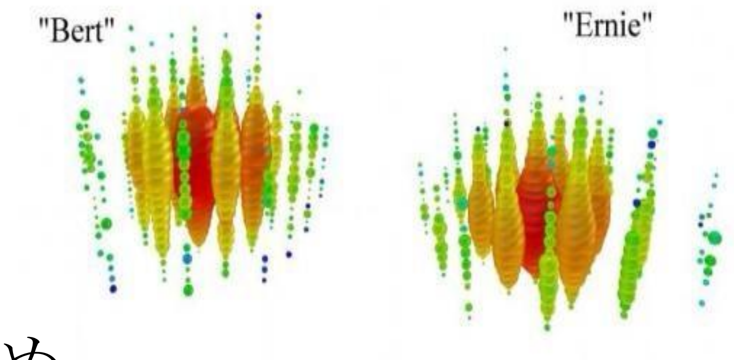
相対論的プラズマにおける PICシミュレーションに伴う 数値チェレンコフ不安定の特性ついて

宇宙物理学研究室　4年
池谷　直樹

研究背景と目的

2012年、Ice Cube国際共同実験において
超高エネルギーニュートリノを検出
(780Tev-5.6PeV, 890TeV-8.5PeV)



相互作用が殆んど起こらないため
銀河磁場による軌道の湾曲が無く、
正確な到来方向の情報
を得られる可能性がある。

ニュートリノから高エネルギー宇宙線の起源を追う

ニュートリノ生成過程

超高エネルギー宇宙線 ＋ 宇宙背景輻射 → **超高エネルギーニュートリノ**

効率よく**粒子を超高エネルギーまで加速させる機構**が存在するはず。

無衝突衝撃波における粒子加速に注目する

無衝突衝撃波

平均自由行程　>>　電磁場による散逸のサイズ

このようなプラズマを**無衝突プラズマ**といい
無衝突プラズマ中を伝搬する衝撃波を**無衝突衝撃波**という。

相対論的な速度を持つ無衝突衝撃波

- AGN(活動銀河核)ジェット
- γ線バースト

超高エネルギー粒子の起源と考えられている。

考えられる加速機構

衝撃波統計加速(フェルミ1次加速)

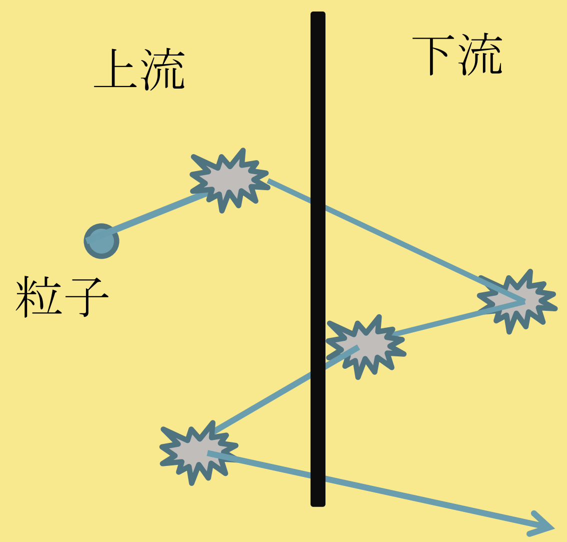
電磁場による粒子の散乱

↓

衝撃波面を往復

↓

往復の度にエネルギーを得る



相対論的無衝突衝撃波

における物理過程

電磁場とプラズマを構成する粒子が

複雑に関係する**非線形現象**

⇒ **数値シミュレーション**

による解析が有効

シミュレーション法

フェルミ1次加速のような
一部の粒子を高エネルギーまで加速させる
非断熱的なプロセスの理解には
PIC (Particle-In-Cell) 法が有効。

磁気流体近似(MHD法)

粒子をまとまった系としてみなし、流体として扱う。
熱的な系に有効

粒子シミュレーション(PIC法)

個々の粒子の運動方程式を解く。

PICシミュレーション法の特徴

粒子　・・・　相対論的な運動方程式

- $$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{q}{m}\left(\vec{E} + \frac{\vec{u} \times \vec{B}}{\gamma c}\right) \quad \left\{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}}\right\}$$

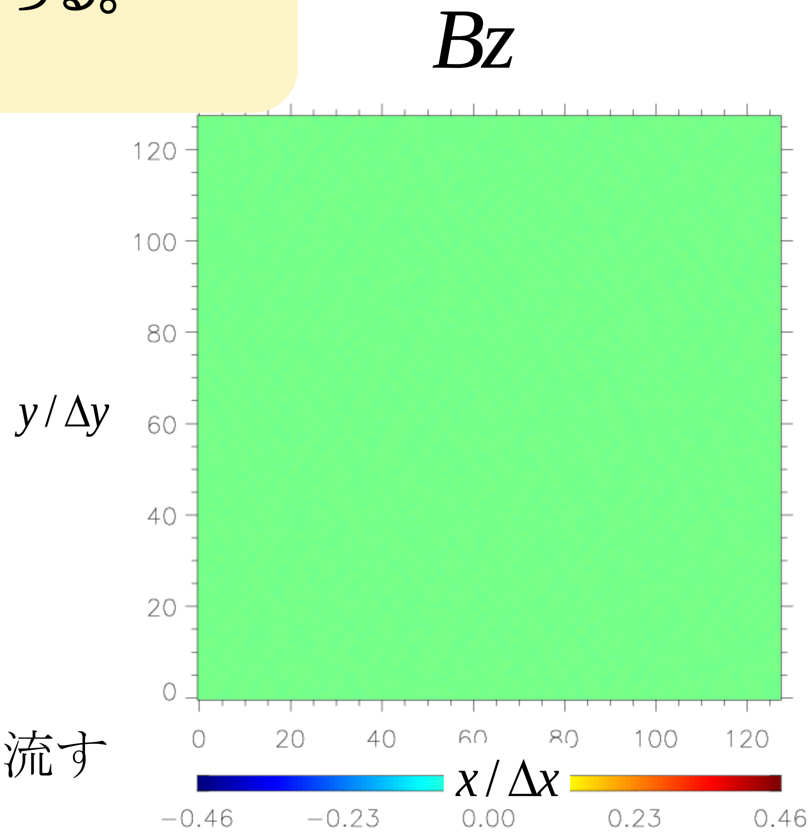
電磁場　・・・　グリット上でのMaxwell方程式

（CGS系）

- $$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \nabla \times \vec{B} - \frac{4\pi \vec{J}}{c}$$
- $$\nabla \cdot E = 4\pi\rho$$
- $$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E}$$
- $$\nabla \cdot B = 0$$

