第6章 ブラソフシミュレーション技法

簑島敬(海洋研究開発機構)

無衝突プラズマの運動論的シミュレーション技法であるブラソフシミュレーションについて紹介する。 ブラソフシミュレーションは、これまで広く用いられてきた粒子法が持つ問題点を解決できる、大規模 並列計算機に適した高精度の計算手法である。本記事では特に、磁化プラズマのブラソフシミュレーショ ンに焦点を当て、ブラソフ方程式及びマクスウェル方程式の数値解法を解説し、計算例を紹介する。

6.1 イントロダクション

無衝突プラズマの運動論的シミュレーションは、宇宙プラズマ分野のみならず、様々な分野で精力的 に研究されている。これまで広く用いられている手法は、粒子法である(1)。粒子法とは、本来は膨大 な数のプラズマ粒子を、少数の「超粒子」で代表させ、それらの軌道はニュートンの運動方程式に従っ てラグランジュ的に更新し、一方で電磁場はグリッド上に離散化し、オイラー的に更新する手法である。 この手法は、粒子数が少数(=少ない計算機資源)でもシミュレーションが安定に実行でき、比較的満 足な結果が得られること、コーディングが簡易であることなどの長所がある。一方で、プラズマ分布関 数を有限個の超粒子で近似することから、数値ノイズが非常に大きく、これは粒子数の平方根でしか改 善されないため、スケーラビリティが良くない。また、粒子と電磁場で変数の取扱いが異なるため、並 列計算の効率化に問題がある。

これら粒子法固有の問題点を解決すべく提唱されている手法が、ブラソフシミュレーションである。 この手法では、プラズマ分布関数を6次元位相空間で直接離散化し、電磁場と同様オイラー的に更新す る。解くべき方程式は、無衝突プラズマの第一原理方程式であるブラソフ方程式

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{q_s}{m_s} \left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}}{c} \right) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{v}} = 0, \tag{6.1.1}$$

及びマクスウェル方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = c\nabla \times \boldsymbol{B} - 4\pi \boldsymbol{j}, \qquad (6.1.2)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -c\nabla \times \boldsymbol{E},\tag{6.1.3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho,\tag{6.1.4}$$

 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0. \tag{6.1.5}$

である。ここで $f_s(x, v)$ は粒子種 s の分布関数、q, m は電荷及び質量、c は光速、E(x), B(x) は電磁場である。電荷密度 $\rho(x)$ 及び電流密度 j(x) は分布関数の速度空間モーメント

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \sum_{s} q_{s} \int f_{s}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) d\boldsymbol{v}, \qquad (6.1.6)$$

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) = \sum_{s} q_{s} \int \boldsymbol{v} f_{s}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) d\boldsymbol{v}, \qquad (6.1.7)$$

を取ることで与えられ、これらを介してプラズマと電磁場が相互作用する。

ブラソフシミュレーションは、分布関数を直接解くため、粒子法では数値ノイズで埋もれてしまうよ うな分布関数の詳細を明らかにできる可能性がある。また、プラズマも電磁場もオイラー変数として扱 うため、並列計算の効率化が粒子法に比べて容易である。但し、最大で6次元の位相空間を扱うため、 膨大な計算機資源を必要とする。以上の事から、ブラソフシミュレーションは、大規模並列計算機向け の技術といえる。

6.2 ブラソフ方程式の数値解法

まず、ブラソフ方程式の数値解法について解説する。式 (6.1.1) をそのまま解くのは難しいので、次の ように実空間と速度空間の方程式に分離して、別々に更新することを考える。

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{x}} = 0, \tag{6.2.1}$$

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \frac{q_s}{m_s} \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{v}} = 0, \qquad (6.2.2)$$

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \frac{q_s}{m_s} \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}}{c} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{v}} = 0.$$
(6.2.3)

