的散逸流体を考える場合、散逸により考える系は一様でも等方でもなくなるため粒子数密度流束ベクトル  $N^\mu$  とエネルギー運動量テンソル  $T^{\mu\nu}$  のテンソル分解は理想流体の場合から変わることになる。また相対論的散逸流体の場合、上記の2つのテンソルから2つの特徴的な方向として  $N^\mu$  と  $T^{0\mu}$  が現れ、流体の4元速度  $u^\mu$  の方向の定義に不定性が現れることになる。つまり流体の4元速度は一般に2つの独立なベクトルである  $N^\mu$  と  $T^{0\mu}$  の線形結合により表される。本発表では非相対論と同様に4元速度  $u^\mu$  の方向を粒子流束ベクトル  $N^\mu$  の方向として定義した Eckart 分解のみを考える。(なおその他の有名な速度の定義としては、4元速度  $u^\mu$  の方向をエネルギー  $T^{0\mu}$  の方向として定義した Landau-Lifshitz 分解などが知られている (2))。

Eckart 分解を考える場合、粒子流束ベクトル  $N^\mu$  とエネルギー運動量テンソル  $T^{\mu\nu}$  は次のように表される。

$$N^\mu = nu^\mu, \quad (4.2.12)$$

$$T^{\mu\nu} = \rho hu^\mu u^\nu + p\eta^{\mu\nu} + q^\mu u^\nu + q^\nu u^\mu + \tau^{\mu\nu}, \quad (4.2.13)$$

ここで  $q^\mu$  は熱伝導ベクトルで  $\tau^{\mu\nu}$  は粘性テンソルである。

式 (4.2.4)、(4.2.5) より、散逸流体の発展方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} D \\ m^i + q^0 u^i + q^i u^0 + \tau^{0i} \\ E + 2q^0 u^0 + \tau^{00} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x^j} \begin{pmatrix} Dv^j \\ m^i v^j + pI^{ij} + q^i u^j + q^j u^i + \tau^{ij} \\ m^j + q^0 u^j + q^j u^0 + \tau^{0j} \end{pmatrix} = 0, \quad (4.2.14)$$

非相対論の場合と違い、これらの式では時間微分されている保存量の部分に散逸項が含まれている。特に heat flux vector は流体の静止系に移ったとしても運動量保存の式 (4.2.14) において保存量として残り続ける。これは相対論の場合はエネルギー流束と運動量流束密度が同一視されることに起因している。ここでもし Navier-Stokes 方程式の散逸量を相対論に拡張した表式を用いた場合、流体方程式は放物型になり、無限大の特性速度を含んでしまうことが知られている。これは散逸変数が自身の平衡状態へ無限小の時間で緩和することに起因し、これにより上記の流体方程式に含まれる散逸の時間微分から非物理的な発散が現れることを示している。さらに Hiscock と Lindblom (3; 4) らにより、相対論的 Navier-Stokes 方程式の線形摂動は 4 元速度の定義によらず必ず指数関数的に増大するモードを含むことが示されている。(なお Landau-Lifshitz 分解だけは流体静止系でのみ安定であることが分かっている)

これらの方程式の安定性と因果律の問題を解決するために、Israel と Stewart は相対論的 Boltzman 方程式から以下のような 2 次の散逸理論を求めた。

$$\hat{D}\Pi = \frac{1}{\tau_\Pi}(\Pi_{NS} - \Pi) - I_\Pi, \quad (4.2.15)$$

$$\hat{D}\pi^{\mu\nu} = \frac{1}{\tau_\pi}(\pi_{NS}^{\mu\nu} - \pi^{\mu\nu}) - I_\pi^{\mu\nu}, \quad (4.2.16)$$

$$\hat{D}q^\mu = \frac{1}{\tau_q}(q_{NS}^\mu - q^\mu) - I_q^\mu, \quad (4.2.17)$$

ここで  $\pi^{\mu\nu}$  と  $\Pi$  は shear viscosity と bulk viscosity と呼ばれる粘性で、それぞれ粘性テンソル  $\tau^{\mu\nu}$  の対称非対角成分と対角成分で定義される。

$$\tau^{\mu\nu} \equiv \Pi\gamma^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu}, \quad (4.2.18)$$

また  $\tau_q$ 、 $\tau_\Pi$ 、 $\tau_\pi$  はそれぞれの散逸量の緩和時間で、 $I$  は散逸量や流体変数の勾配の積で表される 2 次のオーダーの大きさの量である。(この 2 次のオーダーの量は勾配が比較的滑らかな場合が多い宇宙物理での応用では通常無視される)

上記の方程式では散逸量の時間発展、つまり散逸量の緩和現象を考慮に入れていることになっている。Israel と Stewart の求めた散逸流体方程式はこれらの項を考えたことにより方程式は双曲型になり、その結果方程式は安定で因果律を守る。なお緩和時間として適切なパラメータを選ばなかった場合は因果律や安定性は必ずしも守られない。これらの適切なパラメータに関しては Sec 4.4 で議論する。

散逸の Navier-Stokes 項は次のように表される。

$$q_{NS}^\mu = -\kappa\gamma^{\mu\nu} (T_{,\nu} + Tu^\rho u_{\nu,\rho}), \quad (4.2.19)$$

$$\begin{aligned} \tau_{NS}^{\mu\nu} &= \pi_{NS}^{\mu\nu} + \Pi_{NS}\gamma^{\mu\nu} \\ &= -\gamma^{\mu\rho}\gamma^{\nu\sigma} \left[ \eta \left( u_{\rho,\sigma} + u_{\sigma,\rho} - \frac{2}{3}\eta_{\rho\sigma}u^\lambda_{,\lambda} \right) \right] - \zeta u^\lambda_{,\lambda}\gamma^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