Numerical Cherenkov Radiation

PIC法において電磁場をグリッド上で解く際
電磁波の位相速度が光速より落ちる。
⟹ **数値分散**



相対論的な系を扱う際

数値チェレンコフ放射と呼ばれる

数値的な不安定性が発生する。

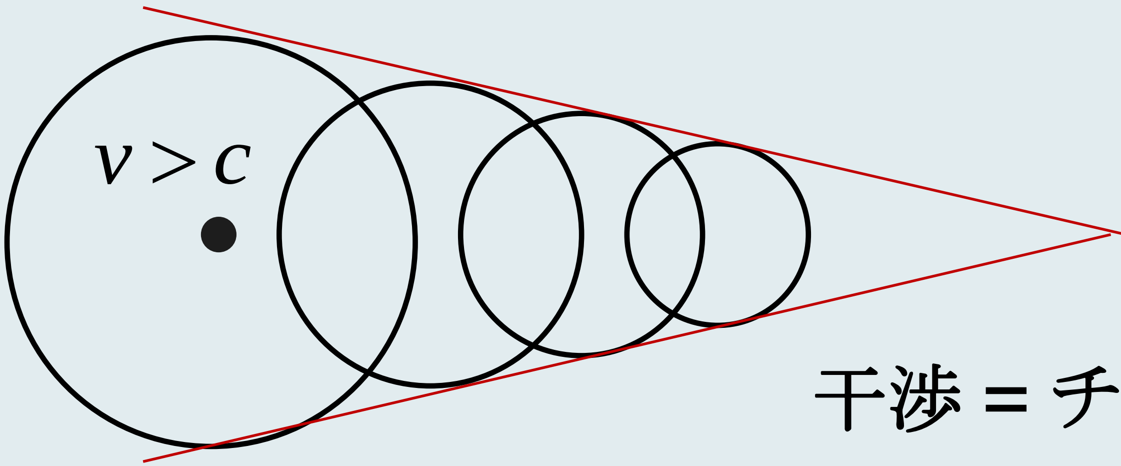
（例） x方向に速度

$v = 0.9999c$ のプラズマを流す

数値チェレンコフ放射発生の理論と、その**対処法**を追う。

なぜ数値チェレンコフ？

- 自然界　粒子速度 > 光速



干渉 = チェレンコフ光発生

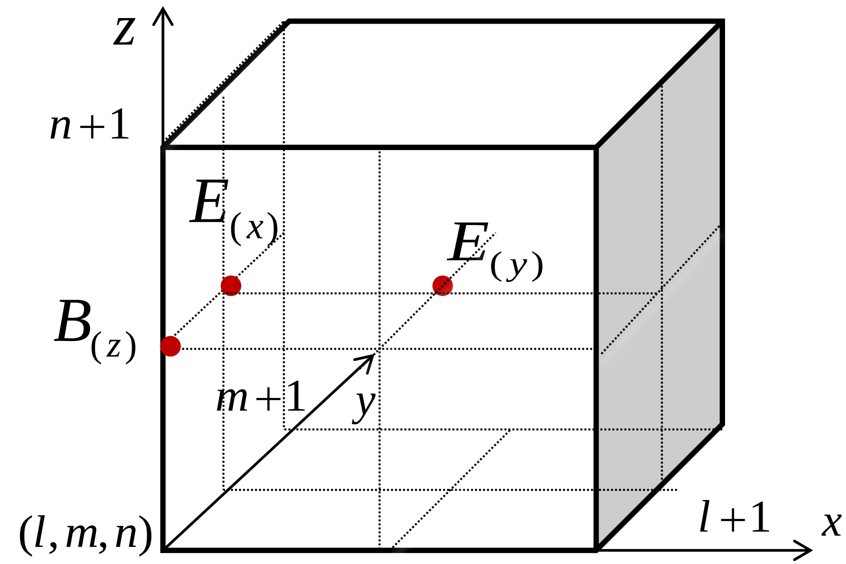
- 数値上　プラズマ速度 > 電磁波の位相速度
  $(v = 0.9999c)$

数値不安定として発生 = **数値チェレンコフ放射**

Maxwell方程式の差分解法に伴う数値分散

PIC法における標準的な
電磁場の差分解法FDTD法

陽的(explicit)な解法



$$\frac{B_{(z)}{}^{s+1}_{l,m,n+\frac{1}{2}} - B_{(z)}{}^{s}_{l,m,n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -c\frac{E_{(x)}{}^{s+\frac{1}{2}}_{l,m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - E_{(x)}{}^{s+\frac{1}{2}}_{l,m-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} + c\frac{E_{(y)}{}^{s+\frac{1}{2}}_{l+\frac{1}{2},m,n+\frac{1}{2}} - E_{(z)}{}^{s+\frac{1}{2}}_{l-\frac{1}{2},m,n+\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$

$$\frac{E_{(x)}{}^{s+\frac{1}{2}}_{l,m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - E_{(x)}{}^{s-\frac{1}{2}}_{l,,m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -c\frac{B_{(z)}{}^{s}_{l,m+1,n+\frac{1}{2}} - B_{(z)}{}^{s}_{l,m,n+\frac{1}{2}}}{\Delta y}$$

$$\frac{E_{(y)}{}^{s+\frac{1}{2}}_{l+\frac{1}{2},m,n+\frac{1}{2}} - E_{(y)}{}^{s-\frac{1}{2}}_{l+\frac{1}{2},m,n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} = c\frac{B_{(z)}{}^{s}_{l+1,m,n+\frac{1}{2}} - B_{(z)}{}^{s}_{l,m,n+\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$

FDTD法における電磁場の位相速度の分散関係

離散化させた平面波の式

$$B_{(y)} = B_{0(y)} \exp\left\{ i(\omega s\Delta t - (k_x l\Delta x + k_y m\Delta y + k_z n\Delta z)) \right\}$$

$$E_{(z)} = E_{0(z)} \exp\left\{ i(\omega s\Delta t - (k_x l\Delta x + k_y m\Delta y + k_z n\Delta z)) \right\}$$

を代入することで得られる、**FDTD法における分散関係**

$$\omega\Delta t = 2\arcsin\left[\sqrt{\left(c\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin\frac{k_x\Delta x}{2} \right)^2 + \left(c\frac{\Delta t}{\Delta y}\sin\frac{k_y\Delta y}{2} \right)^2} \right]$$

分散公式　$\omega = ck$と異なる形で現れる。

$\left(k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \right)$

シミュレーションパッケージ"pCANS"におけるMaxwell方程式の差分解法

pCANSでは、FDTD法と異なる
陰的(Implicit)な解法を採用している。

s+1/2 における物理量を、
s+1 と **s** における情報より定義している。

$$\vec{F}^{s+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\vec{F}^{s+1} + \frac{1}{2}\vec{F}^{s}$$

陰的解法による、分散関係は

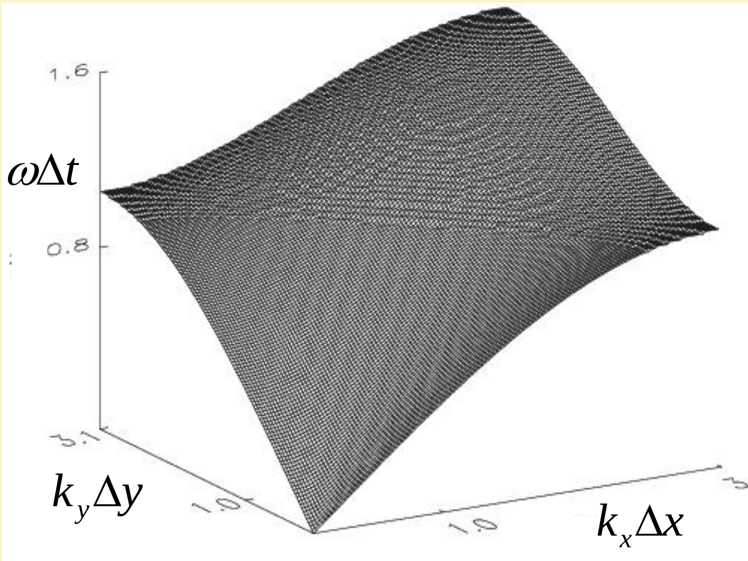
$$\omega\Delta t = 2\arctan\left[\sqrt{\left(c\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin\frac{k_x\Delta x}{2}\right)^2 + \left(c\frac{\Delta t}{\Delta y}\sin\frac{k_y\Delta y}{2}\right)^2}\right]$$

