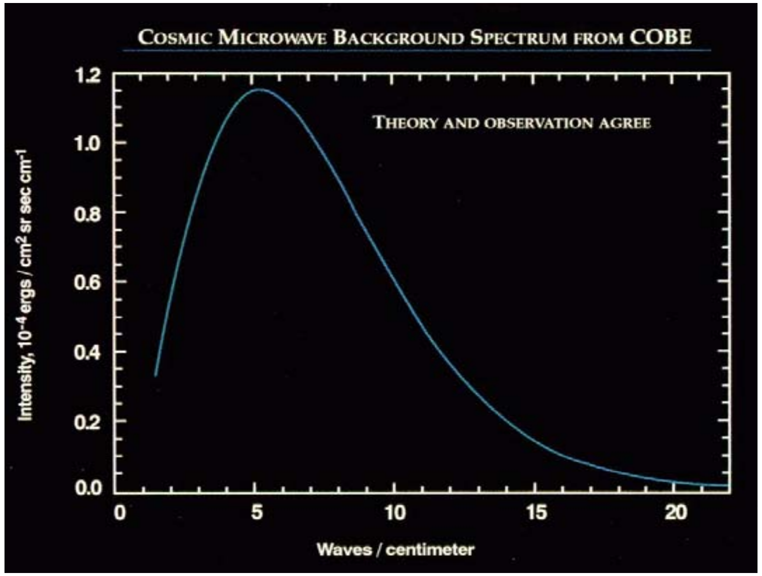
CMB温度ゆらぎの計算

宇宙物理学研究室
藤尾和也

Cosmic　Microwave　Background

＝ 宇宙マイクロ波背景放射



NASA

・全天に渡りほぼ一様等方的
・2．7Kの黒体放射スペクトル

→過去に宇宙が熱平衡状態にあった証拠
　＝ビッグバンの裏付け

CMBとは何を視ているのか

初期のプラズマと光子の熱平衡状態
（主に電子と光子のコンプトン散乱）

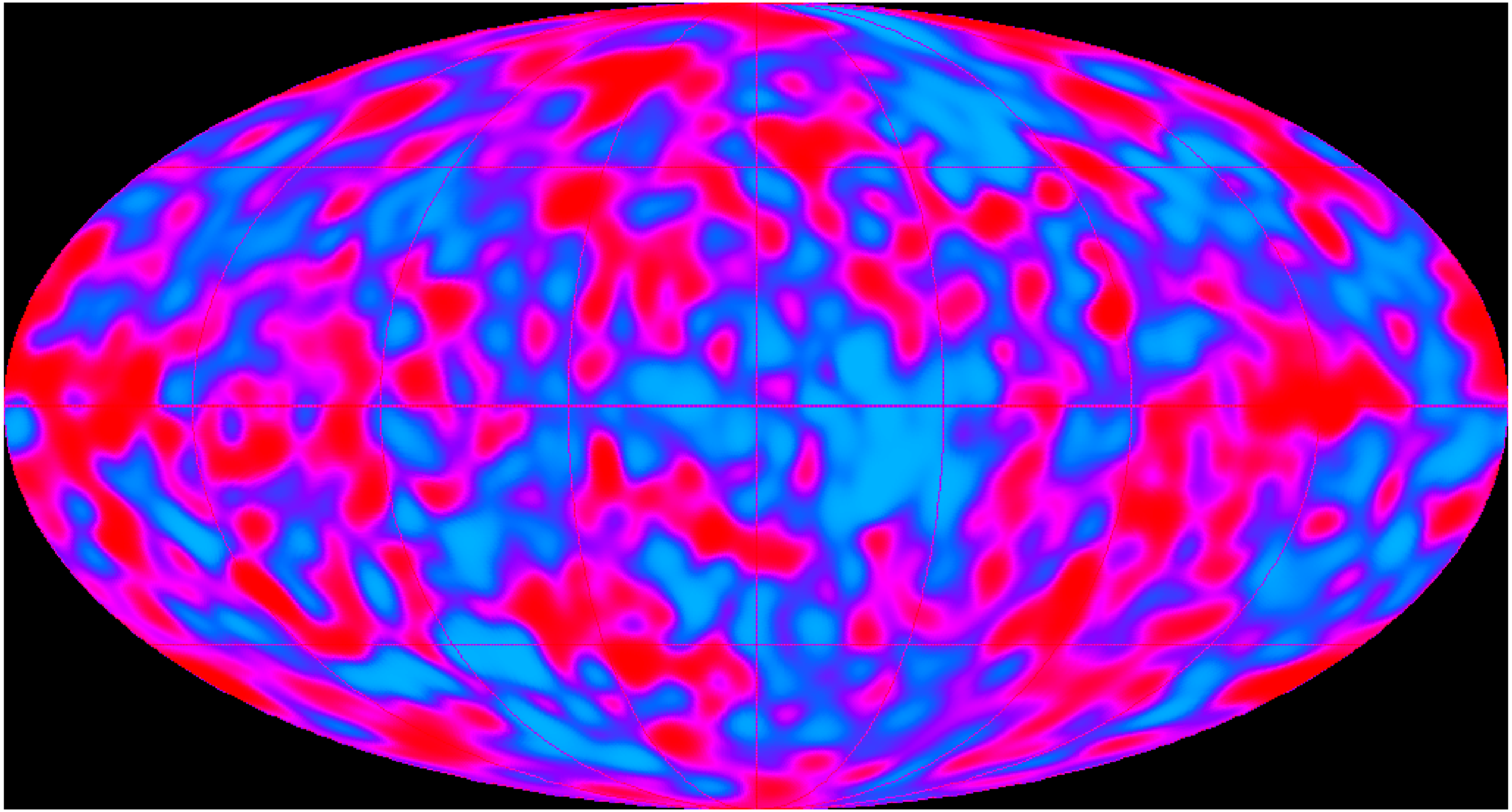
↓

宇宙膨張により温度が下がり
電離していた陽子と電子が結合する
→光子が直進できるようになる

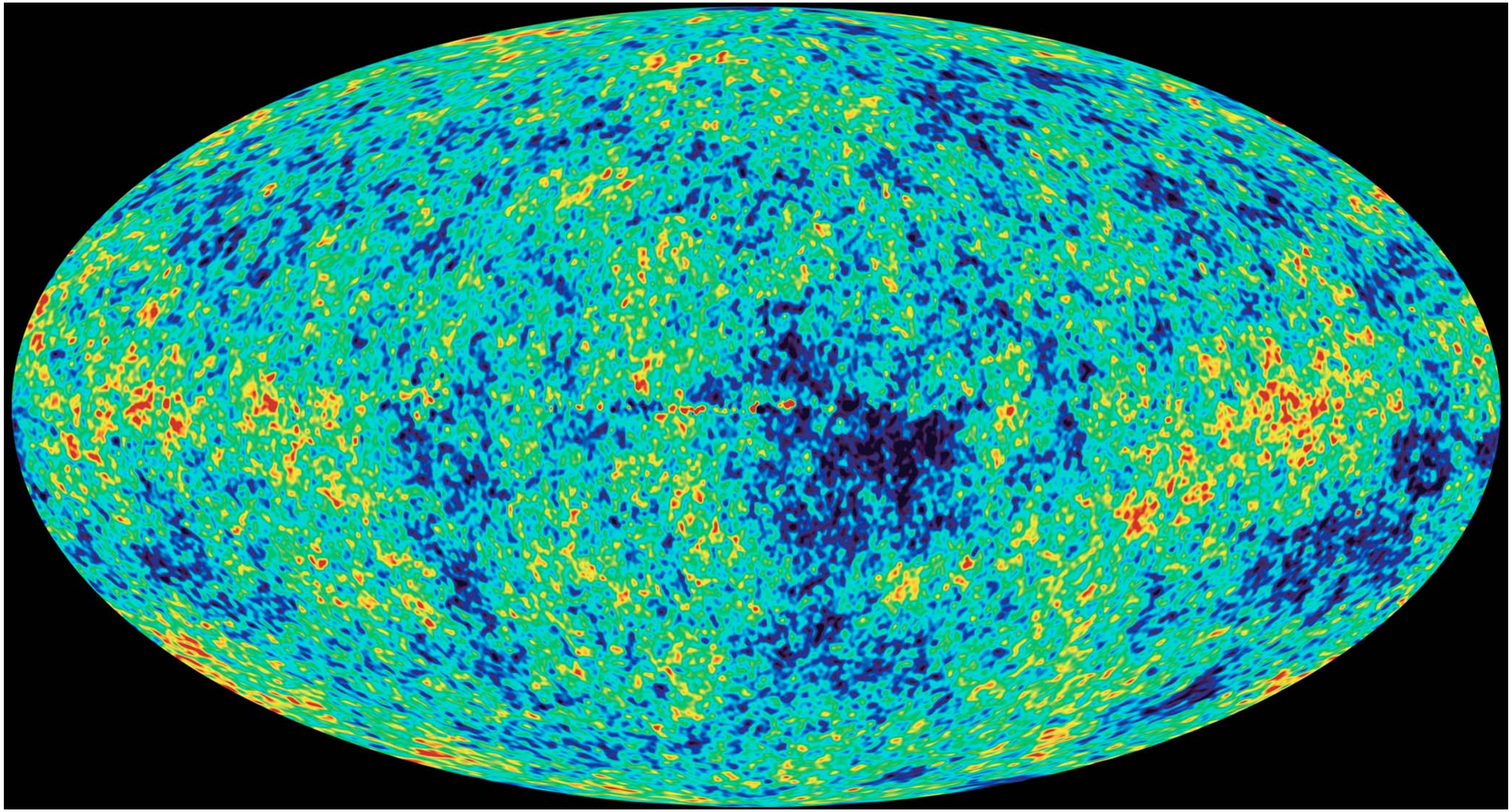
↓

現在観測しているのは
この時期（再結合期という）の光子

1990年　COBE



2003年 WMAP



全天に渡る10^{-5}程度の温度ゆらぎが確認された

これらのゆらぎは
インフレーション中につくられた
初期ゆらぎが成長し、再結合期のゆらぎが
その後の宇宙膨張で引き伸ばされたもの

↓

- 宇宙初期の情報をもっている
- 理論予測と観測結果の比較によって
  各種のパラメータを決められる

⇒今回の目的はこのゆらぎの理論に基づく数値計算

ゆらぎの計算

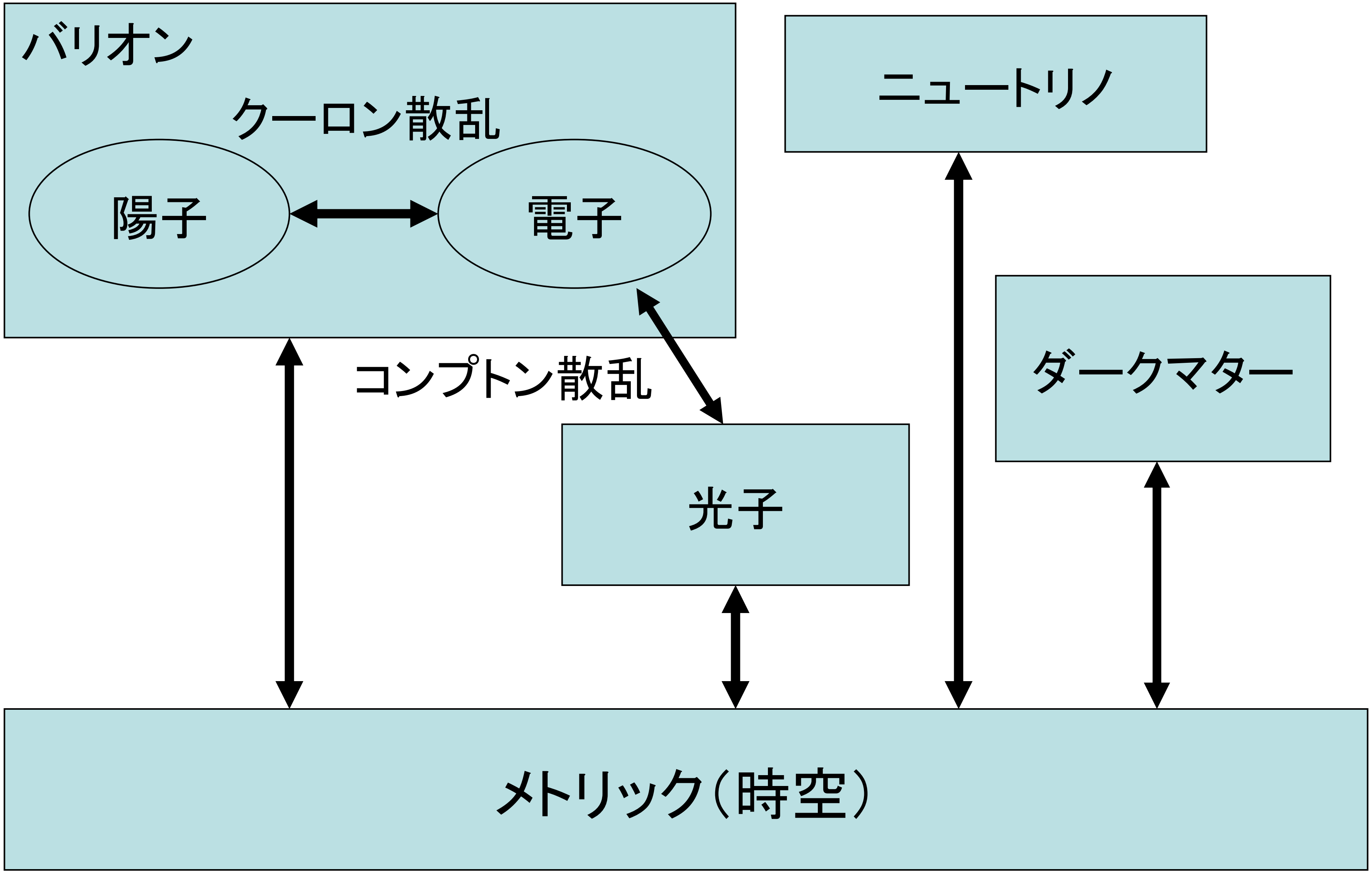
ゆらぎは小さいので一次の摂動として考える

・背景宇宙　　平坦なものを仮定

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j$$
$$= a^2(\eta)(-d\eta^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j)$$

現在のハッブル定数 H_0＝０．７×１００km/sec/Mpc

作用しあう要素



それぞれの要素は完全流体とする
（ただし物質の圧力は無視する）

・バリオン＝陽子＋電子　$\Omega_b = 0.0046$

・ダークマター　$\Omega_m = 0.224$

・光子　$\Omega_r = 5.042 \times 10^{-5}$

・ニュートリノ（質量ゼロ、世代数3）
$\Omega_\nu = 3.433 \times 10^{-5}$

・宇宙項

ゆらぎはないものと仮定する

$$\Omega_\Lambda = 1 - (\Omega_b + \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\nu)$$
$$= 0.7299$$

これらの値、および今回の計算は
Peter　Callin 「How to calculate the CMB spectrum」を
参考にしている

ゆらぎの定義

メトリックのゆらぎ

$$ds^2 = a^2(\eta)\{-(1+2\Psi(\eta,\vec{x}))d\eta^2 + (1+2\Phi(\eta,\vec{x}))\delta_{ij}dx^i dx^j\}$$

密度ゆらぎ

$$\overline{\rho} + \delta\rho = \overline{\rho}(1+\delta)$$

温度ゆらぎ

$$\overline{T} + \delta T = \overline{T}(1+\Theta)$$

ゆらぎの方程式

メトリック⇒アインシュタイン方程式より

$$\delta G^{\mu}_{\upsilon} = 8\pi G \delta T^{\mu}_{\upsilon}$$

$$\rightarrow \quad \nabla^2 \Phi - 3\frac{\partial a}{\partial \eta}(\Phi' + \frac{\partial a}{\partial \eta}\Phi) = 4\pi G a^2 \delta\rho$$

