

CIP 法入門

(2000 年 9 月 19 日改訂版)

工藤哲洋

数値 MHD 入門セミナー

日時：2000 年 9 月 11 日 - 9 月 15 日

場所：野辺山太陽電波観測所

1 CIP 法のまとめ

CIP(Cubic Interpolated Pseudo-particle/Profile) 法は双曲型の移流方程式を差分法を用いて解く方法である [1]. 例えば,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

のような式を CIP 法で解く. このとき, もし, $u > 0$ なら, その差分式は

$$f_i^{n+1} = [(a_i \xi + b_i) \xi + \dot{f}_i] \xi + f_i^n \quad (2)$$

$$\dot{f}_i^{n+1} = (3a_i \xi + 2b_i) \xi + \dot{f}_i^n \quad (3)$$

となる. ここで, $\dot{f}$ は f の x 微分. また,

$$a_i = \frac{\dot{f}_i^n + \dot{f}_{i-1}^n}{\Delta x^2} - \frac{2(f_i^n - f_{i-1}^n)}{\Delta x^3} \quad (4)$$

$$b_i = \frac{3(f_{i-1}^n - f_i^n)}{\Delta x^2} + \frac{2\dot{f}_i^n + \dot{f}_{i-1}^n}{\Delta x} \quad (5)$$

$$\xi = -u \Delta t \quad (6)$$

である. もし, $u < 0$ なら, $\Delta x \rightarrow -\Delta x$ とし, $i-1 \rightarrow i+1$ と書きかえた式を用いる. CIP 法は, f の初期条件とともに, $\dot{f}$ の初期条件も必要であることに注意.

(プログラム例)

```
-----
Do 100 i=1,ix-1

    xi=-u(i)*dt

    if(u(i).gt.0.) then
        isg=-1
    else
        isg=1
    endif
    ipm=i+isg
    dd=isg*dx

    a=(df(i)+df(ipm))/dd**2 + 2.*(f(i)-f(ipm))/dd**3
    b=3.*(f(ipm)-f(i))/dd**2 - (2*df(i)+df(ipm))/dd

    fn(i)=( (a*xi+b)*xi+df(i) )*xi+f(i)
    dfn(i)=(3.*a*xi+2.*b)*xi + df(i)

100 continue
-----
```

2 CIP 法の考え方

2.1 移流方程式の差分解法

移流方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

は、速度 u が一定の時、

$$f(x, t) = f(x - ut, 0) \quad (8)$$

という厳密解を持つ (図 1)。

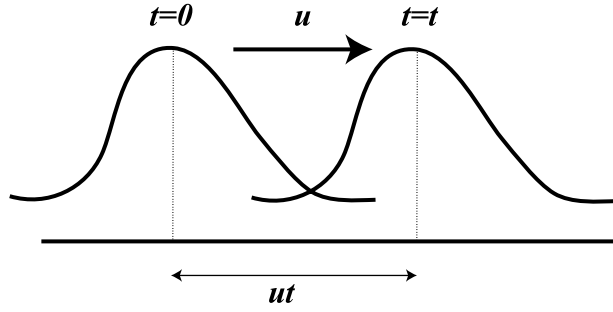


図 1: 速度一定の時の波動方程式の時刻 t での解. 単に, $t = 0$ の形を ut だけ移動したもの.

実際には, 速度 u が時間的空間的に変化していても, 短い時間内であればだいたい一定とみなせる. よって,

$$f(x, t) \simeq f(x - u\Delta t, t - \Delta t) \quad (9)$$

と書ける. 書きなおすと,

$$f(x, t + \Delta t) \simeq f(x - u\Delta t, t) \quad (10)$$

となる. この式は, 時刻で Δt だけ進んだ x での値を求めたいと思ったら, 今の時刻 (時刻 t) の $x - u\Delta t$ での値を求めればよいことを示している.

実際の計算では, 格子を張って連続量を離散量に置き換えて解く (図 2). このとき, Δt は小さくとる必要があるので, 通常は $u\Delta t < \Delta x$ ととる. そのため, $x_i - u\Delta t$ の位置の値はグリッド状にはない. $u > 0$ なら, そこでの値は x_{i-1} と x_i の値の間にある. 従って, $x_i - u\Delta t$ での値を x_{i-1} と x_i での値などから補間して求める必要がある.