式 (6.2.1) は実空間での移流(自由流)を表している。移流速度 v がここでの独立変数 (x,t) に依らない ので、速度一定の最も単純な移流方程式である。式 (6.2.2) は速度空間での移流(電場加速)を表してお り、これも速度一定の移流方程式である。式 (6.2.3) は速度空間での原点を中心とした剛体回転(ジャイ ロ運動)を表している。よって、いずれの式も、数多く開発されている双曲型偏微分方程式の数値計算 スキームを用いて解くことが可能である。精度と計算コストのトレードオフを考慮して、適切なスキー ムを選択する。以上は、文献(2)で提唱された Splitting スキームを、磁場がある場合に拡張したもので ある。

適切な時間刻み及び更新手順を選択する事で、シンプレクティックな時間積分¹を行うことが出来る (7)。例えば、 $t = n\Delta t$ における分布関数 f^n について

- 1. (6.2.1) を半ステップ更新。 $f^n \to f^*$.
- 2. (6.2.2) を半ステップ更新。 $f^* \rightarrow f^{**}$.
- 3. (6.2.3) を1ステップ更新。 $f^{**} \rightarrow f^{***}$.

84

¹ハミルトン系において、それに近い別のハミルトン系のハミルトニアン(影のハミルトニアン)が保存される手法。元の 系のハミルトニアンとの誤差は Δt^m のオーダーで、時間的に振動するものの単調増大しない特徴がある。

4. (6.2.2) を半ステップ更新。 $f^{***} \rightarrow f^{****}$.

5. (6.2.1) を半ステップ更新。 $f^{****} \rightarrow f^{n+1}$.

とすれば時間 2 次精度で更新される。ただし、過程 2 から 4 の際に必要な電磁場は $t = (n + 1/2)\Delta t$ における値 ($E^{n+1/2}$, $B^{n+1/2}$)を用いる。これは、式 (6.2.1)-(6.2.3) をラグランジュ形式に書き直せば、粒子法における Buneman-Boris 法に相当することがわかる。

6.2.1 マルチモーメント移流法

ブラソフ方程式は拡散項の無い方程式であり、運動論的プラズマ中には様々なモードの波動が存在す るため、その記述には高精度の数値計算スキームを必要とする。これまで様々な高精度スキームが開発 ・適用されてきた。それらの比較が文献(3;4)に紹介されている。

ブラソフシミュレーションは最大で6次元の位相空間を扱うため、膨大な計算機資源を必要とする。 そのため、研究は実空間1次元、速度空間1次元の静電問題(**B**=0)から始まった。近年の計算機能力 の向上により、多次元の電磁ブラソフシミュレーションが可能になってきたが(12;14)、物理的に意味 のある結果を得ることは難しく、2012年現在でも非磁化プラズマや旋回中心近似プラズマといった限ら れた問題を扱うことが多い。その主な原因は、式(6.2.3)で表される剛体回転問題を正しく長時間安定 に解くことが困難だからである。従来のスキームでは、剛体回転に伴って、数値分散や数値拡散が急速 に発生する²。数値分散は速度分布関数の微細構造を発生させ、これは不要なプラズマ波動を発生させ る。数値拡散はプラズマの数値加熱に相当し、圧力上昇、プラズマ波動の抑制をもたらす。運動論的シ ミュレーションでは、現象を追跡するため、イオンジャイロ周期の数 ~ 数十倍程度以上の時間を計算す るので、電子は磁場の周りを数千回転程度ジャイロ運動することになる³。磁化プラズマのブラソフシ ミュレーションのためには、剛体回転問題を正しく長時間安定に解くスキームが必須である。

そこで著者らは、ブラソフシミュレーションのための新しいスキームとして、マルチモーメント移流 (MMA) 法を提唱している。この手法は、速度分布関数 f(v) に加えて、その 0 次から 2 次までのモーメント

$$M^{m}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{m!} \int^{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v'}^{m} f d\boldsymbol{v'}, \quad (m = 0, 1, 2)$$
(6.2.4)