$$\nabla^2(\Phi + \Psi) = -32\pi G a^2(\rho_r \Theta_2 + \rho_\upsilon N_2)$$

放射と物質はボルツマン方程式から

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \hat{p}^i}\frac{d\hat{p}^i}{dt} = C[f]$$

$\rightarrow$

$$\dot{\Theta} + \hat{p}^i \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} + \dot{\Phi} + \hat{p}^i \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} = n_e \sigma_T a[\Theta_0 - \Theta + \hat{p} \cdot \vec{v}_b]$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a}\frac{\partial v^i}{\partial x^i} + 3\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

衝突項

$$\frac{\partial v^j}{\partial t} + Hv^j + \frac{1}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial x^j} = (collision - term)$$

それぞれを波数kの平面波でフーリエ変換

放射はさらに多重極展開

→

$$\dot{\Theta}_0 = -k\Theta_1 - \dot{\Phi}$$

$$\dot{\Theta}_1 = \frac{k}{3}\Theta_0 - \frac{2k}{3}\Theta_2 + \frac{k}{3}\Psi + \dot{\tau}[\Theta_1 + \frac{1}{3}v_b]$$

$$\dot{\Theta}_l = \frac{lk}{2l+1}\Theta_{l-1} - \frac{(l+1)k}{2l+1}\Theta_{l+1} + \dot{\tau}[\Theta_l - \frac{1}{10}\Pi\delta_{l,2}]$$

$$(l \geq 2)$$

物質について

$$\dot{\delta} = kv - 3\dot{\Phi}$$

$$\dot{v} = -\frac{1}{a}\frac{da}{d\eta}v - k\Psi + \dot{\tau}R[3\Theta_1 + v]$$

$$(\dot{\tau} = -n_e\sigma_T a) \qquad (R = \frac{4\Omega_r}{3\Omega_b a})$$

メトリックについて

$$\dot{\Phi} = -\frac{1}{a}\frac{da}{d\eta}\Psi - \frac{k^2}{3\frac{1}{a}\frac{da}{d\eta}}\Phi$$

$$+\frac{4\pi G a^2}{3\frac{1}{a}\frac{da}{d\eta}}[\rho\delta + \rho_b\delta_b + 4\rho_r\Theta_0 + 4\rho_\upsilon N_0]$$

$$\Psi = -\Phi - \frac{32\pi G a^2}{k^2}[\rho_r\Theta_2 + \rho_\upsilon N_2]$$

初期条件

$\Phi = 1$ を基準として

$$\Theta_0 = \frac{1}{2}\Phi \qquad \Theta_1 = -\frac{k}{6\frac{1}{a}\frac{da}{d\eta}}\Phi$$

$$\delta = \delta_b = \frac{3}{2}\Phi \qquad v = v_b = \frac{k}{2\frac{1}{a}\frac{da}{d\eta}} \qquad \text{etc}$$

