

第5章 太陽表面対流のための輻射磁気流体方程式の数値解法

飯島陽久 (東京大学)

5.1 はじめに

太陽表面では放射冷却によるエネルギー損失を補うため対流が発生している。太陽では、表面対流と関わる磁場現象の観測とシミュレーションの比較研究が盛んで、輻射輸送と部分電離の効果を取り入れた輻射磁気流体計算が行われている。しかし、そのような研究は海外の一部のグループに限られていた。

我々は、その中でも並列性が高く高速だと思われる Max Planck のグループによる MURaM コード (Vögler 2003; Vögler et al. 2005; Rempel 2009) を参考に局所熱力学平衡、非散乱、灰色近似を仮定した輻射磁気流体計算コードを開発した。ここでは、その数値計算法を紹介する。

5.2 基礎方程式

基礎方程式は、重力と輻射加熱項 Q_{rad} を加えた磁気流体方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (5.2.1)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) \mathbf{I} - \frac{\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}}{4\pi} \right] = \rho \mathbf{g} \quad (5.2.2)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(e + p + \frac{B^2}{8\pi} \right) \mathbf{V} - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}) \right] = \rho (\mathbf{g} \cdot \mathbf{V}) + Q_{rad} \quad (5.2.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{V}) = 0 \quad (5.2.4)$$

である。太陽表面では輻射圧は十分に小さいので無視した。ここで、 ρ は密度、 \mathbf{V} は速度場、 \mathbf{B} は磁場、 \mathbf{I} は 3×3 の単位行列を表す。 e は単位体積あたりの全エネルギーで、

$$e = e_{int} + \frac{1}{2} \rho V^2 + \frac{B^2}{8\pi} \quad (5.2.5)$$

ここで、 e_{int} は単位体積あたりの内部エネルギーである。太陽表面付近では水素の電離度が急激に変化するため、電離平衡を仮定した非理想気体の状態方程式を用いる。

$$p = p(\rho, e_{int}) \quad (5.2.6)$$

状態方程式は OPAL コード (Rogers et al. 1996; Iglesias et al. 1996) で生成した数表を数値的に内挿して用いた。

輻射加熱項 Q_{rad} は、光速が十分大きい場合の輻射輸送方程式

$$\frac{dI}{d\tau} = S - I \quad (5.2.7)$$

$$d\tau = \rho\kappa ds \quad (5.2.8)$$

を直接解いて求める。ここで、簡単のため周波数方向の離散化は考えないものとした(灰色近似)。 I は輻射強度、 S は源泉関数、 κ は Rosseland 平均した不透明度、 τ は光学的厚み、 s は幾何学的な厚みである。局所熱力学平衡と非散乱を仮定しているため、源泉関数 S や不透明度 κ は輻射強度によらず陽に決定される。

$$S = B(T) = \frac{\sigma_s}{\pi} T^4 \quad (5.2.9)$$

$$\kappa = \kappa(\rho, T) \quad (5.2.10)$$

$$T = T(\rho, e_{int}) \quad (5.2.11)$$

ここで、 σ_s はステファン・ボルツマン係数である。よって、境界条件さえ与えられれば、輻射輸送方程式は単純に境界から積分していくだけで解くことが出来る。このようにして輻射強度 I が求められれば、輻射加熱項は以下の様に与えられる。

$$Q_{rad} = \nabla \cdot \mathbf{F} = 4\pi\rho\kappa(J - S) \quad (5.2.12)$$

$$\mathbf{F} = \int_{4\pi} d\Omega \boldsymbol{\mu} I \quad (5.2.13)$$

$$J = \int_{4\pi} d\Omega I \quad (5.2.14)$$

ここで、 $\boldsymbol{\mu}$ は光線の角度、 \mathbf{F} は輻射フラックス、 J は角度平均した輻射強度である。

5.3 流体部分

太陽表面付近は成層が強く、ボックス内で密度が 4 枠以上変化し、対流のオーバーシュートによって引き起こされた音波は衝撃波に変わるために、数値的にロバストであることが要求される。また、対流層の内部はレイノルズ数が非常に高く、限られたグリッド数で数値粘性を少なく抑えるため、高次精度のスキームである必要がある。ここでは、空間方向に 4 次の中央差分、時間方向に 4 次のルンゲ・クッタ法を用いた方法を紹介する。並列化は全て MPI を用いた空間領域分割で行った。