ここで  $\kappa$  は熱伝導係数、 $\eta$  は shear viscosity 係数、そして  $\zeta$  は bulk viscosity 係数を表し、添字  $NS$  は “Navier-Stokes” 項であることを意味している。もし散逸変数が流体変数に比べて十分小さい場合は、熱伝導の表式 (4.2.19) に  $u^\rho u_{\nu,\rho}$  に理想流体の関係式を代入して次のように書き換えることが出来る。

$$q_{NS}^\mu = -\kappa\gamma^{\mu\nu} \left( T_{,\nu} - \frac{T}{\rho h} p_{,\nu} \right). \quad (4.2.21)$$

本発表では Navier-Stokes の熱伝導ベクトルとしては式 (4.2.21) を用いることにする。

なお熱伝導ベクトル、粘性テンソルは見かけ上それぞれ4成分、10成分になるが、これらには次のような直交関係が成り立つ。

$$\tau^{i0}u_0 = -\tau^{ij}u_j, \quad (4.2.22)$$

$$\tau^{00}u_0 = -\tau^{0j}u_j, \quad (4.2.23)$$

$$q^0u_0 = -q^ju_j. \quad (4.2.24)$$

その結果それぞれ物理的なのは3成分、6成分になる。

式 (4.2.20)、(4.2.21) は共変形式で与えられている。これらの式に対して平坦な時空上の Cartesian 座標を考え、また1次元問題を考えると次のようになる。

$$\begin{aligned} \tau_{NS}^{0x} &= -\gamma^{0\rho}\gamma^{x\sigma} \left[ \eta(\partial_\rho u_\sigma + \partial_\sigma u_\rho) + \left( \zeta - \frac{2}{3}\eta \right) g_{\rho\sigma}\partial_\lambda u^\lambda \right] \\ &= -\left[ \eta \left\{ u^x u^t \partial_t u^t + (-1 + (u^t)^2)\partial_t u^x + (1 + (u^x)^2)\partial_x u^t + u^t u^x \partial_x u^x \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left( \zeta - \frac{2}{3}\eta \right) u^0 u^x \theta \right], \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

$$\begin{aligned} \tau_{NS}^{0\perp} &= -\gamma^{0\rho}\gamma^{\perp\sigma} \left[ \eta(\partial_\rho u_\sigma + \partial_\sigma u_\rho) + \left( \zeta - \frac{2}{3}\eta \right) g_{\rho\sigma}\partial_\lambda u^\lambda \right] \\ &= -\left[ \eta \left\{ u^\perp u^t \partial_t u^t + (-1 + (u^t)^2)\partial_t u^\perp + u^\perp u^x \partial_x u^t + u^t u^x \partial_x u^\perp \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left( \zeta - \frac{2}{3}\eta \right) u^0 u^\perp \theta \right], \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

$$\begin{aligned}
\tau_{NS}^{yz} &= -\gamma^{y\rho}\gamma^{z\sigma} \left[ \eta(\partial_\rho u_\sigma + \partial_\sigma u_\rho) + \left( \zeta - \frac{2}{3}\eta \right) g_{\rho\sigma} \partial_\lambda u^\lambda \right] \\
&= -\left[ \eta \left\{ u^y u^t \partial_t u^z + u^z u^t \partial_t u^y + u^y u^x \partial_x u^z + u^z u^x \partial_x u^y \right\} \right. \\
&\quad \left. + \left( \zeta - \frac{2}{3}\eta \right) u^y u^z \theta \right], \tag{4.2.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{NS}^{x\perp} &= -\gamma^{x\rho}\gamma^{\perp\sigma} \left[ \eta(\partial_\rho u_\sigma + \partial_\sigma u_\rho) + \left( \zeta - \frac{2}{3}\eta \right) g_{\rho\sigma} \partial_\lambda u^\lambda \right] \\
&= -\left[ \eta \left\{ u^\perp u^t \partial_t u^x + u^x u^t \partial_t u^\perp + u^\perp u^x \partial_x u^x + (1 + (u^x)^2) \partial_x u^\perp \right\} \right. \\
&\quad \left. + \left( \zeta - \frac{2}{3}\eta \right) u^x u^\perp \theta \right], \tag{4.2.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{NS}^{xx} &= -\gamma^{x\rho}\gamma^{x\sigma} \left[ \eta(\partial_\rho u_\sigma + \partial_\sigma u_\rho) + \left( \zeta - \frac{2}{3}\eta \right) g_{\rho\sigma} \partial_\lambda u^\lambda \right] \\
&= -\eta \partial_x u^x - \left( \zeta - \frac{2}{3}\eta \right) (1 + (u^x)^2) \theta, \tag{4.2.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{NS}^x &= -\gamma^{x\mu} \kappa \left[ \partial_\mu - \frac{T}{\rho h} \partial_\mu p \right] \\
&= -\kappa \left[ u^x u^t \left( \partial_t T - \frac{T}{\rho h} \partial_t p \right) + (1 + (u^x)^2) \left( \partial_x T - \frac{T}{\rho h} \partial_x p \right) \right], \tag{4.2.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{NS}^\perp &= -\gamma^{\perp\mu} \kappa \left[ \partial_\mu - \frac{T}{\rho h} \partial_\mu p \right] \\
&= -\kappa u^\perp \left[ u^t \left( \partial_t T - \frac{T}{\rho h} \partial_t p \right) + u^x \left( \partial_x T - \frac{T}{\rho h} \partial_x p \right) \right], \tag{4.2.31}
\end{aligned}$$

ここで  $\theta$  は流体の expansion で次のように定義される。

$$\theta \equiv \nabla_\mu u^\mu = \partial_\mu u^\mu + \Gamma_{\alpha\mu}^\mu u^\alpha. \tag{4.2.32}$$