（波数ごとのスケールあわせは後でやる）

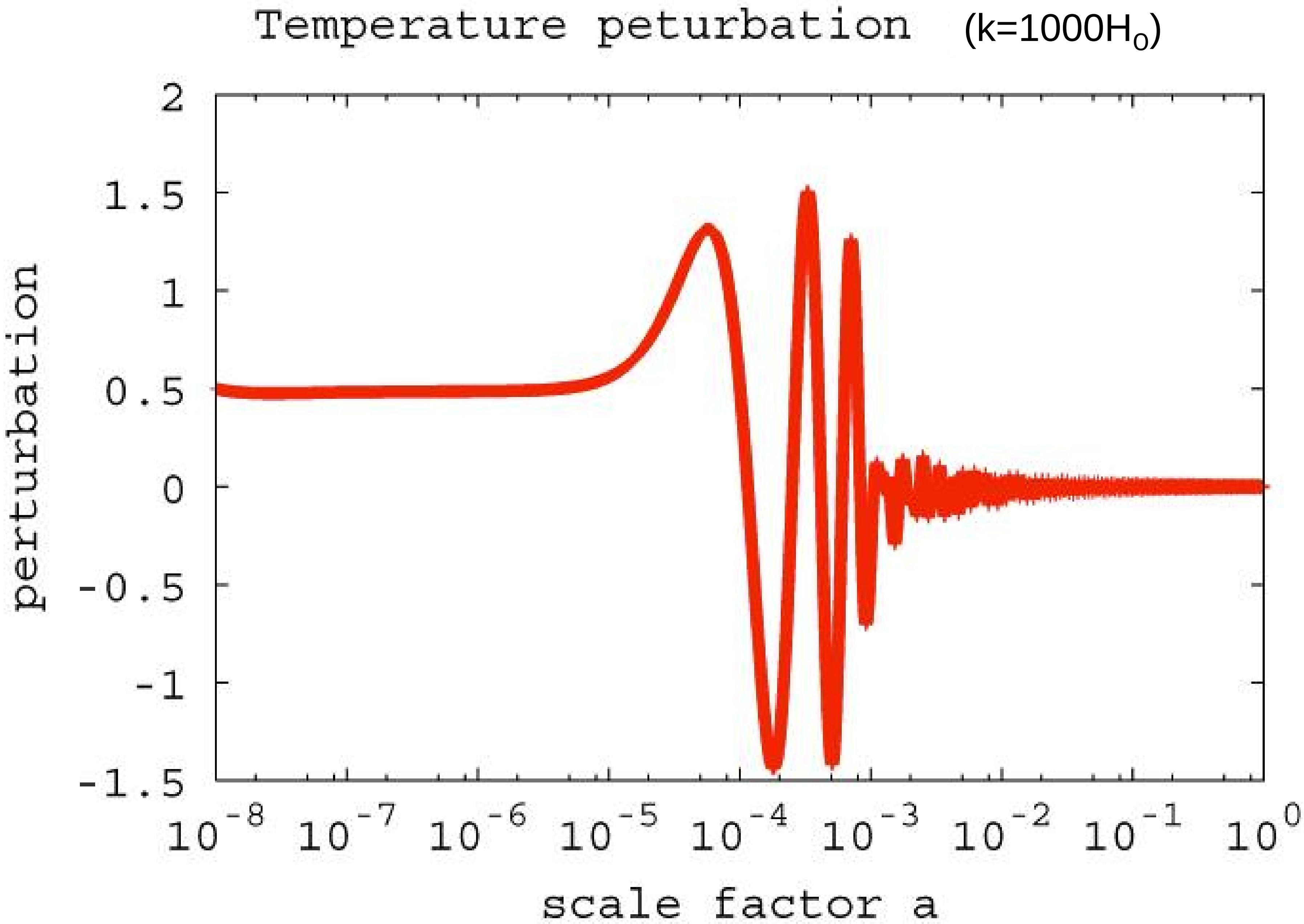
ゆらぎはどのように振舞うのか？

・再結合期より前ではバリオンは完全電離

→光子の平均自由行程は非常に短く
　バリオンと光子は一流体のように振舞う

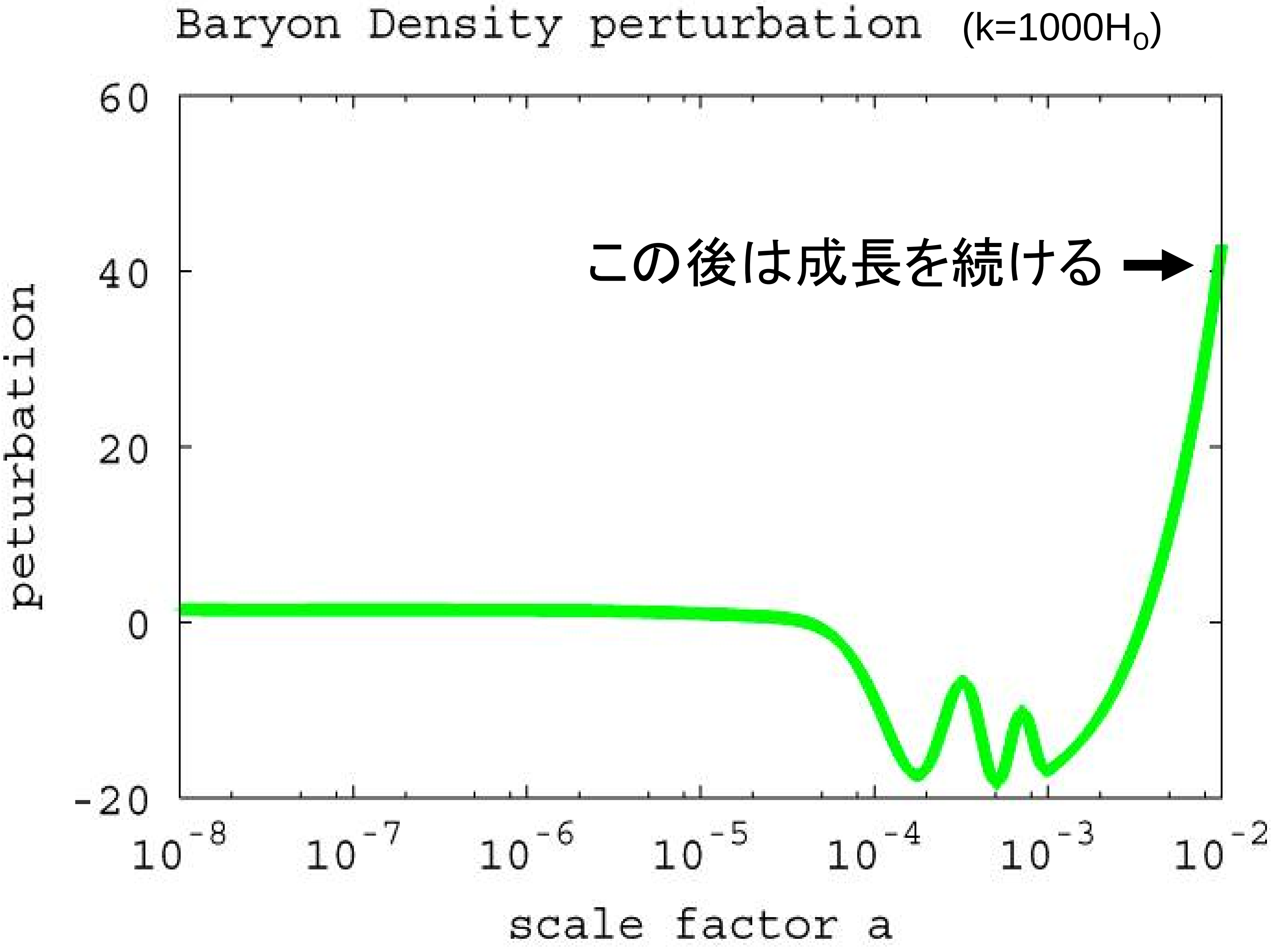
バリオンが重力で収縮しようとすると
光子の圧力が上がり反発する
→振動するのではないか？