分散関係の比較

パラメータ　・・・　$\Delta x = 1.0, \Delta y = 1.0, \Delta t = 0.5, c = 1.0$

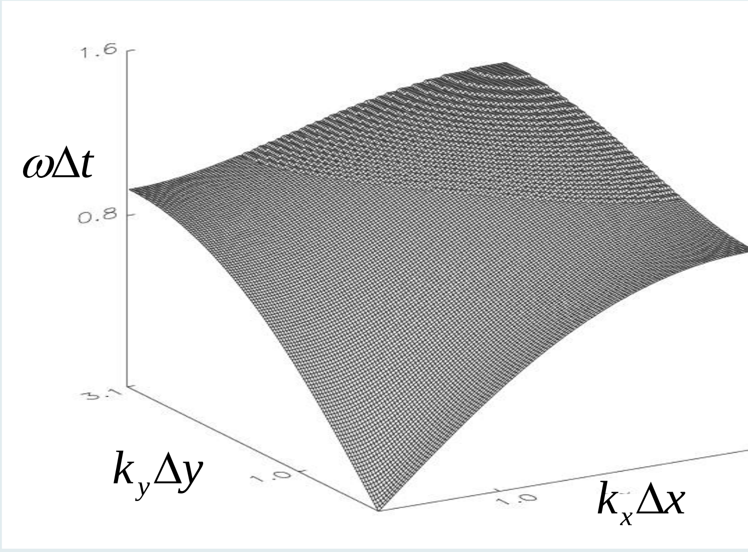
FDTD法(explicit)

$$\omega\Delta t = 2\arcsin\sqrt{\left(c\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin\frac{k_x\Delta x}{2}\right)^2 + \left(c\frac{\Delta t}{\Delta y}\sin\frac{k_y\Delta y}{2}\right)^2}$$



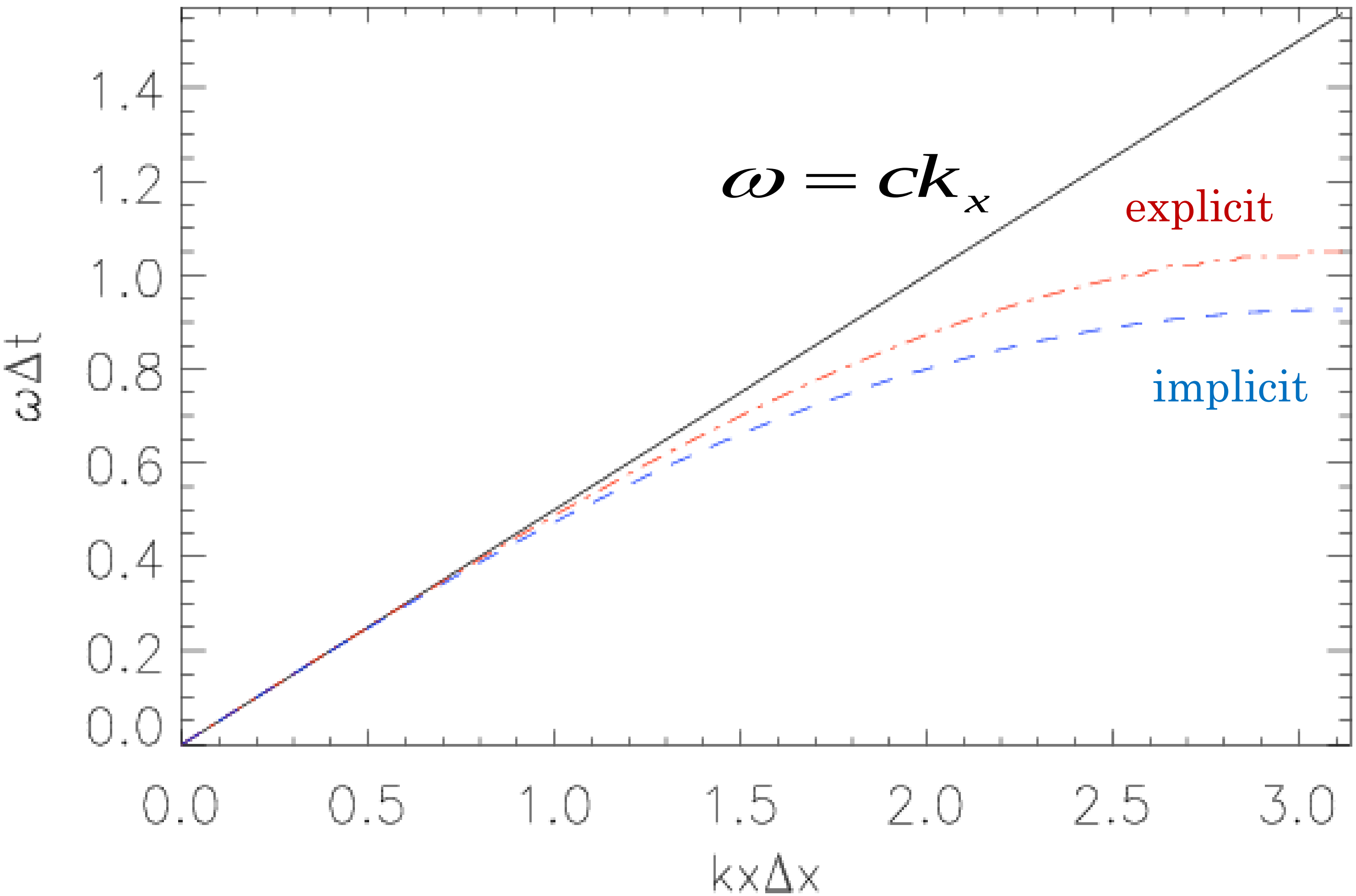
pCANS陰的解法(Implicit)

$$\omega\Delta t = 2\arctan\sqrt{\left(c\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin\frac{k_x\Delta x}{2}\right)^2 + \left(c\frac{\Delta t}{\Delta y}\sin\frac{k_y\Delta y}{2}\right)^2}$$