2.2 CIP 法

$x_i - u\Delta t$ での値を補間して求める方法の違いによっていろいろな方法が存在する. (例 1, 風上差分法: x_{i-1} と x_i の値から 1 次関数で補間する方法. 例 2, Lax-Wendroff 法: x_{i-1} , x_i , x_{i+1} の 3 点の値を用いて, 2 次関数で補間する方法.)

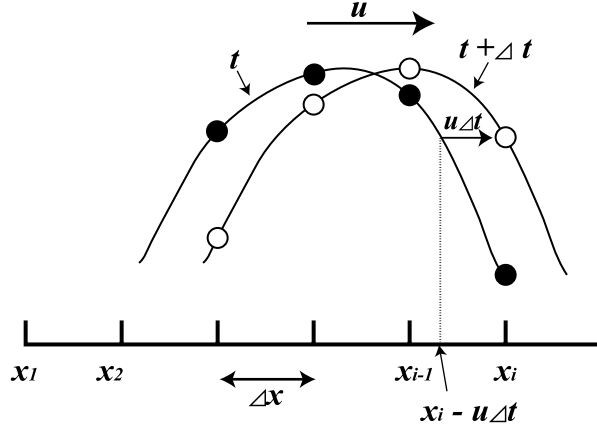


図 2: 離散的に与えられた f . 時間 Δt の間に, $f(x)$ は, 形を $u\Delta t$ だけ移動する.

CIP 法では, x_{i-1} と x_i の 2 点の値を 3 次関数で補間する. x_{i-1} と x_i の区間の関数を $F_i(x)$ とすると,

$$F_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + \dot{f}_i^n(x - x_i) + f_i^n \quad (11)$$

ここで, $\dot{f}$ は f の x 微分である. 今, 関数 F_i が隣の区間 (x_{i-2} と x_{i-1} の間の区間) の関数 F_{i-1} と x_{i-1} において滑らかにつながっていることを要請する. すなわち, 関数と一階微分が連続であることを要請すると

$$F_i(x_{i-1}) = F_{i-1}(x_{i-1}) \quad (12)$$

$$\frac{dF_i(x_{i-1})}{dx} = \frac{dF_{i-1}(x_{i-1})}{dx} \quad (13)$$

となる. この 2 式より,

$$a_i = \frac{\dot{f}_i^n + \dot{f}_{i-1}^n}{\Delta x^2} - \frac{2(f_i^n - f_{i-1}^n)}{\Delta x^3} \quad (14)$$

$$b_i = \frac{3(f_{i-1}^n - f_i^n)}{\Delta x^2} + \frac{2\dot{f}_i^n + \dot{f}_{i-1}^n}{\Delta x} \quad (15)$$

が求まる.

f^n と $\dot{f}^n$ を知っていれば, 式 (14), (15) と式 (11) を用いて, $F_i(x)$ が求まる. しかし, f^n は初期条件を与えれば時間発展の解として求まる既

知量であるが、 $\dot{f}^n$ は通常は未知数である。 $\dot{f}^n$ を求めるために $F_i(x)$ の 2 階微分が連続であることを要請する方法もある（スプライン補間法）。しかし、その方法は多くの演算量を必要として実用的ではない。

CIP 法では $\dot{f}^n$ も f^n と同様に時間発展の解として求めることにする。波動方程式 (7) を u が一定として空間で微分すると、

$$\frac{\partial \dot{f}}{\partial t} + u \frac{\partial \dot{f}}{\partial x} = 0 \quad (16)$$

となり、 $\dot{f}$ は f と同じ波動方程式に従う。よって、 $\dot{f}$ にも式 (10) を適用することができる。したがって、時刻 Δt だけ進んだ値 f^{n+1} と $\dot{f}^{n+1}$ は

$$f_i^{n+1} = F(x_i - u\Delta t) = a_i \xi^3 + b_i \xi^2 + \dot{f}_i^n \xi + f_i^n \quad (17)$$

$$\dot{f}_i^{n+1} = \frac{dF(x_i - u\Delta t)}{dx} = 3a_i \xi^2 + 2b_i \xi + \dot{f}_i^n \quad (18)$$

のように求めることができる。ここで、

$$\xi = -u\Delta t \quad (19)$$

である。初期条件として、 f_i^0 と $\dot{f}_i^0$ を与えれば、式 (17) と (18) を用いて f_i の離散的な時間発展を求めることが出来る。