なお上の式では粘性テンソルは shear viscosity と bulk viscosity が混在して扱われている。これは我々が用いる directional split のための対称性を考慮した結果である。unsplit 法を用いて計算する場合は必ずしも上の形式を使う必要はない。

### 4.2.3 緩和時間の表式

Israel-Stewart 理論はいくつかの運動論的係数を含んでいる。つまり散逸係数と緩和時間である。これらは一般には分布関数と粒子同士の散乱断面積に依存している。ここでは流体近似に興味があるため、平衡分布に非常に近い場合についてのみ取り扱う (5; 6)。

この場合、緩和時間の具体的な表式は次のようになる。

$$\tau_\Pi = \frac{\zeta\beta_0}{3}, \quad \tau_q = \kappa T \beta_1, \quad \tau_\pi = 2\eta\beta_2 \tag{4.2.33}$$

常識に含まれる運動論的パラメータは次のように表される。

$$\Gamma/(\Gamma - 1) = \beta^2(1 + 5h/\beta - h^2), \quad (4.2.34)$$

$$\alpha_0 = (\Gamma - 1)\Omega^{**}/\Gamma\Omega p, \quad \alpha_1 = -(\Gamma - 1)\Gamma p, \quad (4.2.35)$$

$$\beta_0 = \frac{3\Omega^*}{h^2\Omega^2 p}, \quad \beta_1 = \left(\frac{\Gamma - 1}{\Gamma}\right)^2 \frac{\beta}{hp} \left(5h^2 - \frac{\Gamma}{\Gamma - 1}\right), \quad (4.2.36)$$

$$\beta_2 = \frac{1 + 6h/\beta}{2h^2 p}, \quad a_1 = -\frac{1 + h\beta(\Gamma - 1)/\Gamma}{h^2 p}, \quad (4.2.37)$$

$$\Omega = 3\Gamma - 5 + 3\Gamma/h\beta, \quad \Omega^* = 5 - 3\Gamma + 3(10 - 7\Gamma)h/\beta, \quad (4.2.38)$$

$$\Omega^{**} = 5 - 3\Gamma + 3\Gamma^2/(\Gamma - 1)h^2\beta^2, \quad (4.2.39)$$

ここで  $\beta = m/T$  で  $h$  はエンタルピーである。

緩和時間の非相対論、相対論的極限での漸近形は次のようになる。

1. 非相対論的極限 ( $\beta \rightarrow \infty$ ,  $\Gamma = 5/3$ )

$$\tau_{\Pi} = \frac{2\zeta\beta^2}{5p}, \quad \tau_q = \frac{2\kappa T\beta}{5p}, \quad \tau_{\pi} = \frac{\eta}{p} \quad (4.2.40)$$

2. 相対論的極限 ( $\beta \rightarrow 0$ ,  $\Gamma = 4/3$ )

$$\tau_{\Pi} = \frac{72\zeta}{\beta^4 p}, \quad \tau_q = \frac{5\kappa T}{4p}, \quad \tau_{\pi} = \frac{3\eta}{2p} \quad (4.2.41)$$

散逸係数  $\kappa, \eta, \zeta$  の具体的表式は粒子間の相互作用に依存しており、考える問題に適した表式を用いればよい。

### 4.3 Numerical scheme

この章では新しい数値計算法を1次元問題で説明を行う。多次元への拡張については Sec 4.3.4 で説明をする。

#### 4.3.1 Strang splitting method

相対論的散逸流体方程式は双曲型緩和方程式であり、理想流体の部分と散逸部分の各々に特有の数値的困難がある。方程式の理想流体部分の困難は流体方程式の非線形性に起因しており、これは非相対論の場合にも存在している。一方散逸部分の困難は、散逸の発展方程式 (4.2.15)、(4.2.16)、(4.2.17) が stiff 方程式になっていることにある。もし stiff 方程式を陽的差分法で差分近似する場合、安定に解くためには時間刻み幅  $\Delta t$  は緩和時間よりも短く取る必要がある。しかし散逸の緩和時間  $\tau_{\Pi}, \tau_{\pi}, \tau_q$  は一般に流体の特性時間に比べ極めて短いため、数値的に解く場合大きな計算コストが必要になる。

これらの問題を別々に扱うため、ここでは Strang splitting 法を適用し、相対論的散逸流体方程式を次のように分離する。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} D \\ m^i \\ E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x^j} \begin{pmatrix} Dv^j \\ m^i v^j + pI^{ij} \\ m^j \end{pmatrix} = 0, \quad (4.3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} D \\ m^i + q^0 u^i + q^i u^0 + \tau^{0i} \\ E + 2q^0 u^0 + \tau^{00} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x^j} \begin{pmatrix} 0 \\ q^i u^j + q^j u^i + \tau^{ij} \\ q^0 u^j + q^j u^0 + \tau^{0j} \end{pmatrix} = 0, \quad (4.3.2)$$

まず理想流体部分の式 (4.3.1) は Riemann solver を用いれば非常に精度よく解くことが出来る。Riemann solver とはセル境界での数値流束を Riemann 問題の解を用いて計算するという手法で、極めて安定に精度よく理想流体方程式を解くことが出来ることが知られている。

次に散逸部分の式 (4.3.2) について考える。式 (4.3.2) の数値流束部分は式 (4.2.14) の散逸部分であり、散逸変数と 4 元速度  $u^\mu$  を含んでいる。ここで時間の 2 次精度を考える場合は、この数値流束として時間が  $\Delta t/2$  進んだ値を用いなければならない。

式 (4.3.2) の第一項は時間の保存量であり、非相対論の場合と異なり散逸変数を含んでいる。これらを安定に時間発展させるためには、これらに含まれる散逸変数として Navier-Stokes 項ではなく、式 (4.2.15), (4.2.16), (4.2.17) で時間発展させた値を代入しなければならない。さらに式 (4.3.2) の第一項には 4 元速度  $u^\mu$  も含まれていることに注意が必要である。これらの理由により、散逸変数を含んだ保存量は理想流体部分の時間発展の前に計算を行い、散逸部分の時間発展までメモリ上に保存しておく必要がある。