温度ゆらぎの振動



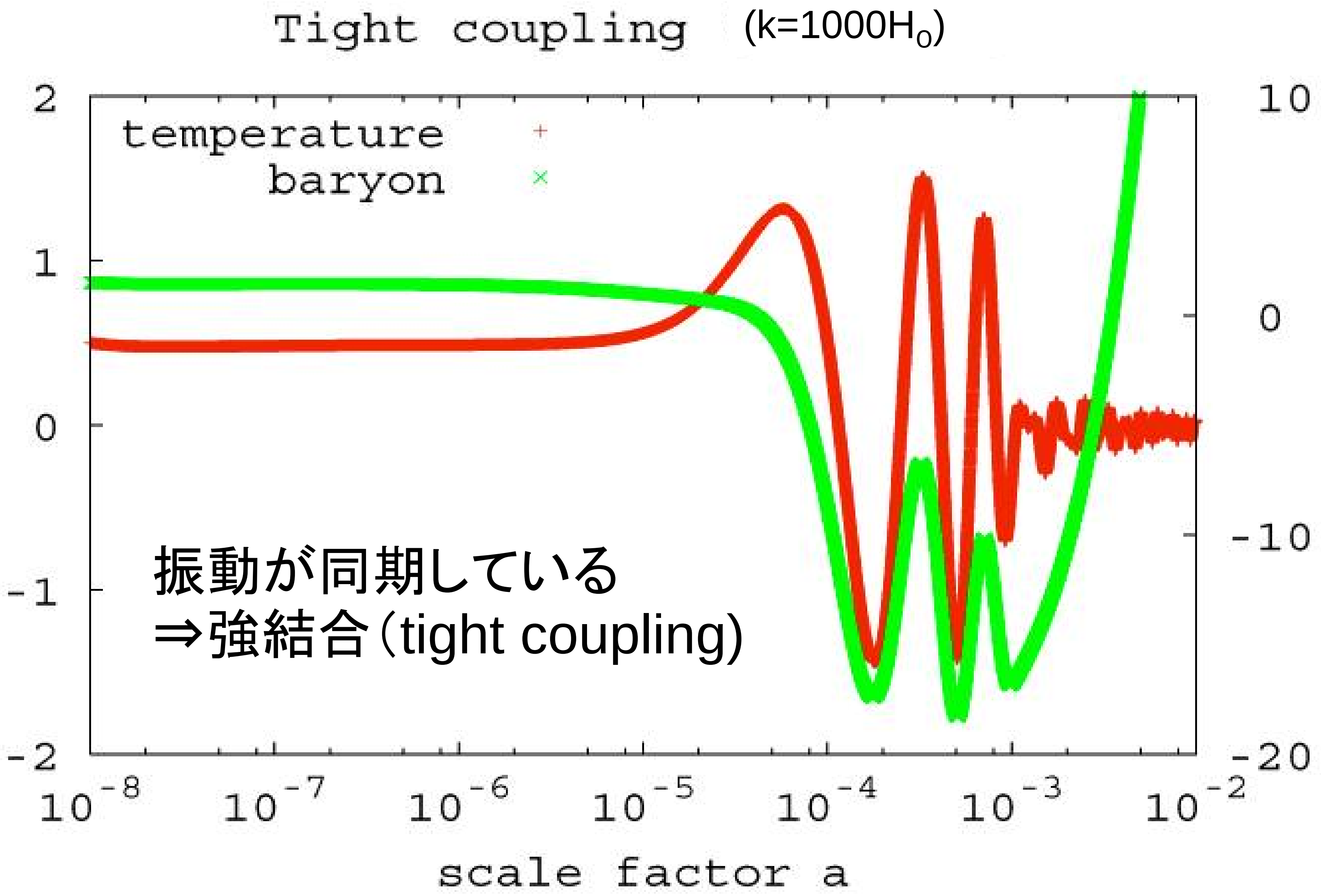
Temperature peturbation (k=1000H$_0$)
perturbation
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
10^{-8} 10^{-7} 10^{-6} 10^{-5} 10^{-4} 10^{-3} 10^{-2} 10^{-1} 10^{0}
scale factor a

バリオン



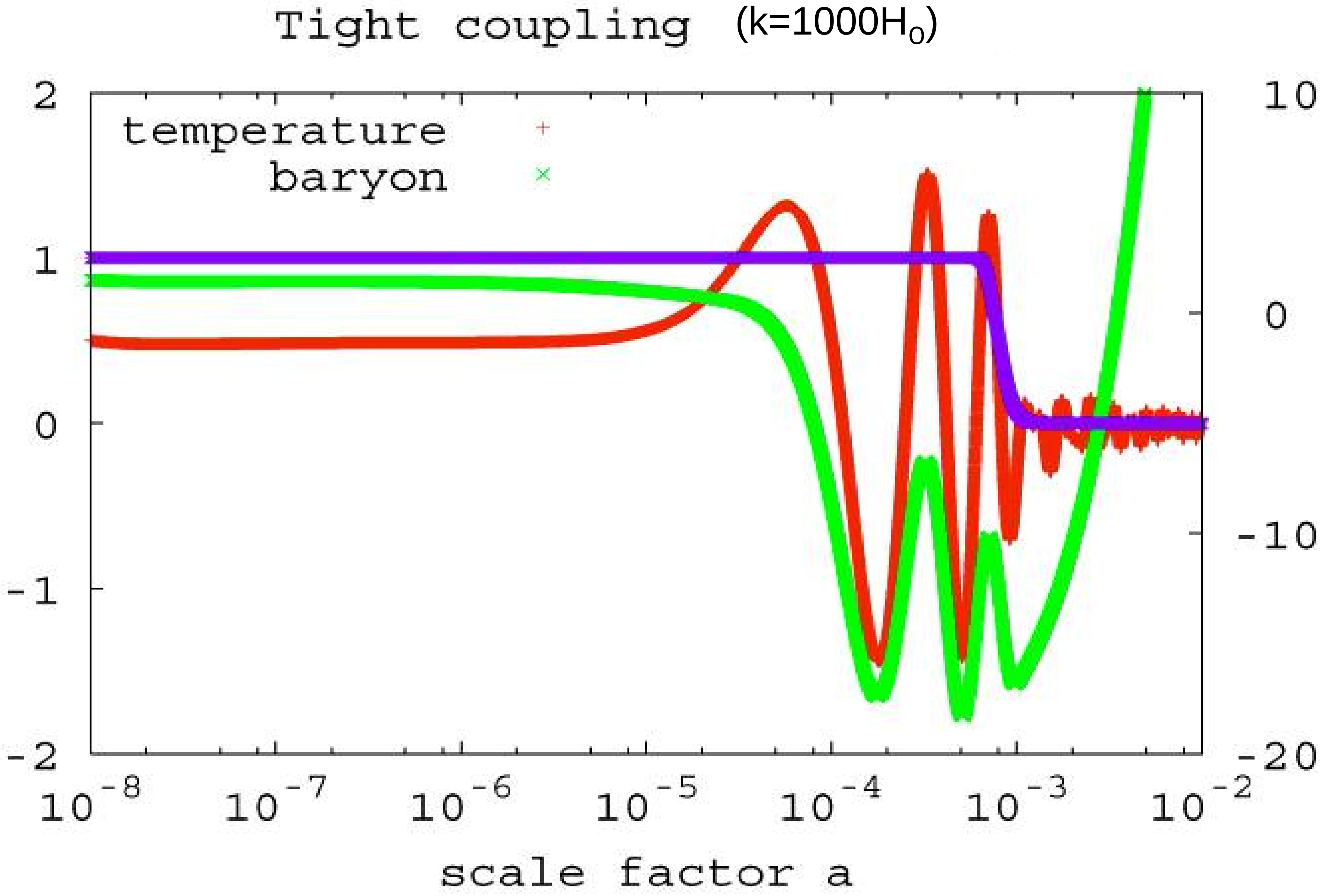
Baryon Density perturbation (k=1000H$_0$)
60
40
20
0
-20
peturbation
10^{-8} 10^{-7} 10^{-6} 10^{-5} 10^{-4} 10^{-3} 10^{-2}
scale factor a
この後は成長を続ける

重ねてみると……



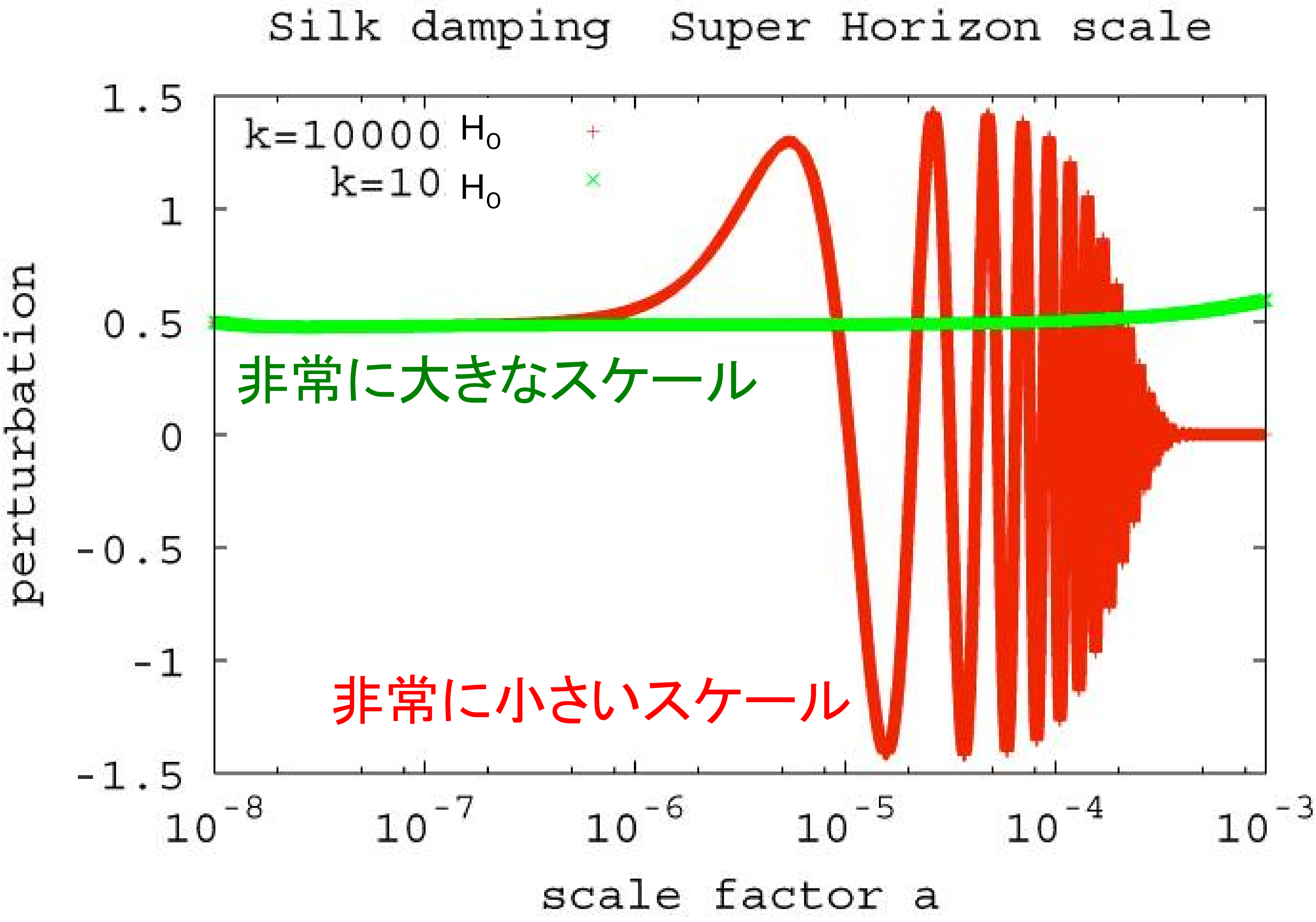
Tight coupling (k=1000H$_0$)
temperature
baryon
振動が同期している
⇒強結合（tight coupling)
2
1
0
-1
-2
10
0
-10
-20
10^{-8}
10^{-7}
10^{-6}
10^{-5}
10^{-4}
10^{-3}
10^{-2}
scale factor a