5.3.1 空間差分

方程式系は 1 次元の場合、以下の様に表せる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = s \quad (5.3.1)$$

この時、4次精度のフラックスは

$$f_{j+1/2} = \frac{7}{12} [f(u_{j+1}) + f(u_j)] - \frac{1}{12} [f(u_{j+2}) + f(u_{j-1})] \quad (5.3.2)$$

で与えられる。

人工粘性は Rempel (2009) で提案されたものを用いた。区分的に線形であると仮定し、グリッド境界の両側での物理量を以下のように再構成する。

$$(u_x)_j = \text{minmod} \left(\frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x}, \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} \right) \quad (5.3.3)$$

$$u_{j+1/2}^+ = u_{j+1} - \frac{1}{2}(u_x)_{j+1} \quad (5.3.4)$$

$$u_{j+1/2}^- = u_j + \frac{1}{2}(u_x)_j \quad (5.3.5)$$

ここで、minmod 関数は絶対値の最も小さい引数を返す。人工粘性のフラックスは、以下の様に与えられる。

$$g_{j+1/2} = \frac{1}{2} c_{j+1/2} \phi_{j+1/2} (u_{j+1/2}^+ - u_{j+1/2}^-) \quad (5.3.6)$$

$$\phi_{j+1/2} = \begin{cases} \left[(u_{j+1/2}^+ - u_{j+1/2}^-) / (u_{j+1} - u_j) \right]^2 & \text{for } (u_{j+1/2}^+ - u_{j+1/2}^-)(u_{j+1} - u_j) > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.3.7)$$

ここで、 $c_{j+1/2}$ はグリッド境界での特性速度で、今はその最大値 $c = c_s + v_a + V$ (c_s は音速、 v_a はアルフベン速度) を用いた。

結局、空間差分とフラックスは、

$$\frac{\partial}{\partial t} u_j = - \frac{H_{j+1/2} - H_{j-1/2}}{\Delta x} + s(u_j) \quad (5.3.8)$$

$$H_{j+1/2} \equiv f_{j+1/2} + g_{j+1/2} \quad (5.3.9)$$

のようになる。

5.3.2 時間積分

式 (5.3.8) は以下の様な形をしている。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = R(u) \quad (5.3.10)$$

このとき、メモリ節約型の4次精度のルンゲ・クッタでの時間積分は、

$$u^{n+1/4} = u^n + \frac{\Delta t}{4} R(u^n) \quad (5.3.11)$$

$$u^{n+1/3} = u^n + \frac{\Delta t}{3} R(u^{n+1/4}) \quad (5.3.12)$$

$$u^{n+1/2} = u^n + \frac{\Delta t}{2} R(u^{n+1/3}) \quad (5.3.13)$$

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t R(u^{n+1/2}) \quad (5.3.14)$$

