

平均場モデルを用いた 太陽差動回転の 数値シミュレーション

宇宙物理学研究室 齊藤崇太



CHIBA UNIVERSITY

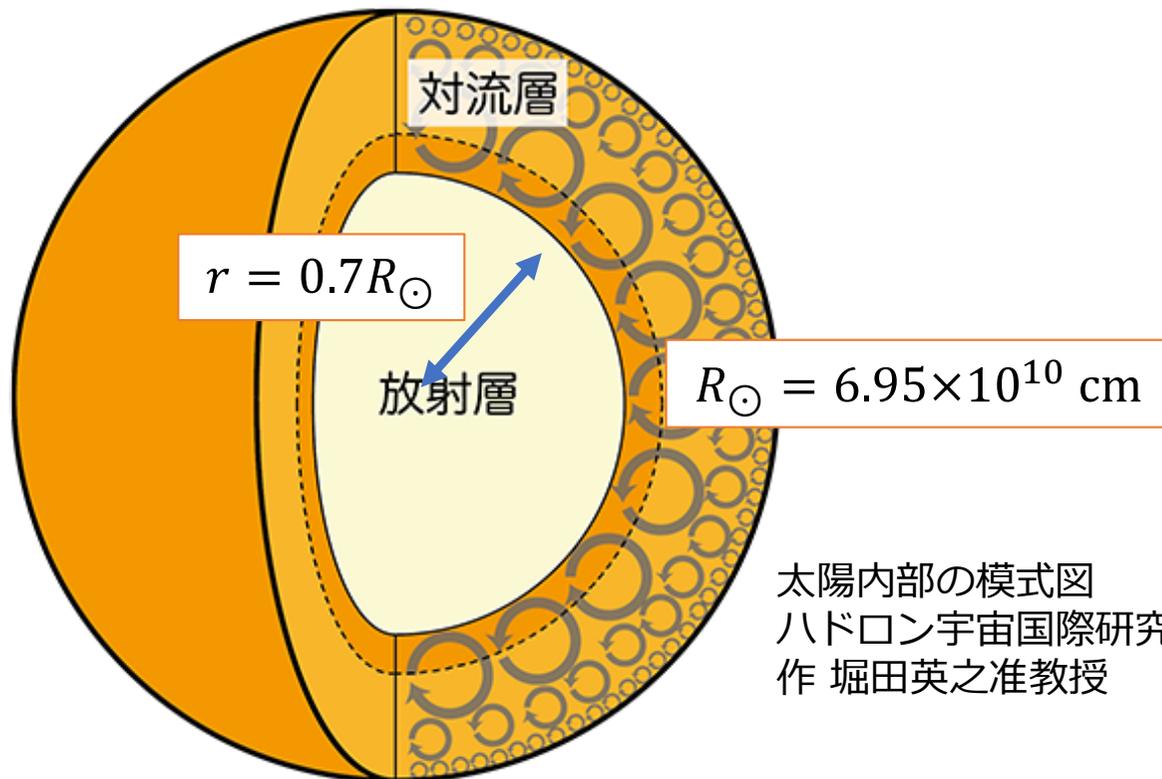
概要

太陽の内部構造と対流層

対流層とは、

太陽の中心からの距離が約 $0.7R_{\odot}$ 以上の領域に位置する。

対流層では、乱流による角運動量輸送により差動回転が生成される。



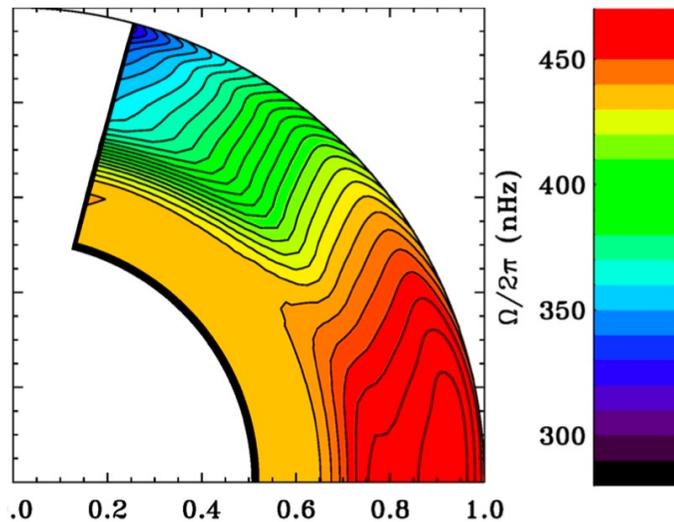
太陽内部の模式図
ハドロン宇宙国際研究センター
作 堀田英之准教授

差動回転

差動回転

太陽の差動回転の特徴

- 赤道が速く、極が遅い
- テイラープラウドマンの定理に従わない

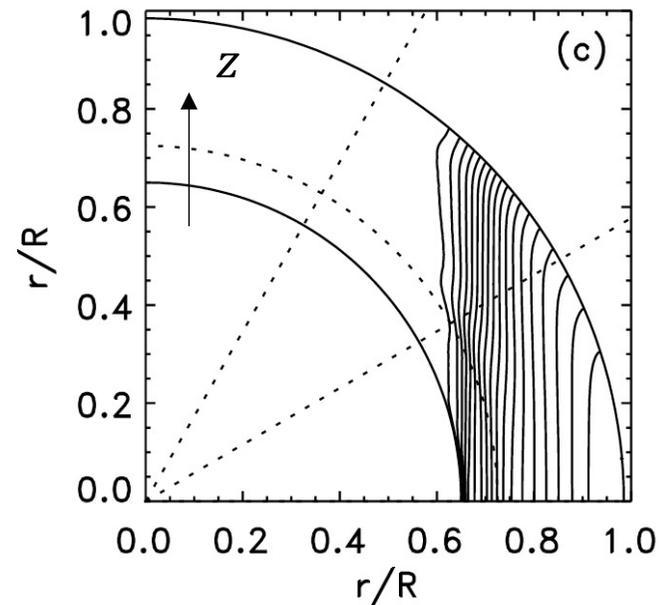


SDOに搭載されたHMIの観測による太陽の自転速度 (Broomhall+2014)

テイラープラウドマンの定理

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0$$