も変数として扱い、各々の支配方程式に従って独立に更新する。1次元の場合は、

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \tag{6.2.5}$$

$$\frac{\partial M^m}{\partial t} + \frac{a}{m!} \int dv \frac{\partial}{\partial v} \left(v^m f \right) = \begin{cases} 0, & (m=0) \\ \frac{a}{(m-1)!} \int v^{m-1} f dv, & (m=1,2) \end{cases}$$
(6.2.6)

となる。物理量は、グリッド上の分布関数 $f_i = f(v_i)$ 及びグリッド内の区分化モーメント

$$M_{i+1/2}^{m} = \frac{1}{m!} \int_{v_{i}}^{v_{i+1}} v^{m} f dv, \quad (m = 0, 1, 2)$$
(6.2.7)

²剛体回転問題を数回転程度解けることが、スキームのベンチマークテストになるほどである。

³実際は、計算機資源の制約から、現実より小さなイオン/電子質量比を用いることが多いが、それでも数十 ~ 数百回転程度は計算する必要がある。



図 6.1: ガウス分布の 2 次元移流回転問題。 (a,b,c) MMA 法(34² グリッド)、CIP-CSL2 法(42² グリッ ド)、Backsubstitution 法(84² グリッド)で計算した 50 回転後の分布。 (d,e,f) 300 回転後の分布。(g) 分布の標準偏差の時間変化。実線、破線、点破線がそれぞれ MMA 法、CIP-CSL2 法、Backsubstitution 法で得られた結果。

を記憶し、グリッド内の分布関数はこれらを用いて局所多項式で補間する。式 (6.2.5) と (6.2.6) を更新 する際は、分布の積分値(質量)のみならず、中心値と分散の保存を保証するように行う。多次元の場 合も、同様の方法でスキームを設計する事が出来る。詳細は文献 (8; 9) を参考いただきたい。

図 6.1 は、2 次元移流回転問題(式 (6.2.2) と (6.2.3)) について、MMA 法、保存型 CIP (CIP-CSL2) 法 (13)、Backsubstitution 法 (11) の計算比較を示している。各々のスキームで更新量の数が異なるので、 メモリ使用量を揃えるために異なるグリッド数を用いている(MMA 法が一番粗い)。MMA 法では、数 値拡散をほとんど発生させること無く、移流回転問題を計算できることが分かる。

本記事で紹介するブラソフシミュレーションでは、速度空間の更新に対して MMA 法を用いる。実空 間の更新に対しては CIP-CSL2 法を用いる。

6.3 マクスウェル方程式の数値解法

次に、マクスウェル方程式 (6.1.2),(6.1.3) の数値解法について解説する。電磁場は粒子法でもオイラー的 に更新されるため、同様の手法を用いることが出来る。例えば、古典的な Finite-Difference Time-Domain (FDTD) 法や、フーリエ級数展開を用いたスペクトル法などが良く用いられる。双曲型偏微分方程式の 高精度数値計算スキームの一つである CIP 法を用いることも出来る (10)。

ここでは、文献(5;6)で用いられている陰的解法について紹介する。マクスウェル方程式(6.1.2),(6.1.3) を時間方向に差分近似すると、

$$\delta \boldsymbol{E} = \alpha c \Delta t \nabla \times \delta \boldsymbol{B} + c \Delta t \nabla \times \boldsymbol{B}^n - 4\pi \Delta t \boldsymbol{j}^{n+1/2}, \qquad (6.3.1)$$

$$\delta \boldsymbol{B} = -\alpha c \Delta t \nabla \times \delta \boldsymbol{E} - c \Delta t \nabla \times \boldsymbol{E}^{n}, \qquad (6.3.2)$$

と、 $(\delta E, \delta B) = (E^{n+1} - E^n, B^{n+1} - B^n)$ についての方程式が得られる。ここで、 $\alpha = 1$ の場合は1次精度の陰的解法、 $\alpha = 0.5$ の場合は2次精度のクランク・ニコルソン法になる。1次元 $(\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0)$