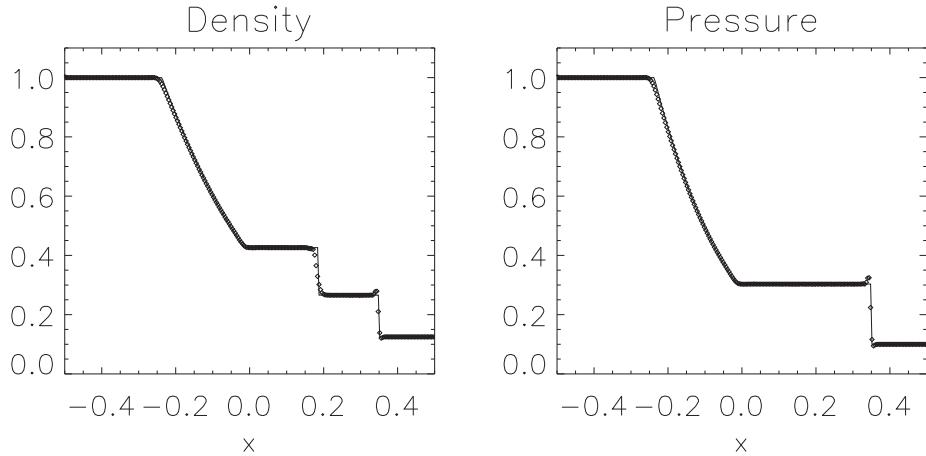


図 5.1: Sod の衝撃波管問題。グリッド数は 256。実線は解析解。

のようになる。

5.3.3 テスト問題

Sod の衝撃波管問題

Sod (1978) の 1 次元流体衝撃波管問題を行った。初期条件は衝撃波面の前後で、

$$\rho_R = 0.125$$

$$P_R = 0.1$$

$$\rho_L = 1.0$$

$$P_L = 1.0$$

とした。比熱比は $\gamma = 1.4$ 。境界条件は両側とも固定壁とした。図 5.1 では密度と圧力がプロットしている。

Orszag-Tang テスト

Orszag & Tang (1979) によって提案された 2 次元磁気流体のテストを行った。領域は $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ 、初期条件は、

$$\rho = 25/(36\pi)$$

$$P = 5/(12\pi)$$

$$V_x = -\sin(2\pi y)$$

$$V_y = \sin(2\pi x)$$

$$B_x = -\sin(2\pi y)$$

$$B_y = \sin(4\pi x)$$

比熱比は $\gamma = 5/3$ 。境界条件は周期境界とした。結果は図 5.2 のようになった。これは Ryu et al. (1998) の fig. 3 と比較出来るように作ってある。

5.4 輻射輸送部分

5.4.1 Short Characteristic 法

ある光線方向 μ について輻射輸送方程式を空間積分する。いくつかの方法があるが、ここではローカルで、通信の少ない Short Characteristic 法 (e.g. Kunasz & Auer 1988) を用いた。並列化は MPI で行った。

密度および不透明度が幾何学的厚みに対して局所的に線形だと仮定すると、光学的厚み $\Delta\tau$ は以下のように計算できる。

$$\rho(s) = \rho_0 + \rho'_1 s \quad (5.4.1)$$

$$\kappa(s) = \kappa_0 + \kappa'_1 s \quad (5.4.2)$$

$$\begin{aligned} \Delta\tau &= \int_0^{\Delta s} \rho(s)\kappa(s)ds \\ &= \rho_0\kappa_0\Delta s + \frac{1}{2}(\rho_0\kappa'_1 + \rho'_1\kappa_0)(\Delta s)^2 + \frac{1}{3}\rho'_1\kappa'_1(\Delta s)^3 \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

輻射強度は、同様に源泉関数を光学的厚みに対して線形だとして、輻射輸送方程式の形式解を用いると、

$$S(\tau) = S_0 + S'_1\tau \quad (5.4.4)$$

$$\begin{aligned} \Delta I &= \exp(-\Delta\tau) \int_0^{\Delta\tau} S(\tau) \exp(\tau) d\tau \\ &= S_0 W_0 + S'_1 W_1 \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