Ω : 回転角速度
 z : 回転軸の方向



TPの定理に従う差動回転の様子
Rempel2005

差動回転

差動回転の生成

$$\frac{\partial \omega_\phi}{\partial t} = \boxed{[\dots]} + \boxed{r \sin \theta \frac{\partial \Omega^2}{\partial z}} - \boxed{\frac{g}{\gamma r} \frac{\partial s_1}{\partial \theta}}$$

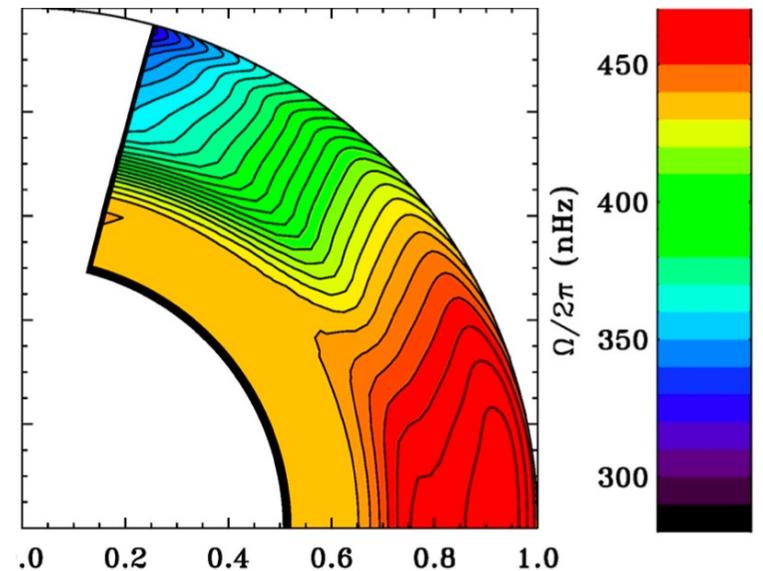
移流項 コリオリカ 浮力

ϕ 方向の渦度方程式

定常状態では、
コリオリカと浮力が釣り合う。

$$\boxed{r \sin \theta \frac{\partial \Omega^2}{\partial z} = \frac{g}{\gamma r} \frac{\partial s_1}{\partial \theta}}$$