の場合は、

$$\delta E_x = -4\pi \Delta t j_x^{n+1/2}, \qquad (6.3.3)$$

$$\delta B_x = 0, \tag{6.3.4}$$

$$\delta E_y = -\alpha c \Delta t \frac{\partial \delta B_z}{\partial x} - c \Delta t \frac{\partial B_z^n}{\partial x} - 4\pi \Delta t j_y^{n+1/2}, \qquad (6.3.5)$$

$$\delta B_y = \alpha c \Delta t \frac{\partial \delta E_z}{\partial x} + c \Delta t \frac{\partial E_z^n}{\partial x}, \qquad (6.3.6)$$

$$\delta E_z = \alpha c \Delta t \frac{\partial \delta B_y}{\partial x} + c \Delta t \frac{\partial B_y^n}{\partial x} - 4\pi \Delta t j_z^{n+1/2}, \qquad (6.3.7)$$

$$\delta B_z = -\alpha c \Delta t \frac{\partial \delta E_y}{\partial x} - c \Delta t \frac{\partial E_y^n}{\partial x}, \qquad (6.3.8)$$

となる。式 (6.3.3) は静電成分であり、直ちに計算できる⁴。式 (6.3.5)-(6.3.8) を解くために、z 成分は整 数グリッド、y 成分は半整数グリッド上に定義し、空間微分を 2 次中央差分で近似すると、

$$\delta E_{y,i+1/2} = -p \left(\delta B_{z,i+1} - \delta B_{z,i} \right) + K_{y,i+1/2}, \tag{6.3.9}$$

$$\delta B_{y,i+1/2} = p \left(\delta E_{z,i+1} - \delta E_{z,i} \right) + L_{y,i+1/2}, \tag{6.3.10}$$

$$\delta E_{z,i} = p \left(\delta B_{y,i+1/2} - \delta B_{y,i-1/2} \right) + K_{z,i}, \qquad (6.3.11)$$

$$\delta B_{z,i} = -p \left(\delta E_{y,i+1/2} - \delta E_{y,i-1/2} \right) + L_{z,i}, \qquad (6.3.12)$$

となる。ここで $p = \alpha c \Delta t / \Delta x$ であり、K, Lは既知量で、

$$K_{y,i+1/2} = -\frac{c\Delta t}{\Delta x} \left(B_{z,i+1}^n - B_{z,i}^n \right) - 4\pi \Delta t j_{y,i+1/2}^{n+1/2}, \tag{6.3.13}$$

$$K_{z,i} = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \left(B_{y,i+1/2}^n - B_{y,i-1/2}^n \right) - 4\pi \Delta t j_{z,i}^{n+1/2}, \qquad (6.3.14)$$

$$L_{y,i+1/2} = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \left(E_{z,i+1}^n - E_{z,i}^n \right), \qquad (6.3.15)$$

$$L_{z,i} = -\frac{c\Delta t}{\Delta x} \left(E_{y,i+1/2}^n - E_{y,i-1/2}^n \right), \qquad (6.3.16)$$

である。式 (6.3.9)-(6.3.12)を整理すると、以下の式が得られる。

$$-p^{2}\delta E_{z,i-1} + (1+2p^{2})\,\delta E_{z,i} - p^{2}\delta E_{z,i+1} = p\left(L_{y,i+1/2} - L_{y,i-1/2}\right) + K_{z,i},\tag{6.3.17}$$

$$-p^{2}\delta B_{z,i-1} + (1+2p^{2})\delta B_{z,i} - p^{2}\delta B_{z,i+1} = -p\left(K_{y,i+1/2} - K_{y,i-1/2}\right) + L_{z,i}.$$
 (6.3.18)

これらは 3 重対角な連立 1 次方程式のため、Thomas 法を用いて直ちに解くことができる⁵。($\delta E_z, \delta B_z$) を式 (6.3.9) と (6.3.10) に代入して ($\delta E_u, \delta B_u$) を得る。

この手法は、時間空間精度は FDTD 法と同じ(α = 0.5 の場合)だが、陰的に解くため、光速の CFL 条件に束縛されない。よって、プラズマ速度が光速に比べ非常に小さいパラメータの計算において、時 間刻みを長く取っても安定に計算できる。