$$W_0 = 1 - \exp(-\Delta\tau) \quad (5.4.6)$$

$$W_1 = \Delta\tau - W_0 \quad (5.4.7)$$

$$I(\Delta\tau) = I(0) \exp(-\Delta\tau) + \Delta I \quad (5.4.8)$$

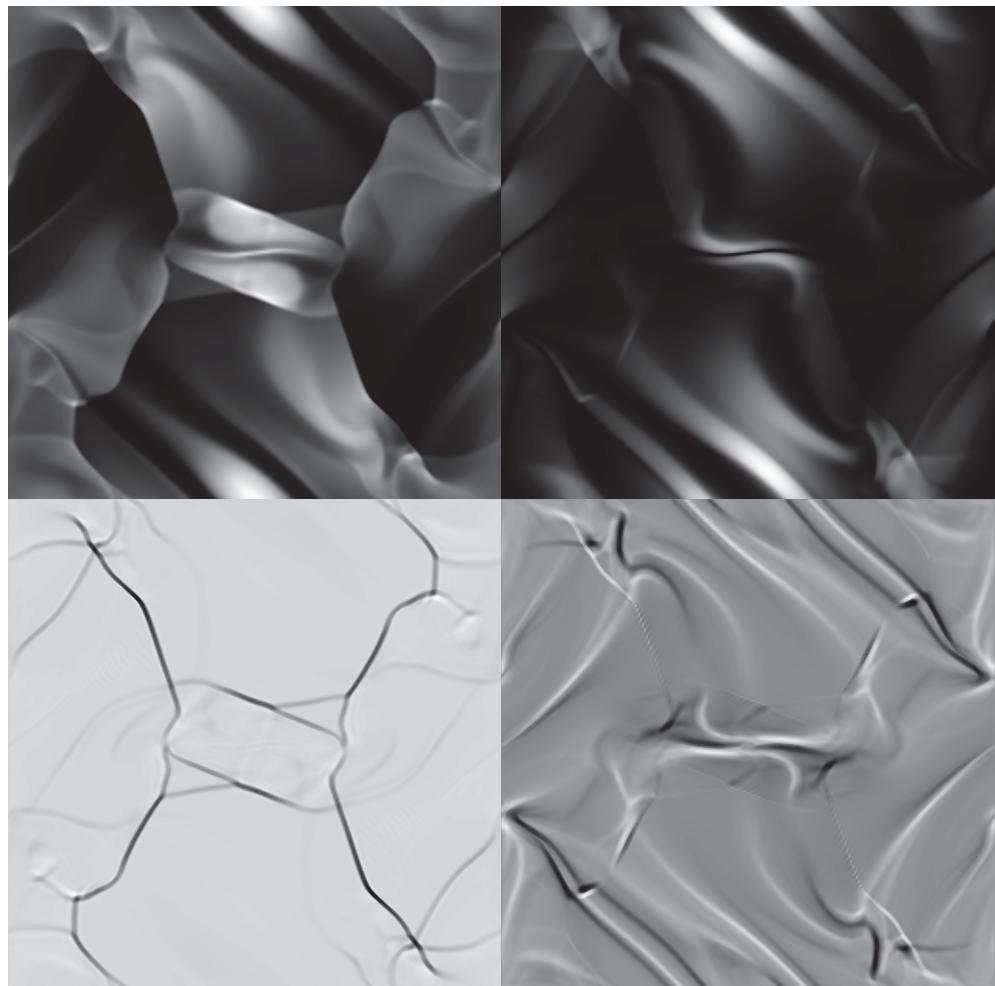


図 5.2: Orszag-Tang テストの結果 ($t = 0.48$)。グリッド数は 256×256 。左上：ガス圧、右上：磁気圧、左下：速度場の発散、右下：渦度。

のように求められる。

積分の順序は、以下の様になる。

1. 輻射強度の初期値、境界値を設定する。
2. グリッド内部で計算。
 - (a) 付近のグリッドから風上での輻射強度 $I(0)$ の値を補間する。
 - (b) 式 (5.4.3)、(5.4.8) を用いてその場所での輻射強度の値 $I(\Delta\tau)$ を計算する。
3. 各グリッドでステップ 2 を繰り返し、コア内の全てのグリッドで輻射強度を計算する。
4. コア間で通信し、境界値を新しくする。
5. 輻射強度の変化が十分小さくなるまで、ステップ 2 から 4 を繰り返す。

シリアルプログラムでは必要ない反復計算が、並列化した場合には必要になる。

5.4.2 テスト問題

古典的な解析解のある 1 次元平行平板大気問題 (e.g., Rybicki & Lightman 1979) を解いた。z 軸に対し角度 $\mu_z = \pm 1/3$ で伝播する 2 本の光線を考える。境界条件を下部境界で $I(\mu_z = +1/3) = 1$ 、上部境界で $I(\mu_z = -1/3) = 1 - \exp(-\sqrt{3}\tau_{top}^*)$ とすると、解析解は

$$J_{an} = 1 - \frac{1}{2} \exp(-\sqrt{3}\tau^*)$$

となる。ここで、 τ^* は光学的深さを表す。

結果は図 5.3 の様になった。ここで、 Q_F は輻射フラックスから求めた輻射加熱項 (式 (5.2.12) 中辺)、 Q_J は角度平均した輻射強度から求めた輻射加熱項 (式 (5.2.12) 右辺)、 Q_{an} は解析解から求めた輻射加熱項である。

5.5 計算例

太陽表面で最も小さい対流スケールである粒状斑 (水平スケール 2 Mm 程度) を計算してみた。磁場は入れていない。領域は $6 \times 6 \times 2 \text{ Mm}^3$ 、グリッド数は $288 \times 288 \times 100$ である。光線の角度方向には 24 本をとった。