まとめると、式 (4.3.2) の保存変数  $U$  を次のように分離する。

$$U = U_{ideal} + U_{dissip}, \quad (4.3.3)$$

ここで

$$U_{ideal} = \begin{pmatrix} D \\ m^i \\ E \end{pmatrix}, \quad U_{dissip} = \begin{pmatrix} 0 \\ q^0 u^i + q^i u^0 + \tau^{0i} \\ 2q^0 u^0 + \tau^{00} \end{pmatrix}. \quad (4.3.4)$$

まず私たちは  $U = U_{ideal} + U_{dissip}$  を最初に計算する。そして理想流体部分  $U_{ideal}$  を Riemann solver を用いて時間発展させる。次に散逸部分で用いる保存変数  $U$  の初期値を  $\tilde{U}_{ideal} + U_{dissip}$  で求め、式 (4.3.2) を  $\Delta t$  時間発展させる。ここで  $\tilde{U}_{ideal}$  は Riemann solver を用いて時間発展させた流体部分の保存変数である。式 (4.3.1) と (4.3.2) に対して保存形式を用いることで、この手法は質量、運動量、エネルギーを計算機の丸め誤差の範囲内で厳密に保存させることが出来る。

これらに加え、私たちは散逸の独立変数として  $q^x, q^y, q^z, \tau^{0x}, \tau^{0y}, \tau^{0z}, \tau^{yz}, \tau^{zx}, \tau^{xy}$  を採用した。この選択は空間方向に対して対等にするという要請に基づいており、directional split を用いる場合に便利なようになっている。その他の散逸量は直交関係 (4.2.22), (4.2.23), (4.2.24) を用いることで導出が可能である。また以上の独立変数として採用した散逸変数は primitive 変数を求める際にも用いるため、これらの量はセルの中心に定義される。散逸の数値流速を計算する場合は、必要な空間精度に応じてセル境界へ補完を行い、セル境界で  $\Delta t/2$  時間発展させるようにする。



### 4.3.2 Stiff equation

相対論的散逸流体を Israel-Stewart 理論を用いて解析する場合、散逸変数の時間発展を常に考える必要がある。しかしこれらの方程式は stiff 方程式、つまり次のような形の式になっている。

$$\partial_t U = \frac{S(U)}{\tau_{relax}}, \quad (4.3.5)$$

ここで  $\tau_{relax}$  は緩和時間で、 $U$  の時間発展における特徴的時間になっている。この式においてもしこの特徴的時間  $\tau$  が流体の特徴的時間  $\tau_{fluid}$  よりも極めて短い場合に式 (4.3.5) は “stiff 方程式” と呼ばれ、陽的差分法による近似は時間刻み幅を  $\Delta t \lesssim \tau_{relax} \ll \tau_{fluid}$  のように取った場合のみ安定になる。流体近似を考える場合は一般にこの制限は流体の Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) 条件  $\Delta t \leq \Delta x / c_{character}$  よりもはるかに厳しい。ここで  $c_{character}$  は流体の特徴的速度、例えば音速や Alfvén 速度である。この制限は非常に大きな計算コストを要求することになるため、単純な陽的差分による近似を使用することは事実上不可能である。この時間刻み幅の問題を回避するために、私たちは Strang-splitting 法を用いる。

まずは式 (4.2.15)、(4.2.16)、(4.2.17) を座標依存の形に書き直すと次のようになる。

$$\gamma \left( \frac{\partial}{\partial t} + v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \Pi = \frac{1}{\tau_{\Pi}} (\Pi_{NS} - \Pi) - I_{\Pi}, \quad (4.3.6)$$

$$\gamma \left( \frac{\partial}{\partial t} + v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \pi^{\mu\nu} = \frac{1}{\tau_{\pi}} (\pi_{NS}^{\mu\nu} - \pi^{\mu\nu}) - I_{\pi}, \quad (4.3.7)$$

$$\gamma \left( \frac{\partial}{\partial t} + v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) q^{\mu} = \frac{1}{\tau_q} (q_{NS}^{\mu} - q^{\mu}) - I_q. \quad (4.3.8)$$

この式を次のように split する。

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \Pi = -\frac{I_{\Pi}}{\gamma}, \quad (4.3.9)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \pi^{\mu\nu} = -\frac{I_{\pi}}{\gamma}, \quad (4.3.10)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) q^{\mu} = -\frac{I_q}{\gamma}, \quad (4.3.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Pi = \frac{1}{\gamma \tau_{\Pi}} (\Pi_{NS} - \Pi), \quad (4.3.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \pi^{\mu\nu} = \frac{1}{\gamma \tau_{\pi}} (\pi_{NS}^{\mu\nu} - \pi^{\mu\nu}), \quad (4.3.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} q^{\mu} = \frac{1}{\gamma \tau_q} (q_{NS}^{\mu} - q^{\mu}). \quad (4.3.14)$$

式 (4.3.9)、(4.3.10)、(4.3.11) は source 項付きの移流方程式になっており、通常 of 風上差分を用いれば安定に精度よく計算が可能である。一方式 (4.3.12)、(4.3.13)、(4.3.14) は stiff 方程式になっており、特別な計算法が必要になる。私たちの方法では、これらの stiff 方程式を Piecewise-Exact-Solution(PES) 法



