磁気リコネクション領域の自動判定アルゴリズム開発とその応用

千葉大学　宇宙物理研究室　学部4年
堀江真惟人
2018/02/22

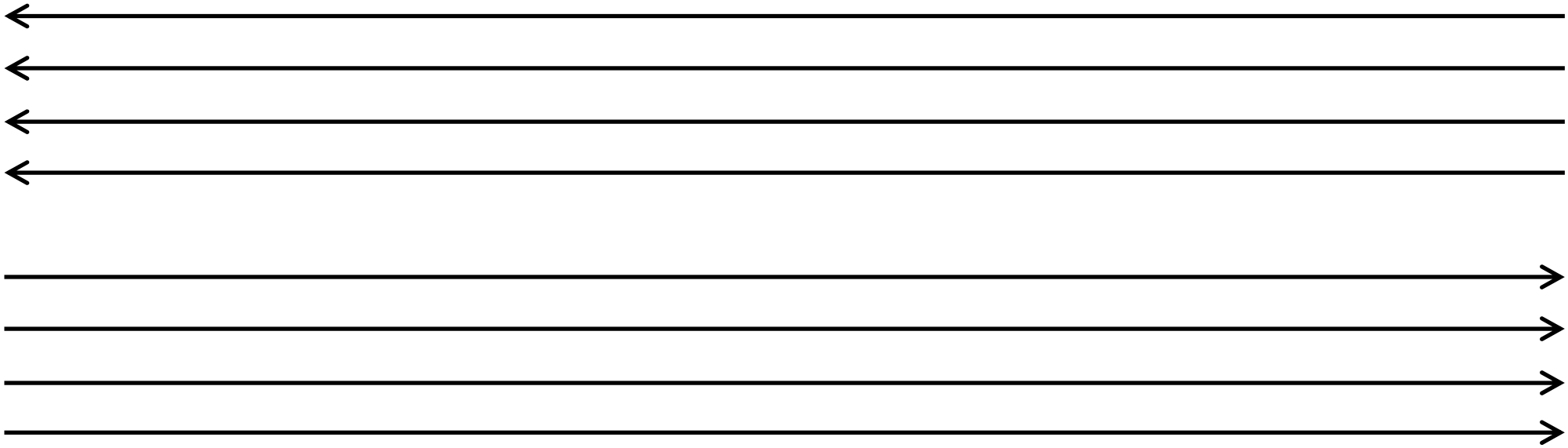
動機

- 　第3タームに飛騨天文台に行き、太陽観測の現場を見てきた。
  その際、データ解析ソフトを用いて、観測結果から温度や圧力など様々な情報を引き出していることに興味を持った。

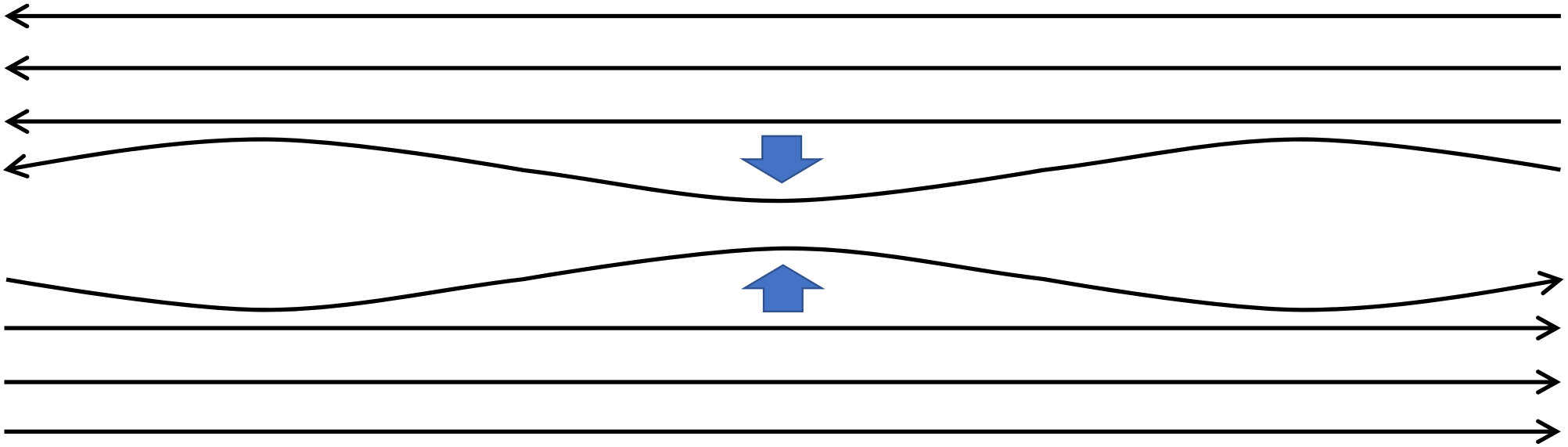
- 　太陽観測の場で使われるような解析ソフトを作りたい(目標)と思うようになった。

イントロダクション

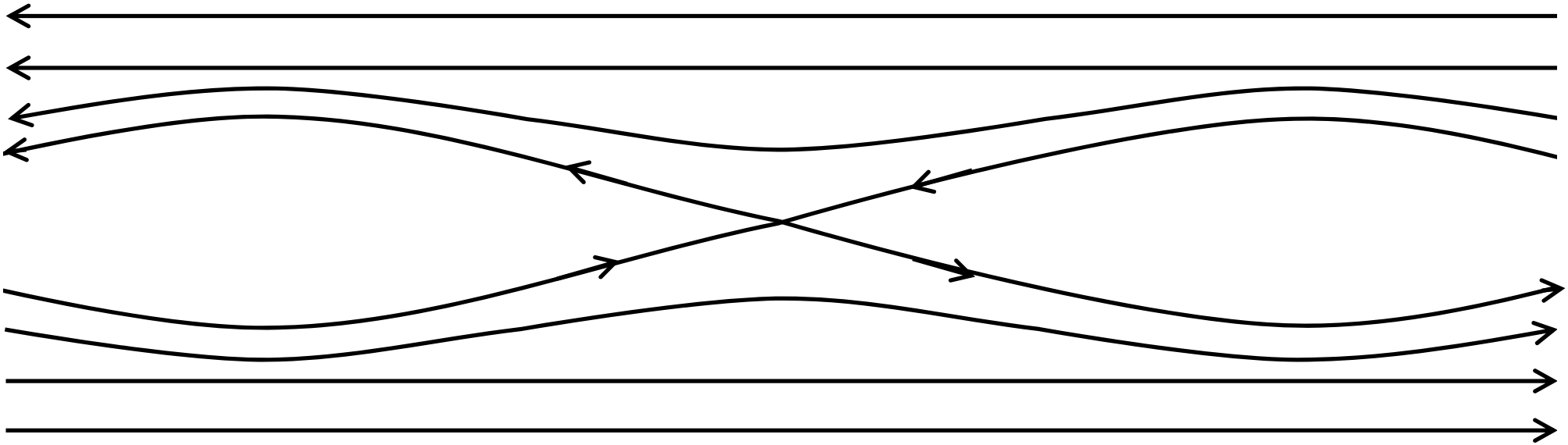
磁気リコネクションと磁気島の発生



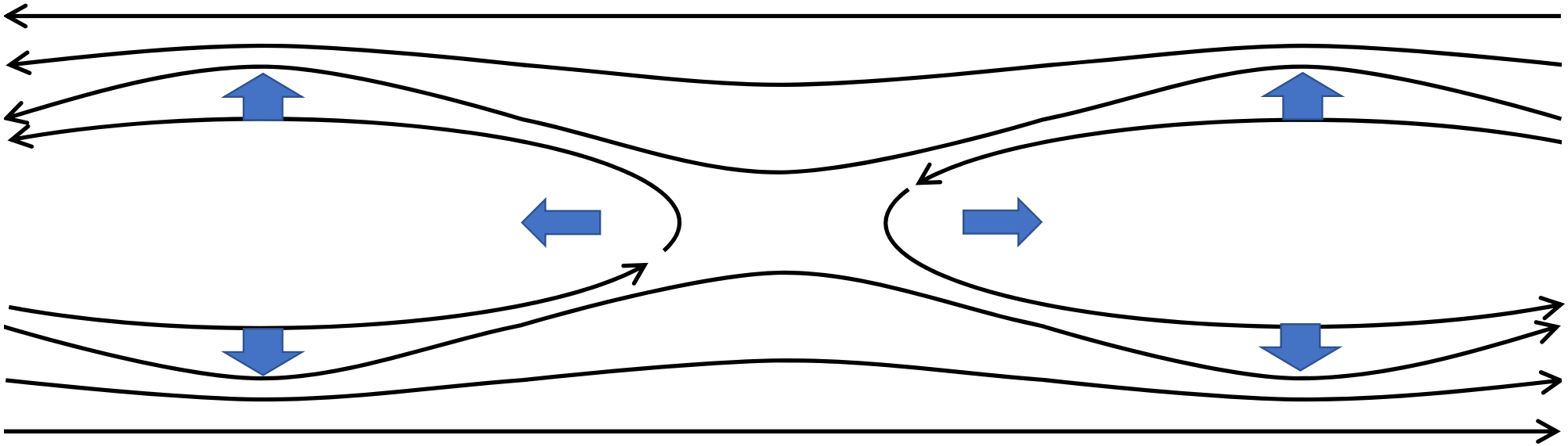
磁気リコネクションと磁気島の発生



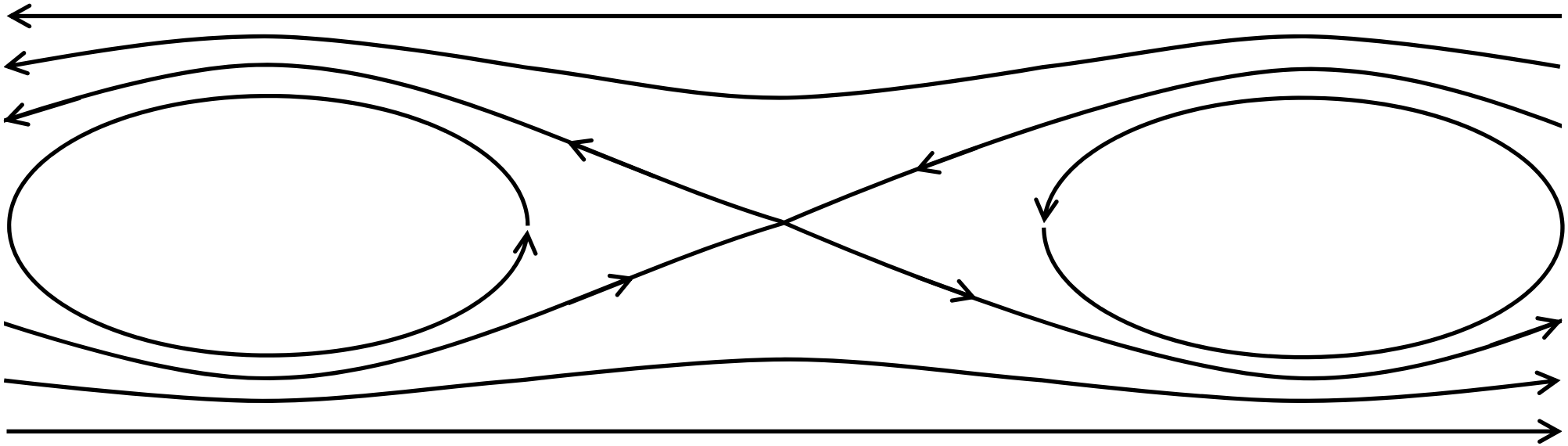
磁気リコネクションと磁気島の発生



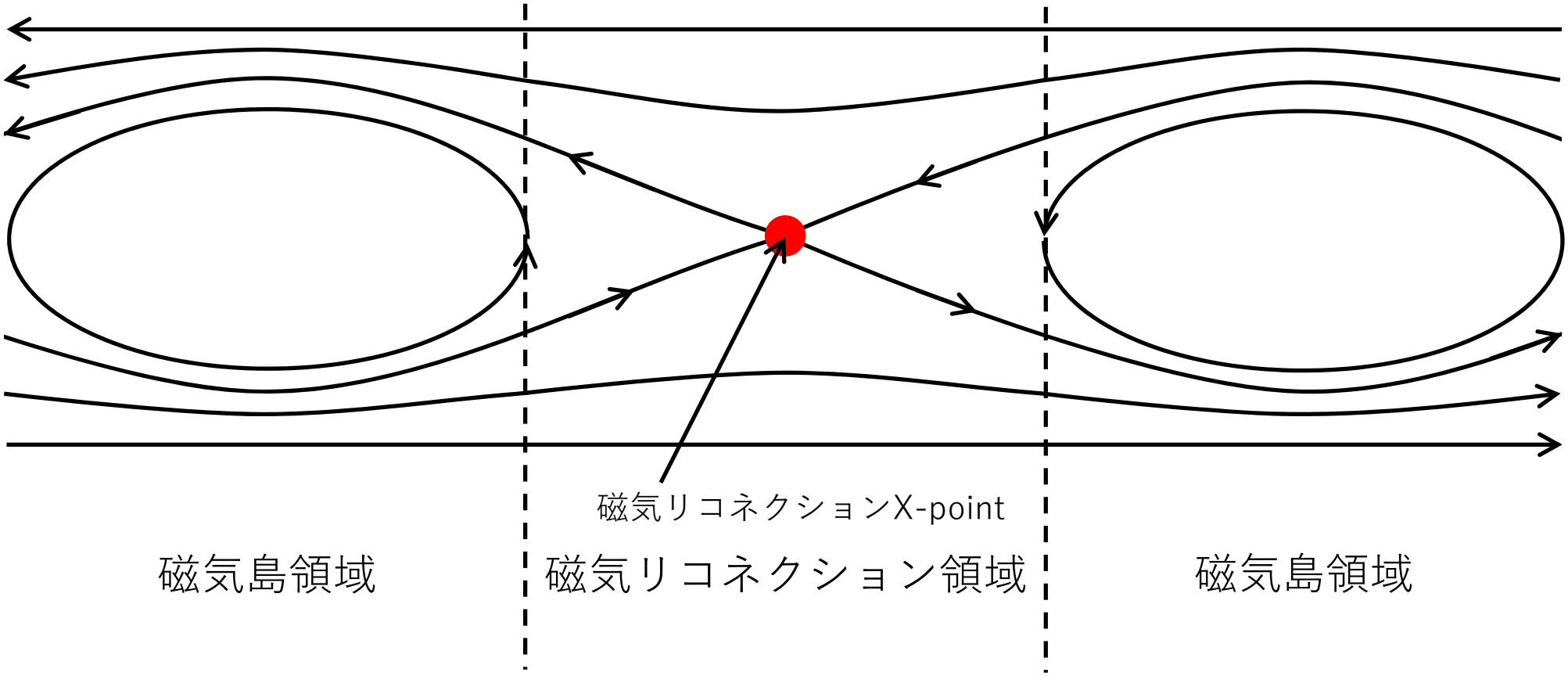
磁気リコネクションと磁気島の発生



磁気リコネクションと磁気島の発生

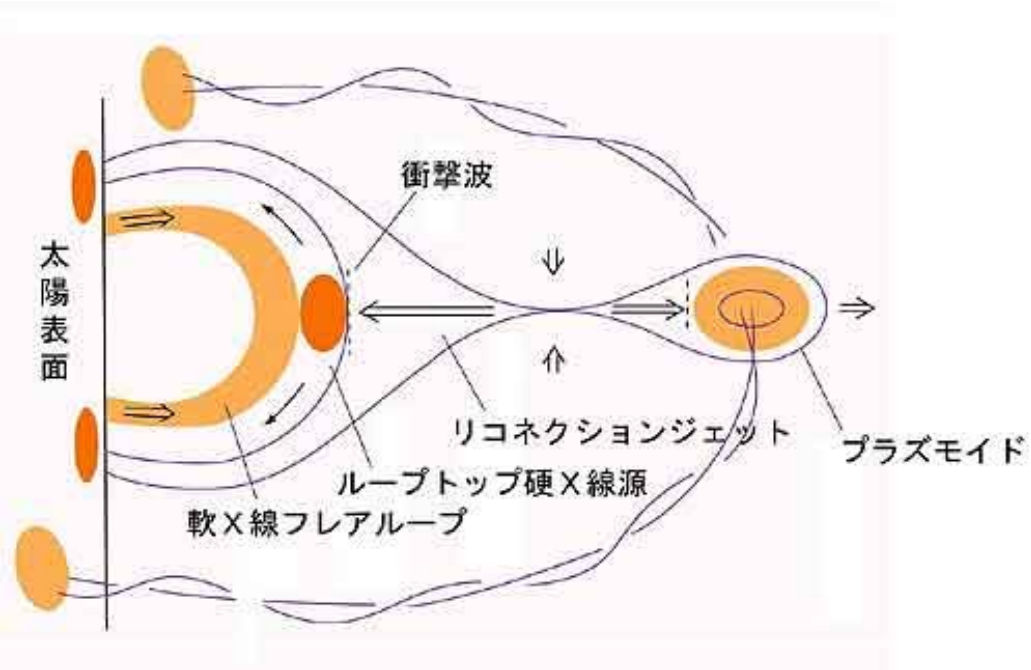


磁気リコネクションと磁気島の発生



どうして、磁気リコネクションの同定が大切なのか？

太陽フレアの磁気リコネクションモデル



- Carmichael(1964);
- Sturrock(1966);
- Hirayama(1974);
- Kopp& Pneuman(1976)