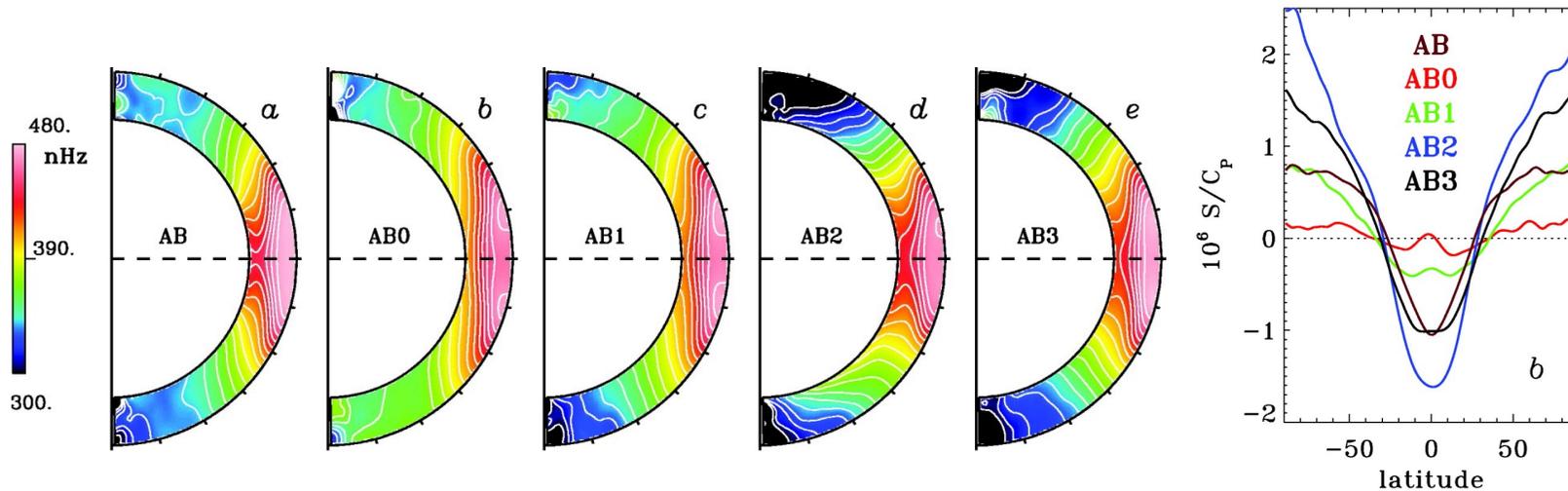
→極が赤道より10度程高温である
必要がある。
(背景場は約200万度)



SDOに搭載されたHMIの観測による
太陽の自転速度 (Broomhall+2014)

差動回転

エントロピー分布と差動回転



$r = 0.84R_{\odot}$ での
エントロピー分布

各エントロピー分布での角速度分布

Miesch+2006

3次元熱対流モデルではエントロピー分布が変わると極が遅くなることが知られている。

→ 3次元熱対流モデルは複雑であり、その直接的原因は明らかになっていない。

研究目的

二次元平均場モデルのコードにより再現される差動回転においても、内部エントロピー勾配を変更することで太陽の極の方で自転角速度が遅くなることを再現できるかを確認する。

平均場モデル

平均場近似

差動回転を生成する乱流角運動量輸送を定量的に扱うための近似。

運動量保存則

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) + [\dots]$$

ρ : 密度
 \mathbf{v} : 速度

を考える。

速度 \mathbf{v} を ϕ 方向に平均した平均場部分 $\langle \mathbf{v} \rangle_\phi$ と乱流場部分 \mathbf{v}' に分けて、さらに、この方程式全体を ϕ 方向に平均する

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \langle \mathbf{v} \rangle) = -\nabla \cdot (\rho \langle \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{v} \rangle) - \nabla \cdot (\rho \langle \mathbf{v}' \mathbf{v}' \rangle) + [\dots]$$

右辺第2項に乱流の効果をまとめられる。 ↑レイノルズ応力

平均場モデル

レイノルズ応力をモデル化して数値シミュレーションを行う。

方程式

基礎方程式(軸対称な方程式)

連続の式(質量保存則)

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r \rho_0) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta \rho_0)$$

運動方程式(運動量保存則)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho_0} (\rho_1 \mathbf{g} - \nabla p_1) + \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{R} \quad \mathbf{R}: \text{レイノルズ応力}$$

エントロピー方程式

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} = -v_r \frac{\partial s_1}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial s_1}{\partial \theta} + v_r \frac{\gamma \delta}{H_p} + \frac{\gamma - 1}{p_0} \mathcal{Q} + \frac{1}{\rho_0 T_0} \text{div}(\kappa_t \rho_0 T_0 \text{grad} s_1)$$

本研究では、定常状態でのエントロピー分布を与えて差動回転を再現するためエントロピー方程式は解かない。

角運動量輸送

角運動量輸送

$$R_{ik} = -\rho_0 \langle v'_i v'_k \rangle = \nu \rho_0 \left(E_{ik} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v} + \Lambda_{ik} \right)$$

$$E_{ik} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$$

$\nu = 5 \times 10^{12} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$; 乱流粘性率

レイノルズ応力は、粘性力としてモデル化。
角運動量を輸送し、差動回転を駆動する項
として Λ_{ik} 項を導入。

運動方程式より、角運動量輸送の方程式は

$$\frac{\partial(\rho \langle L \rangle)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \langle \mathbf{v}_\lambda \rangle \langle L \rangle) + \nabla \cdot (r \sin \theta R_{r\phi} \mathbf{e}_r + r \sin \theta R_{\theta\phi} \mathbf{e}_\theta)$$