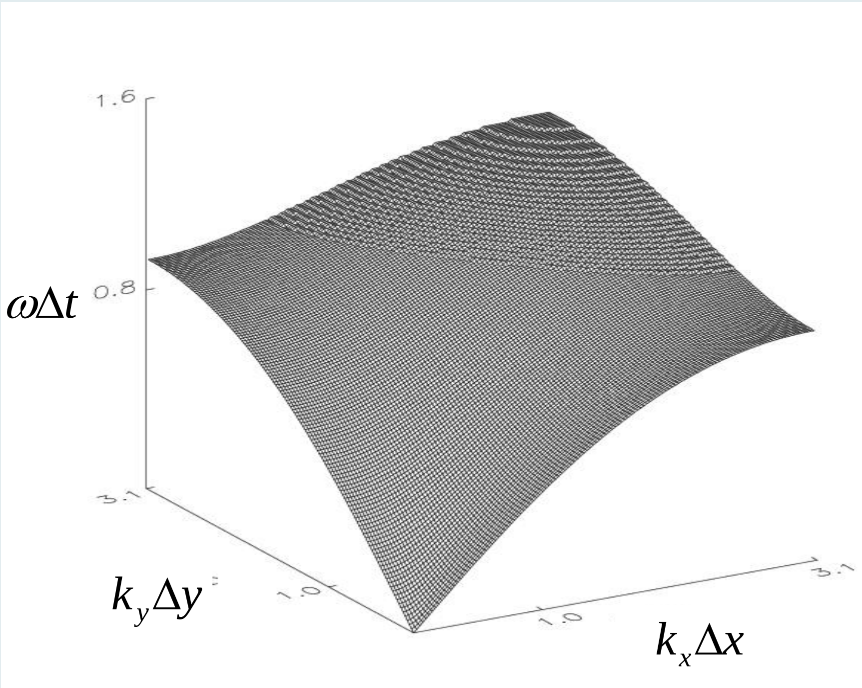


分散関係の比較②

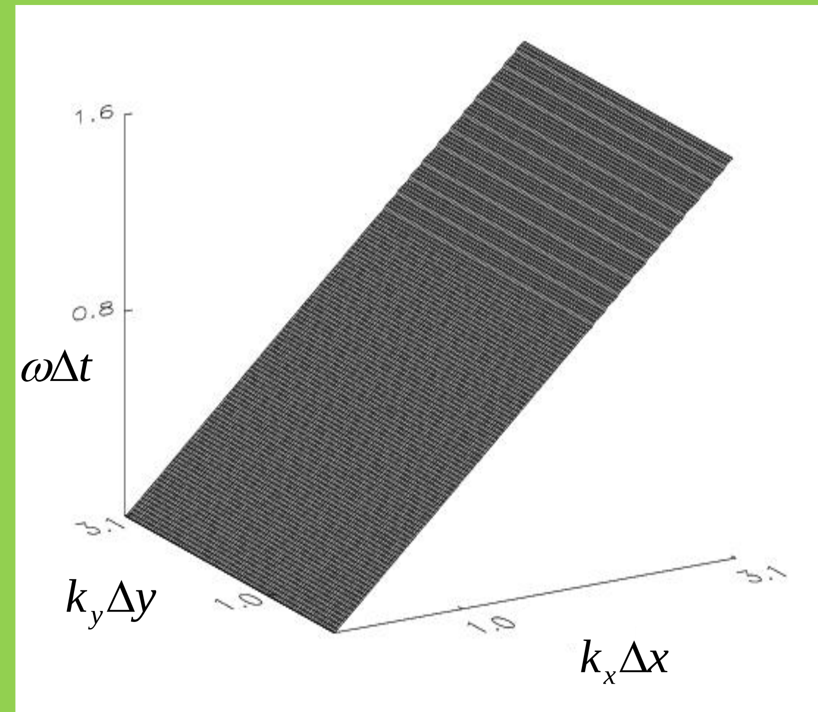
パラメータ ・・・ $\Delta x = 1.0, \Delta y = 1.0, \Delta t = 0.5, c = 1.0$



Numerical Cherenkov Radiation　発生の理論



$$\omega\Delta t = 2\arctan\sqrt{\left(c\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin\frac{k_x\Delta x}{2}\right)^2 + \left(c\frac{\Delta t}{\Delta y}\sin\frac{k_y\Delta y}{2}\right)^2}$$



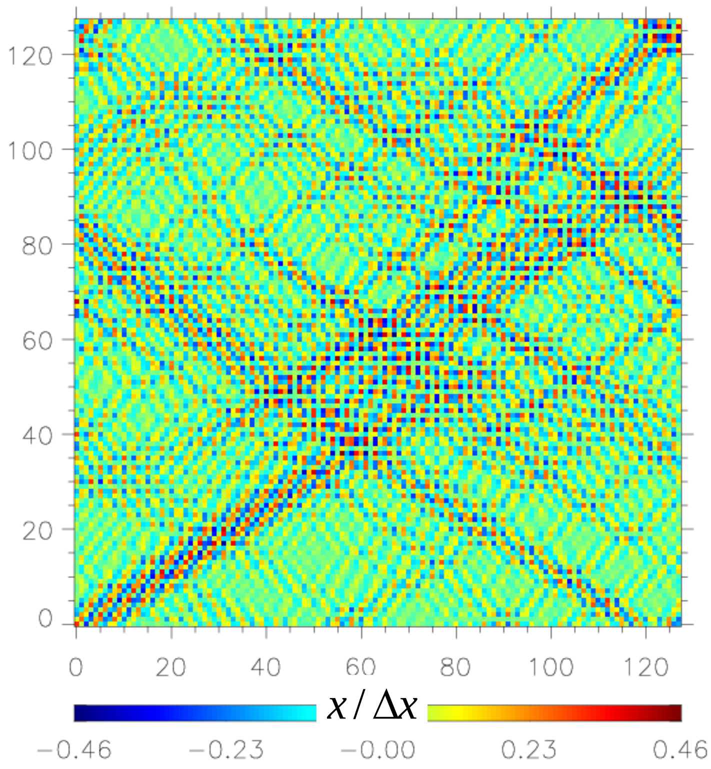
$$\omega = 0.9999ck_x = vk_x$$

数値チェレンコフ放射が発生する理論線は

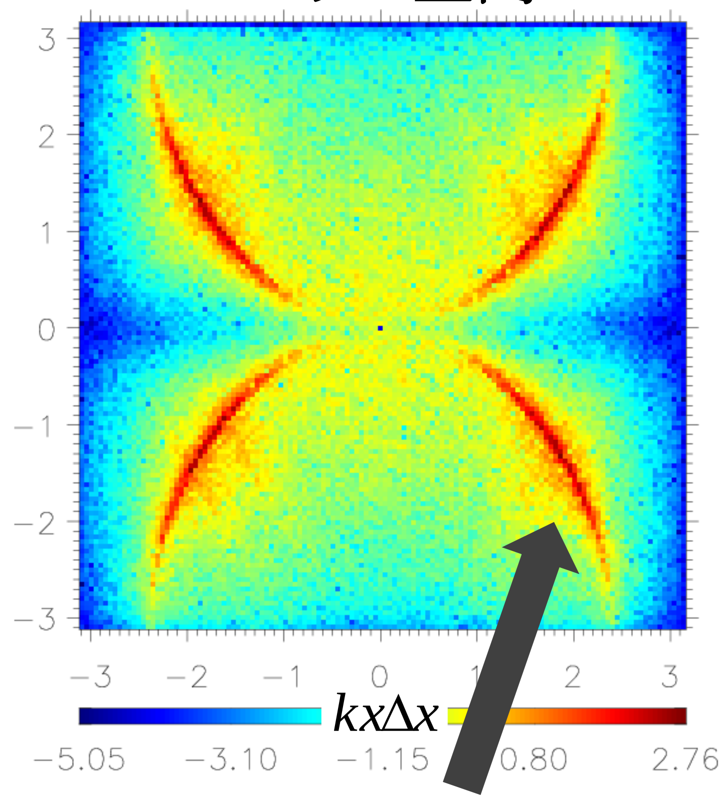
$$k_y\Delta y = 2\arcsin\left\{\pm\frac{\Delta y}{c\Delta t}\sqrt{\tan^2\left(\frac{vk_x\Delta t}{2}\right) - \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2\sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right)}\right\}$$