図 5.4 では、鉛直上向きの輻射強度や太陽表面 (視線方向の光学的深さ $\tau_{Ross}^* = 1$) での鉛直速度などの物理量の水平分布を描いている。上昇流がある領域は対流層内部の高いエントロピーを持っているため明るい。水平流はターンオーバーして発散し、対流セルの境界に向かう。暗い場所では冷えた水平流が収束し、渦度を持ちながら再び対流層内部に沈み込む。

計算時間のうち、輻射輸送の計算にかかる時間は約 3 割程度で済んだ。これは、局所熱力学平衡と非散乱を仮定したため、問題として陽に積分することで解けてしまうことと、対流層のほとんどで輻射強度が源泉関数に充分近いため、初期値を適切に選ぶことで並列化に伴う反復計算も少なくて済むことによる。

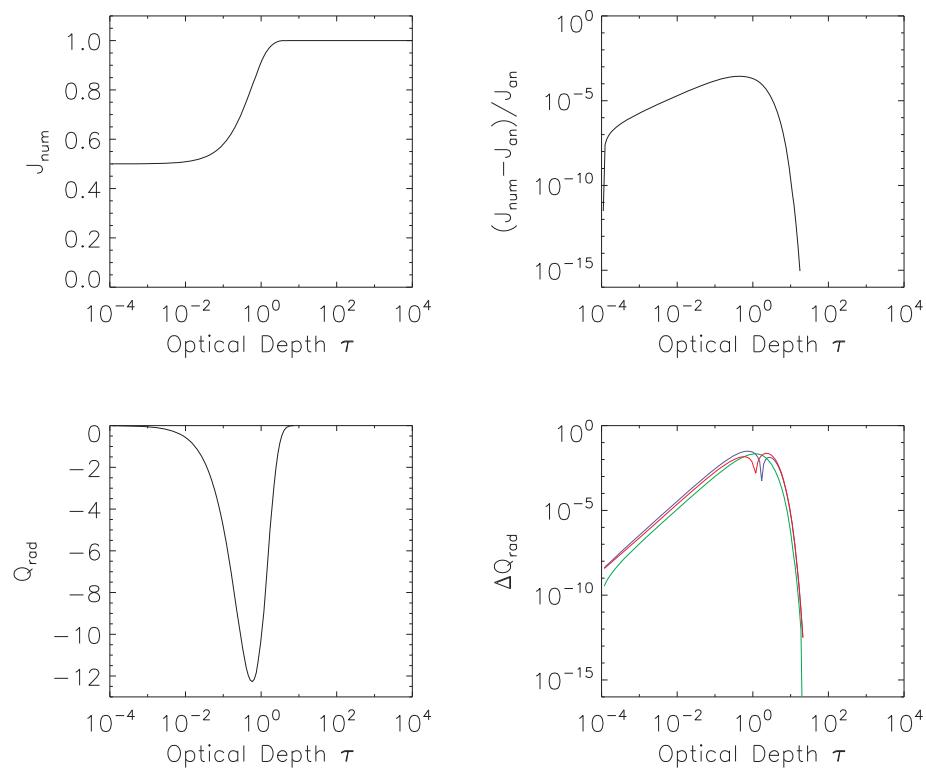


図 5.3: 輻射輸送のテスト問題 (1次元平行平板大気)。グリッド数は、 $40 \times 80 \times 160$ (z 方向に 160)。左上: 得られた輻射強度の角度平均 J 、右上: J の解析解からの相対誤差、左下: 得られた輻射加熱項 Q_{rad} 、右下: 輻射加熱項 Q_F 、 Q_J 、 Q_{an} の間のずれ (赤: $Q_F - Q_{\text{an}}$ 、緑: $Q_J - Q_{\text{an}}$ 、青: $Q_F - Q_J$)。