3 CIP 法の計算例

図 3 と図 4 に計算結果の例を載せた。速度一定で、右方向に伝播する矩形波と三角波の計算である。比較のため、風上差分法と Lax-Wendroff 法で計算した結果も載せた。CIP 法がより解析的な解に近い形状を保っていることがわかる。

4 非線型方程式への応用

以下のような双曲型の方程式を考える。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(uf)}{\partial x} = g. \quad (20)$$

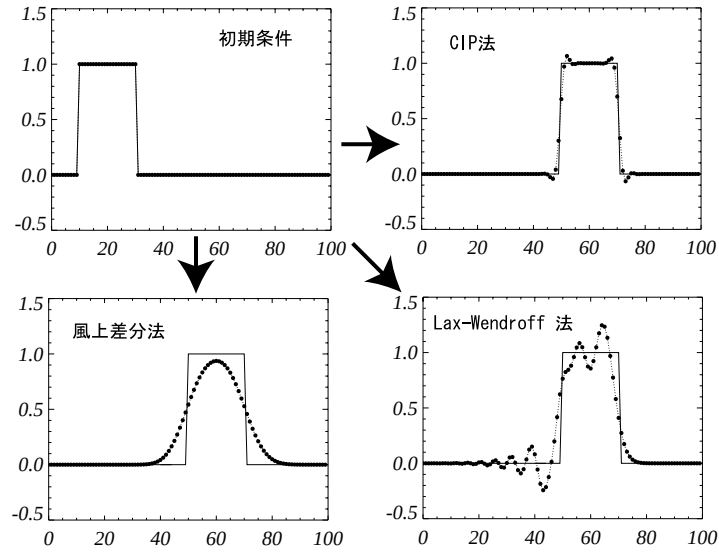


図 3: 矩形波の伝播. $u = 1$, $\Delta x = 1$, $\Delta t = 0.2$ で 200 ステップ計算した結果である. 実線が厳密解. 黒丸と点線が計算結果.

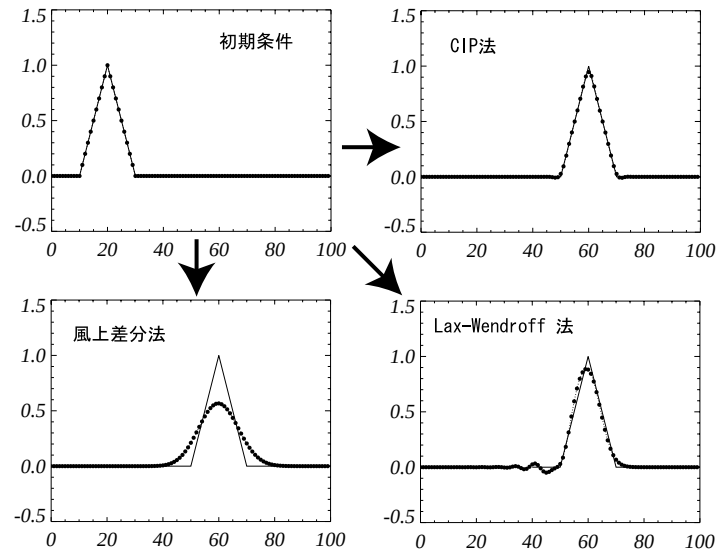


図 4: 三角波の伝播. $u = 1$, $\Delta x = 1$, $\Delta t = 0.2$ で 200 ステップ計算した結果である. 実線が厳密解. 黒丸と点線が計算結果.

ここで g は f の関数である．この式を変形すると，

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = g - f \frac{\partial u}{\partial x} \equiv G \quad (21)$$

となる．また，式 (21) を x に関して微分すると，

$$\frac{\partial \dot{f}}{\partial t} + u \frac{\partial \dot{f}}{\partial x} = \dot{G} - \dot{f} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (22)$$

である．

式 (20) を CIP 法で解くためには，式 (21) と (22) を次の 2 つのフェイズに分解して解く．

- 非移流フェイズ

$$\frac{\partial f}{\partial t} = G \quad (23)$$

$$\frac{\partial \dot{f}}{\partial t} = \dot{G} - \dot{f} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (24)$$

- 移流フェイズ

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial \dot{f}}{\partial t} + u \frac{\partial \dot{f}}{\partial x} = 0 \quad (26)$$