- コロナの磁気エネルギー

磁気リコネクション

- プラズマの熱・運動エネルギー

寺澤 敏夫著「ISASニュースNo.262(2003年1月号)」より引用

PHOTO BY NASA/SDO/GSFC

研究目的

- 　流体の渦の自動判定の技術を応用して、磁気リコネクションおよび磁気島領域の自動判定を行うアルゴリズムを開発する。
- 　シミュレーションデータを解析して、本手法の有用性を検証する。

渦の自動判定1（渦度を使った判定法）

- 渦度は、

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}$$

で定義される。

- しかし、これには、shear流による渦度も含まれている。

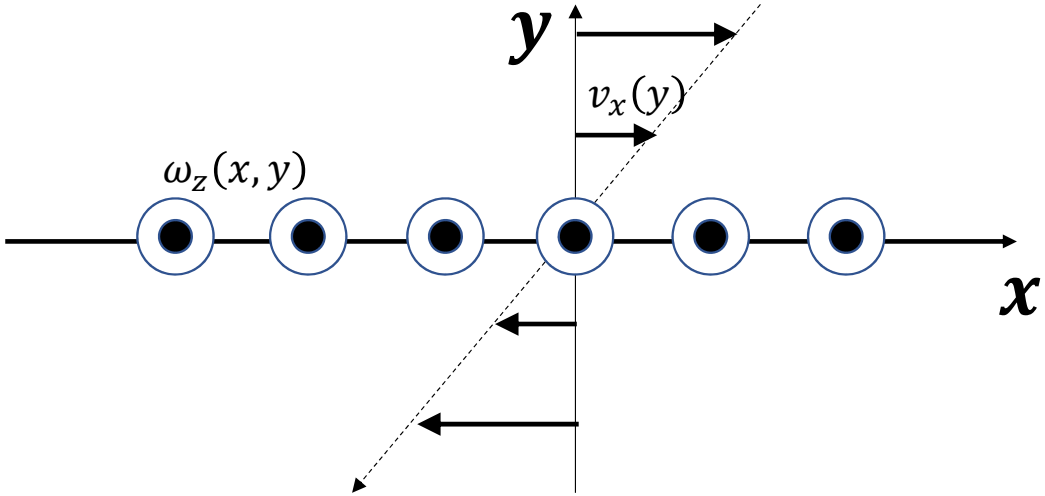


図1：shear流により発生する渦度

この場合、渦度は求まるが、渦が発生しているわけではない。

渦の自動判定2(Vorticity Strengthを使った判定法)

- shear流と純粋な渦を区別するために、ベクトル勾配テンソルの固有値から導出したVorticity Strengthを渦の判定条件とする方法が提案されている。(cf. Kato & S.Wedemeyer A&A 2017 and references therein)
- ここでベクトル勾配テンソルは、

$$\bar{V} = \{\bar{V}_{ij}\} = \left\{\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right\} = \begin{pmatrix} \partial_x v_x & \partial_y v_x \\ \partial_x v_y & \partial_y v_y \end{pmatrix}$$

で定義される。

物理量の定義(2次元の場合)

- 以下のように、 Strain(歪み): s, Strain Strength: λ_s Vorticity Strength: λ_q, 角度αを定義した。

$$s \coloneqq \sqrt{-\det(\overleftrightarrow{s})} \quad [\overleftrightarrow{s}\text{は、tracelessな速度歪みテンソル}\left(\overleftrightarrow{s} = \frac{1}{2}(\bar{V} + \bar{V}^T) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\bar{V})\, I\right)]$$

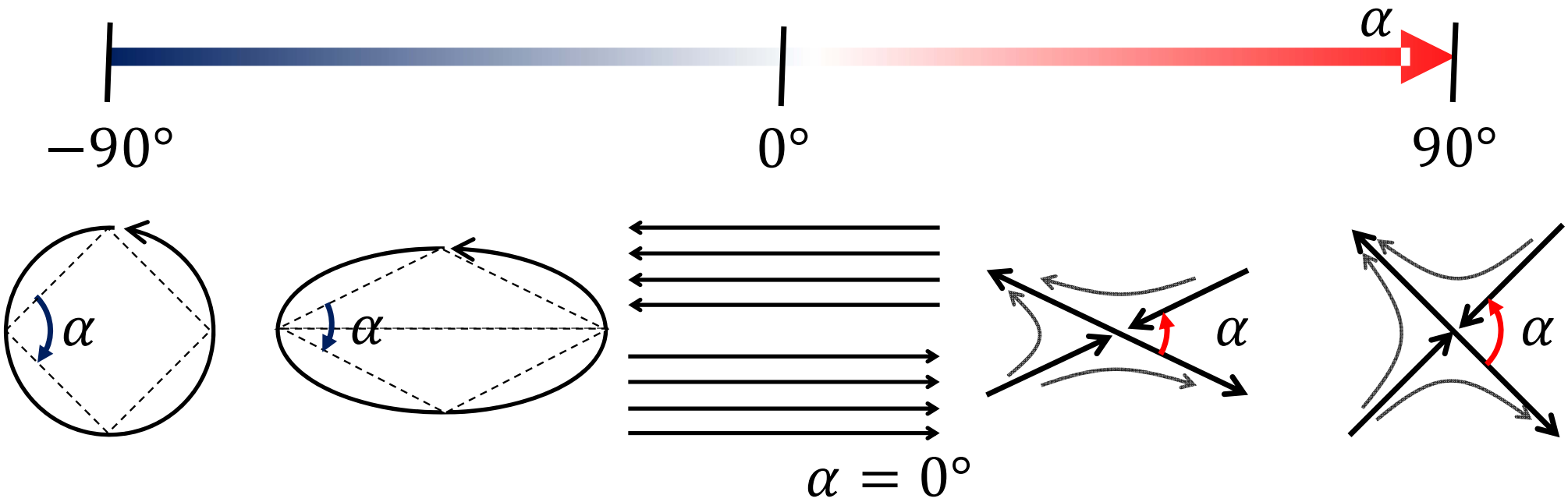
$$\lambda_s \coloneqq \sqrt{\ D} \quad (D > 0)$$

$$\lambda_q \coloneqq \sqrt{-D} \quad (D < 0) \quad (\text{ただし、}D\text{は判別式}: D = (\mathrm{tr}(\bar{V}))^2 - \det(\bar{V}))$$

$$\alpha \coloneqq \mathrm{Arcsin}\left(\frac{\lambda_s}{s} - \frac{\lambda_q}{|q|}\right) = \begin{cases} \mathrm{Arcsin}\left(\frac{\lambda_s}{s}\right) & (s > q) \\ 0 & (s = q) \\ -\mathrm{Arcsin}\left(\frac{\lambda_q}{|q|}\right) & (s < q) \end{cases} \quad \left(q = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\, v\right)$$

角度αと流線の関係

- Vorticity Strength(渦)λ_q が観測される。
- Strain Strength λ_s が観測される。

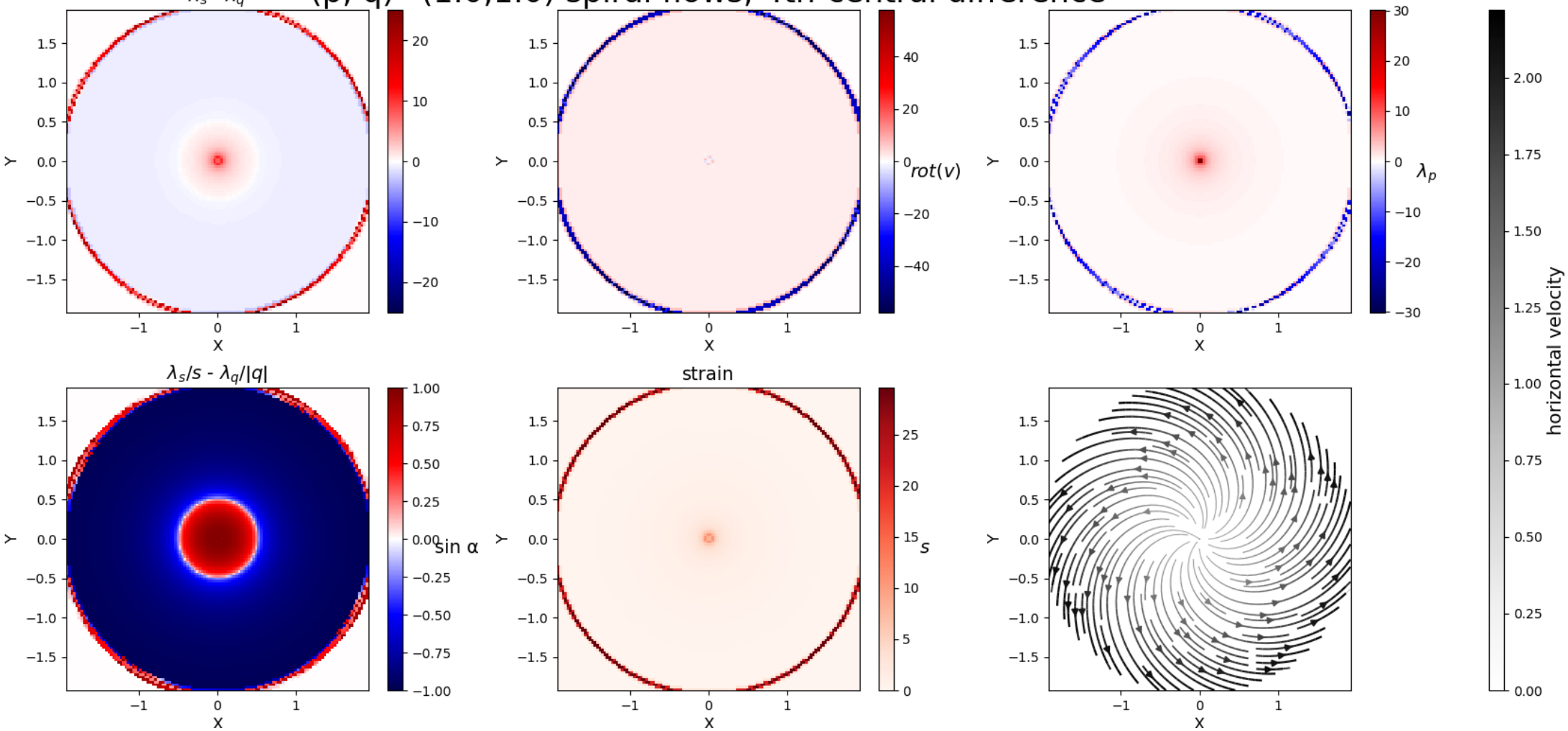


解析

以上の理論を踏まえた解析を行った。

試作の渦の解析

(p, q)=(1.0,1.0) spiral flows, 4th-central difference



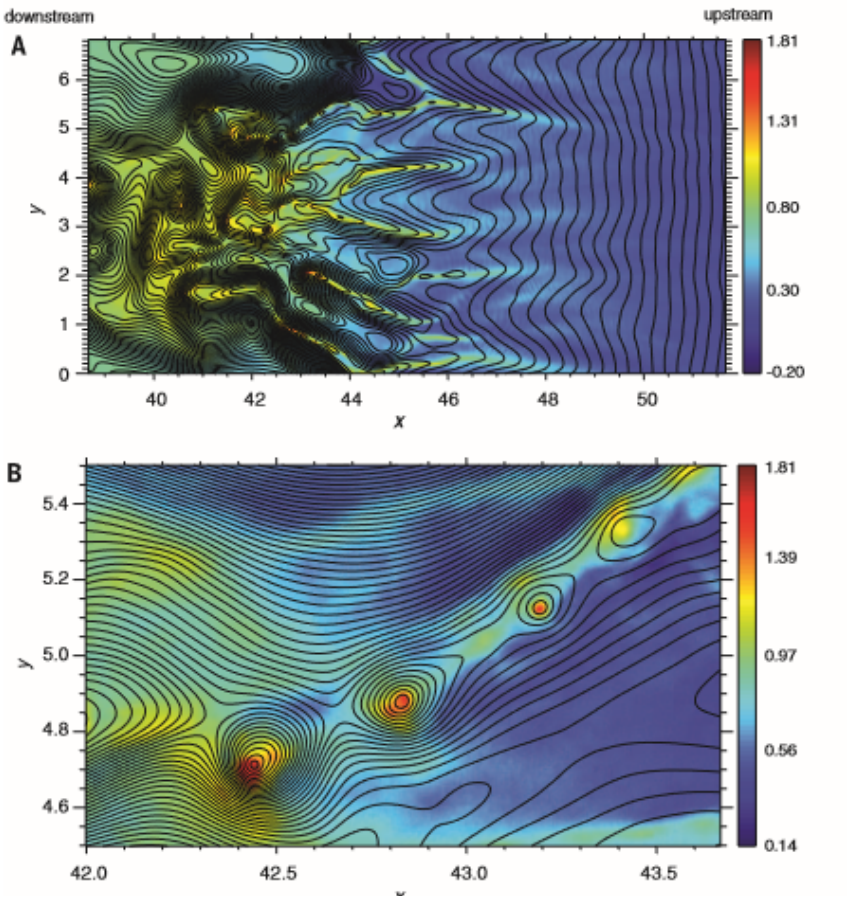
磁場の解析

磁場の解析

- 流体の構造を調べるStrain, Vorticity, Strain Strength, Vorticity Strength, $\sin\alpha$ を磁場に対して応用した。

- 流体の速度ベクトル$\boldsymbol{v}$を$\boldsymbol{B}$に対応させた。
  - Strain Strength $\lambda_s > 0$ $\Leftrightarrow$ 磁気リコネクション領域
  - Vorticity Strength $\lambda_q > 0$ $\Leftrightarrow$ 磁気島領域
  - Vorticity $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$ $\Leftrightarrow \mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = \epsilon\mu\partial_t\boldsymbol{E} + \mu\boldsymbol{j}$

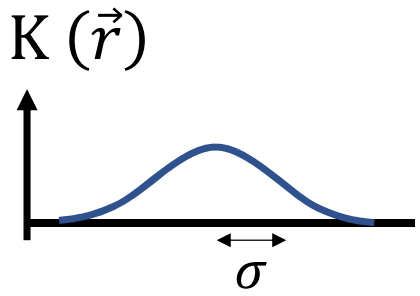
研究で使うデータの説明



(cf.　Matsumoto et al., Science, 2015)

- 　2次元のプラズマ粒子シミュレーションによる衝撃波の計算
- 　今回は磁場のデータだけを解析した。

平滑化フィルタについて



- $\vec{v}(\vec{r})$を以下のようにスムージングする。

$$\vec{v'}(\vec{r'}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{K}(\vec{r} - \vec{r'})\vec{v}(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r}$$