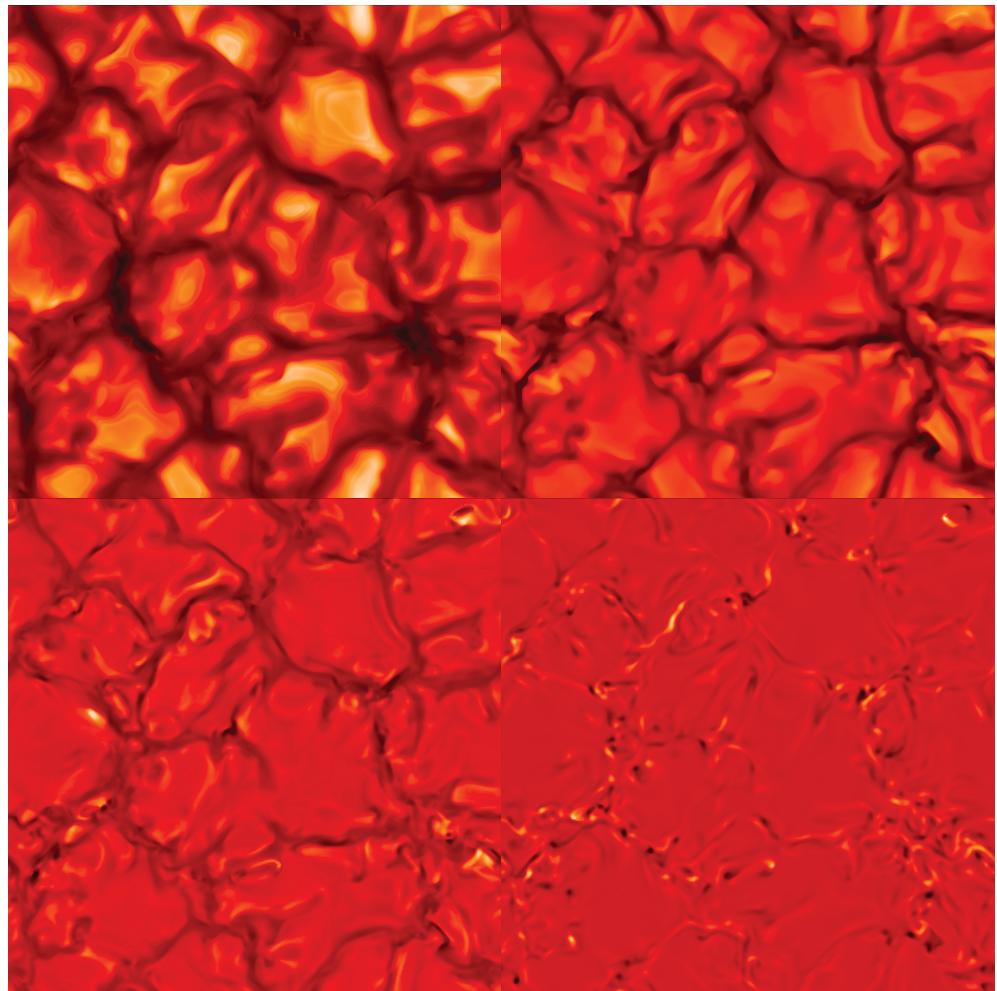


図 5.4: 太陽表面対流のシミュレーション結果。グリッド数は $288 \times 288 \times 100$ 。左上: 上部境界での輻射強度 ($\mu_z = 1$)、右上: 鉛直速度、左下: 水平発散、右下: 鉛直渦度。輻射強度以外は表面 ($\tau_{Ross}^* = 1$) での物理量を描いている。視野は全て $6 \times 6 \text{ Mm}^2$ 。

関連図書

- [1] Iglesias, C. A. & Rogers, F. J. 1996, ApJ, 464, 943
- [2] Kunasz, P. B., & Auer, L. 1988, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, 39, 67
- [3] Orszag, S. A. & Tang, C. M. 1979, Journal of Fluid Mechanics Digital Archive, 90, 129
- [4] Rempel, M., Schüssler, M., & Knölker, M. 2009, ApJ, 691, 640
- [5] Rogers, F. J., Swenson, F. J., & Iglesias, C. A. 1996, ApJ, 456, 902
- [6] Rybicki, G. B. & Lightman, A. P. 1979, Radiative processes in astrophysics (Wiley-Interscience, New York)
- [7] Ryu, D., Miniati, F., Jones, T. W., & Frank, A. 1998, ApJ, 509, 244
- [8] Sod, G. A. 1978, Journal of Computational Physics, 27, 1
- [9] Vögler, A. 2003 Ph.D. Thesis, Gottingen University
- [10] Vögler, A., Shelyag, S., Schüssler, M., et al. 2005, A&A, 429, 335