4.1 非移流フェイズ

非移流フェイズでは，単純な時間前進差分と空間中心差分により差分化する．方程式 (23) の差分形は，

$$f_i^* = f_i^n + G_i \Delta t \quad (27)$$

となる．ここで， $*$ は非移流フェイズでの時間発展後の値を意味する．次に，式 (24) の差分形は式 (27) を使うと，

$$\begin{aligned} \dot{f}_i^* &= \dot{f}_i^n + \frac{G_{i+1} - G_{i-1}}{2\Delta x} \Delta t - \dot{f}_i^n \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \Delta t \\ &= \dot{f}_i^n + \frac{(f_{i+1}^* - f_{i+1}^n) - (f_{i-1}^* - f_{i-1}^n)}{2\Delta x} - \dot{f}_i^n \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \Delta t \end{aligned} \quad (28)$$

4.2 移流フェイズ

f^* と $\dot{f}^*$ に CIP 法の差分式を適用し,

$$f_i^{n+1} = [(a_i \xi + b_i) \xi + \dot{f}_i^*] \xi + f_i^* \quad (29)$$

$$\dot{f}_i^{n+1} = (3a_i \xi + 2b_i) \xi + \dot{f}_i^* \quad (30)$$

とする. ここで, $u > 0$ なら

$$a_i = \frac{\dot{f}_i^* + \dot{f}_{i-1}^*}{\Delta x^2} - \frac{2(f_i^* - f_{i-1}^*)}{\Delta x^3} \quad (31)$$

$$b_i = \frac{3(f_{i-1}^* - f_i^*)}{\Delta x^2} + \frac{2\dot{f}_i^* + \dot{f}_{i-1}^*}{\Delta x} \quad (32)$$

$$\xi = -u \Delta t \quad (33)$$

である. $u < 0$ なら, $\Delta x \rightarrow -\Delta x$ とし, $i-1 \rightarrow i+1$ と書きかえた式を用いる.

5 流体力学方程式への応用

5.1 基礎方程式

1次元デカルト座標での流体力学の基礎方程式は,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} \quad (34)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (35)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} = -\frac{p}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (36)$$

となる. ここで, ρ は密度, u は速度, p は圧力, e は単位質量あたりの内部エネルギーである. 理想気体を仮定すると,

$$e = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \quad (37)$$

である（状態方程式）.

式 (21) と比較して, f や G をベクトルのように扱くと,

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \mathbf{G} \quad (38)$$

において,

$$\mathbf{f} = (\rho, u, e) \quad (39)$$

$$\mathbf{G} = \left(-\rho \frac{\partial u}{\partial x}, -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, -\frac{p}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (40)$$

となる. よって, 前節と同様に, それぞれの式を非移流フェイズと移流フェイズに分解して差分することによって, CIP 法を適用することができる.

5.2 互い違い格子（スタaggerドグリッド）

式 (34) から (36) における, 非移流フェイズの差分において, 互い違い格子を使うと便利である. 互い違い格子とは, 速度とそれ以外の物理量を互い違いの場所で定義する方法である (図 5). それぞれの非移流フェイズの差分を互い違い格子で行うと,

$$\frac{\rho_i^* - \rho_i^n}{\Delta t} = -\rho_i^n \frac{u_{i+1/2}^n - u_{i-1/2}^n}{\Delta x} \quad (41)$$

$$\frac{u_{i+1/2}^* - u_{i+1/2}^n}{\Delta t} = -\frac{2}{\rho_{i+1}^n + \rho_i^n} \frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{\Delta x} \quad (42)$$

$$\frac{e_i^* - e_i^n}{\Delta t} = -\frac{p_i^n}{\rho_i^n} \frac{u_{i+1/2}^n - u_{i-1/2}^n}{\Delta x} \quad (43)$$

となる. ただし, 数値計算の安定のため, 式 (43) の代わりに,

$$\frac{e_i^* - e_i^n}{\Delta t} = -\frac{p_i^n}{\rho_i^n} \frac{u_{i+1/2}^* - u_{i-1/2}^* + u_{i+1/2}^n - u_{i-1/2}^n}{2\Delta x} \quad (44)$$

を使ったほうがよいようである [2].

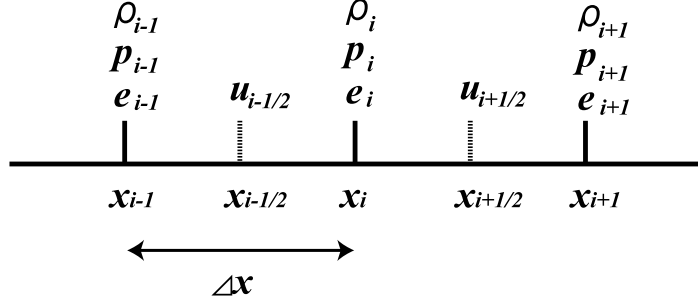


図 5: 互い違い格子. 速度とそれ以外の物理量を互い違いの場所で定義する.