イオン化度を重ねる

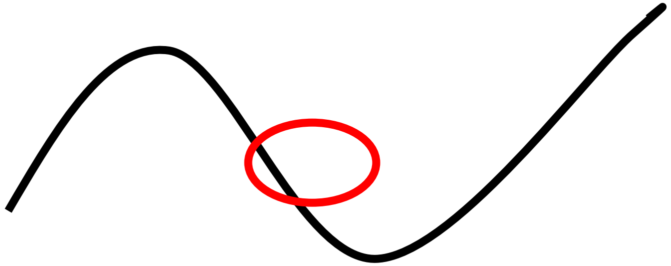


Tight coupling (k=1000H0)
temperature
baryon
2
1
0
-1
-2
10
0
-10
-20
10^-8 10^-7 10^-6 10^-5 10^-4 10^-3 10^-2
scale factor a

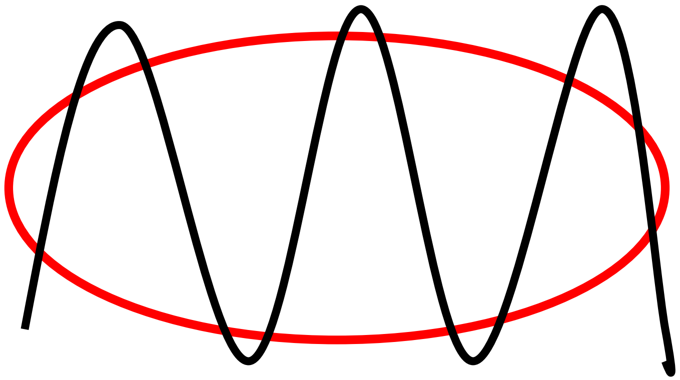
シルクダンピングと超ホライゾンスケール



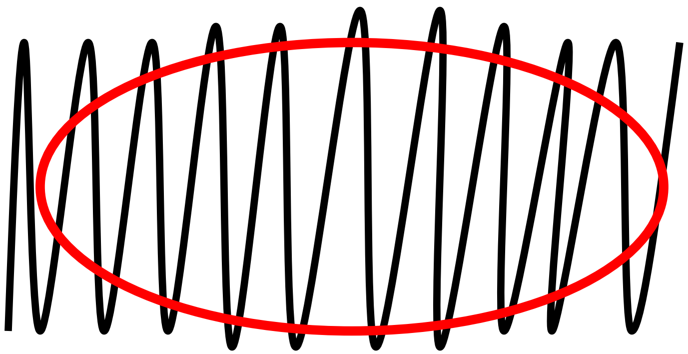
事象の地平線＝物理的干渉がもてる距離に対して



十分大きなスケール
⇒相互作用しないので成長しない

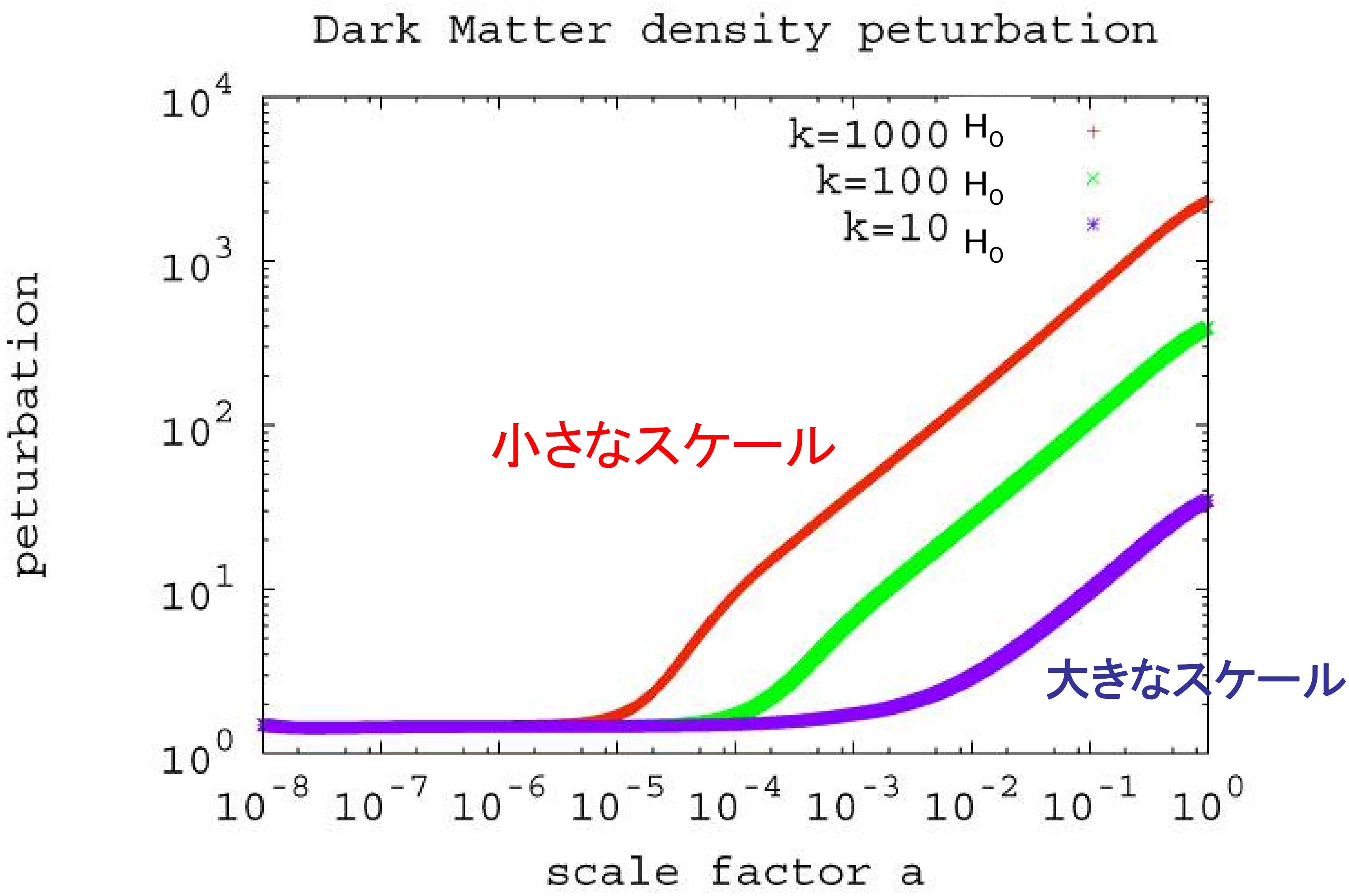


地平線と同じくらいのスケール
⇒（音地平線を最大とする）音波振動

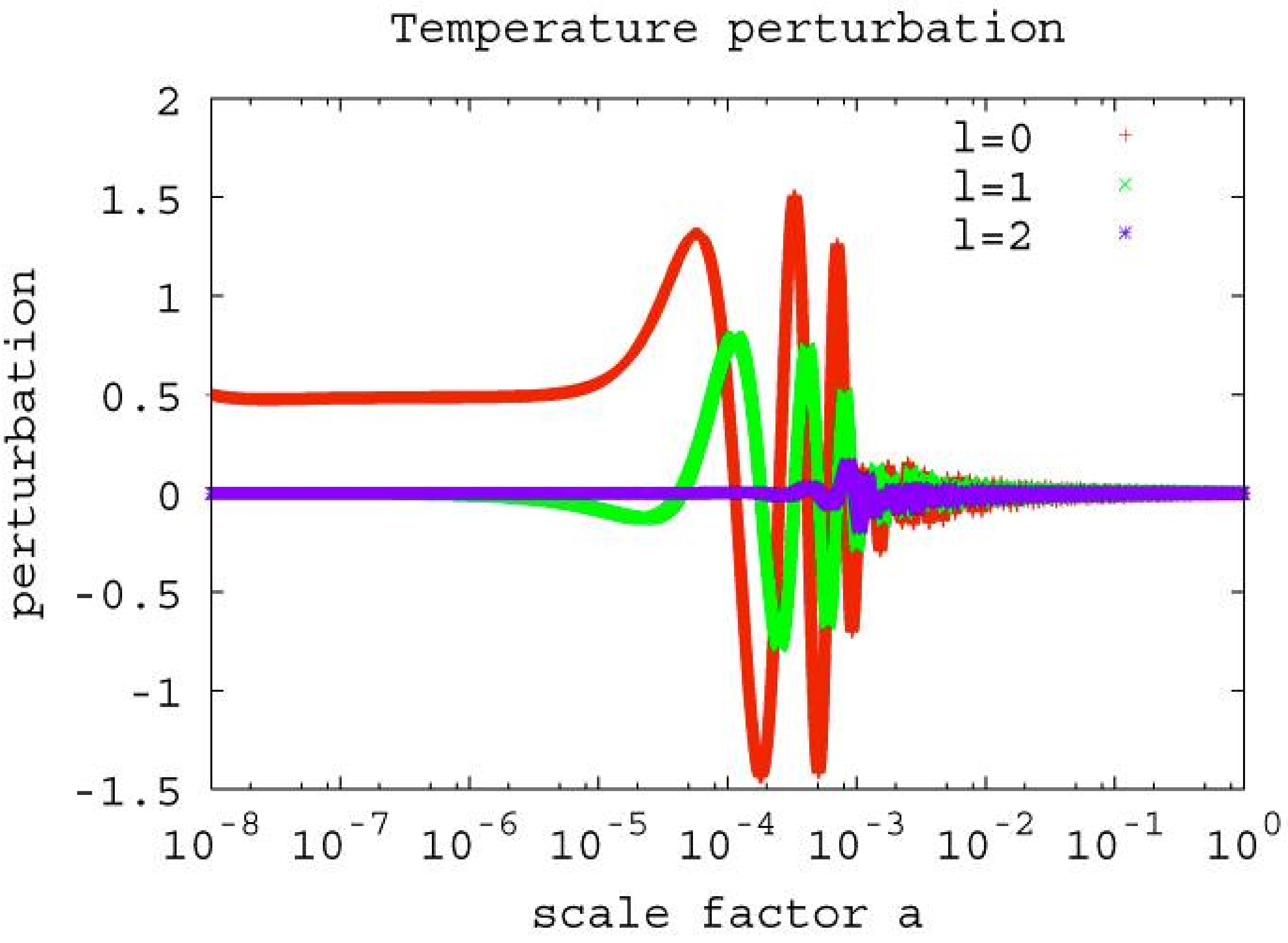


十分小さなスケール
⇒電子による拡散で消えてしまう

ダークマターの成長

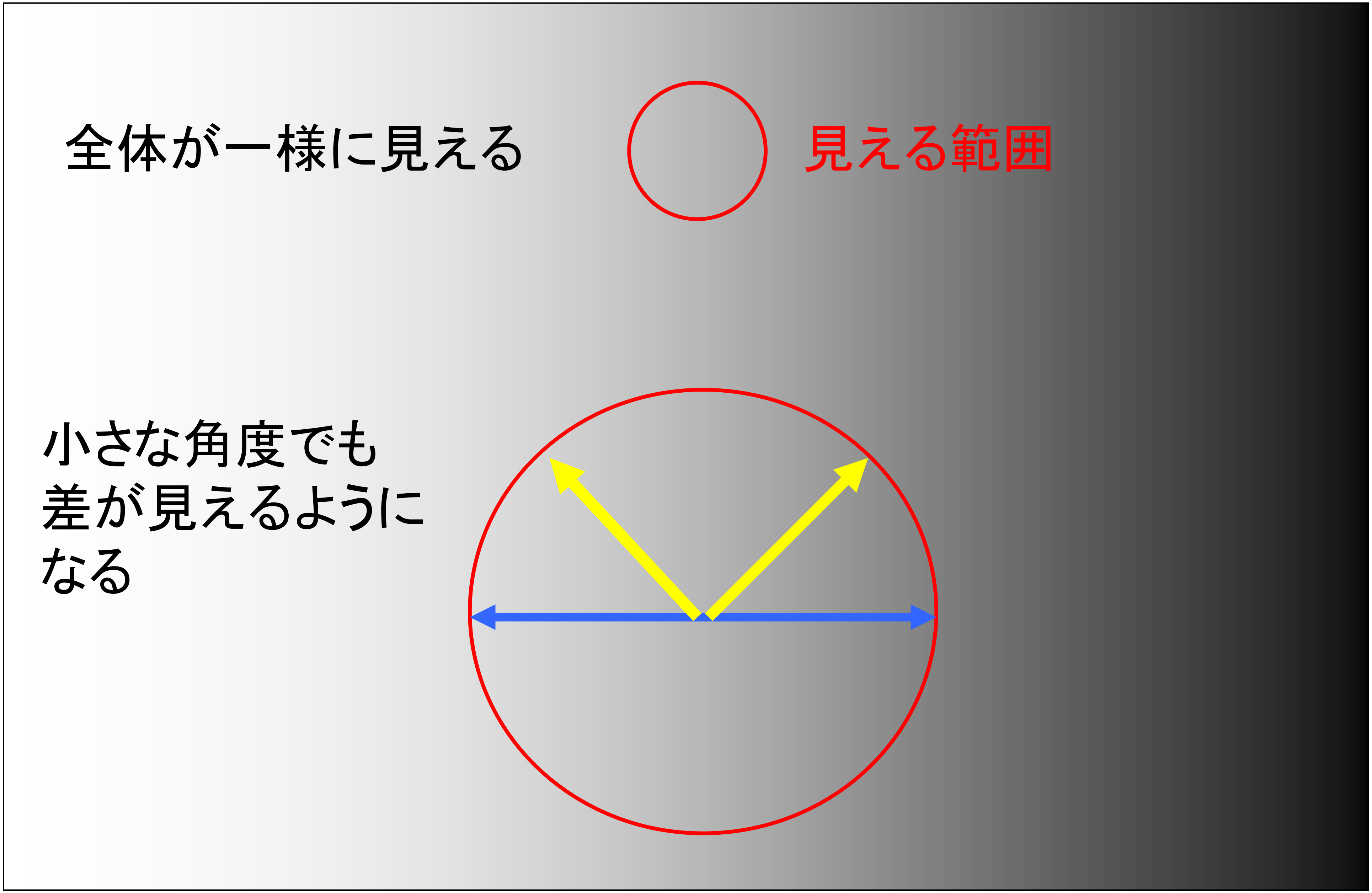

Dark Matter density peturbation
k=1000 H0
k=100 H0
k=10 H0
小さなスケール
大きなスケール
peturbation
scale factor a
10^4
10^3
10^2
10^1
10^0
10^-8
10^-7
10^-6
10^-5
10^-4
10^-3
10^-2
10^-1
10^0

一様成分以外のゆらぎ



Temperature perturbation
l=0
l=1
l=2
perturbation
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
10^{-8} 10^{-7} 10^{-6} 10^{-5} 10^{-4} 10^{-3} 10^{-2} 10^{-1} 10^{0}
scale factor a