を用いて計算を行う (7)。上式で Strang-splitting 法を用いたため、式 (4.3.12)、(4.3.13)、(4.3.14) の形式解を次のように求めることが出来る。

$$\Pi = (\Pi_0 - \Pi_{NS}) \exp \left[ -\frac{t - t_0}{\tau_\Pi} \right] + \Pi_{NS}, \quad (4.3.15)$$

$$\pi^{\mu\nu} = (\pi_0^{\mu\nu} - \pi_{NS}^{\mu\nu}) \exp \left[ -\frac{t - t_0}{\tau_\pi} \right] + \pi_{NS}^{\mu\nu}, \quad (4.3.16)$$

$$q^\mu = (q_0^\mu - q_{NS}^\mu) \exp \left[ -\frac{t - t_0}{\tau_q} \right] + q_{NS}^\mu, \quad (4.3.17)$$

ここで添字 0 は初期値を表している。このように形式解を用いて時間発展をさせることで、時間刻み幅に関係なく安定に数値計算を行うことが可能になる。

ところで Navier-Stokes 項 (4.2.25) - (4.2.31) は非相対論の場合と異なり空間微分だけではなく時間微分も含んでいる。私たちはこの時間微分について次のような 1 次の陽的差分を用いて計算する。

$$\partial_t U^n = \frac{\hat{U}_{ideal}^{n+1} - U^n}{\Delta t}. \quad (4.3.18)$$

ここで  $\hat{U}_{ideal}^{n+1}$  は理想流体の時間発展によって得られた変数を表しており、 $U^n$  は n ステップ目の初期値を表している。このように我々の方法では各ステップの流体変数の初期値を散逸の計算ステップまで保存しておく必要がある。以上に加え、Navier-Stokes 項の中の空間微分は中心差分で近似すべきである。これは散逸変数は物理的に拡散を表すためである。

### 4.3.3 Primitive recovery

流体方程式の数値計算において保存形式を使う場合、時間発展の結果得られるのは保存量であり primitive 変数ではない。このため保存量から primitive 変数への変換が各時間ステップで必要になる。非相対論の場合と違い相対論的流体の場合、この変換は理想流体の場合でも非線形な代数方程式を解くことが必要になる。相対論的散逸流体の場合、保存量の中で散逸量は一般に 4 元速度との積の形で現れるため、この primitive 変数への変換はさらに複雑になる。この章ではこの primitive 変数への変換をある程度簡略化出来る方法について説明する。

まず保存量に含まれる散逸変数は、緩和方程式 (4.2.15)、(4.2.16)、(4.2.17) から既に求まっていることに注意する。すると primitive 変数への変換が複雑になる主な原因は、上記の散逸変数に対して 4 元速度  $u^\mu$  が掛かっていることにあることが分かる。ここでもし散逸変数による寄与が十分小さい場合、散逸ステップにおける 4 元速度  $u^\mu$  の変化は理想流体ステップによる変化に対して小さいことが期待出来る。このような理由により、私たちは  $u^\mu$  の初期値として、理想流体ステップで求めた  $u^\mu$  を用いる。すると保存変数  $U_{dissip}$  に現れる散逸変数に関する部分は計算することが出来てしまう。そして保存変数  $U$  から  $U_{dissip}$  を差し引くことで理想流体部分  $U_{ideal}$  を求めることが出来、これは理想流体で一般的に用いられる primitive 変数の変換法を用いて primitive 変数の計算が可能になる。次に  $U_{dissip}$  の中の 4 元速度  $u^\mu$  の初期推定値として求めた 4 元速度を用いて、上記と同じ計算を再度行う。このようにして計算が必要な精度まで収束するまで iterative に primitive 変数を計算することで、consistent に primitive 変数を求めることが出来る。

以上をまとめると次のようにすれば良い。

1. まず  $U_{dissip}$  を理想流体ステップで求めた  $u^\mu$  を初期推定値として用いて計算する。
2.  $U_{ideal} = U - U_{dissip}$  を計算し、primitive 変数を理想流体の primitive 変数への変換法を用いて計算する。
3.  $U_{dissip}$  中の  $u^\mu$  の初期推定値として以上の計算で求めた  $u^\mu$  を用い、再度 primitive 変数への変換を行う。
4. 以上の計算を primitive 変数が十分収束するまで繰り返す。

#### 4.3.4 多次元への拡張

ここまでは1次元問題の場合の数値計算法について説明をした。多次元計算の場合は directional splitting 法を用いることで、1次元での計算法を多次元へ拡張することが出来る。この手法では多次元計算は、1次元計算を各空間方向に続けて行うことで時間発展が可能になる。なお時間の2次精度を達成する場合は、1次元計算を次のような順番で行えば良い。まず2次元の場合は、

$$U^{n+1} = L_x^{1/2} L_y L_x^{1/2} U^n, \quad (4.3.19)$$

そして3次元の場合は、

$$U^{n+1} = L_x^{1/6} L_y^{1/6} L_z^{1/3} L_y^{1/6} L_x^{1/6} L_z^{1/3} L_y^{1/6} L_x^{1/6} L_z^{1/3} L_y^{1/6} L_x^{1/6} L_z^{1/3} L_y^{1/6} L_x^{1/6} U^n. \quad (4.3.20)$$

## 4.4 Causality and Stability

Israel-Stewart 理論は散逸の時間発展を考慮することで散逸流体方程式を因果律を守り安定にしているが、正確に言うと適切なパラメータを考えないとこれらの条件は満たされない。この章では適切なパラメータの条件について議論を行う。

### 4.4.1 Stability of the telegrapher equation

まず Israel-Stewart 理論は散逸の緩和を考慮することが本質であるため、次のような線形の方程式系に簡略化して考えることにする。

$$\partial_t Q + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0, \quad (4.4.1)$$

$$\partial_t \mathbf{F} = -\frac{1}{\tau} (\mathbf{F} + \eta \nabla Q). \quad (4.4.2)$$