5.3 人工粘性

衝撃波などを安定に解くため, 圧力に人工粘性項を加える. ここでは,

$$q_i^n = \begin{cases} \alpha(-\rho_i^n C_s \Delta u + \frac{\gamma+1}{2} \rho_i^n \Delta u^2) & (\text{if } \Delta u < 0) \\ 0 & (\text{if } \Delta u \geq 0) \end{cases} \quad (45)$$

のような人工粘性を与える. ここで, $C_s = \sqrt{\gamma p_i^n / \rho_i^n}$ は音速, $\Delta u = u_{i+1/2}^n - u_{i-1/2}^n$ である. α はパラメータで $\alpha = 0.6 - 1$ くらいの値が使われる.

人工粘性を入れた差分式をもう一度書くと,

$$\frac{\rho_i^* - \rho_i^n}{\Delta t} = -\rho_i^n \frac{u_{i+1/2}^n - u_{i-1/2}^n}{\Delta x} \quad (46)$$

$$\frac{u_{i+1/2}^* - u_{i+1/2}^n}{\Delta t} = -\frac{2}{\rho_{i+1}^n + \rho_i^n} \frac{(p_{i+1}^n + q_{i+1}^n) - (p_i^n + q_i^n)}{\Delta x} \quad (47)$$

$$\frac{e_i^* - e_i^n}{\Delta t} = -\frac{p_i^n + q_i^n}{\rho_i^n} \frac{u_{i+1/2}^* - u_{i-1/2}^* + u_{i+1/2}^n - u_{i-1/2}^n}{2\Delta x} \quad (48)$$

となる.

5.4 流体力学方程式を解く手順

1. 初期条件の設定.

$\rho^0, u^0, e^0, \rho^0, \dot{u}^0, \dot{e}^0$ を決める. ρ^0, e^0 から状態方程式 (37) を用いて, p^0 が求まる.

2. 非移流フェイズ (物理量)

式 (46), (47), (48) を用いて, ρ^*, u^*, e^* を求める.

3. 非移流フェイズ (微分量)

式 (28) を用いて, $\dot{\rho}^*, \dot{u}^*, \dot{e}^*$ を求める.

4. 移流フェイズ

$(\rho^*, \dot{\rho}^*), (u^*, \dot{u}^*), (e^*, \dot{e}^*)$, に対して CIP 法を用いて時間を進め, $(\rho^{n+1}, \dot{\rho}^{n+1}), (u^{n+1}, \dot{u}^{n+1}), (e^{n+1}, \dot{e}^{n+1})$, を求める. ただし, 互い違い格子を用いているときは, $(\rho^*, \dot{\rho}^*)$ と $(e^*, \dot{e}^*)$ に対しては, $u_{ad} = (u_{i+1/2}^n + u_{i-1/2}^n)/2$ を用いて移流すること.

また, p^{n+1} は ρ^{n+1}, e^{n+1} から状態方程式 (37) を用いて求まる.

5. 次のステップへ

2. から 4. を繰り返す.

5.5 CIP 法で流体力学方程式を解いた計算例

計算例として, 衝撃波問題を図 6 に示した. 初期条件として, 左半分を $(\rho = 1.0, p = 1.0, u = 0)$ 右半分を $(\rho = 0.125, p = 0.1, u = 0)$ とした典型的な問題である. 厳密解をほぼ再現していることがわかる.

5.6 最近の CIP 法の発展

1. 非移流項を解いてから移流項を解くのではなく, 移流項を解いてから非移流項を解いたほうが保存量の保存性がよい.
2. エネルギー方程式を陰解法にすることで, 気体と液体と固体とを同時に解くことができる.
3. $F(x)$ を 3 次関数ではなく有理関数を用いることで, 単調性を保証する.
4. 保存形を用いた CIP 法.

など, 詳しくは文献 [3], [4], [5] にまとめられている.