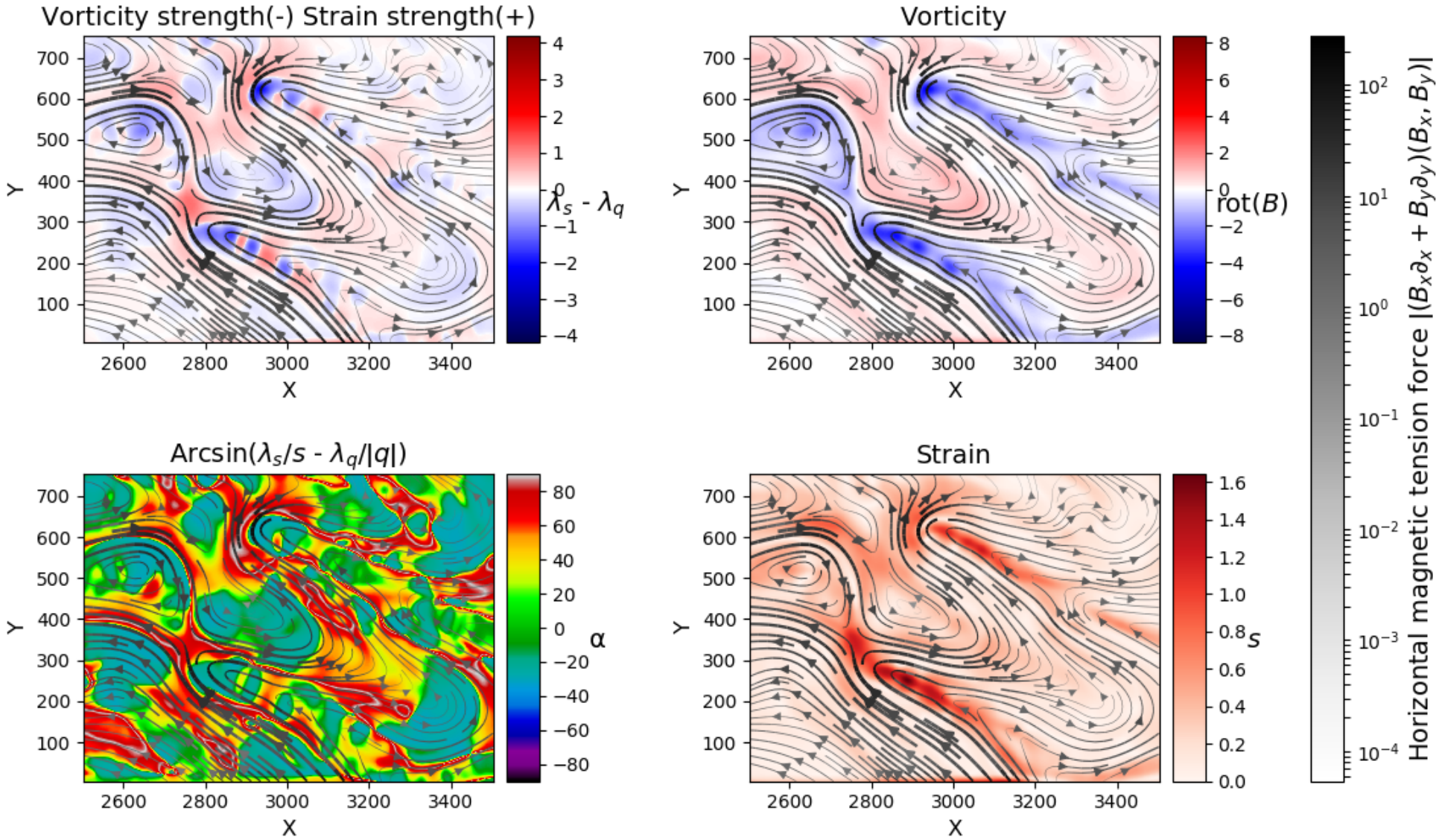
- ただし、カーネル$\mathrm{K}(\vec{r})$は、以下のようなガウシアンを使った。

$$\mathrm{K}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}^n} \exp\left(-\frac{|\vec{r}|^2}{2\sigma^2}\right)$$

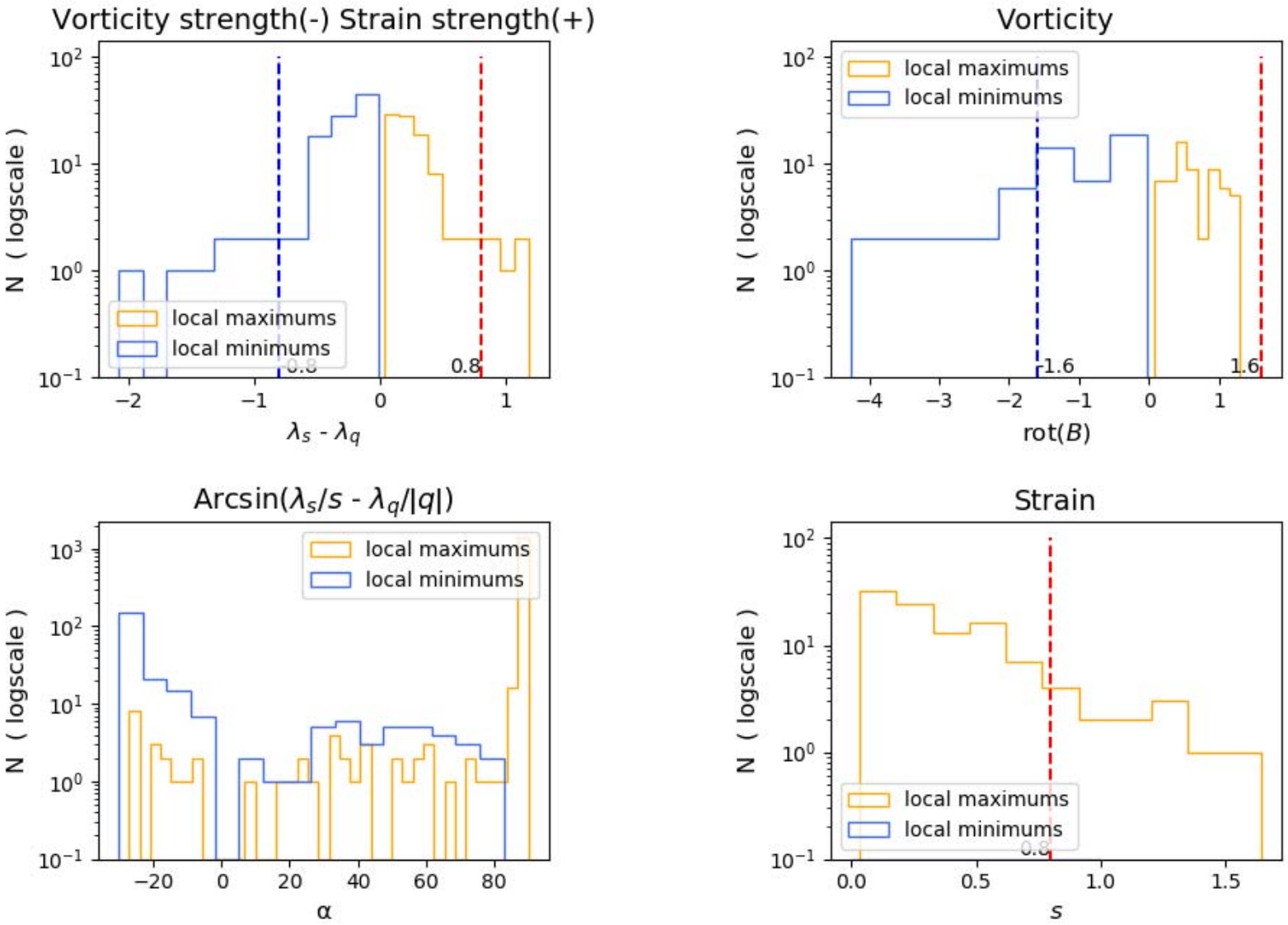
- 実際には、シミュレーションのデータは離散的であり、さらに全領域を積分するのは時間のかかるので、以下のようにした。

$$\vec{v'}(\vec{r'}) = \sum_{\substack{(-m\sigma<x-x'<m\sigma)\\(-m\sigma<y-y'<m\sigma)}} \mathrm{K}(\vec{r} - \vec{r'})\vec{v}(\vec{r})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

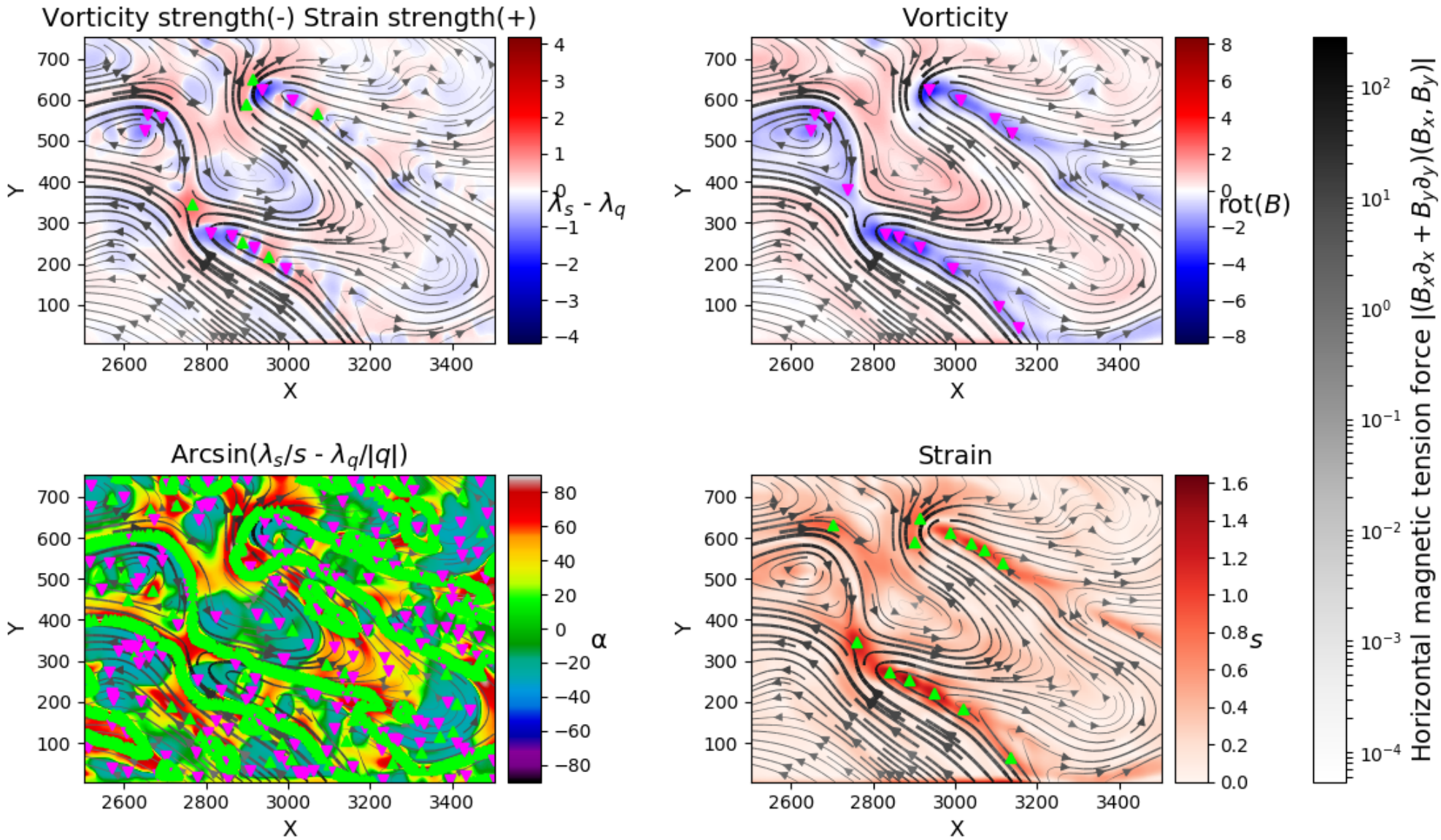
The analysis of magnetic field (σ = 10)



The analysis of magnetic field (σ = 10)(x,y)=(2500:3500, 2: 750)



The analysis of magnetic field (σ = 10)



研究成果と今後の研究計画

- 研究成果
  - 流体の渦の自動判定の技術を応用して、磁場の磁気リコネクションなどの流体の構造を自動判定することができた。
  - 衝撃波の2次元シミュレーションで発生する磁気リコネクション領域と磁気島を自動判定することができた。

- 今後の研究計画
  - 磁気島の大きさを求め、渦や磁気リコネクションを同定する。
  - 時間発展するデータを解析し、磁気リコネクションの発生予測に貢献できないかを検討したい。
  - 3次元の磁気流体中の渦や磁気リコネクションを同定する。

まとめ

- 今回のVorticity Strength, Strain Strengthを使った手法を用いることによって、磁気島と磁気リコネクションが交互に並んだ構造が容易に確かめられることがわかった。
- さらに、それらの構造を強さやαで分類し、ヒストグラムを作ることに成功した。
- αを見ることによって、それがどの程度純粋なVorticityかStrainか見極めることができた。
- αがある程度の角度のものから急に観測されなくなるという現象を発見した。

ご清聴ありがとうございました。

The analysis of magnetic field(t = 0000)(s=0010)

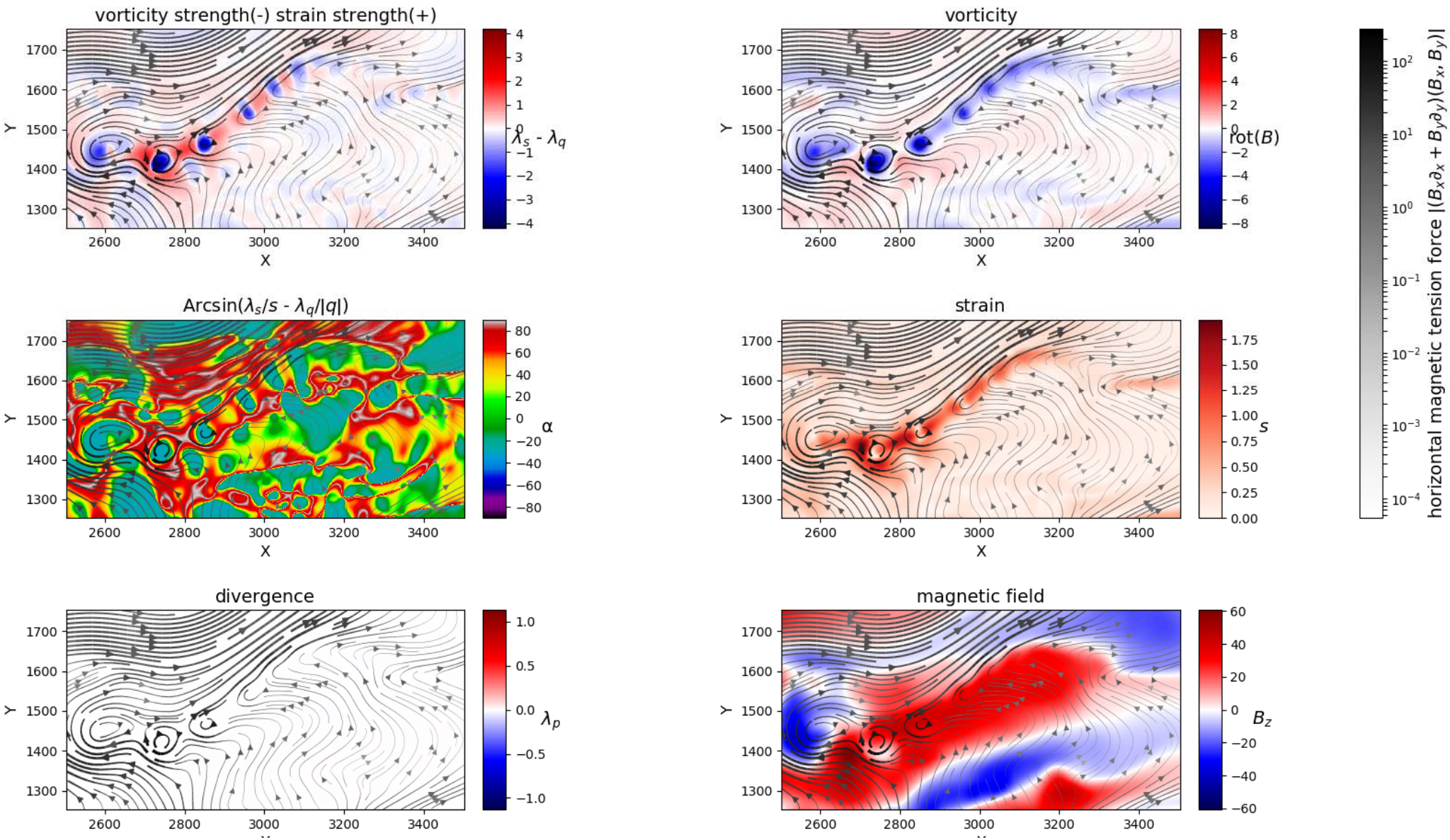


PHOTO BY NASA/SDO/GSFC

この研究で要求している渦の定義

- 渦は、ラグランジュ的に見て、流線に沿って速度ベクトル（または位置ベクトル）の2つの成分が正負に振動しないといけない。

2次元の場合

- 固有値を λ とすると、

  $\det[\bar{V} - \lambda I] = 0$

  $\lambda^2 - (\mathrm{tr}\bar{V})\lambda + \det \bar{V} = 0$

- したがって固有値は、

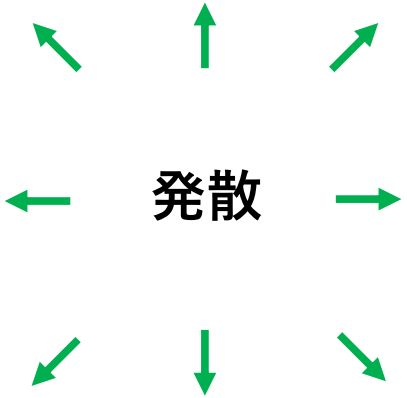
  $\lambda_{\pm} = \frac{(\mathrm{tr}\bar{V}) \pm \sqrt{D}}{2}$