⁴このようにして決定した静電場が、ガウス則 (6.1.4) を満たしているよう注意する必要がある。電荷と電流が連続の式を 満たすように決定されていれば、これは満たされる。そうでない場合は、電位に関するポアソン方程式を解いて、静電成分を 修正する。

⁵多次元の場合は共役勾配法などの反復法を用いる。

6.4 変数と方程式の規格化

数値シミュレーションでは、変数に実際の物理量を代入することは行わず、規格化した値を用いる。 ブラソフシミュレーションでは電子スケールの現象を追跡するので、電子の特徴的な量で規格化すれば 良い。ここでは、

$$t: \omega_{pe}^{-1}$$

 $v: c$
 $x: \lambda_D$
 $q: e$ (電荷素量)
 $m: m_e$ (電子質量)
 $E, B: B_0$ (背景磁場強度)
 $f: n_0 c^{-3}$

 $\rho: en_0$

 $j:ecn_0$

を用いる。ここで、 $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi n_0 e^2/m_e}$ は電子プラズマ振動数、 $\lambda_D = \sqrt{kT_e/4\pi n_0 e^2}$ はデバイ長、 n_0 は背景密度、 T_e は電子温度である。すると、方程式系 (6.1.1)-(6.1.7) は規格化された量を用いて次のように表せる。

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \frac{\sqrt{2}\boldsymbol{v}}{v_{e;th}} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{\omega_{ge}}{\omega_{pe}} \left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \boldsymbol{v}} = 0, \tag{6.4.1}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{\sqrt{2}\boldsymbol{v}}{v_{e;th}} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{x}} + Z_i \frac{m_e}{m_i} \frac{\omega_{ge}}{\omega_{pe}} \left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{v}} = 0, \tag{6.4.2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{\sqrt{2}}{v_{e;th}} \nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{\omega_{pe}}{\omega_{ge}} \boldsymbol{j}, \qquad (6.4.3)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\frac{\sqrt{2}}{v_{e;th}} \nabla \times \boldsymbol{E}, \qquad (6.4.4)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{v_{e;th}}{\sqrt{2}} \frac{\omega_{pe}}{\omega_{ge}} \rho, \tag{6.4.5}$$

$$\rho = \int \left(Z_i f_i - f_e \right) d\boldsymbol{v},\tag{6.4.6}$$

$$\boldsymbol{j} = \int \boldsymbol{v} \left(Z_i f_i - f_e \right) d\boldsymbol{v}. \tag{6.4.7}$$

ここで、 $\omega_{ge} = eB_0/m_ec$ は電子ジャイロ振動数、 $v_{e;th} = \sqrt{\beta_e}\omega_{ge}/\omega_{pe}$ は光速で規格化された電子熱速度、 Z_i はイオンの電荷数である。熱速度はプラズマベータ値 $\beta_s = 8\pi n_0 kT_s/B_0^2$ をパラメータとして与える。イオンと電子の質量比 m_i/m_e 及び電子ジャイロ振動数とプラズマ振動数の比 ω_{ge}/ω_{pe} は運動論的シミュレーションにおける重要なパラメータである。

88



図 6.2: ブラソフ-マクスウェル系の時間発展のフローチャート。*f_v*, *f_x*はそれぞれ分布関数の速度空間及び実空間での更新を表す。

6.5 ブラソフ-マクスウェル系の時間更新

6.2-6.3 章で紹介した手法を組み合わせることで、ブラソフ-マクスウェル系の時間発展を追跡することが出来る。ここでは、系全体の時間精度が2次になるようなフローチャート(図 6.2)を紹介する。

- 0. プラズマ分布関数は $t = n\Delta t$ に、一方電磁場は $t = (n-1/2)\Delta t$ に定義する。 $(f^n, E^{n-1/2}, B^{n-1/2})$.
- 1. 分布関数 f^n から電流密度 j^n を計算する。
- 2. j^n を用いて、 $t = (n 1/2)\Delta t$ における電磁場を 1 ステップ更新する。 $(E^{n-1/2}, B^{n-1/2}) \rightarrow (E^{n+1/2}, B^{n+1/2}).$
- 3. $(E^{n+1/2}, B^{n+1/2})$ を用いて、6.2章で紹介した時間積分法に従って $t = n\Delta t$ における分布関数を1 ステップ更新する。 $f^n \to f^{n+1}$.