数値チェレンコフ発生の理論を確認

実空間(Bz)



フーリエ空間



$\Delta x = 1.0$

$\Delta y = 1.0$

$\Delta t = 0.5$

$c = 1.0$

$$k_y \Delta y = 2\arcsin\left\{ \pm \frac{\Delta y}{c\Delta t}\sqrt{\tan^2\left(\frac{v k_x \Delta t}{2}\right) - \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right)} \right\}$$

無衝突衝撃波における物理過程

⇩

PIC法による解析

⇩

電磁場の位相速度が**数値分散**により落ちる。

⇩

相対論的な流れを扱う際には

Numerical Cherenkov Radiation 発生

①**PSATD法**

フーリエ空間で
Maxwell方程式を解き、
解析解を得る方法。

エイリアスや、計算コストの問題

②**特定のクーラン数**を選択し、
不安定性の成長率を抑える方法

(クーラン数 $c\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$)

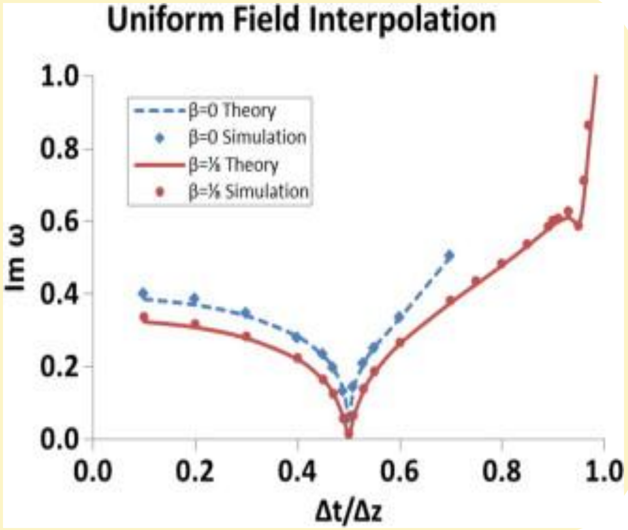
近年における数値チェレンコフに対する発表

Vay et al., J. Comp. Phys, **2011**,
“Numerical methods for instability in the modeling of laser wakefield accelerators in a Lorentz boosted frame ”

特定のクーラン数において、不安定性の成長率が落ちる

Godfrey and Vay, J. Comp. Phys., **2013**
Xu et al., Comp. Phys Commun., **2013**

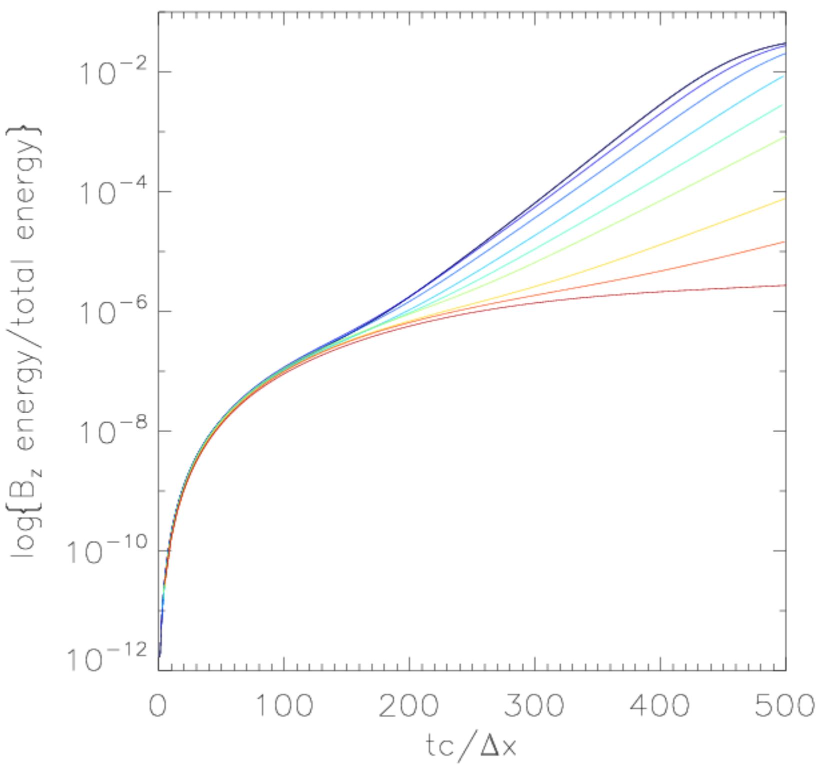
クーラン数が0.5において
成長率が落ちると発表された



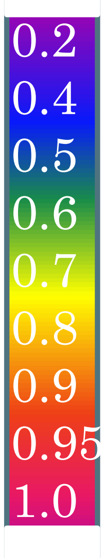
以上の論文とは異なったスキームである
pCANSを用いて同様の結果が得られるか確認。