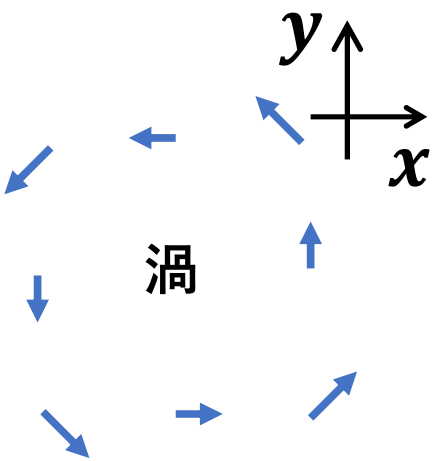
  $(D = (\mathrm{tr}\bar{V})^2 - \det\bar{V})$

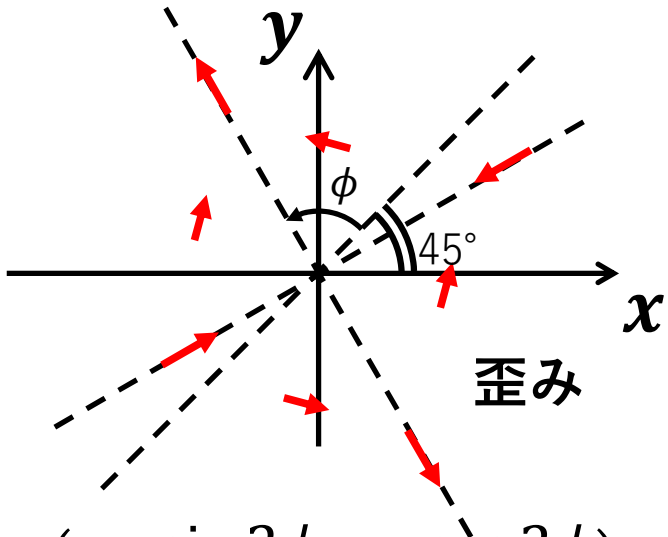
  となる。

流体構造の分類

- ベクトル勾配テンソルから同定される流体の構造には、発散、渦、歪みがある。







$$\bar{V} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$$

$$\bar{V} = \begin{pmatrix} 0 & -q \\ q & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{V} = \begin{pmatrix} -s\sin 2\phi & s\cos 2\phi \\ s\cos 2\phi & s\sin 2\phi \end{pmatrix}$$

固有値がどのように表わせるか。

- これらのベクトル勾配テンソルを組み合わせることで、任意のベクトル勾配テンソルは以下のように表すことができる。

$$\bar{V} = \begin{pmatrix} \partial_x v_x & \partial_y v_x \\ \partial_x v_x & \partial_y v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p - s\sin 2\phi & -q + s\cos 2\phi \\ q + s\cos 2\phi & p + s\sin 2\phi \end{pmatrix}$$

- よって、その行列式と固有値は、

$$\det(\bar{V}) = p^2 - s^2 + q^2$$

$$\lambda_{\pm} = p \pm \sqrt{s^2 - q^2}$$

となる。

Vorticity Strength $\boldsymbol{\lambda_q}$とStrain Strength $\boldsymbol{\lambda_s}$の定義

- したがって、Vorticity Strength λ_qは、

$$\lambda_q = \begin{cases} 0 & (s \geq q) \\ \sqrt{q^2 - s^2} & (s < q) \end{cases}$$

となることがわかった。 $(0 \leq \lambda_q \leq |q|)$

- Strainに対して同様に定義すれば、Strain Strength λ_s：

$$\lambda_s = \begin{cases} \sqrt{s^2 - q^2} & (s > q) \\ 0 & (s \leq q) \end{cases}$$

を得る。 $(0 \leq \lambda_s \leq s)$

固有値がどのように表わせるか。

- Vorticity Strength λ_qと Strain Strength λ_sは、どちらも0以上で、互いに一方が0のとき、もう片方は、0以上となるので、

$$\lambda_s - \lambda_q = \begin{cases} \sqrt{s^2 - q^2} & (s > q) \\ 0 & (s = q) \\ -\sqrt{q^2 - s^2} & (s < q) \end{cases}$$

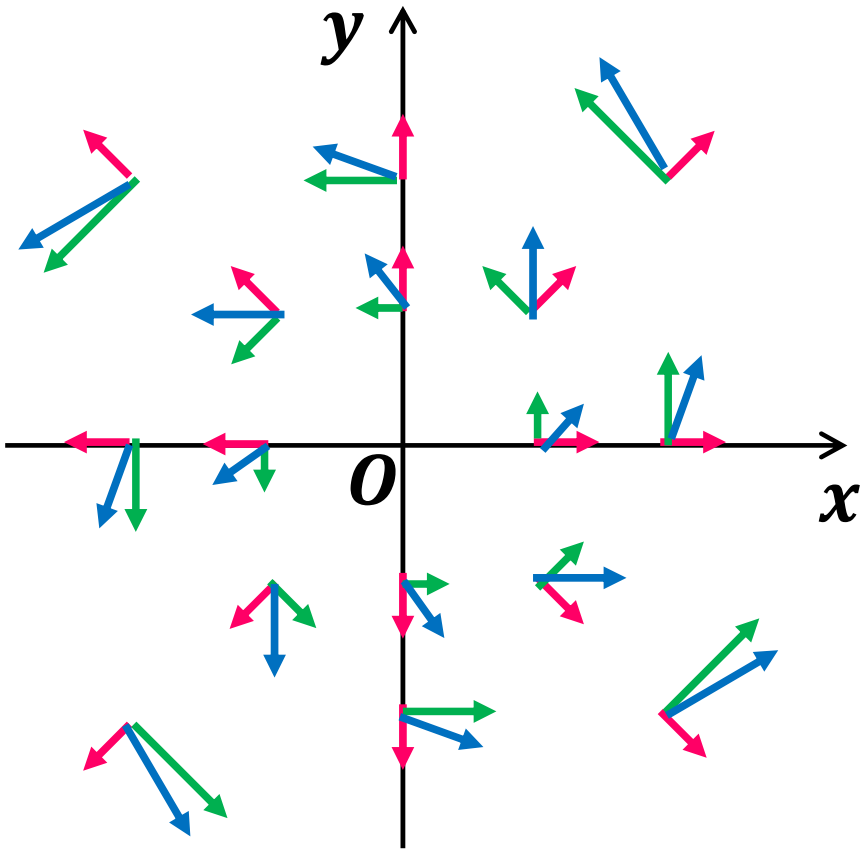
- $\lambda_p = p$とすれば、

$$\lambda_\pm = \begin{cases} \lambda_p \pm \lambda_s & (s > q) \\ \lambda_p & (s = q) \\ \lambda_p \pm i\lambda_q & (s < q) \end{cases}$$

解析方法

1. 流速や磁場のベクトル場を元に物理量を計算した。（Fortran90を使用）
   1. ベクトル場をフィルターにかけた。
   2. Strain, Vorticity, Strain Strength, Vorticity Strength, sin α を計算した。
2. 物理量をもとにして、グラフを作成した。(Pythonを使用)
   1. 物理量の分布を表すヒストグラムを作成した。
   2. それぞれ極大、極小となる座標と極大値、極小値を求めた。
   3. 渦や磁気リコネクションの同定をした。（開発途中（2/22））

例：$v_r = p, v_\theta = rq$としたとき、(p, qは定数)