これらの方程式から  $\mathbf{F}$  を消去すると次のように電信方程式になる。

$$\partial_t^2 Q + \frac{1}{\tau} \partial_t Q - \frac{\eta}{\tau} \Delta Q = 0. \quad (4.4.3)$$

電磁気の電信方程式と同様に考えて上の方程式 (4.4.3) の特性速度を求めると次のようになる。

$$v_c = \sqrt{\frac{\eta}{\tau}} \quad (4.4.4)$$

特性速度は方程式系の情報の伝播速度と考えられるので、因果律を守るためにはこの速度は光速を越えてはいけない。よって因果律を守るには、時間スケールのパラメータ  $\tau$  には次のような条件が必要になる。

$$\tau \geq \tau_{min} \equiv \frac{\eta}{v_{max}^2}, \quad (4.4.5)$$

この式で  $v_{max}$  は考えている物理系の最大の速度、例えば光速を表している。

次に安定性の条件を議論する。Israel-Stewart 理論は分布関数が平衡に近い場合には安定で因果律を守ることが示唆されている (5)。一方数値計算を行う場合は、安定な計算のために一般に CFL 条件と呼ばれる時間刻み幅の条件が現れる。例えば緩和時間が  $\tau$  の緩和方程式を陽的差分法で計算する場合は次の条件が課される:  $\Delta t < \tau$ 。以下では PES 法を用いた場合の式 (4.4.1)、(4.4.2) の安定性条件について von Neumann の安定性解析を行う。PES 法を用いる場合、基礎方程式は次のようになる。

$$\partial_t Q + \partial_x F = 0, \quad (4.4.6)$$

$$F = -\eta \partial_x Q + (F_0 + \eta \partial_x Q) e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}. \quad (4.4.7)$$

次に上記の方程式の差分化を行う。時間 2 次精度を考慮した場合、次のようになる。

$$\frac{Q_j^{n+1} - Q_j^n}{\Delta t} + \frac{F_{j+1/2}^{n+1/2} - F_{j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = 0, \quad (4.4.8)$$

$$F_j^{n+1} = -\eta \frac{Q_{j+1/2}^{n+1/2} - Q_{j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} + \left[ F_j^n + \eta \frac{Q_{j+1/2}^{n+1/2} - Q_{j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} \right] e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}. \quad (4.4.9)$$

安定性解析のために、上記の式に以下の形の  $Q_j^n$  と  $F_j^n$  を代入する。

$$Q_j^n = R^n e^{ij\theta}, \quad F_j^n = G^n e^{ij\theta}, \quad (4.4.10)$$

ここで  $R^n$  と  $G^n$  は定数  $R$ 、 $G$  の  $n$  乗を表している。すると方程式 (4.4.8)、(4.4.9) は次のようになる。

$$R^{n+1} - R^n + 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} i \sin \frac{\theta}{2} G^{n+1/2} = 0, \quad (4.4.11)$$

$$G^{n+1} = -\frac{2\eta}{\Delta x} i \sin \frac{\theta}{2} R^{n+1/2} + G^n e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} + \frac{2\eta}{\Delta x} i \sin \frac{\theta}{2} R^{n+1/2} e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}. \quad (4.4.12)$$

これらの式から、次の式が得られる。

$$R^{n+1} - \left[ 1 + e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} - 4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \eta (1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] R^n + e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} R^{n-1} = 0. \quad (4.4.13)$$

この式を解くことで次のように  $Q$  が求まる。

$$R = \frac{1}{2} \left[ 1 + e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} - 4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \eta (1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left[ 1 + e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} - 4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \eta \sin^2 \frac{\theta}{2} (1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}) \right]^2 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}}. \quad (4.4.14)$$

安定のためには、 $|R| \leq 1$  という条件を満たすことが必要になる。この条件を求めるために、式 (4.4.14) に  $|R| = 1$  を代入すると、次のようになる。

$$\Delta t_{min} = \begin{cases} \frac{\Delta x^2}{2\eta \sin^2 \frac{\theta}{2}} & \text{if } \Delta t \gg \tau \\ \frac{\Delta x}{\sin \frac{\theta}{2}} \sqrt{\frac{\tau}{\eta}} & \text{if } \Delta t \ll \tau \end{cases}. \quad (4.4.15)$$

$R = 1$  の場合の厳密な解を図示すると Fig. 4.1 のようになる。式 (4.4.15) と Fig. 4.1 は PES 法の安定

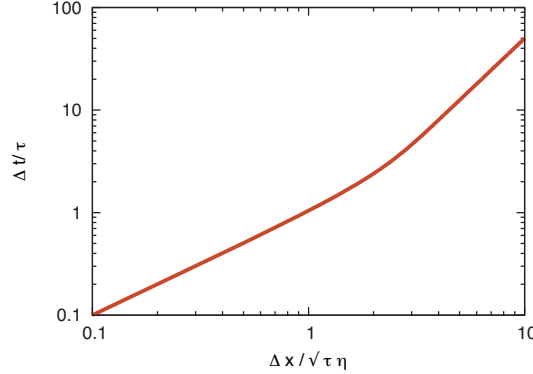


図 4.1:  $|R| = 1$  の場合の式 (4.4.14) の数値計算結果。この図から  $\Delta t/\tau$  は  $\Delta t/\tau \ll 1$  の場合は  $\Delta x$  に比例し、 $\Delta t/\tau \gg 1$  の場合は  $\Delta x^2$  に比例していることが分かる。

性条件について次のことを示している。まず  $\Delta t \geq \tau$  の場合、安定性の条件は通常の放物型の場合と同様の  $\Delta t < \Delta x^2/\eta$  になる。一方  $\Delta t \leq \tau$  の場合、安定性の条件は双曲型の場合と同様の  $\Delta t < \Delta x \sqrt{\tau/\eta}$  になる。