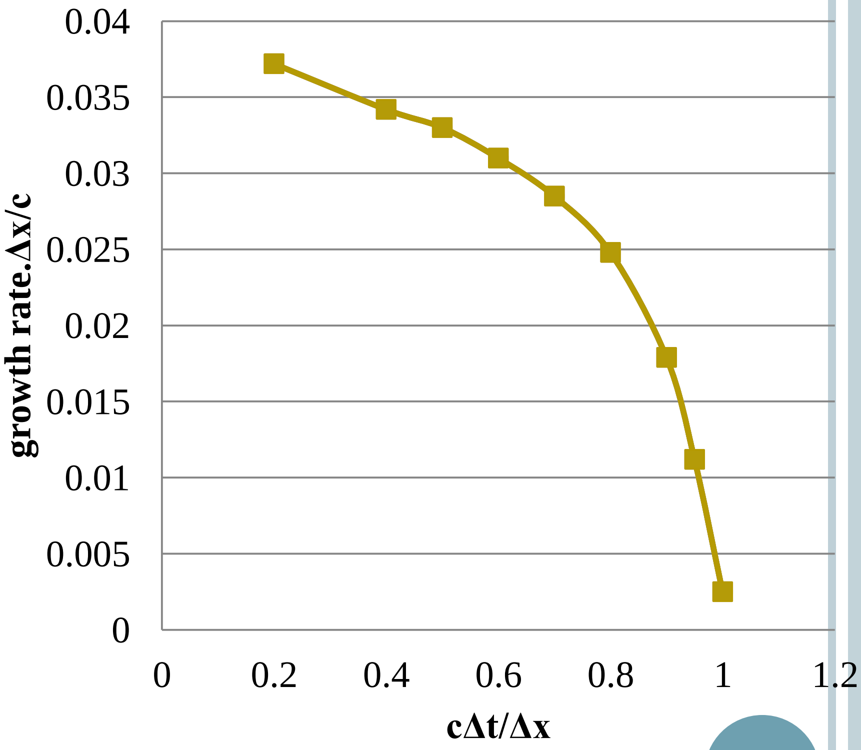
pCANSによる不安定性の成長率の変化

磁場エネルギーの時間変化　＝ 成長率とする。



CFL

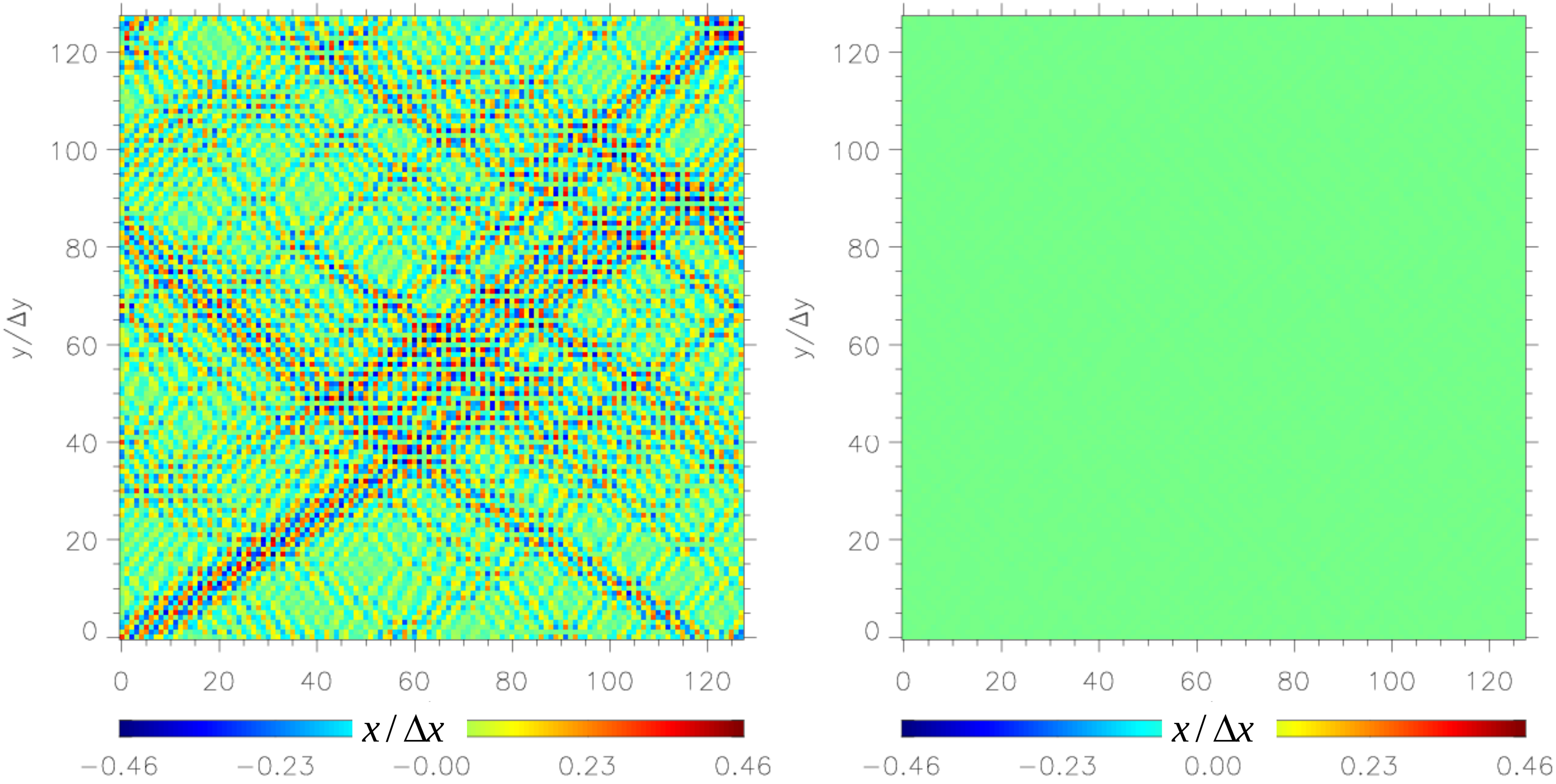




- **クーラン数 1.0** において
  Numerical Cherenkov Radiation を抑えられているか。

実空間

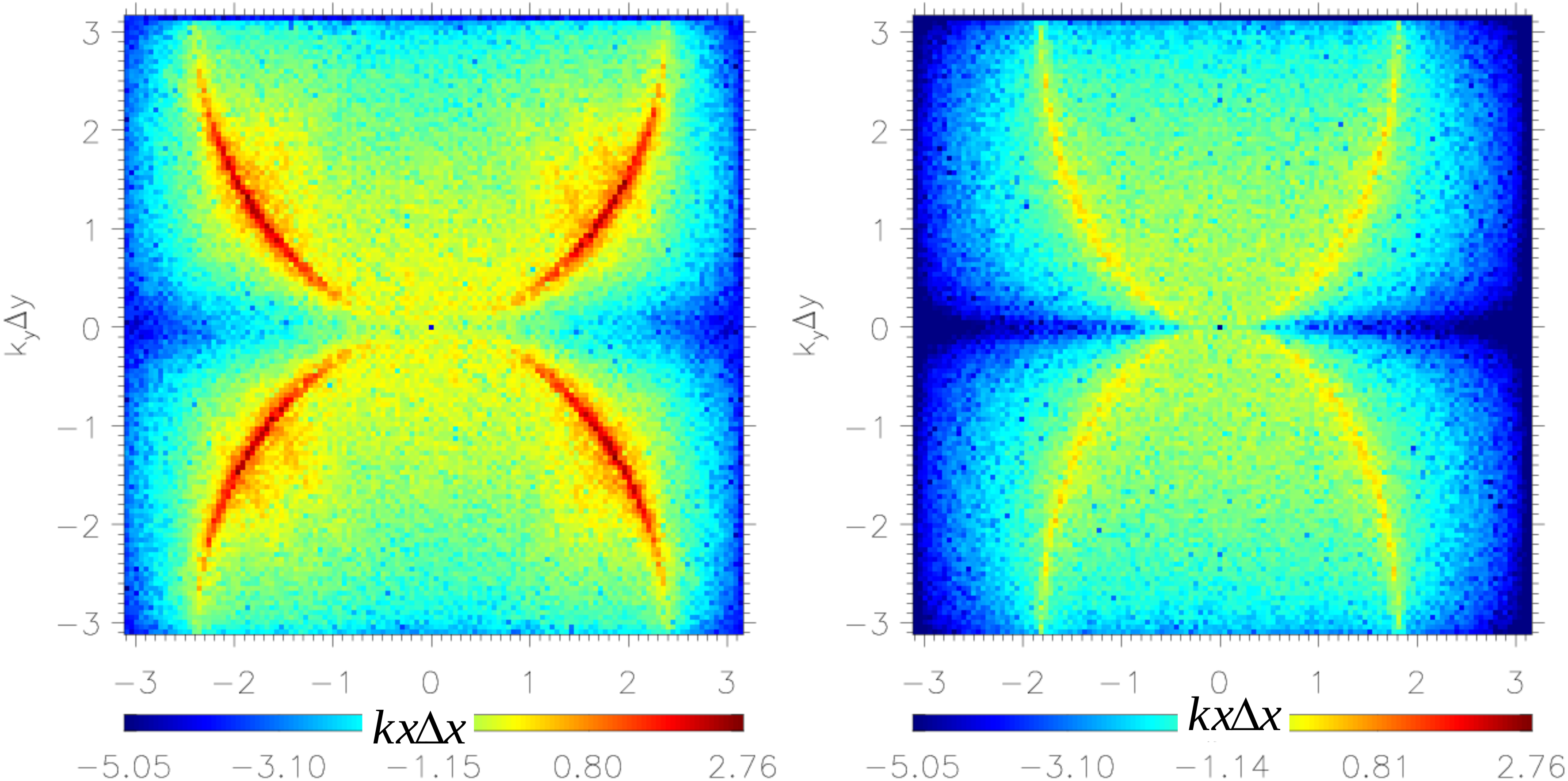
$$c\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.5 \qquad\qquad c\frac{\Delta t}{\Delta x} = 1.0$$