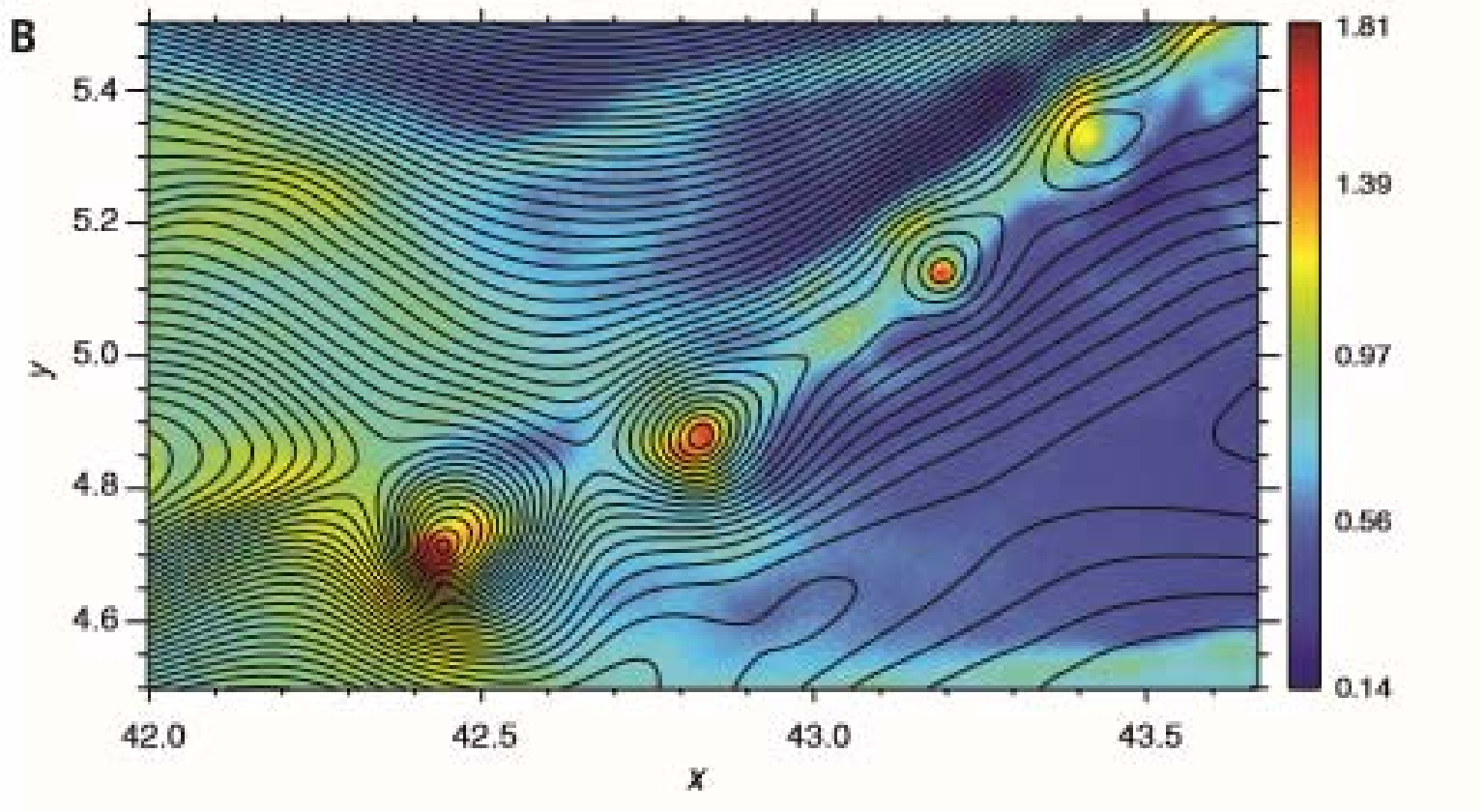


- 赤矢印は、 v_r
- 緑矢印は、 v_θ
- 青矢印は、その合成

をそれぞれ表している。

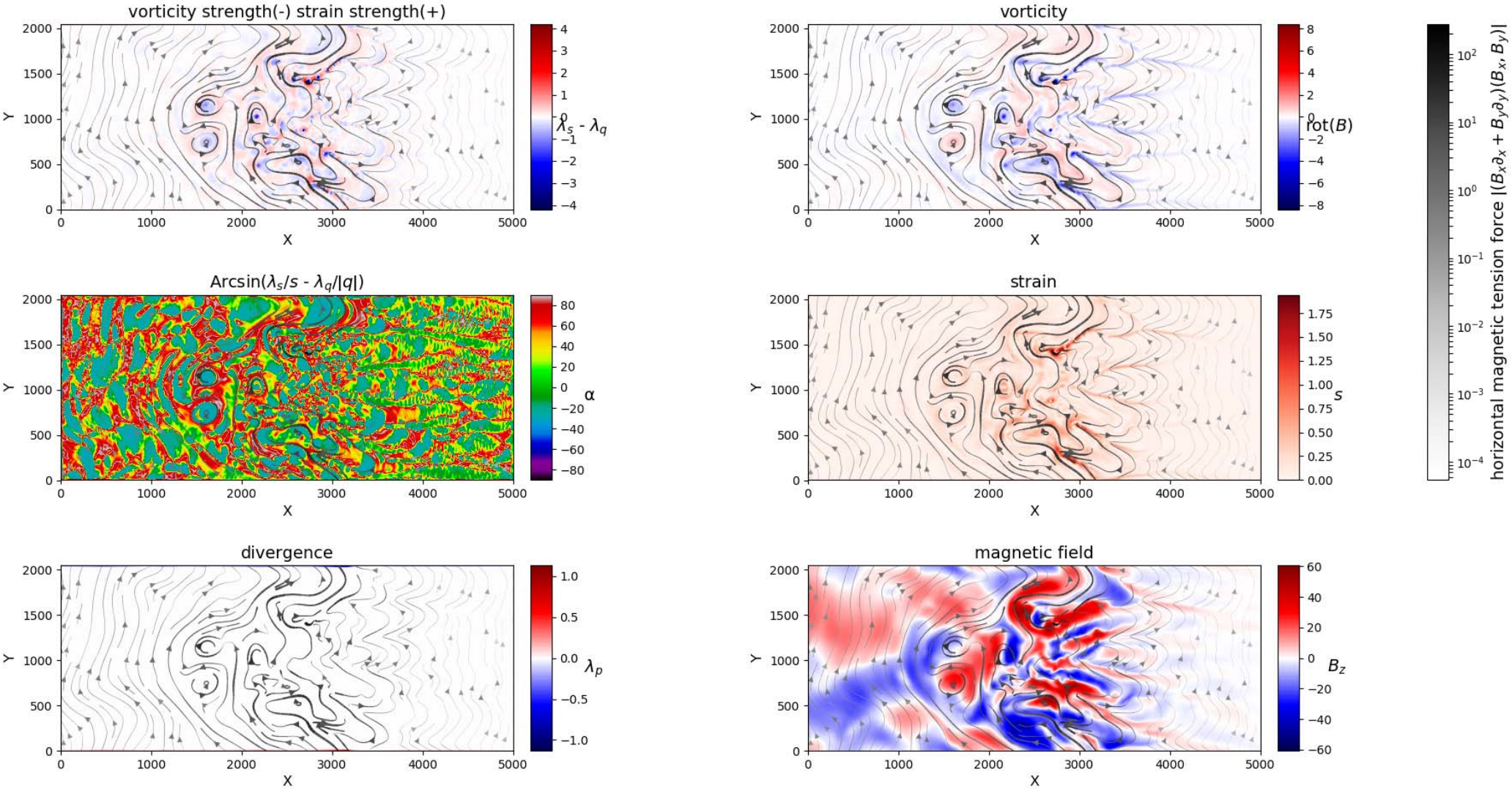
図2：このときのベクトル場

研究で使うデータの説明

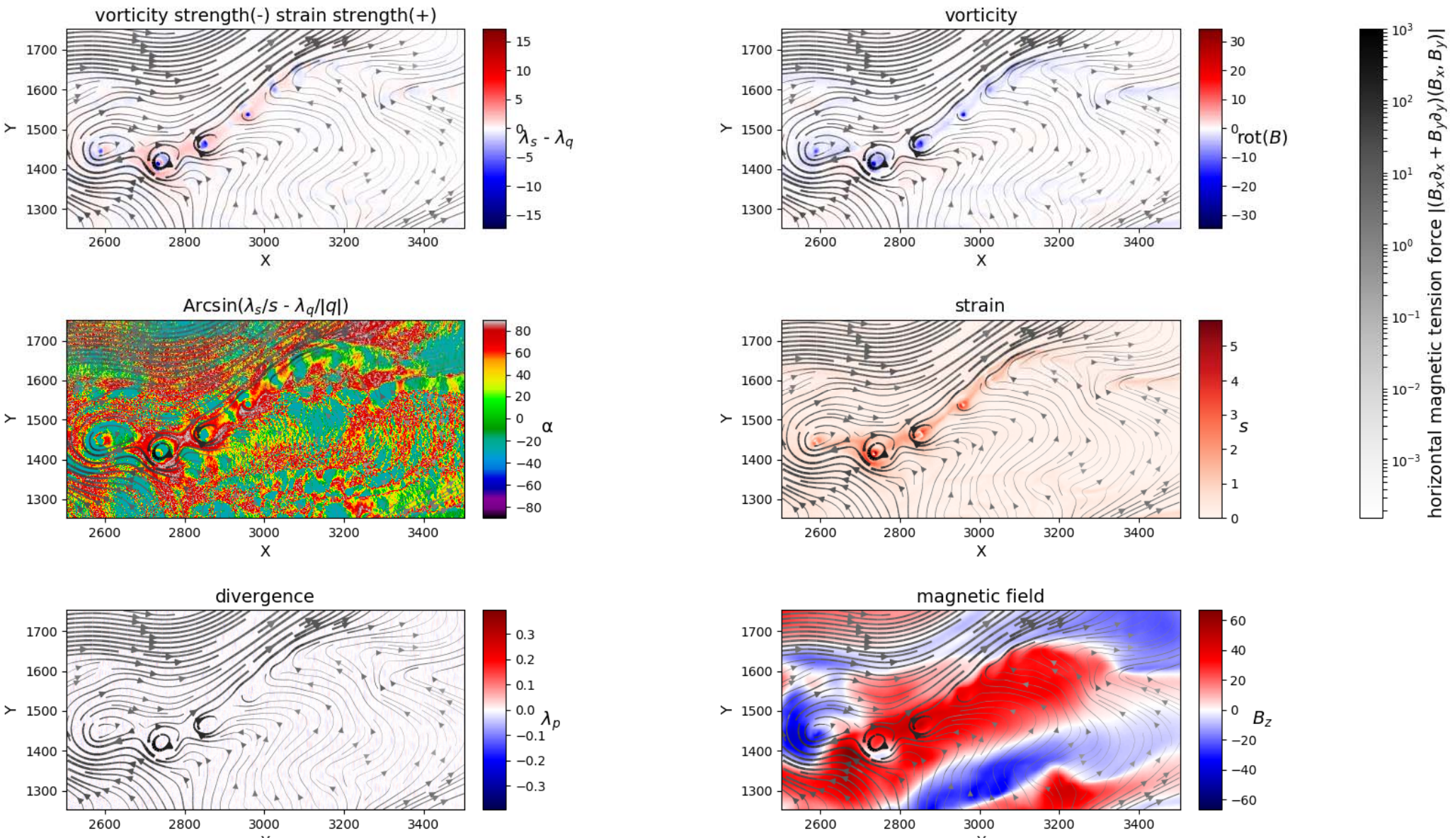


(cf. Matsumoto et al._Science (New York, N.Y.)_2015)

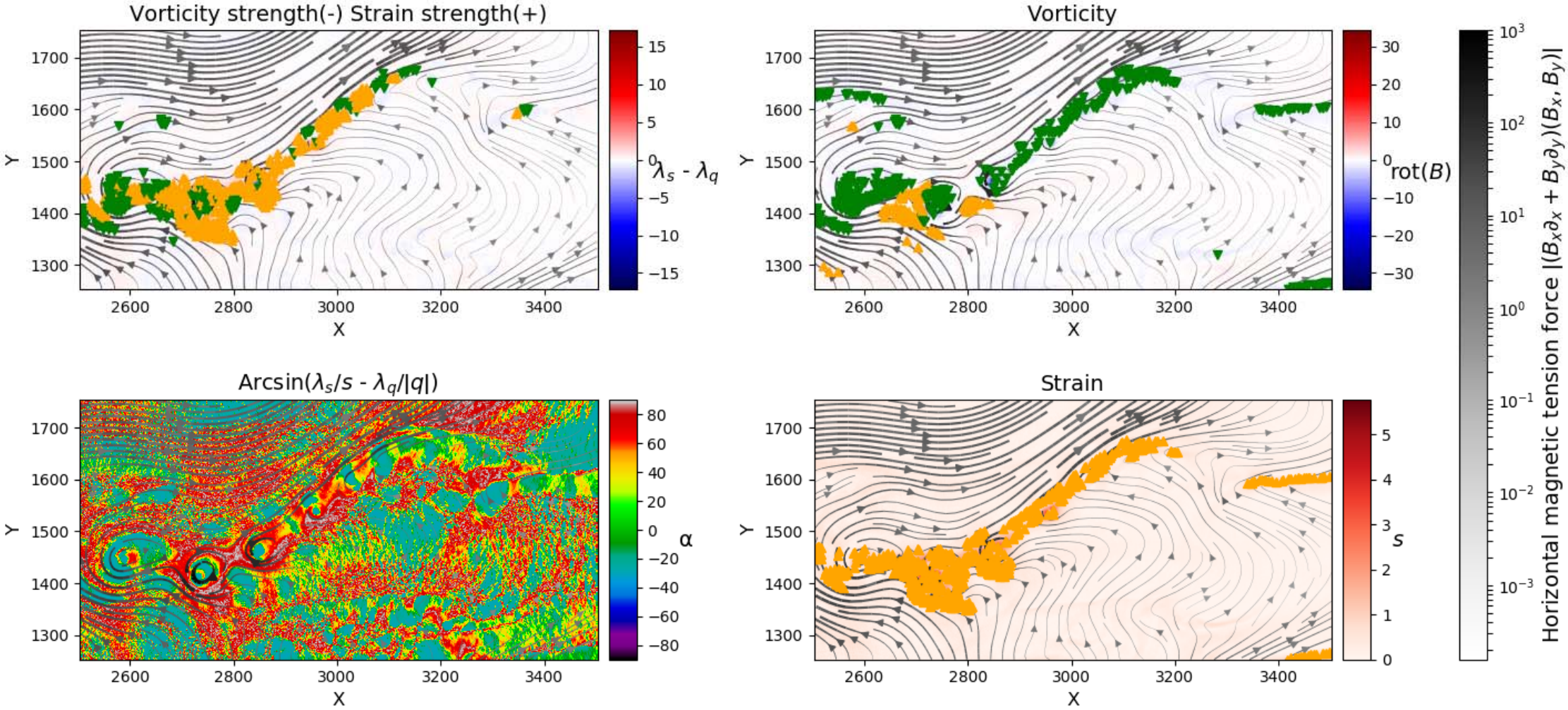
The analysis of magnetic field(t = 0000)(s=0010)



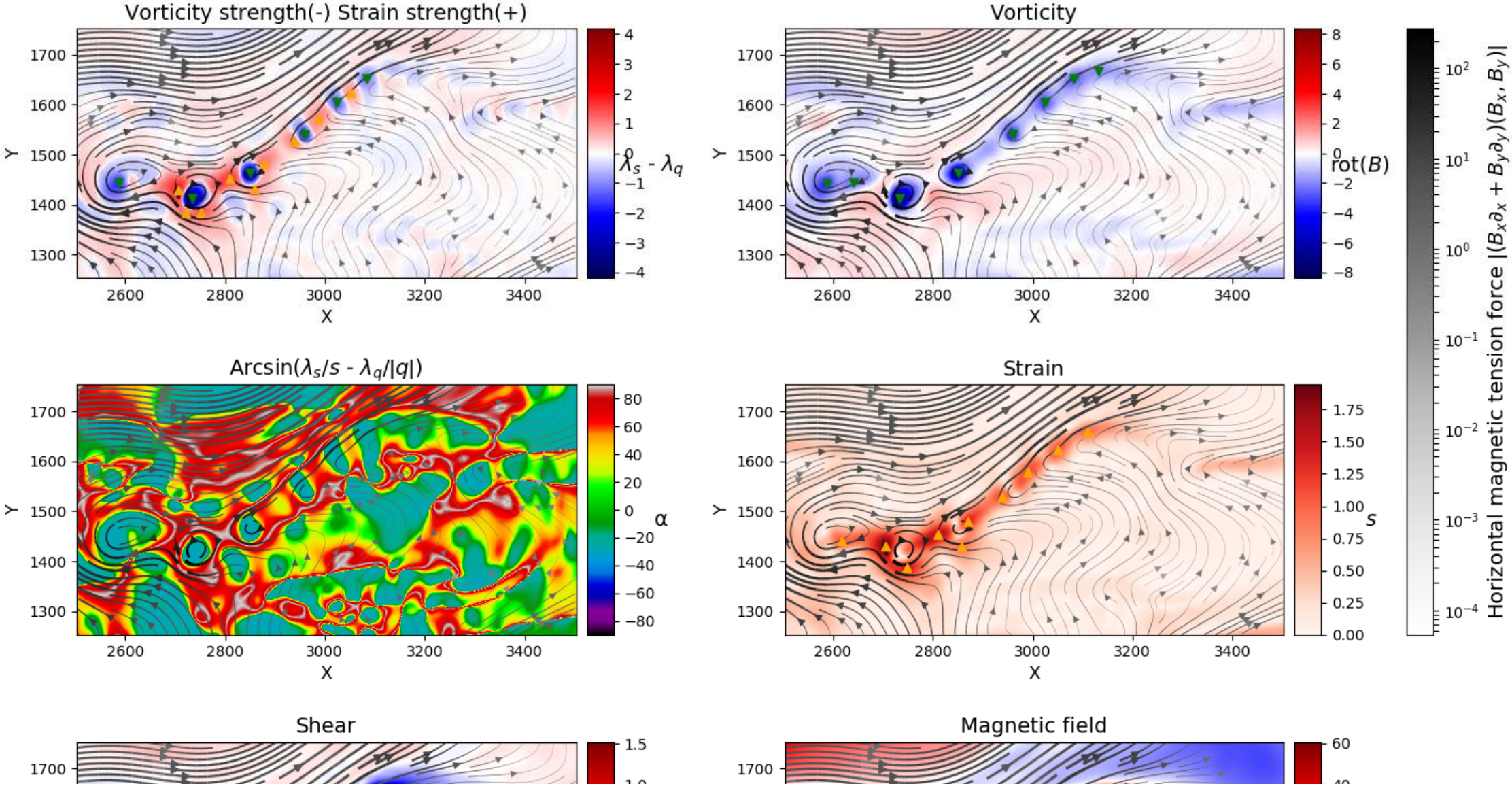
The analysis of magnetic field(t = 0000)(s=0000)



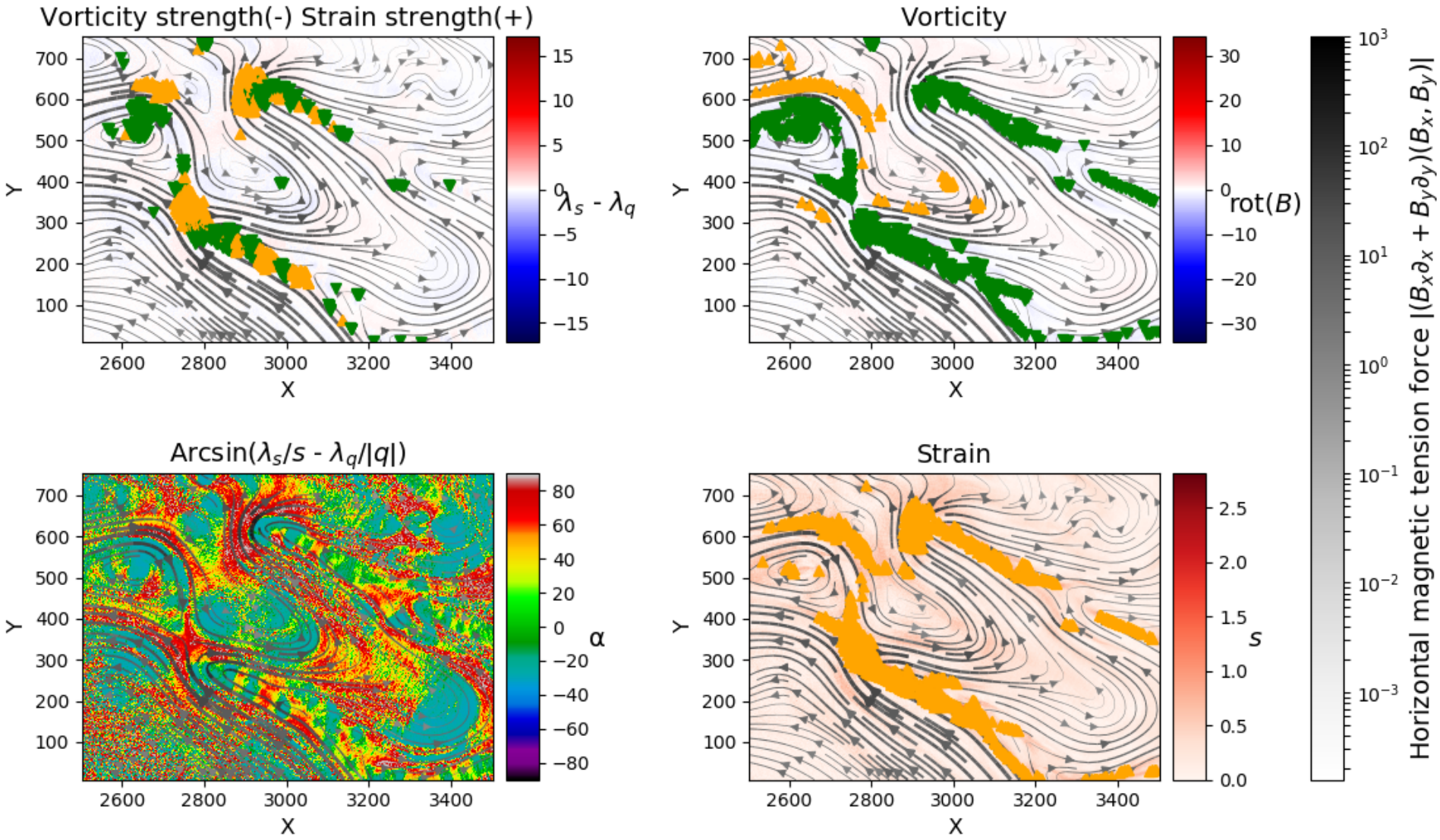
The analysis of magnetic field (σ = 0)(t = 0)



The analysis of magnetic field (σ = 10)(t = 0)