多重極の意味するところ



実際に観測するのは波数について積分したもの

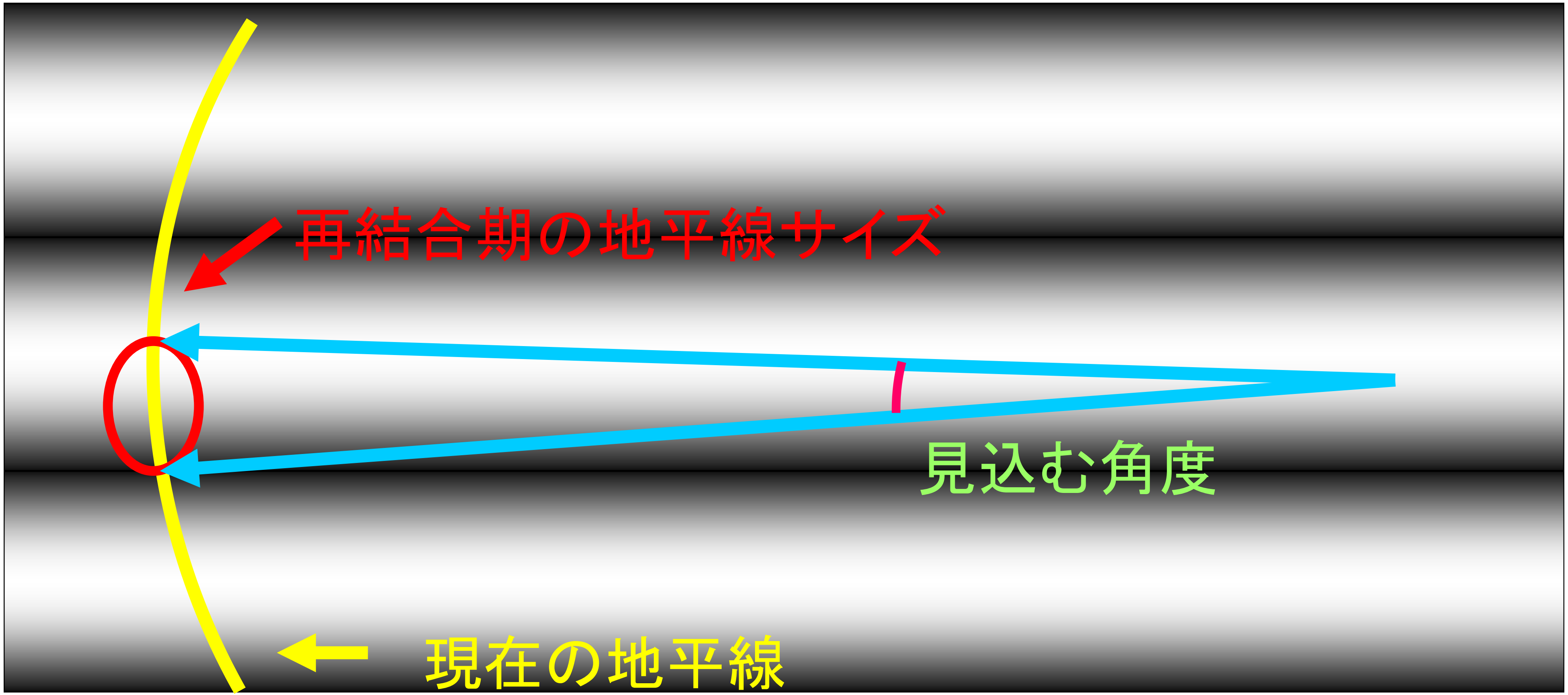
$$\boxed{C_l = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P(k)\Theta_l^2(k)}$$