以上で、プラズマと電磁場が1ステップ分更新される。これは、粒子法で用いられる Leap-Frog 法に相当する。

陽的なスキームを使う限り、CFL条件を満たさなければならない。ブラソフシミュレーションでは、ブ ラソフ方程式の実空間の更新、速度空間の更新、マクスウェル方程式の更新、それぞれに対しての CFL 条件がある。速度空間の最大値を *v*_{max} とすると、

実空間移流:
$$v_{\max}\Delta t \le \Delta x,$$
 (6.5.1)

電場加速:
$$\frac{q_s E}{m_s} \Delta t \le \Delta v,$$
 (6.5.2)

ジャイロ運動:
$$\frac{q_s v_{\max} B}{m_s c} \Delta t \le \Delta v,$$
 (6.5.3)

マクスウェル方程式: $c\Delta t \le \Delta x$, (6.5.4)



図 6.3: 磁場に垂直方向に伝播する線形波動の分散関係図。(a) ブラソフシミュレーションの結果。(b) 粒子法の結果。カラースケール(任意値)は静電成分 *E_x*のフーリエ振幅。横軸、縦軸はそれぞれ電子ジャイロ半径、ジャイロ周波数で規格化された波数及び周波数。点線は上から、右カットオフ周波数、高域 混成周波数、左カットオフ周波数、低域混成周波数を表す。点破線は真空中の光速の分散関係を表す。

を満たす様に、実空間グリッド幅 Δx ,速度空間グリッド幅 Δv ,時間ステップ Δt を決定する。これらの うち厳しい条件は、式 (6.5.3) と (6.5.4)である⁶。加えて、図 6.2ではシステムを陽的に更新しているの で、プラズマ振動を分解する必要がある。よって

$$\omega_{pe}\Delta t \le 1,\tag{6.5.5}$$

も満たさなければならない。

6.6 ブラソフシミュレーション

磁化プラズマのブラソフシミュレーションの例について紹介する⁷。実空間は x 方向のみの 1 次元と し、速度空間は 2 次元とする。すなわち $v = (v_x, v_y, 0)$, $E = (E_x, E_y, 0)$, $B = (0, 0, B_z)$ である。プラズ マは陽子 ($Z_i = 1$) と電子で構成されている。

6.6.1 垂直伝播波動

まず線形問題として、静止しているプラズマ中の磁場に垂直方向に伝播する波動の計算を行った。シ ミュレーションパラメータは、 $m_i/m_e = 16$ 、 $\omega_{ge}/\omega_{pe} = 0.5$ 、 $\beta_i = \beta_e = 0.04$ 、実空間長は 512 デバイ長、

⁶6.3 章で紹介した陰的解法を用いれば、条件 (6.5.4) は不要である

⁷最も基本的な問題である、実空間1次元、速度空間1次元の静電問題については、多くの論文が出版されているため、本 記事では省略する。例えば文献(4)などを参照いただきたい。



図 6.4: 1次元垂直衝撃波のブラソフシミュレーション結果。(a,b) 電子位相空間分布 ($f_e(v_x, x), f_e(v_y, x)$)。 (c,d) イオン位相空間分布 ($f_i(v_x, x), f_i(v_y, x)$)。(e,f,g) 電磁場 (B_z, E_x, E_y)。横軸は電子慣性長で規格化 された空間長。速度は入射プラズマ速度、電場は上流での値 ($E_y = v_x B_z/c$) で規格化されている。

速度空間は電子 · イオン共に熱速度の ±4 倍まで取った。グリッド数は実空間に 512、速度空間に 50² である。時間刻みは $0.05/\sqrt{2}$ である。