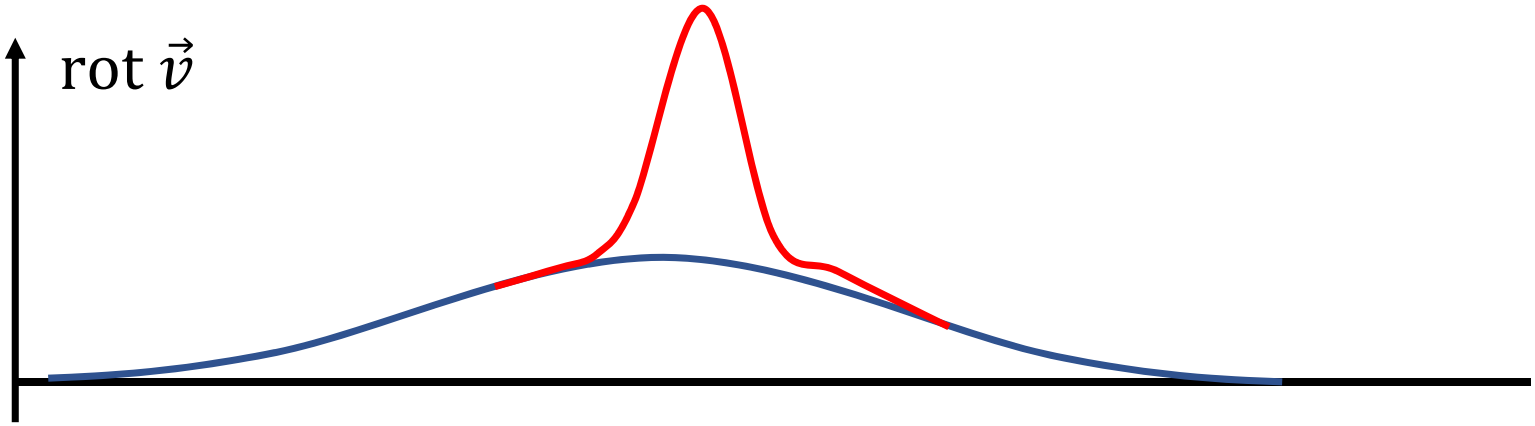
The analysis of magnetic field (σ = 0)(t = 0)



考察

問題点

- 　小さくて強い渦は同定できたが、大きい渦は同定できなかった。
- 　ベクトル場から同定済みの強い渦の差をとり、大きい渦を同定する。



- $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x y \exp(-ax^2 - by^2) \\ A_y x \exp(-ax^2 - by^2) \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} \partial_x v_x & \partial_y v_x \\ \partial_x v_y & \partial_y v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x(-2axy) & A_x(1 - 2by^2) \\ A_y(1 - 2ax^2) & A_y(-2bxy) \end{pmatrix} \exp(-ax^2 - by^2)$
- $\begin{cases} s = \ (A_x + A_y)/2 \\ q = (-A_x + A_y)/2 \end{cases} = \begin{cases} A_x = s - q \\ A_y = s + q \end{cases}$
- $\begin{pmatrix} \partial_x v_x & \partial_y v_x \\ \partial_x v_y & \partial_y v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (s - q)(-2axy) & (s - q)(1 - 2by^2) \\ (s + q)(1 - 2ax^2) & (s + q)(-2bxy) \end{pmatrix} + \mathrm{o}(x^2, xy, y^2)$

- このベクトル勾配テンソルを対称部分と反対称部分に分けると、

$$\begin{pmatrix} \partial_x v_x & \partial_y v_x \\ \partial_x v_y & \partial_y v_y \end{pmatrix} = -xy\left(aA_x + bA_y\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$+\begin{pmatrix} -\left(aA_x - bA_y\right)xy & -2bA_x y^2 \\ -2aA_y x^2 & \left(aA_x - bA_y\right)xy \end{pmatrix}$$

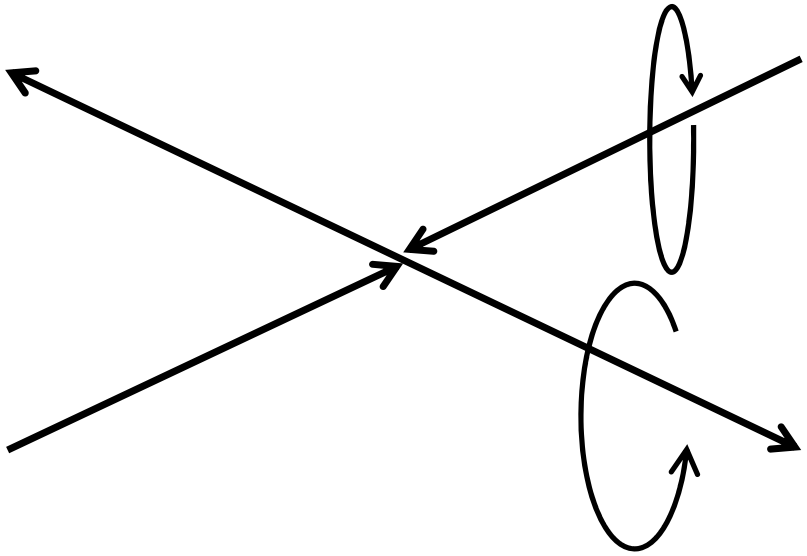
- 磁場の場合、発散は0なので、 $aA_x + bA_y = 0$
- $a, b > 0$より、A_x, A_yは、異符号。つまり、Vorticity しかこのやり方でフィティングできない。Strainは、Vorticityをこのやり方でフィッチングして消していけば、消えていくのかもしれない。

- $aA_x + bA_y = 0$ から$\frac{b}{a} = -\frac{A_x}{A_y}$とすると、

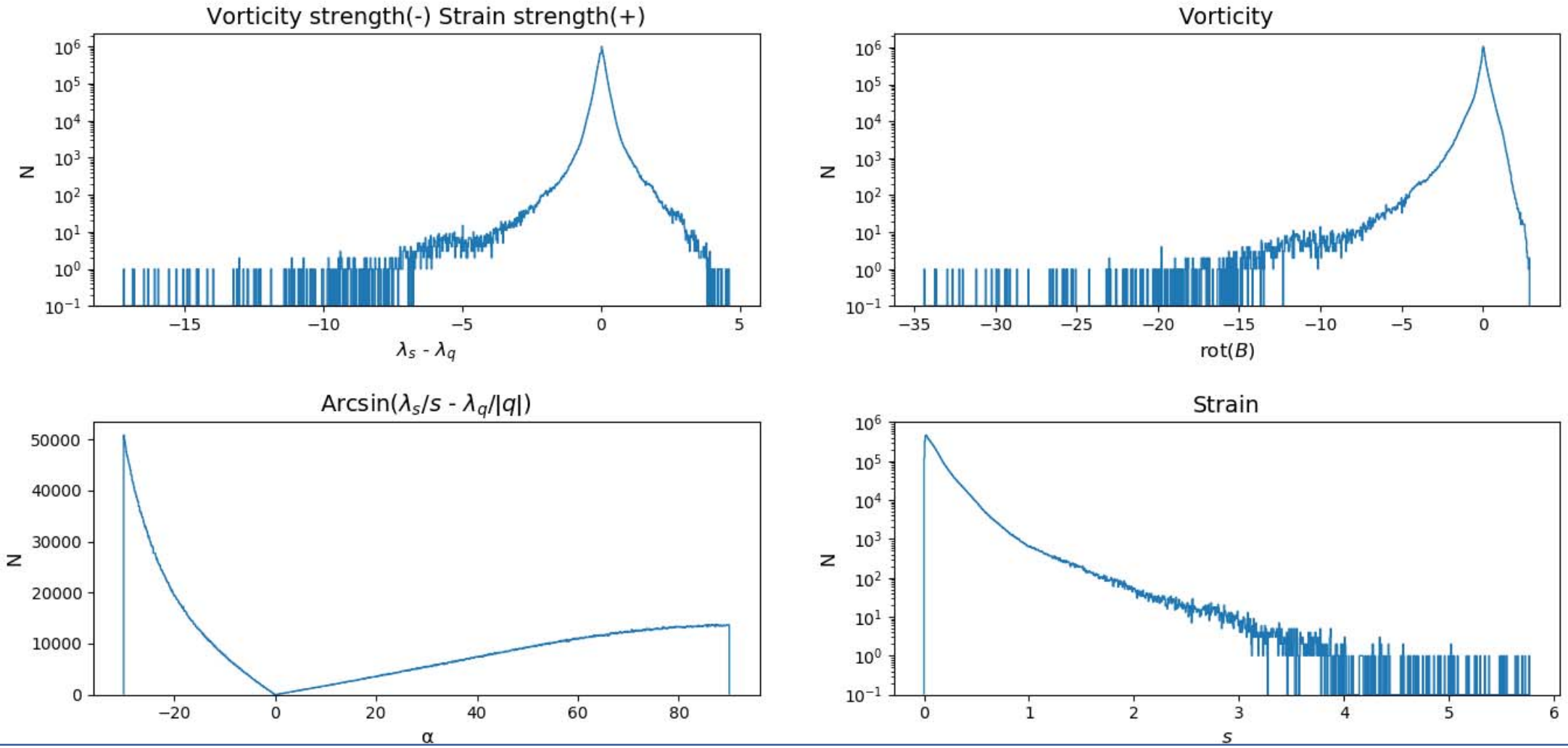
$$\begin{pmatrix} \partial_x v_x & \partial_y v_x \\ \partial_x v_y & \partial_y v_y \end{pmatrix} = 2aA_x \begin{pmatrix} -xy & -By^2 \\ \frac{1}{B}x^2 & xy \end{pmatrix}$$

- $X = \frac{1}{\sqrt{B}}x,\ Y = \sqrt{B}y, (\cos\gamma\,, \quad \sin\gamma) = \left(\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}, \quad \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right)$とすると、

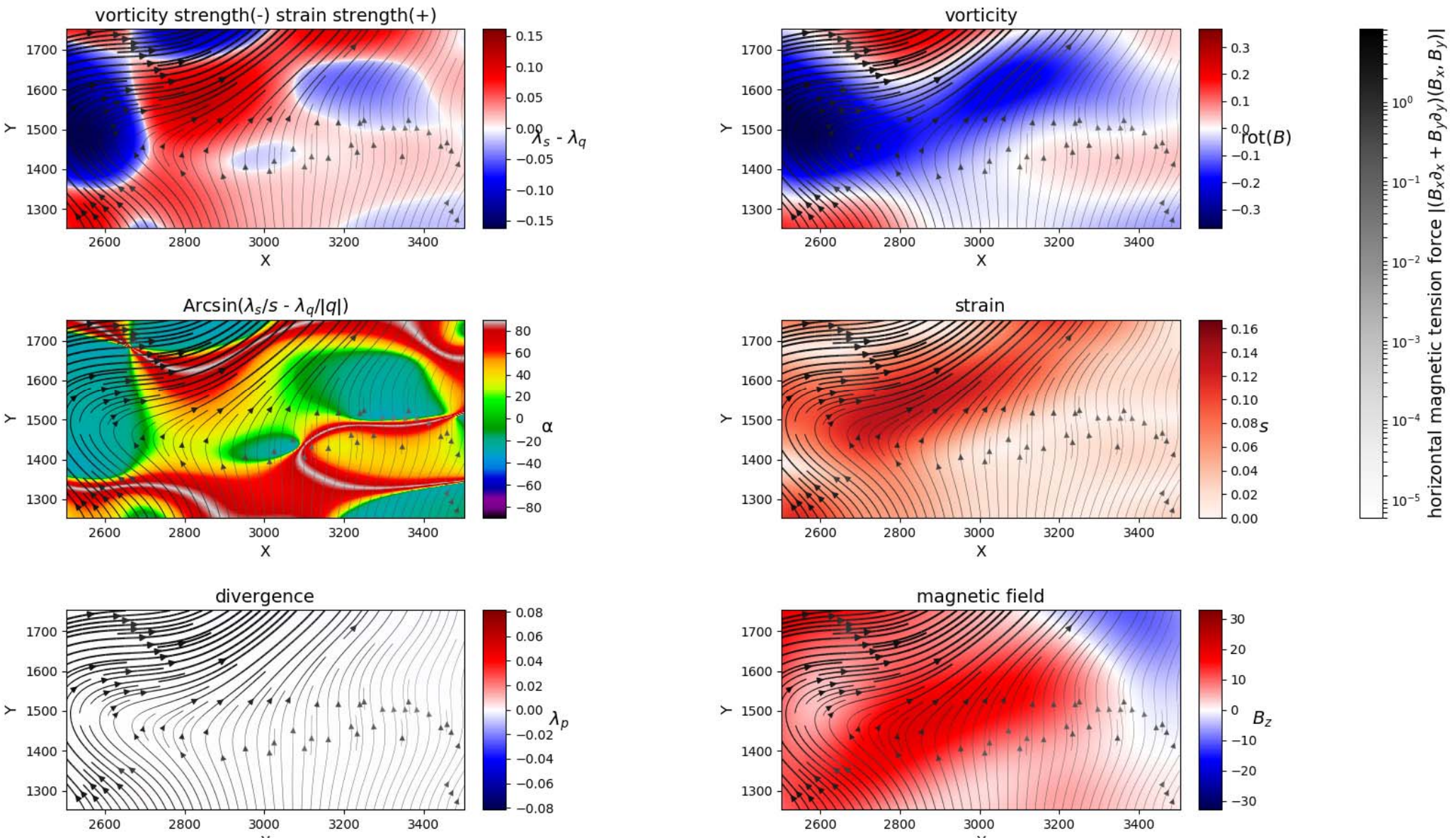
$$\begin{pmatrix} \partial_x v_x & \partial_y v_x \\ \partial_x v_y & \partial_y v_y \end{pmatrix} = aA_x(X^2+Y^2)\left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin 2\gamma & \cos 2\gamma \\ \cos 2\gamma & \sin 2\gamma \end{pmatrix}\right\}$$



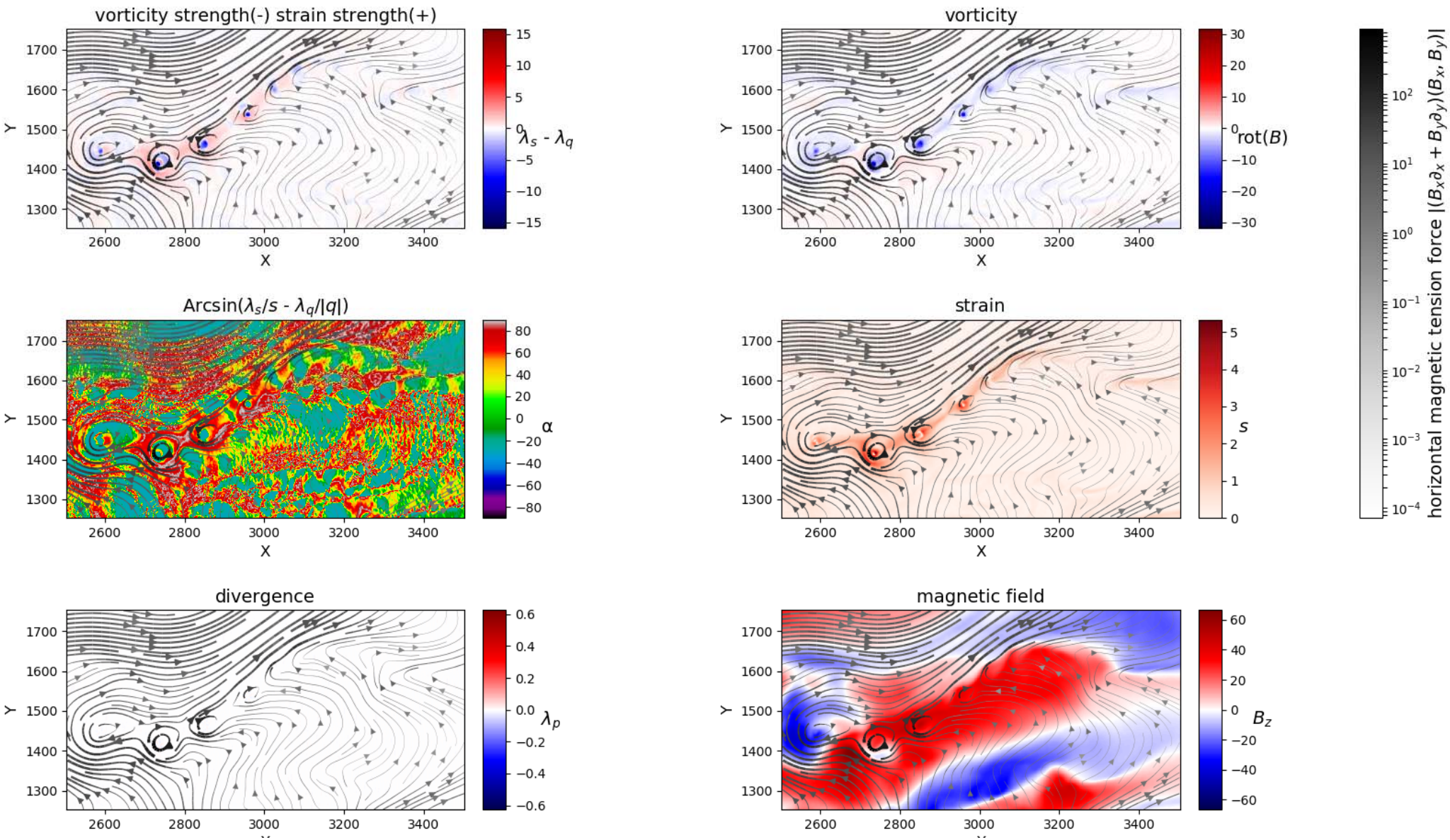
The histgram of each physical quantities (σ = 0)(t = 0)(x,y)=(0-4996, 0-2043)