→ Λ_{ik} 項は、 $\Lambda_{r\phi}$ と $\Lambda_{\theta\phi}$ を適切にモデル化する。

L : 単位質量当たりの角運動量



角運動量輸送

Λ 項のモデル化 (Rempel, 2005より)

$$\Lambda_{r\phi} = \Lambda_{\phi r} = +L(r, \theta) \cos(\theta + \lambda(r, \theta))$$

$$\Lambda_{\theta\phi} = \Lambda_{\phi\theta} = -L(r, \theta) \sin(\theta + \lambda(r, \theta))$$

$L(r, \theta)$: 乱流角運動量フラックスの振幅

$\lambda(r, \theta)$: 回転軸に対する乱流角運動量フラックスの傾き

$$L(r, \theta) = \Lambda_0 \Omega_0 \frac{f(r, \theta)}{\max |f(r, \theta)|} \quad f(r, \theta) = (\sin \theta)^n \cos \theta \tanh\left(\frac{r_{\max} - r}{d}\right)$$

本研究では、各パラメーターを以下のように設定した。

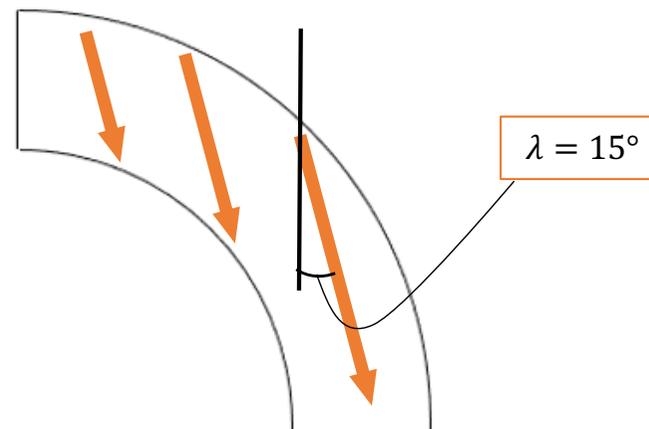
$$\Lambda_0 = 0.8$$

$$\Omega_0 = 2\pi \times 413 \text{ nHz}$$

$$d = 0.025 R_{\odot}$$

$$n = 2$$

$$\lambda = 15^\circ$$



方程式

基礎方程式(軸対称な方程式)

連続の式(質量保存則)

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r \rho_0) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta \rho_0)$$

運動方程式(運動量保存則)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho_0} (\rho_1 \mathbf{g} - \nabla p_1) + \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{R} \quad \mathbf{R}: \text{レイノルズ応力}$$

エントロピー方程式

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} = -v_r \frac{\partial s_1}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial s_1}{\partial \theta} + v_r \frac{\gamma \delta}{H_p} + \frac{\gamma - 1}{p_0} Q + \frac{1}{\rho_0 T_0} \text{div}(\kappa_t \rho_0 T_0 \text{grad} s_1)$$

本研究では、定常状態でのエントロピー分布を与えて差動回転を再現するためエントロピー方程式は解かない

背景成層

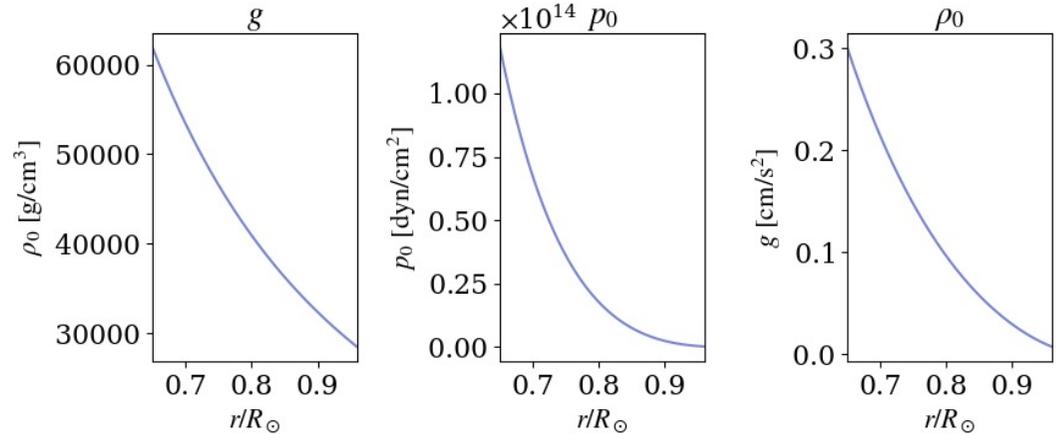
仮定

断熱的静水圧平衡と重力加速度を以下のように仮定する。

$$\frac{dp_0}{dr} = -\rho_0 g \quad (\text{静水圧平衡})$$

$$\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} = \text{const.} = \frac{p_{bc}}{\rho_{bc}^\gamma} \quad (\text{断熱})$$

$$g(r) = g_{bc} \left(\frac{r}{r_{bc}} \right)^{-2} \quad (\text{重力加速度})$$



背景成層

$$p_0 = p_{bc} \left[1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{r_{bc}}{H_{bc}} \left(\frac{r_{bc}}{r} - 1 \right) \right]^{\gamma/\gamma - 1}$$

$$\rho_0 = \rho_{bc} \left[1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{r_{bc}}{H_{bc}} \left(\frac{r_{bc}}{r} - 1 \right) \right]^{1/\gamma - 1}$$