図 6.3(a) は、 $\omega_{get} = 361.7$ まで計算した静電成分 E_x のフーリエ振幅(分散関係図)を示している。線 形理論で示されている電子バーンスタイン波(高波数で $\omega = n\omega_{ge}$ (n = 1, 2, ...)に漸近するブランチ) を確認できる。また、低周波・低波数ではイオンバーンスタイン波も確認されている。この計算では、電 子が 50 回転以上ジャイロ運動しているが、MMA 法を用いたため、エネルギー誤差は 10⁻⁶ である。

同じパラメータ条件の粒子法による結果を図 6.3(b) に示した。粒子法は、1 セルあたり 5,000 個の粒 子⁸を用いて、ブラソフシミュレーションと同程度のメモリ使用で計算を行った。比較すると、ブラソフ シミュレーションでは特に高波数のノイズがほぼ皆無であることがわかる。

6.6.2 垂直衝撃波

次に非線形問題として、垂直衝撃波の計算を行った。左境界から超音速の磁化プラズマを入射し、右境 界で反射させる。すると入射プラズマと反射プラズマとの間で2流体不安定が発生し、衝撃波に成長する。 衝撃波は左方向(上流)に伝播する。シミュレーションパラメータは、m_i/m_e = 25、ω_{ge}/ω_{pe} = 0.01、

⁸通常は1セルあたり100個程度である。

 $\beta_i = \beta_e = 1.0$ 、入射プラズマのアルフベンマッハ数 $M_A = 5$ (衝撃波静止系では約 7.5)、実空間長は 20,480 デバイ長、電子速度空間は入射速度の ±6 倍、イオン速度空間は入射速度の ±3 倍まで取った。グ リッド数は実空間に 1,024、速度空間に 72² である。時間刻みは 0.1 π である。

図 6.4 は、 $\omega_{ge}t$ = 314 におけるシミュレーション結果を示している。上から、電子位相空間分布 ($f_e(v_x, x), f_e(v_y, x)$)、イオン位相空間分布 ($f_i(v_x, x), f_i(v_y, x)$)、電磁場 (B_z, E_x, E_y) である。衝撃波面 (x = 50)を通過して電子圧力及び磁場が増加している様子がわかる (a,b,e)。衝撃波面においては、電 子とイオンの慣性差に起因して、衝撃波静電ポテンシャルが形成され、一部のイオンが反射されている (f.c)。衝撃波における保存則(ランキン-ユゴニオ条件)が満たされていることも確認されている。

この計算は、実空間グリッド幅がデバイ長の20倍で行った。粒子法では、実空間グリッド幅がデバイ 長より長くなると数値不安定を起こすが、ブラソフシミュレーションの場合、必ずしもそうではない。 そのため、ブラソフシミュレーションは、より大規模スケールの高精度計算が出来る可能性がある。

6.7 まとめと今後

無衝突プラズマの運動論的シミュレーション技法であるブラソフシミュレーションについて紹介した。 ブラソフシミュレーションは、粒子法に比べ複雑なテクニックと多くの計算機資源を必要とするが、そ の努力に見合う結果を得ることが出来る。大規模並列計算時代に向け、今後益々必要とされる技術であ り、多くのユーザによる継続的な研究開発が求められる。そこで、具体的な課題を挙げておく。