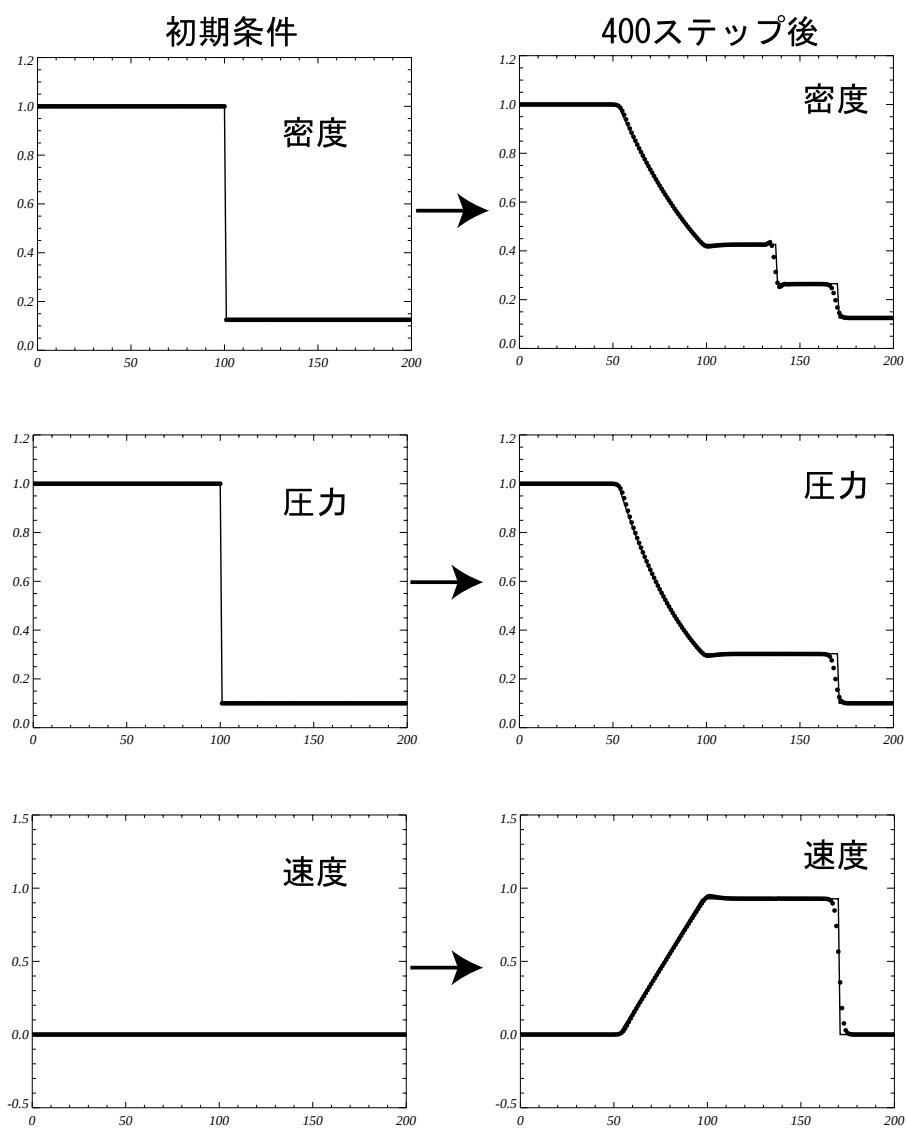


図 6: 衝撃波問題. $\Delta x = 1$, $\Delta t = 0.1$, $\gamma = 1.4$ で 400 ステップ計算した結果である. 実線が厳密解. 黒丸が計算結果.

参考文献

- [1] 「パソコンによるシミュレーション物理」矢部孝, 他 (朝倉書店 1992 年)
- [2] T.Yabe and T.Aoki: A Universal Solver for Hyperbolic Equations by Cubic-Polynomial Interpolation I. One-Dimensional Solver; Computer Physics Communications, vol.66, pp.219-232, (1991)
- [3] 矢部孝, 肖鋒: 固体・液体・気体の統一解法と CIP 法 (1): 日本数値流体力学会誌, 第 7 巻, 第 2 号, pp70-81
- [4] 矢部孝, 肖鋒: 固体・液体・気体の統一解法と CIP 法 (2): 日本数値流体力学会誌, 第 7 巻, 第 3 号, pp103-114
- [5] 矢部孝, 肖鋒, 中村恭志: 固体・液体・気体の統一解法と CIP 法 (3): 日本数値流体力学会誌, 第 7 巻, 第 4 号, pp133-141