$$\frac{k^3}{2\pi^2}P(k) = (\frac{k}{H_0})^{n-1}$$

初期ゆらぎのスペクトル

n＝1としてk＝0．1H_0〜1000H_0まで積分

現在もっとも強く観測されるであろうゆらぎの角度は



$$\theta \approx \frac{\text{再結合期の（音）地平線}}{\text{現在の地平線}}$$

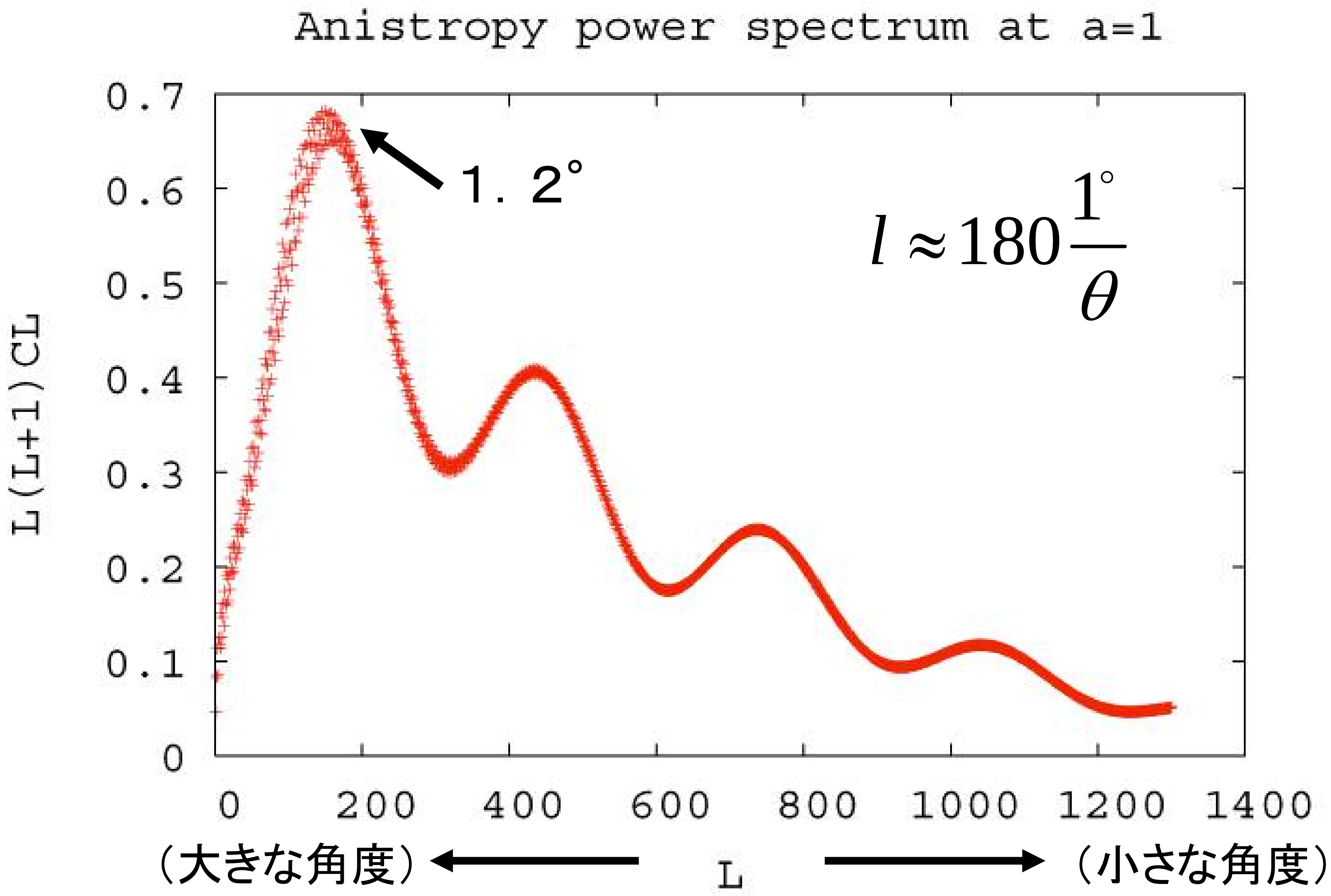
$l = 1$ は180°に相当する

$$\therefore l \approx 180 \frac{1^\circ}{\theta^\circ}$$

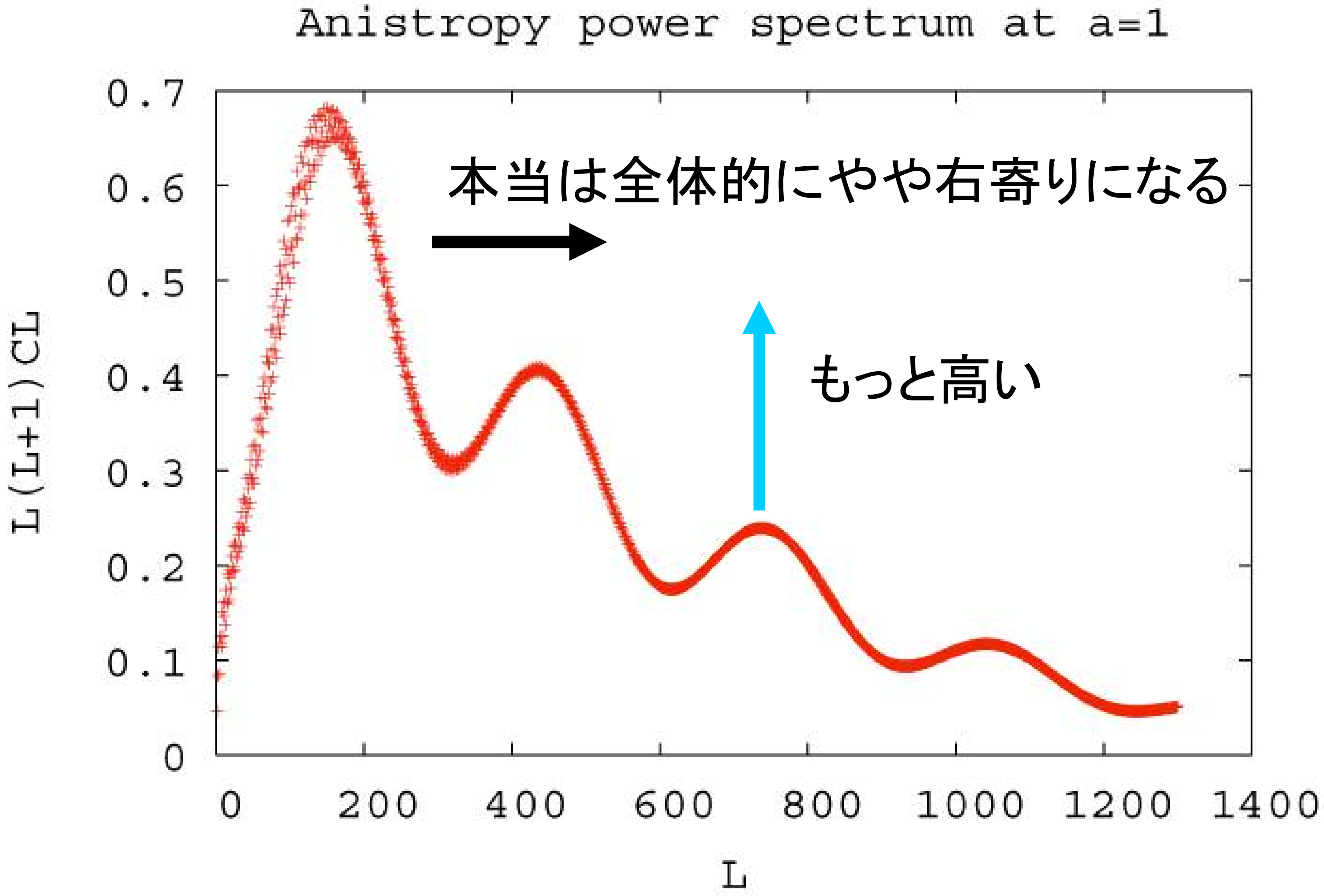
再結合期のゆらぎはおおよそ0．8°に相当する
（月の視野角がこのくらい）

$$\Rightarrow l_{peak} \approx 230$$