添字bcは対流層の底での値

$$\begin{aligned} r_{bc} &= 0.71R_\odot \\ p_{bc} &= 6 \times 10^{13} \text{ dyn cm}^{-2} \\ \rho_{bc} &= 0.2 \text{ g cm}^{-3} \\ g_{bc} &= 5.2 \times 10^4 \text{ cm s}^{-2} \\ H_{bc} &= p_{bc}/(\rho_{bc}g) \\ (R_\odot &= 6.95 \times 10^{10} \text{ cm}) \end{aligned}$$

数値シミュレーション

シミュレーションの設定 (方程式)

連続の式、 r, θ 方向の運動方程式は保存形に近い形で解いた。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_1}{\partial t} &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r \rho_0) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta \rho_0) \\ \frac{\partial v_r}{\partial t} &= -v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\theta^2}{r} - \frac{1}{\rho_0} \left[\rho_1 g(r) + \frac{\partial p_1}{\partial r} \right] + (2\Omega_0 \Omega_1 + \Omega_1^2) r \sin^2 \theta + \frac{F_r}{\rho_0} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} &= -v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{1}{\rho_0} \frac{1}{r} \frac{\partial p_1}{\partial \theta} + (2\Omega_0 \Omega_1 + \Omega_1^2) r \sin \theta \cos \theta + \frac{F_\theta}{\rho_0}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} (r^2 \sin \theta \rho_1) &= -\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta \rho_0 v_r) - \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \rho_0 v_\theta) \\ \frac{\partial}{\partial t} (r^2 \sin \theta \rho_0 v_r) &= -\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta \rho_0 v_r v_r) - \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \rho_0 v_r v_\theta) \\ &\quad + r \sin \theta \rho_0 (v_\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta (2\Omega_0 \Omega_1 + \Omega_1^2)) - r^2 \sin \theta \left(\rho_1 g + \frac{\partial p_1}{\partial r} \right) + r^2 \sin \theta F_r \\ \frac{\partial}{\partial t} (r^2 \sin \theta \rho_0 v_\theta) &= -\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta \rho_0 v_\theta v_r) - \frac{\partial}{\partial \theta} (r^2 \sin \theta \rho_0 v_\theta \frac{v_\theta}{r}) \\ &\quad - r \sin \theta \rho_0 (v_\theta v_r - r^2 \sin \theta \cos \theta (2\Omega_0 \Omega_1 + \Omega_1^2)) - r^2 \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p_1}{r} \right) + r^2 \sin \theta F_\theta\end{aligned}$$

数値シミュレーション

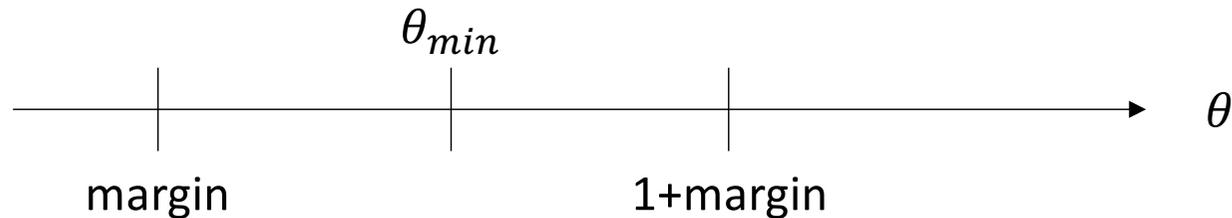
シミュレーションの設定

計算領域

r 方向 : $0.65R_{\odot} \rightarrow 0.96R_{\odot}$ ($R_{\odot} = 6.9599 \times 10^{10}$ cm)

θ 方向 : $5^{\circ} \rightarrow 90^{\circ}$

※最小値が境界になるように座標を設定



解像度

(r)128×(θ)256

時間発展

1ヶ月おきに出力して5年間計算

数値シミュレーション

計算スキーム

空間差分：2次精度中央差分

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2\Delta x}$$

$$F(x + \Delta x) = F(x) + \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} (\Delta x)^3 + \dots$$

$$F(x - \Delta x) = F(x) - \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (\Delta x)^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} (\Delta x)^3 + \dots$$