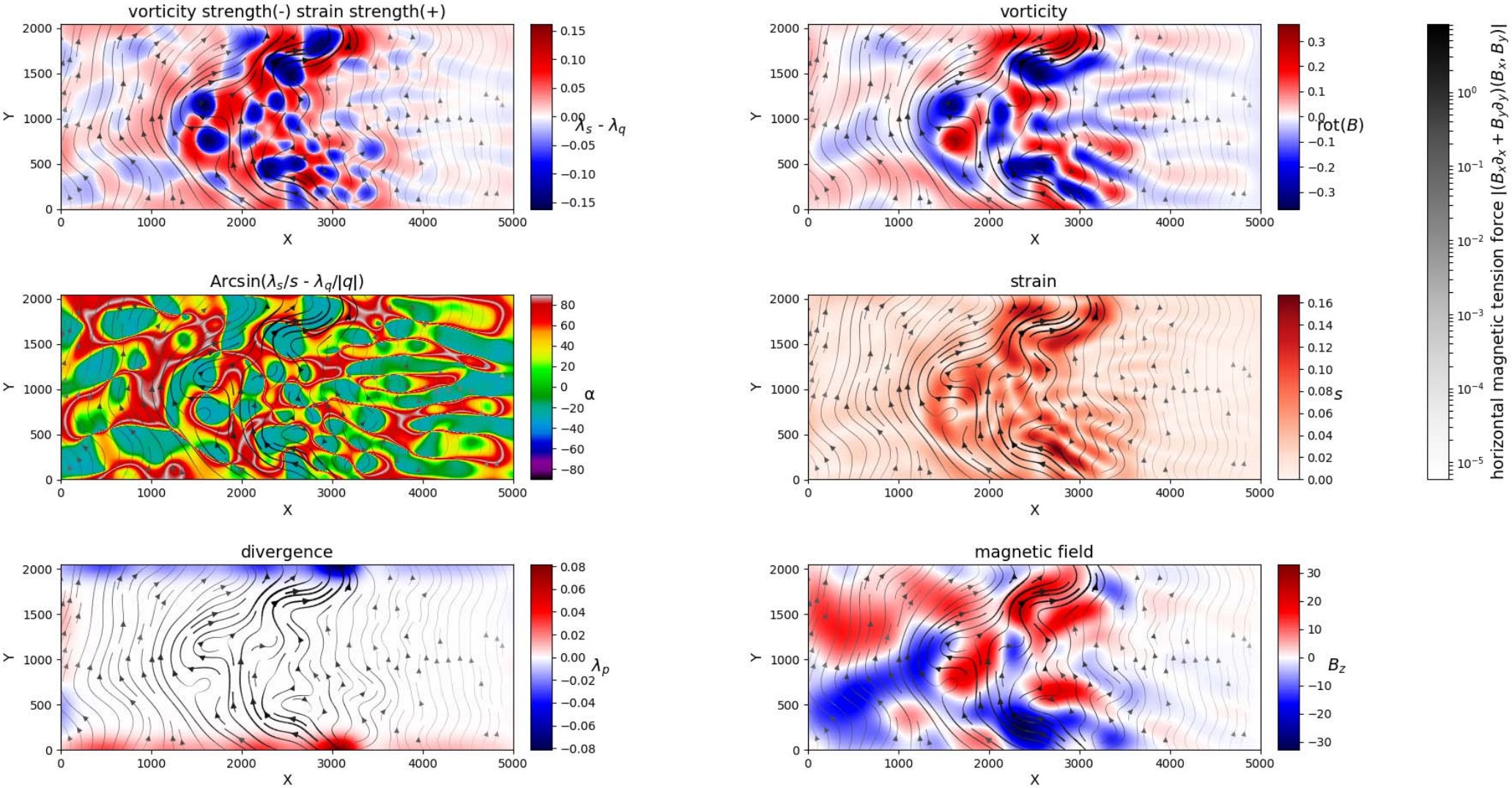
The analysis of magnetic field(t = 0000)(s=0100)



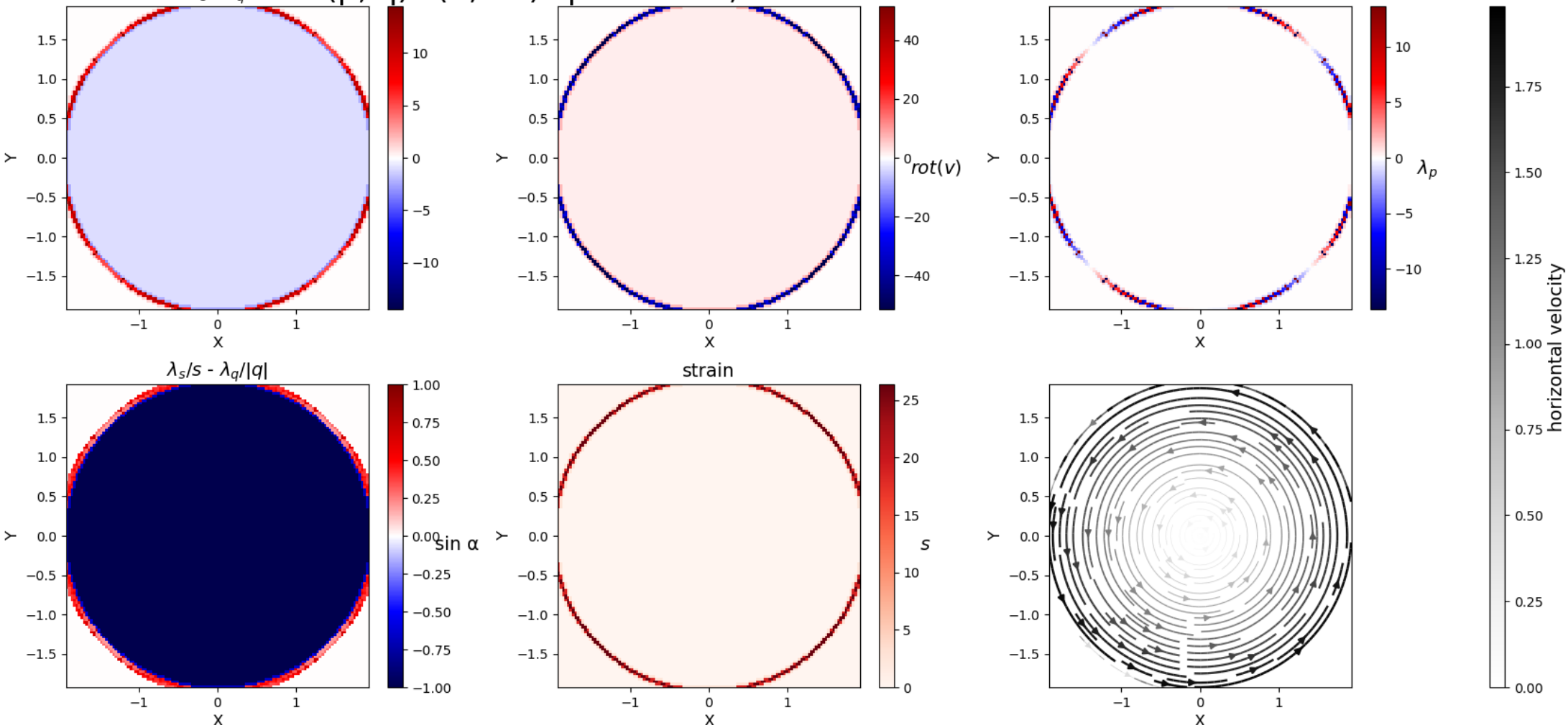
The analysis of magnetic field(t = 0000)(s=0001)



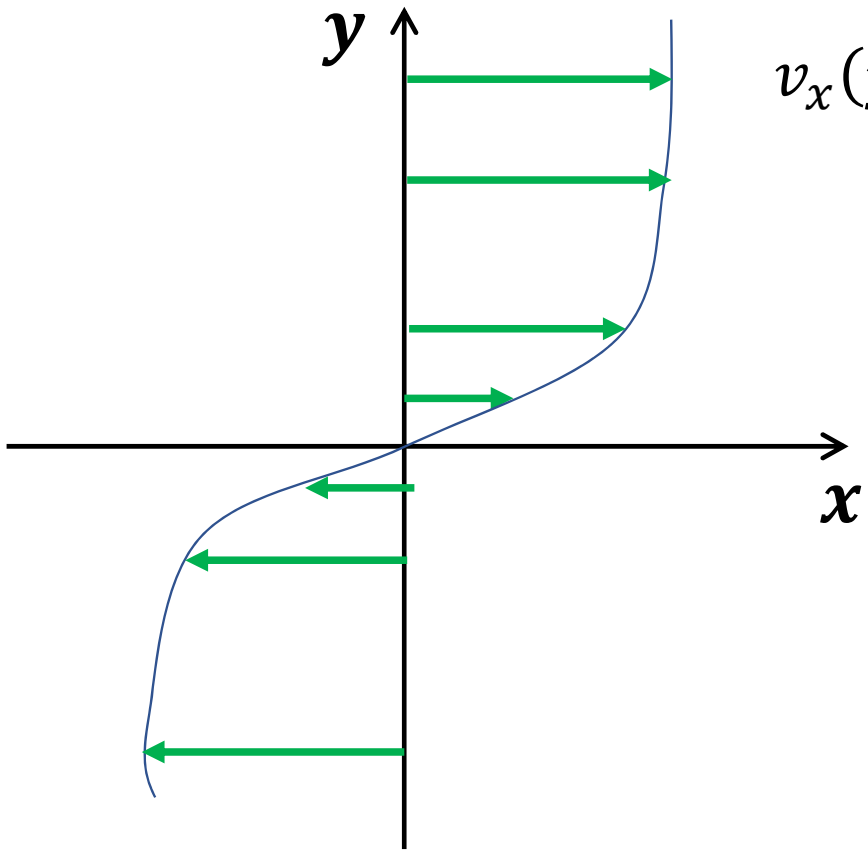
The analysis of magnetic field(t = 0000)(s=0100)