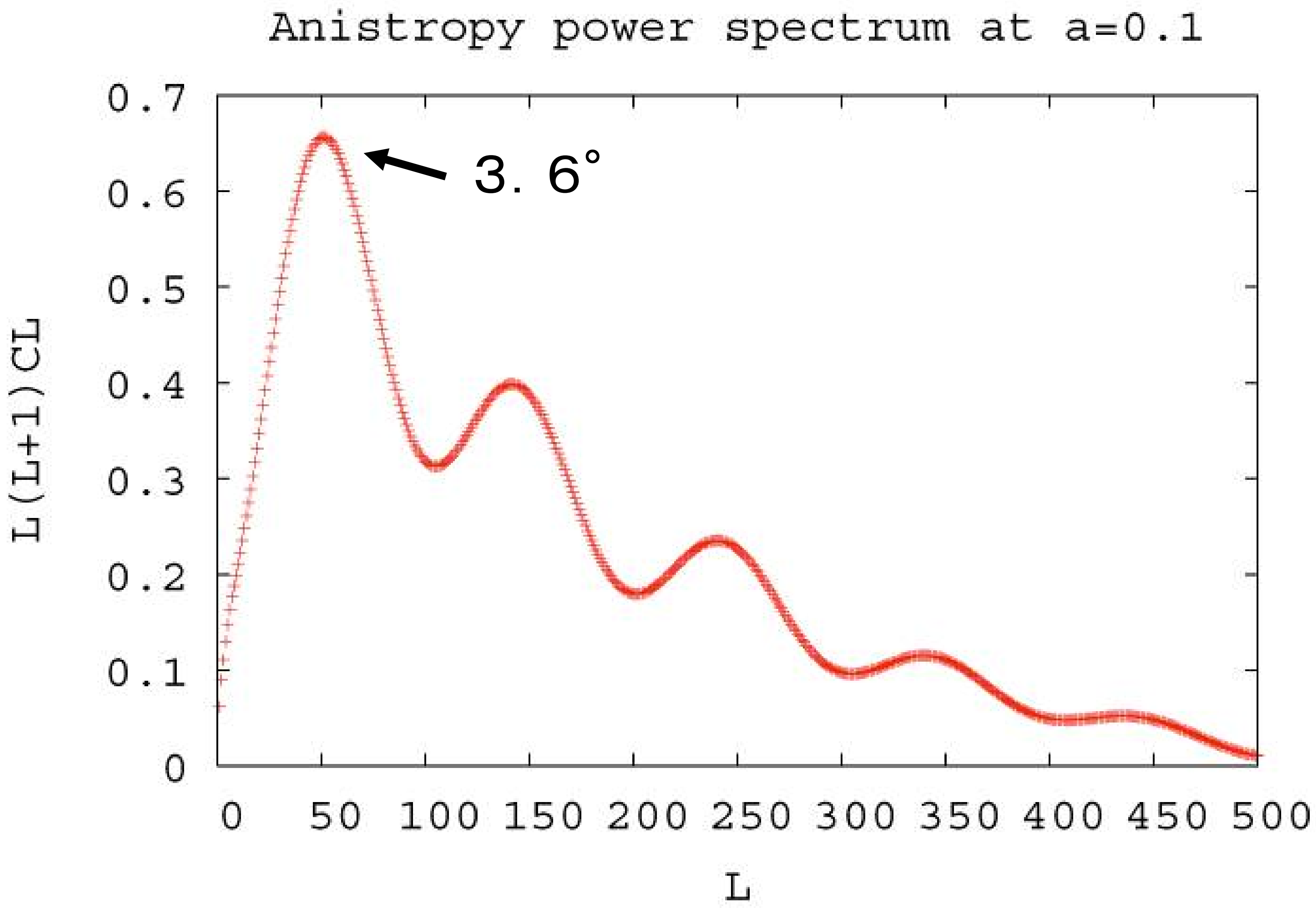
計算結果


Anistropy power spectrum at a=1
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
L(L+1)CL
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1．2°
$l \approx 180 \frac{1^\circ}{\theta}$
（大きな角度）
L
（小さな角度）

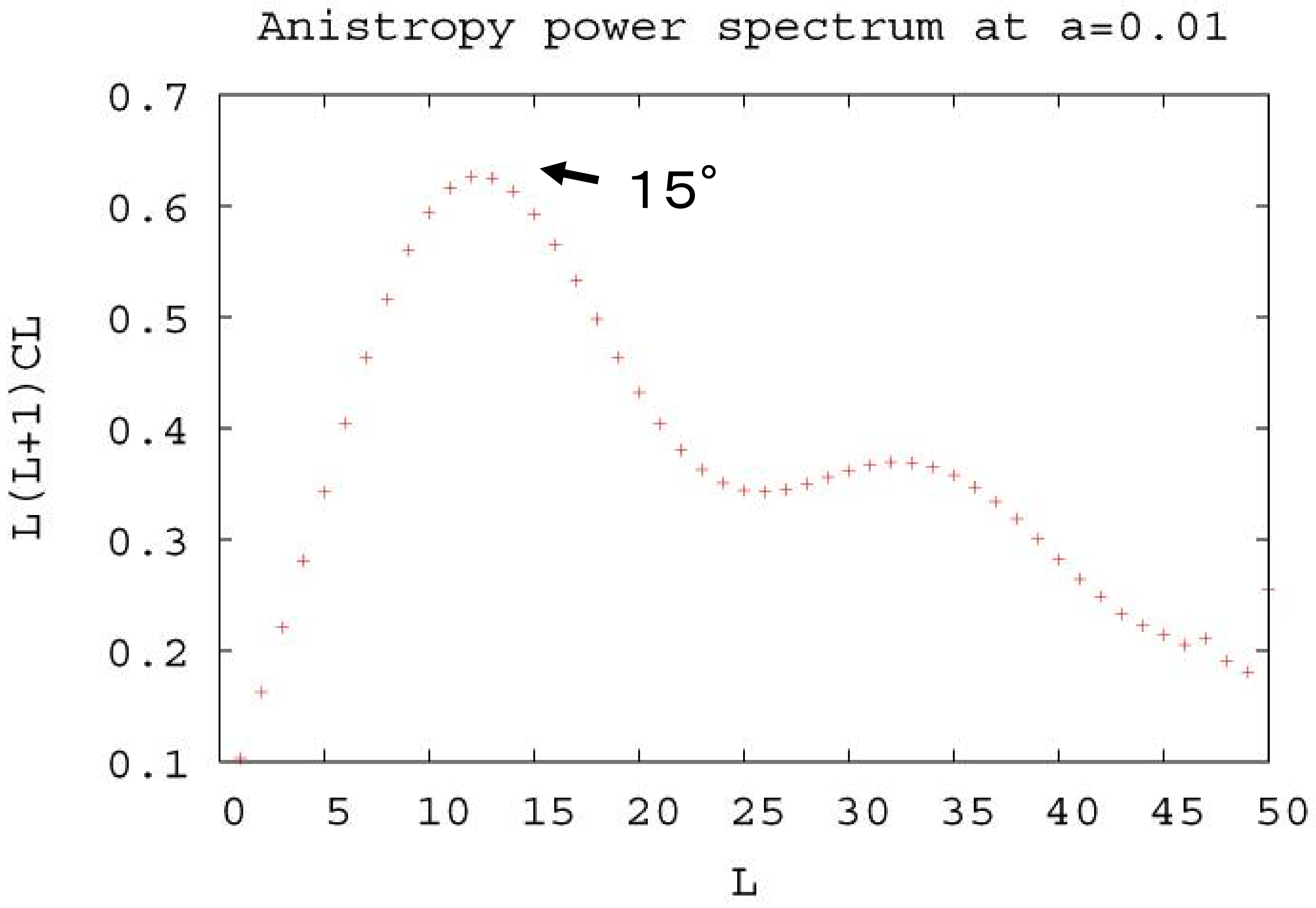
結果は出るには出たけれど……



宇宙が現在の10分の1の大きさだったときのゆらぎ



宇宙が現在の100分の1の大きさだったときのゆらぎ



今後の課題

・ノーマライゼーション

・正しい結果を出すべく調整

・計算時間の（大幅な）短縮

・ヘリウム、再電離期など詳細の追加

・各種物理効果の理解