Israel-Stewart 理論は電信型の方程式であるため、上で求めた結果は Israel-Stewart 理論の実用解法についても適用出来ると思われる。そこで CFL 条件として次のような条件を課すことにする。

$$\Delta t = C_a \begin{cases} \min \{ \Delta x/c_s, \alpha \rho h \Delta x^2 / \max\{\kappa, \eta, \zeta\} \} & \text{if } \Delta t > \tau, \\ \min \{ \Delta x/c_s, \Delta x \sqrt{\tau/\eta} \} & \text{if } \Delta t < \tau \end{cases} \quad (4.4.16)$$

ここで  $c_s$  は音速で、 $\alpha$  は時間 2 次精度の場合は  $1/2$  で、時間 1 次精度の場合は  $1/4$  となる係数、そして  $0 < C_a < 1$  はクーラン数である。なお Israel-Stewart 理論は非線形の散逸流体方程式であるため、上記の条件が真の安定性条件になっているかどうかは示されていない。しかし我々の数値計算は上記の条件を守ることで安定になっている。

## 4.5 テスト計算

この章では以上で説明した数値計算法を用いて行った計算結果を示す。以降の計算では CFL 数として 0.4 を用い、理想流体の状態方程式  $h \equiv 1 + \Gamma/(\Gamma - 1)p/\rho$  を仮定する。

### 4.5.1 1D shear flow

相対論的散逸理論である Israel-Stewart 理論は因果律と安定性のために変数が 9 個から 14 個に増えており、厳密解を得ることが非常に難しい。しかし shear flow の shear viscosity による緩和の問題は、相対論的な効果が出ない程度の速度を用いれば十分非相対論の厳密解に近づくと考えられる。そこでまず次のような初期条件を考える。

$$(\rho^L, p^L, v^{yL}) = (1.0, 1.0, -0.1) \quad \text{for } x < 0.0, \quad (4.5.1)$$

$$(\rho^R, p^R, v^{yR}) = (1.0, 1.0, 0.1) \quad \text{for } x \geq 0.0. \quad (4.5.2)$$

上記以外の速度場は全て 0 にする。

この場合、相対論的 Euler 方程式は次のようになる。

$$\rho h \partial_t [\gamma^2 v^y] + \partial_x \tau^{xy} = 0. \quad (4.5.3)$$

この問題では十分に小さな速度を用いているため、ロレンツ因子は  $\gamma = 1$  と見なせる。この場合は粘性テンソルは次のような非相対論と同様の形に帰着する。

$$\tau^{xy} = -\eta \partial^x v^y. \quad (4.5.4)$$

式 (4.5.3)、(4.5.4) を用いると、次のような厳密解が得られる。

$$v^y = v_0^y \operatorname{erf} \left[ \frac{|x - x_0|}{\chi t} \right], \quad (4.5.5)$$

$$\chi = \frac{\eta}{\rho h}. \quad (4.5.6)$$

Fig. 4.2 は  $t = 4.0$  の場合の数値計算結果である。比熱比は  $\Gamma = 4/3$  を使い、セルの大きさは  $\Delta x = 0.01$

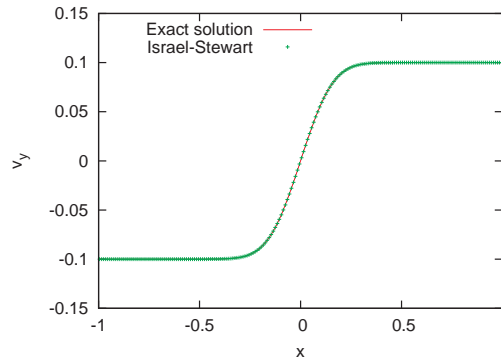


図 4.2: shear flow の粘性による緩和現象の  $t = 4.0$  での数値計算結果。実線は厳密解 (4.5.5) を表し、点が数値計算結果を示している。我々の Israel-Stewart 理論の新しい数値解法は解析解を非常に精度よく再現出来ている。この問題ではセルの大きさとして  $\Delta x = 0.01$  を使い、パラメータとして  $\Gamma = 4/3, \eta = 0.01$  を用いた。

を用いた。この問題では shear viscosity 係数として  $\eta = 0.01$  を用いている。Fig. 4.2 から数値計算結果は厳密解を精度よく再現していることが分かる。

### 4.5.2 shock tube test

この章では、shock tube 問題について考える。もし衝撃波を含む問題を『理想』流体の数値計算法を用いて解く場合、衝撃波の厚さは数値散逸で決まることになる。しかし実際には衝撃波の厚みは散逸係数によって決まることになる。以降では我々の数値解法を用いることで衝撃波の厚みが実際に散逸係数に依存して変化することを示す。厳密解の solver としては Martí と Müller によって作られたコードを用いて求めた (?)。

初期条件としては次のもの考える。

$$(\rho^L, p^L, v^{yL}) = (10.0, 10.0, 0.2) \quad \text{for } x < 0.5, \quad (4.5.7)$$

$$(\rho^R, p^R, v^{yR}) = (1.0, 1.0, -0.2) \quad \text{for } x \geq 0.5, \quad (4.5.8)$$

比熱比としては  $\Gamma = 5/3$  を用い、上記以外の物理量は 0 にしている。数値計算は  $t = 0.4$  まで行い、セルの大きさとしては  $\Delta x = 0.0025$  を用いた。熱伝導係数  $\kappa$ 、shear 粘性  $\eta$ 、bulk 粘性  $\zeta$  は定数を仮定し、特に記載が無い場合は  $10^{-15}$  としている。

まず Fig. 4.3 は shear 粘性係数を  $\eta = 0.01, 0.05, 10^{-15}$  と変えた場合の  $v^y$  の数値計算結果と理想流体の場合の結果を比較した図である。この図から接触不連続面と衝撃波が共に粘性により散逸され、不連続面の厚みは  $\eta = 0.05$  の場合は  $\eta = 0.01$  のほぼ 5 倍程度になっていることが分かる。