- クーラン数 **1.0** において
  Numerical Cherenkov Radiation を抑えられているか。

フーリエ空間

$$c\frac{\Delta t}{\Delta x}=0.5 \qquad\qquad c\frac{\Delta t}{\Delta x}=1.0$$



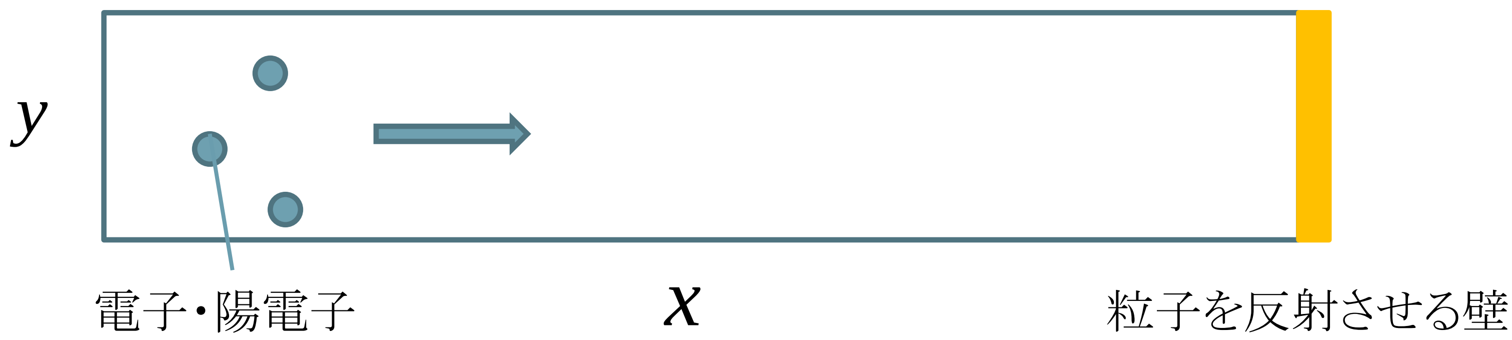
相対論的衝撃波への応用
シミュレーション設定

$$\Delta x = 1.0, \Delta y = 1.0, c = 1.0$$

$\Gamma = 10$ (上流速度のローレンツ因子)

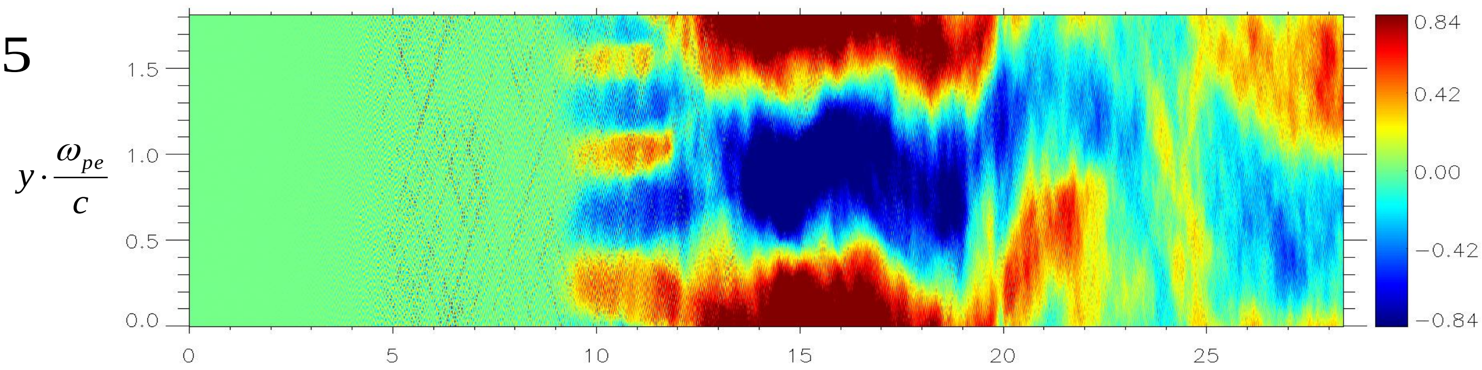
$v_{th} = 0.1$ (熱速度)　n = 10 (セルあたりの平均粒子数)

背景磁場なし

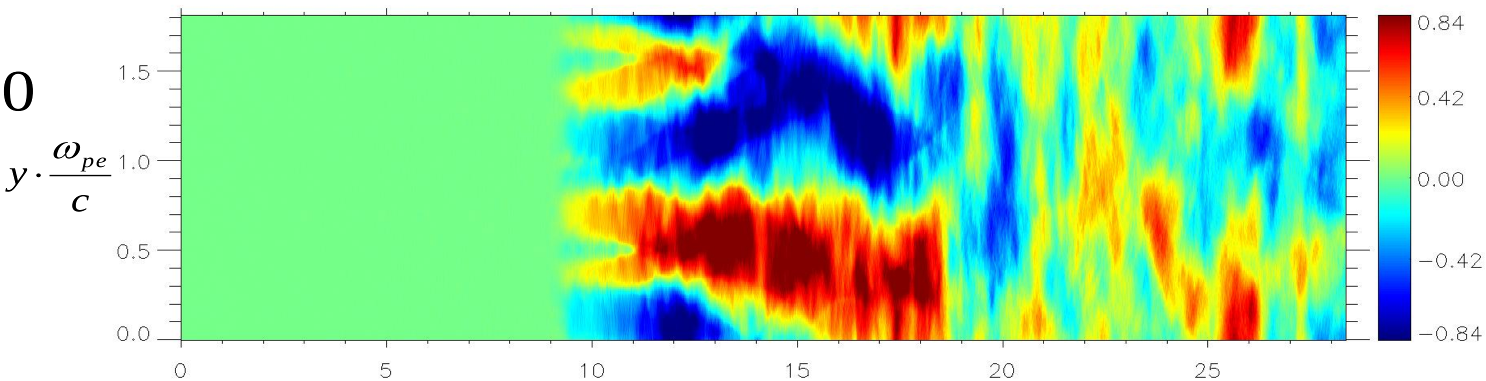


相対論的衝撃波への応用 (磁場 $\frac{Bz}{\sqrt{4\pi n\Gamma mc^2}}$)