2式の差を取ると、

$$F(x + \Delta x) - F(x - \Delta x) = 2 \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} (\Delta x)^3 + \dots$$

$$\rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

誤差

数値シミュレーション

計算スキーム

時間積分：SSP-Rung-Kutta法

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = f(Q)$$

という方程式に対して、

$$Q_i^{(1)} = Q_i^n + \Delta t f(Q^n)$$

$$Q_i^{n+1} = \frac{1}{2} Q_i^n + \frac{1}{2} [Q_i^{(1)} + \Delta t f(Q^{(1)})]$$

として時間発展を2次精度で解いた。

数値シミュレーション

音速抑制法

v : 子午面流の速度
 c_s : 音速

時間ステップ : $dt = \min(dr, rd\theta)/(v + c_s)$

太陽の対流層の大部分では、マッハ数が $\sim 10^{-5}$ である。

子午面流に注目したいため、音速による時間ステップへの影響を小さくしたい。

→連続の式の変更

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{1}{\zeta^2} \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{v}) = 0$$

これにより、

- 音速が $1/\zeta$ 倍される。(マッハ数が $\sim 10^{-3}$ になる。)
- 定常状態での解に影響を与えない。

本研究では、Rempel, 2005に倣い、 $\zeta = 100$ とした。

Kelvin-Helmholtz 不安定

境界条件

r 方向の境界条件

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial r} = 0$$

$$v_r = 0$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial r} = 0$$

θ 方向の境界条件

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \theta} = 0$$

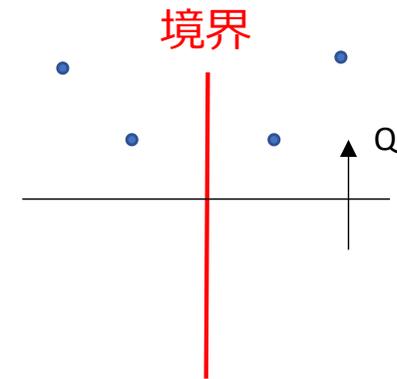
$$\frac{\partial v_r}{\partial \theta} = 0$$

$$v_\theta = 0$$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial \theta} = 0$$