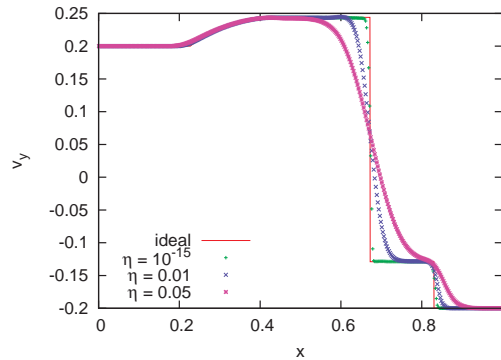


図 4.3: 相対論的 shock tube 問題の数値計算結果。  $t = 0.4$  の場合の  $v_y$  のプロファイルが点によって表されており、shear 粘性係数は  $\eta = 10^{-15}, 0.01, 0.05$  の 3 つの場合において計算されている。また実線は理想流体の厳密解である。このテスト計算では不連続面の厚みは『物理的な』粘性によって定まっていることが分かる。このテスト計算ではセルの幅は  $\Delta x = 0.0025$  を用いており、比熱比は  $\Gamma = 5/3$  を、CFL 数は 0.4 を用いている。

次に Fig. 4.4 は温度  $T \equiv p/\rho$  についての数値計算結果である。この計算では熱伝導係数として  $\kappa = 0.01, 0.05, 10^{-15}$  を用いている。この図から、熱伝導により温度が高い領域から低い領域へと熱が流れていることが見て取れ、接触不連続面と衝撃波面は散逸により滑らかになっている。また不連続面の厚みは  $\kappa = 0.05$  の場合は  $\kappa = 0.01$  のほぼ 5 倍程度になっていることが分かる。

Fig. 4.5 は速度  $v^x$  についての数値計算結果である。この計算では bulk 粘性係数として  $\zeta = 0.01, 0.04, 10^{-15}$  を用いている。bulk 粘性は流体の expansion  $\theta = u^\mu_{;\mu}$  を散逸させる粘性で、1次元の場合は  $\theta = \partial_x u^x$  により表される。Fig. 4.5 は  $v^x$  の勾配が粘性によって滑らかになっていることが分かる。

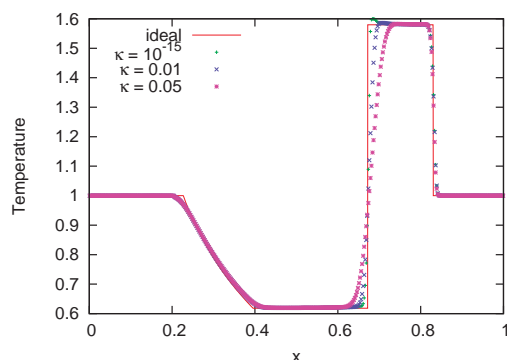


図 4.4: 相対論的 shock tube 問題の数値計算結果。  $t = 0.4$  の場合の温度  $T$  のプロファイルが点によって表されており、熱伝導係数は  $\kappa = 10^{-15}, 0.01, 0.05$  の3つの場合において計算されている。また実線は理想流体の厳密解である。全ての熱伝導係数の場合において衝撃波の厚みはほぼ同等だが、接触不連続面の厚みは『物理的な』熱伝導によって定まっていることが分かる。このテスト計算ではセルの幅は  $\Delta x = 0.0025$  を用いており、比熱比は  $\Gamma = 5/3$  を、CFL 数は 0.4 を用いている。

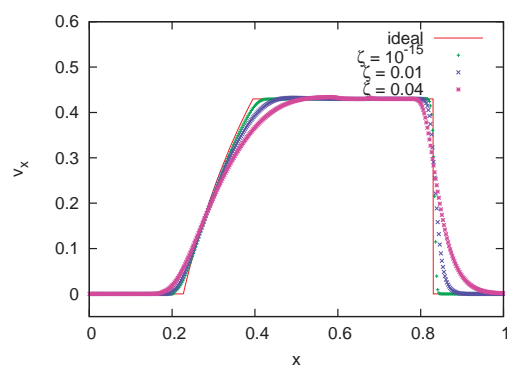


図 4.5: 相対論的 shock tube 問題の数値計算結果。  $t = 0.4$  の場合の  $v_x$  のプロファイルが点によって表されており、bulk 粘性係数は  $\zeta = 10^{-15}, 0.01, 0.05$  の3つの場合において計算されている。また実線は理想流体の厳密解である。不連続面の厚みは『物理的な』粘性によって定まっていることが分かる。このテスト計算ではセルの幅は  $\Delta x = 0.0025$  を用いており、比熱比は  $\Gamma = 5/3$  を、CFL 数は 0.4 を用いている。





## 関連図書

- [1] Takamoto, M., & Inutsuka, S.-I. 2011, *Journal of Computational Physics*, 230, 7002
- [2] L. D. Landau, & E. M. Lifshitz, *Course of theoretical physics* (Oxford: Pergamon Press, 1959).
- [3] W. A. Hiscock & L. Lindblom, *Annals of Physics* **151** (1983) 466.
- [4] W. A. Hiscock & L. Lindblom, *Phys. Rev. D* **31** (1985) 725.
- [5] W. Israel & J. M. Stewart, *Annals of Physics* **118** (1979) 341.
- [6] S. R. de Groot, W. A. van Leeuwen, Ch. G. van Weert, *Relativistic kinetic theory - Principles and applications* (North-Holland, 1980).
- [7] T. Inoue, & S. Inutsuka, *ApJ* 687 (2008) 303.
- [8] J. M. Marti, & E. Müller, *Journal of Fluid Mechanics* 258 (1994) 317.