- 数値振動と拡散の抑制。著者らはマルチモーメント移流法を開発することにより、数値拡散を徹 底的に抑制する事に成功したが、数値振動は抑制しきれていない。任意のシミュレーション条件 で両者を完璧に抑制するスキームを開発することは不可能なので、トレードオフを考慮しつつ両 者を効果的に抑制するスキームを開発することが重要である。
- 速度空間更新における CFL 条件からの解放。剛体回転問題をオイラー的に解く場合、1回転を数 百分割程度の時間刻みを取る必要があり、計算負荷が大きい。CFL 条件に束縛されずに剛体回転 問題を安定に更新するスキームの開発は、計算負荷軽減はもちろん、計算科学の点でもインパク トがある。
- 速度空間への解適合格子法の適用。例えば非常に冷たいプラズマの高マッハ数衝撃波問題を扱う 場合、ドリフト速度が非常に速く、また非熱的粒子加速が発生する可能性もあるので、速度空間を 広く取らなければならない。一方で冷たい分布関数を分解しなければならない。よって、速度空 間に大量のメッシュを必要とする。解適合格子法を用いて、例えば分布中心には細かいメッシュを 用い、裾野付近には粗いメッシュを用いれば、コストを大幅に節約できる可能性がある。
- 相対論への拡張。相対論的プラズマを解く場合は、独立変数として v ではなく $u = \gamma v$ を用いる (γ はローレンツ因子)。この際問題になるのは、やはり回転である。ジャイロ周波数が速度に依 存するようになるので ($\omega_g = eB/\gamma mc$)、剛体回転ではなくなり、速度空間にシアが生じる。よっ て、数値振動の抑制がより重要になると考えられる。

6.7. まとめと今後

謝辞

本記事は、松本洋介氏(千葉大学)、天野孝伸氏(東京大学)との共同研究結果に基づいて執筆しました。

関連図書

- C. K. Birdsall and A. B. Langdon. Plasma Physics via Computer Simulation. Inst. of Phys. Publishing, Bristol/Philadelphia, 1991.
- [2] C. Z. Cheng and G. Knorr. The integration of the Vlasov equation in configuration space. Journal of Computational Physics, 22:330–351, November 1976.
- [3] N. Crouseilles, M. Mehrenberger, and E. Sonnendrücker. Conservative semi-Lagrangian schemes for Vlasov equations. *Journal of Computational Physics*, 229:1927–1953, March 2010.
- [4] F. Filbet and E. Sonnendrücker. Comparison of Eulerian Vlasov solvers. Computer Physics Communications, 150:247–266, February 2003.
- [5] M. Hoshino. Theoretical and Computational Studies of Plasma Kinetic Phenomena: Tearing Mode Instability and Foreshock Cyclotron Interaction. PhD thesis, Univ. Tokyo, 1986.
- [6] M. Hoshino. The electrostatic effect for the collisionless tearing mode. J. Geophys. Res., 92:7368– 7380, July 1987.
- [7] A. Mangeney, F. Califano, C. Cavazzoni, and P. Travnicek. A Numerical Scheme for the Integration of the Vlasov-Maxwell System of Equations. *Journal of Computational Physics*, 179:495–538, July 2002.
- [8] T. Minoshima, Y. Matsumoto, and T. Amano. Multi-moment advection scheme for Vlasov simulations. *Journal of Computational Physics*, 230:6800–6823, July 2011.
- [9] T. Minoshima, Y. Matsumoto, and T. Amano. Multi-moment advection scheme in three dimension for Vlasov simulations of magnetized plasma. *ArXiv e-prints*, February 2012.
- [10] Y. Ogata, T. Yabe, and k. Odagaki. An Accurate Numerical Scheme for Maxwell Equation with CIP-Method of Characteristics. *Communications in Computational Physics*, 1:311–335, April 2006.
- [11] H. Schmitz and R. Grauer. Comparison of time splitting and backsubstitution methods for integrating Vlasov's equation with magnetic fields. *Computer Physics Communications*, 175:86– 92, July 2006.
- [12] H. Schmitz and R. Grauer. Kinetic Vlasov simulations of collisionless magnetic reconnection. *Physics of Plasmas*, 13(9):092309–+, September 2006.

- [13] K. Takizawa, T. Yabe, and T. Nakamura. Multi-dimensional semi-Lagrangian scheme that guarantees exact conservation. *Computer Physics Communications*, 148:137–159, October 2002.
- [14] T. Umeda, J.-I. Miwa, Y. Matsumoto, T. K. M. Nakamura, K. Togano, K. Fukazawa, and I. Shinohara. Full electromagnetic Vlasov code simulation of the Kelvin-Helmholtz instability. *Physics* of Plasmas, 17(5):052311-+, May 2010.