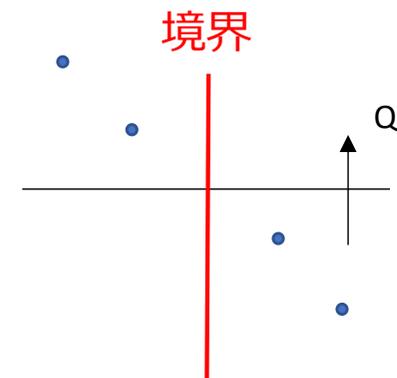
対称な境界

$$\frac{\partial Q}{\partial x_i} = 0$$



反対称な境界

$$Q = 0$$



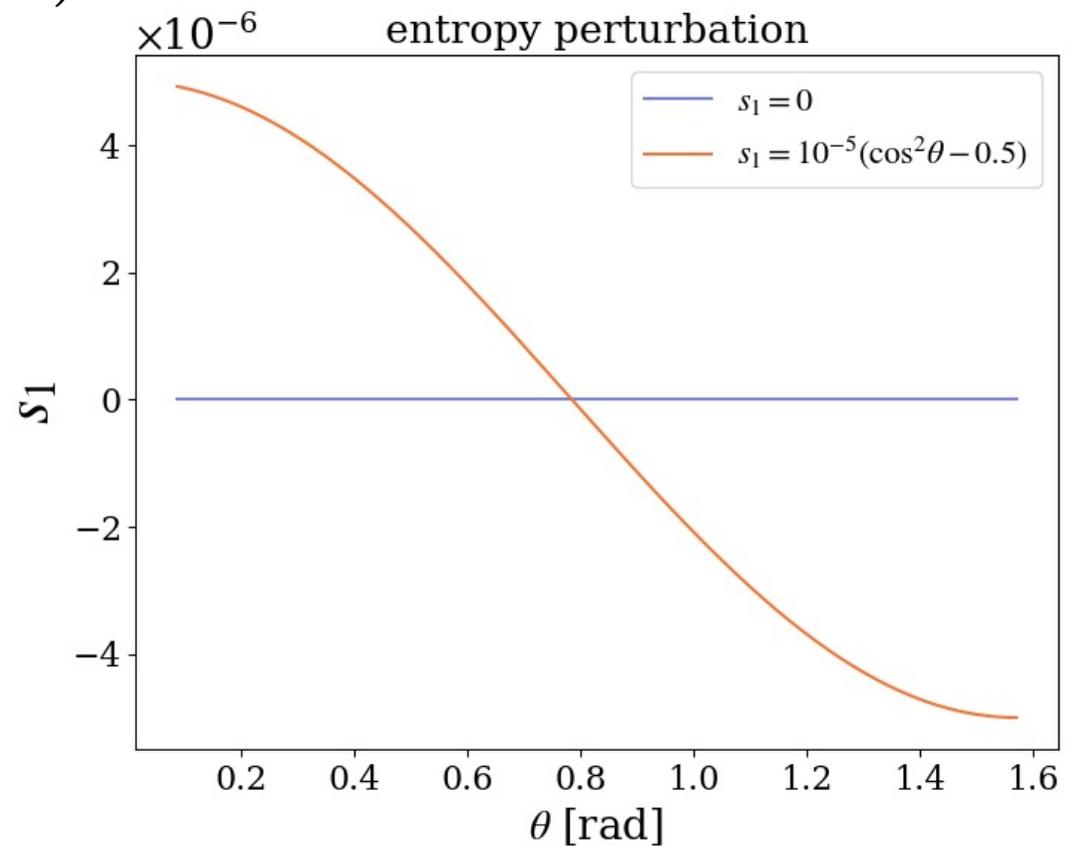
数値シミュレーション

エントロピー分布

今回扱ったエントロピー擾乱 s_1 の分布

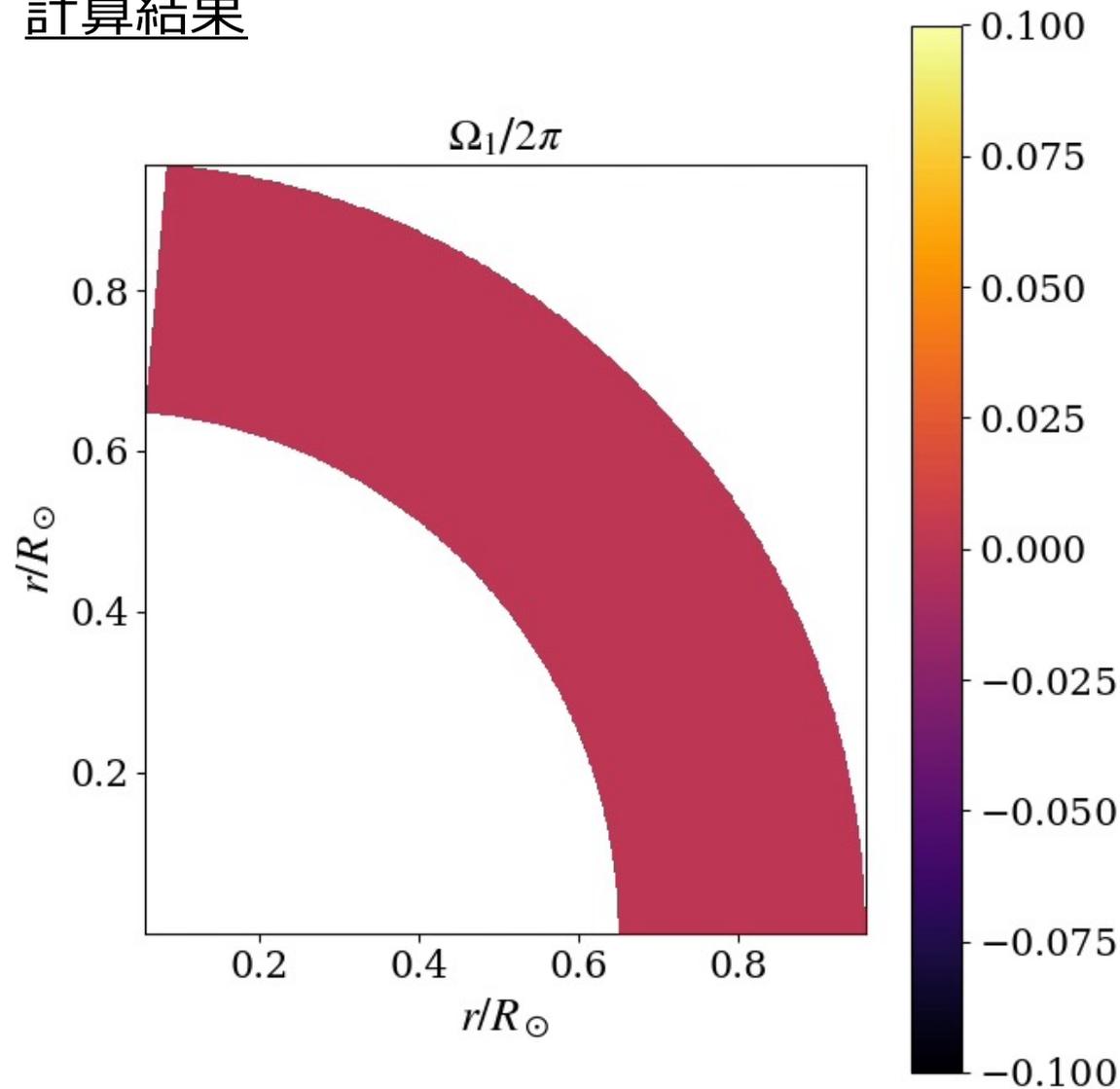
$$s_1 = 0$$

$$s_1 = 10^{-5}(\cos^2 \theta - 0.5)$$