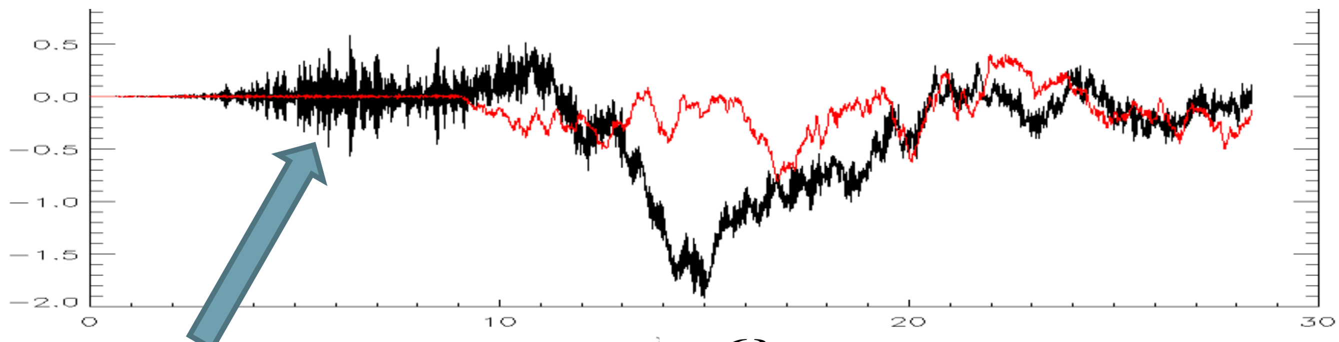
$$c\frac{\Delta t}{\Delta x}=0.5$$



$$c\frac{\Delta t}{\Delta x}=1.0$$



$$\frac{Bz}{\sqrt{4\pi n\Gamma mc^2}}$$



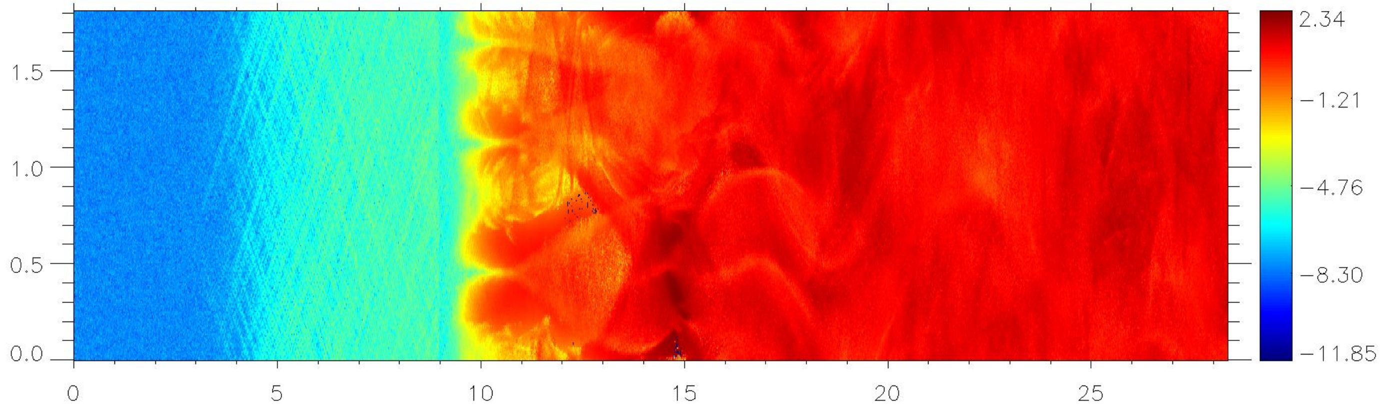
数値チェレンコフ放射

$$x\cdot\frac{\omega_{pe}}{c}$$

相対論的衝撃波への応用 (温度 T/mc^2)

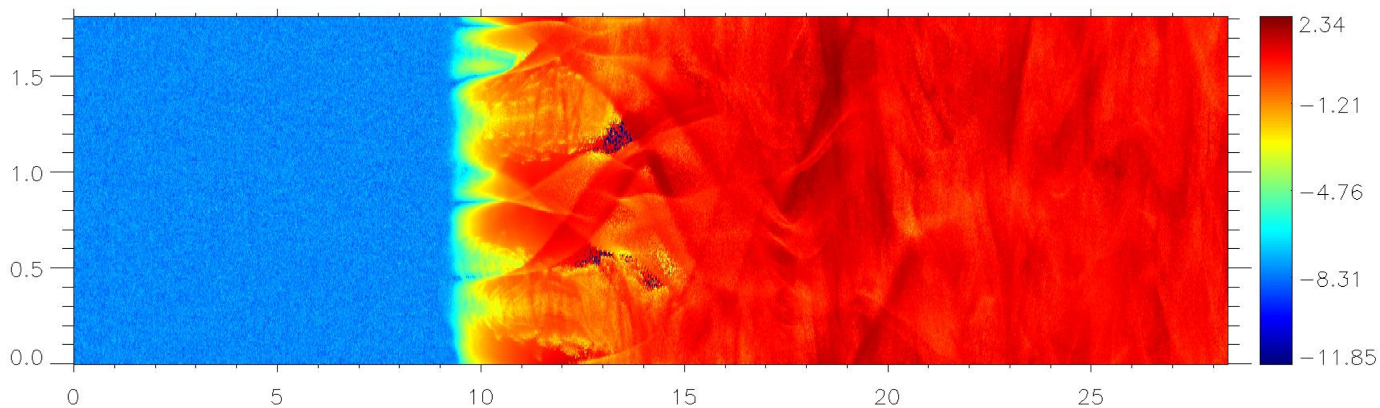
$$c\frac{\Delta t}{\Delta x}=0.5$$

$$y\cdot\frac{\omega_{pe}}{c}$$



$$c\frac{\Delta t}{\Delta x}=1.0$$

$$y\cdot\frac{\omega_{pe}}{c}$$



$$x\cdot\frac{\omega_{pe}}{c}$$

まとめ、考察

陰的解法による分散関係 を求めることにより
数値チェレンコフ放射発生の理論を理解。

pCANSスキームにおいて、クーラン数 を $c\dfrac{\Delta t}{\Delta x}=1.0$ 付近にとることで
数値的な不安定性の成長率が抑えられる。
紹介した論文におけるクーラン数 $c\dfrac{\Delta t}{\Delta x}=0.5$ と異なるのは、
数値分散関係の違いによるものと考えられる。

$c\dfrac{\Delta t}{\Delta x}=1.0$ をとることで、$c\dfrac{\Delta t}{\Delta x}=0.5$
と比較して、Δt を大きくとれる。 → **計算コスト削減**

空間・時間2次精度 → クーラン数を2倍にすると
誤差の大きさに4倍の違い

今後の課題

今回得た数値チェレンコフが解消される
クーラン数 $c\dfrac{\Delta t}{\Delta x}=1.0$ を用いて

多次元の相対論的衝撃波における粒子加速
の解析にアプローチしていく。

ご清聴ありがとうございました。