数値シミュレーション

計算結果

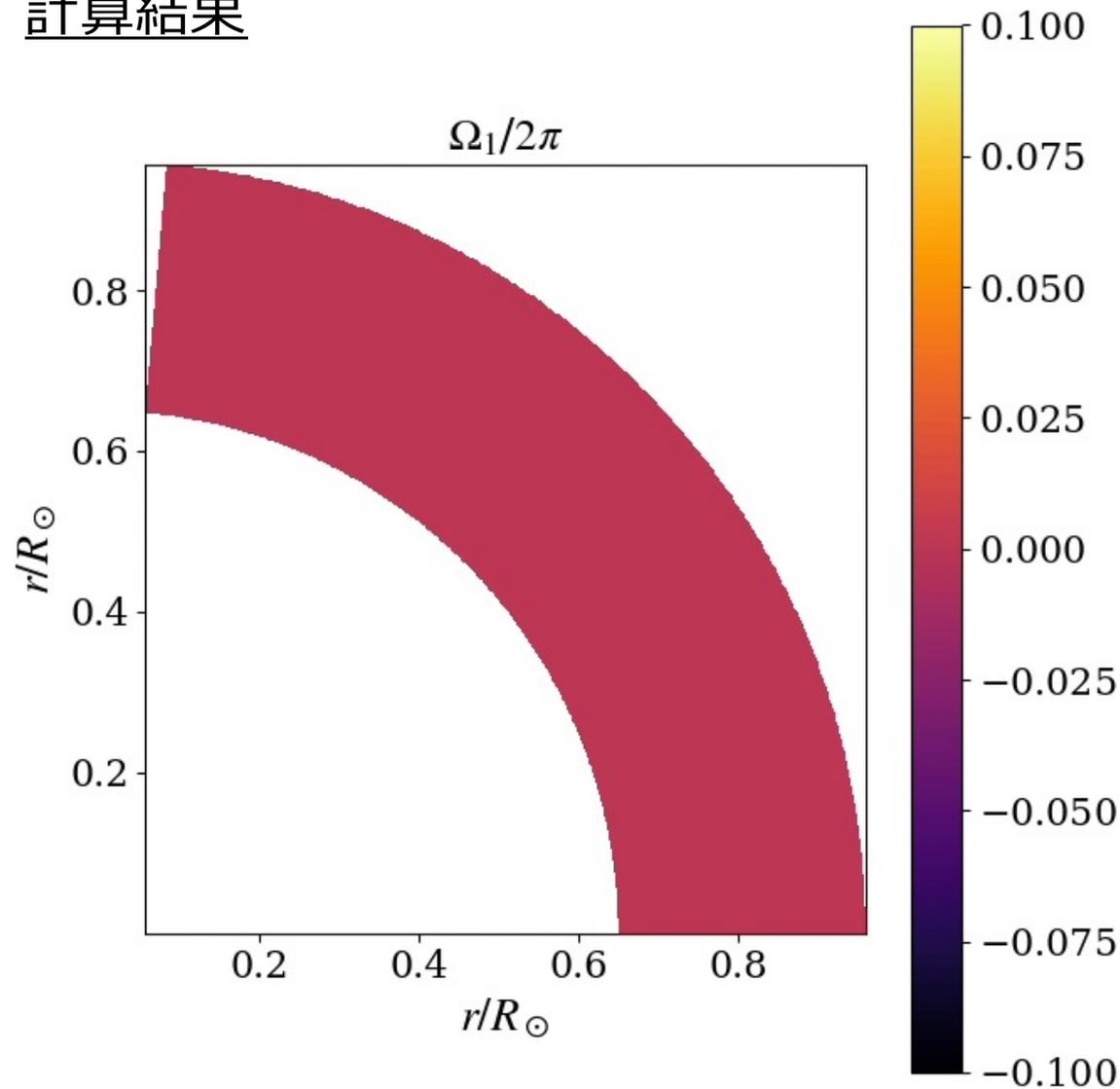


$$s_1 = 0$$

この時
極の方で速くなる
差動回転が得られた

数値シミュレーション

計算結果



$$s_1 = 10^{-5} (\cos^2 \theta - 0.5)$$

この時
極の方で遅くなる
差動回転が得られた

まとめ

2次元平均場モデルでも3次元の熱対流モデルで再現されたような極の方で遅くなる差動回転を再現できることがわかった。

今後、解析を進めることでこの物理的経緯を確認することもできると思われる。