(p, q)=(0,1.0) spiral flows, 4th-central difference

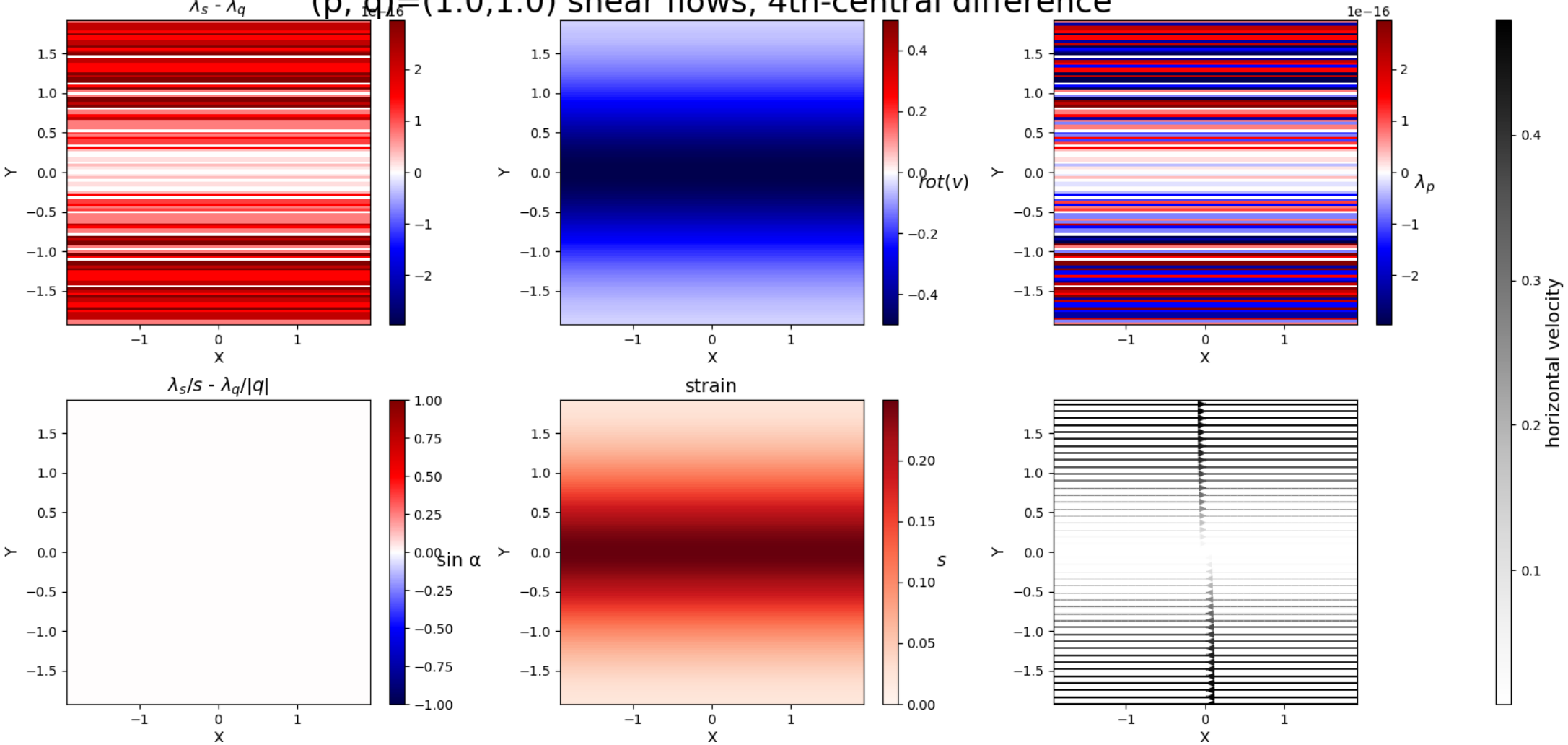


Shear流の解析

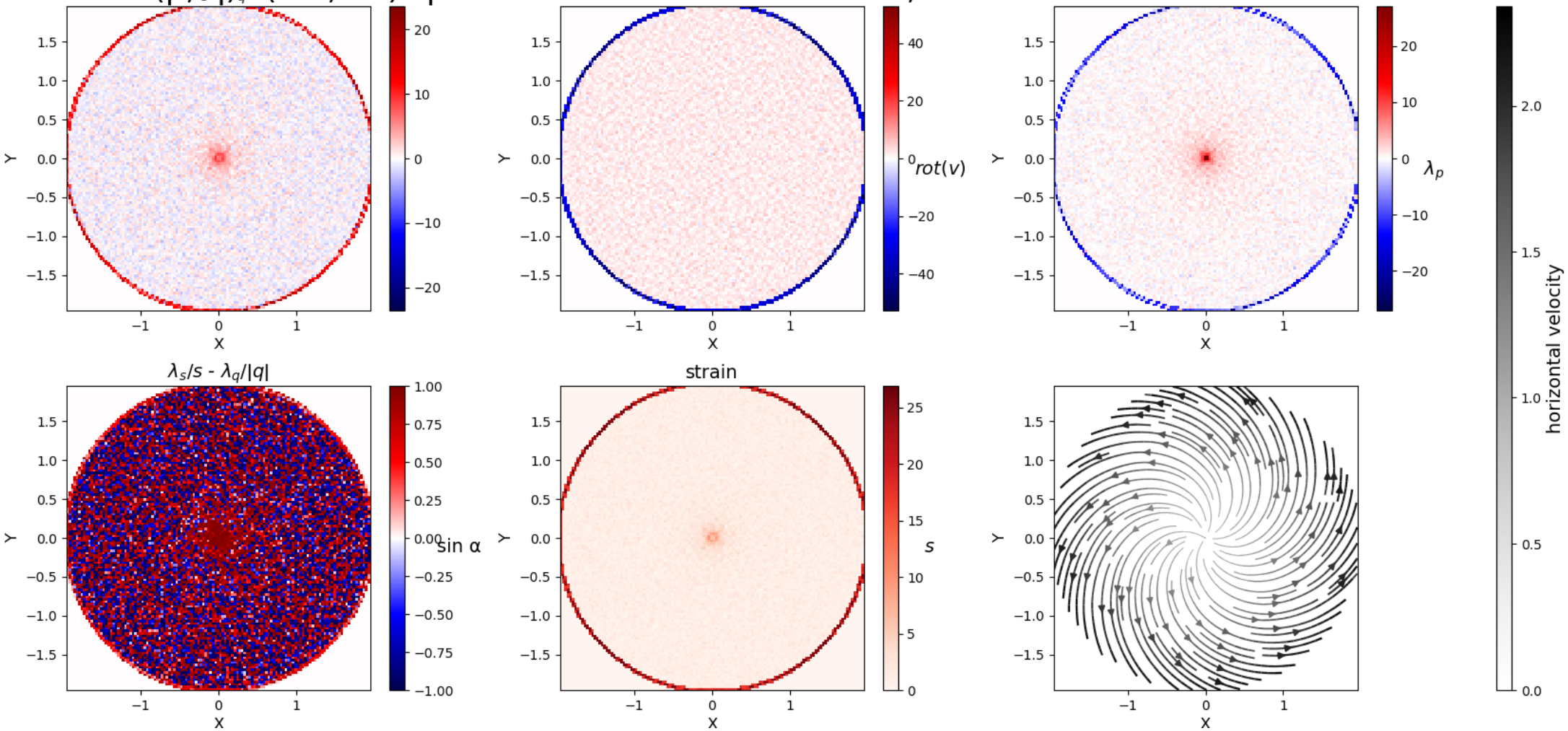


$$v_x(y) = p\tanh(y/q)$$

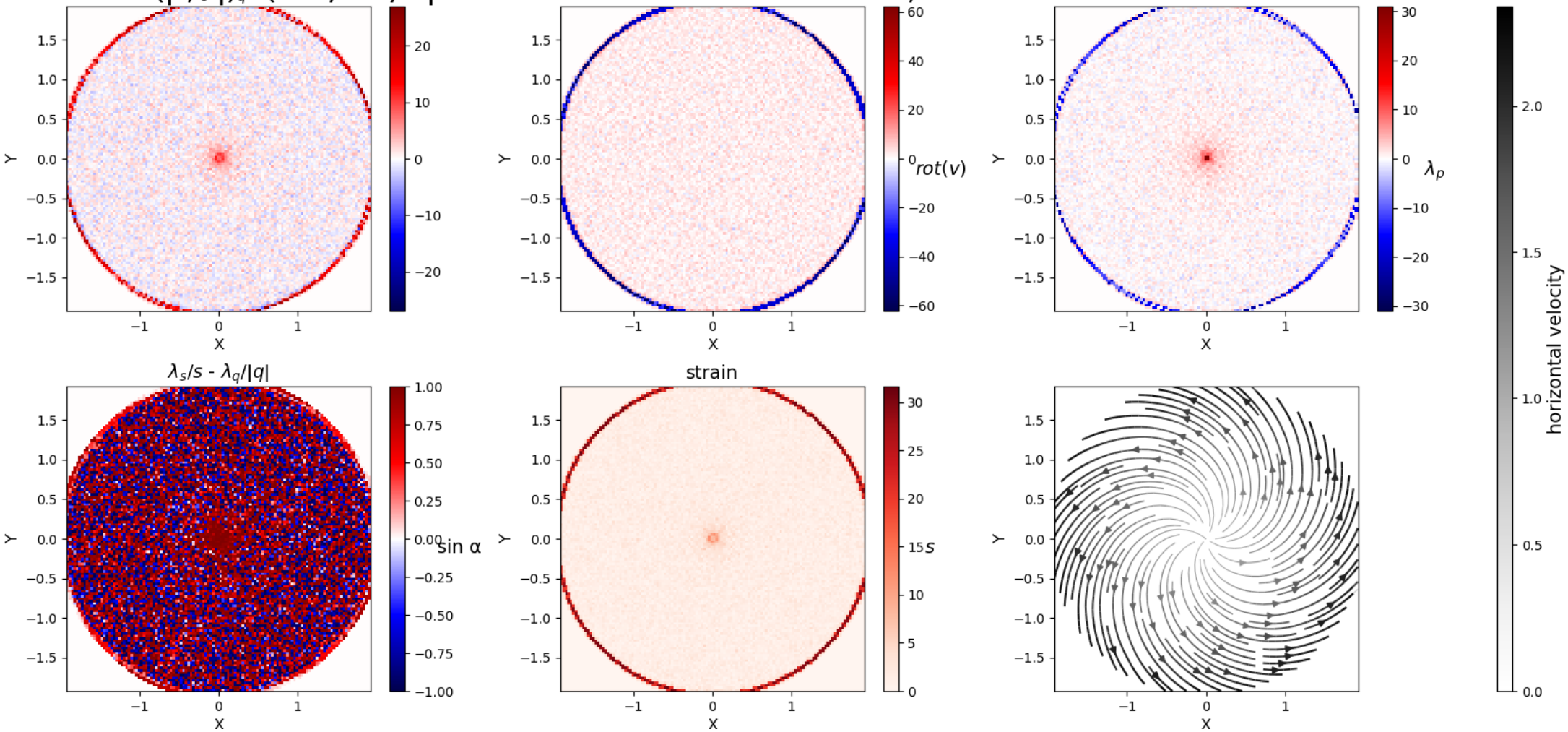
(p, q)=(1.0,1.0) shear flows, 4th-central difference



(p,q)=(1.0,1.0) spiral flows with noise σ = 0.05, 2th-central difference



(p,q)=(1.0,1.0) spiral flows with noise σ = 0.05, 4th-central difference



Vorticity strengthの物理的な意味

図のような楕円形の渦を考える。

$$\vec{\boldsymbol{r}}(t) = \big(x(\theta(t)), y(\theta(t))\big)$$
$$= \big(a\ \cos\theta(t), b\ \sin\theta\,(t)\big)$$

$$\big(v_x(\theta), v_y(\theta)\big) = \dot{\theta}\frac{d}{d\theta}\big(x(\theta), y(\theta)\big)$$
$$= \dot{\theta}(-a\sin\theta\,, b\cos\theta)$$
$$= \dot{\theta}\left(-\frac{a}{b}y, \frac{b}{a}x\right)$$

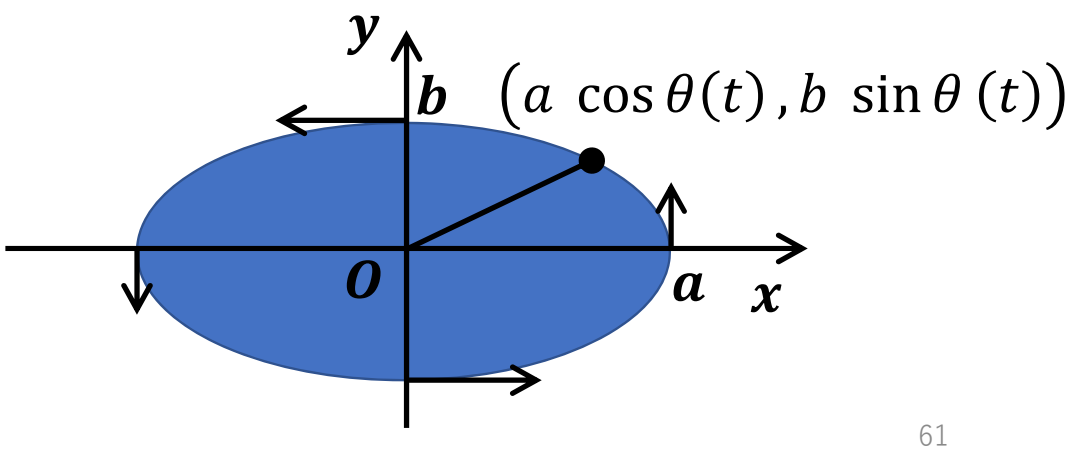
$$\bar{V} = \begin{pmatrix} \partial_x v_x & \partial_y v_x \\ \partial_x v_y & \partial_y v_y \end{pmatrix} = \dot{\theta}\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a}{b} \\ \dfrac{b}{a} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{tr}\,\bar{V} = 0, det\,\bar{V} = \dot{\theta}^2$$

よってvorticity strengthλ_qは、

$$\lambda_q = |\dot{\theta}| = \frac{|(\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{v}})|}{ab}$$

λ_qは角振動数の大きさと一致した。



VorticityとVorticity Strength の比$\boldsymbol{\lambda_q/|q|}$

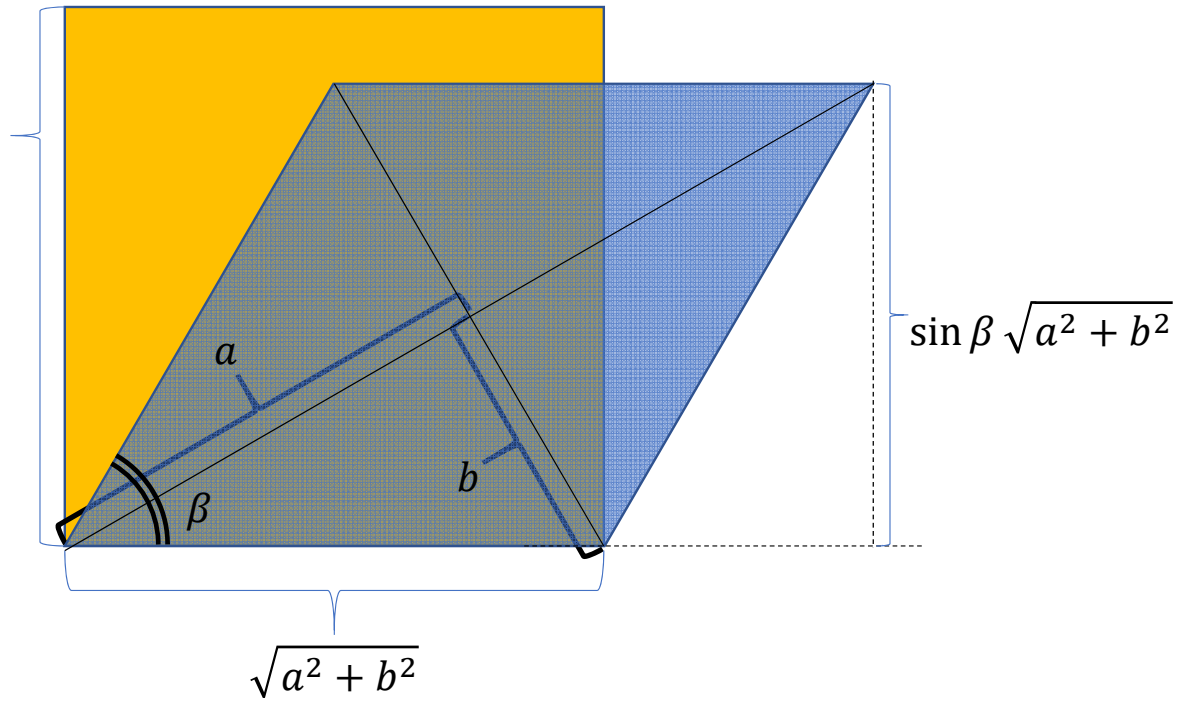
$$q = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\,\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\dot{\theta}$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{2ab}\dot{\theta}$$

$$\frac{\lambda_q}{|q|} = \frac{2ab}{a^2 + b^2} = \sin\beta$$

- a とb は、それぞれ楕円の長径と短径だったから

  $\lambda_q/|q|$によって、渦の形状を調べることができる。



歪みを表す物理量の定義

- Strain strength

$$\lambda_s = \sqrt{D}(D > 0)$$

$$(D = (tr(\bar{V}))^2 - \det(\bar{V}))$$

- 歪み

$$\mathrm{s} = \sqrt{-\det(\overleftrightarrow{s})}$$

$\overleftrightarrow{s}$は、tracelessな速度歪みテンソル$(\overleftrightarrow{s} = \frac{1}{2}(\bar{V} + \bar{V}^T) - \frac{1}{2}tr(\overleftrightarrow{s})\ I)$

Strain strengthの物理的な意味

図のような双曲線形の歪みを考える。

$$\vec{\boldsymbol{r}} = \big(x(\theta(t)), y(\theta(t))\big)$$
$$= (a\ \cosh\theta(t), b\ \sinh\theta(t))$$

$$\big(v_x(\theta), v_y(\theta)\big) = \dot{\theta}\frac{d}{d\theta}\big(x(\theta), y(\theta)\big)$$
$$= \dot{\theta}(a\sinh\theta, b\cosh\theta)$$
$$= \dot{\theta}\left(\frac{a}{b}y, \frac{b}{a}x\right)$$

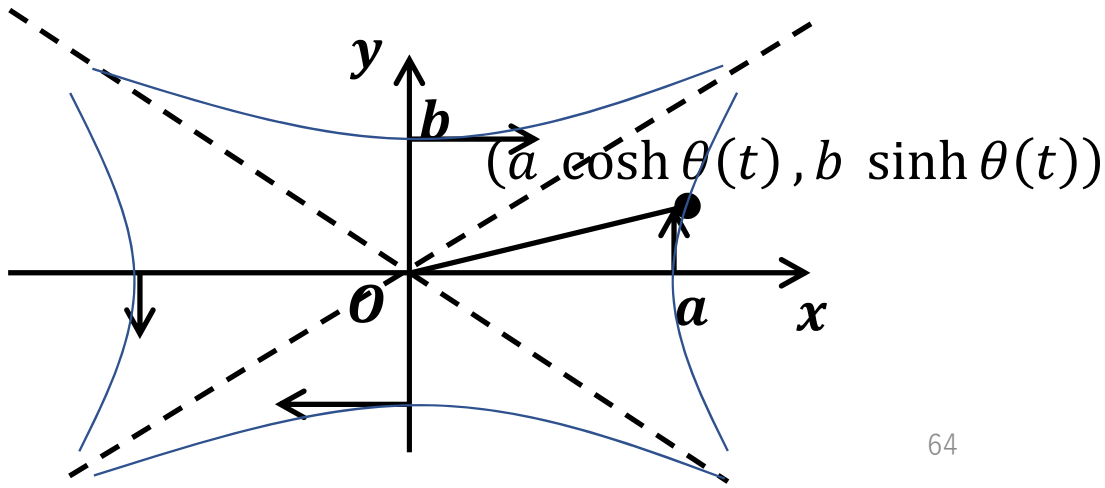
$$\bar{V} = \begin{pmatrix} \partial_x v_x & \partial_y v_x \\ \partial_x v_y & \partial_y v_y \end{pmatrix} = \dot{\theta}\begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{b} \\ \frac{b}{a} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{tr}\,\bar{V} = 0, det\,\bar{V} = -\dot{\theta}^2$$

よって、Strain Strengthλ_pは、

$$\lambda_s = |\dot{\theta}| = \frac{|(\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{v}})|}{ab}$$

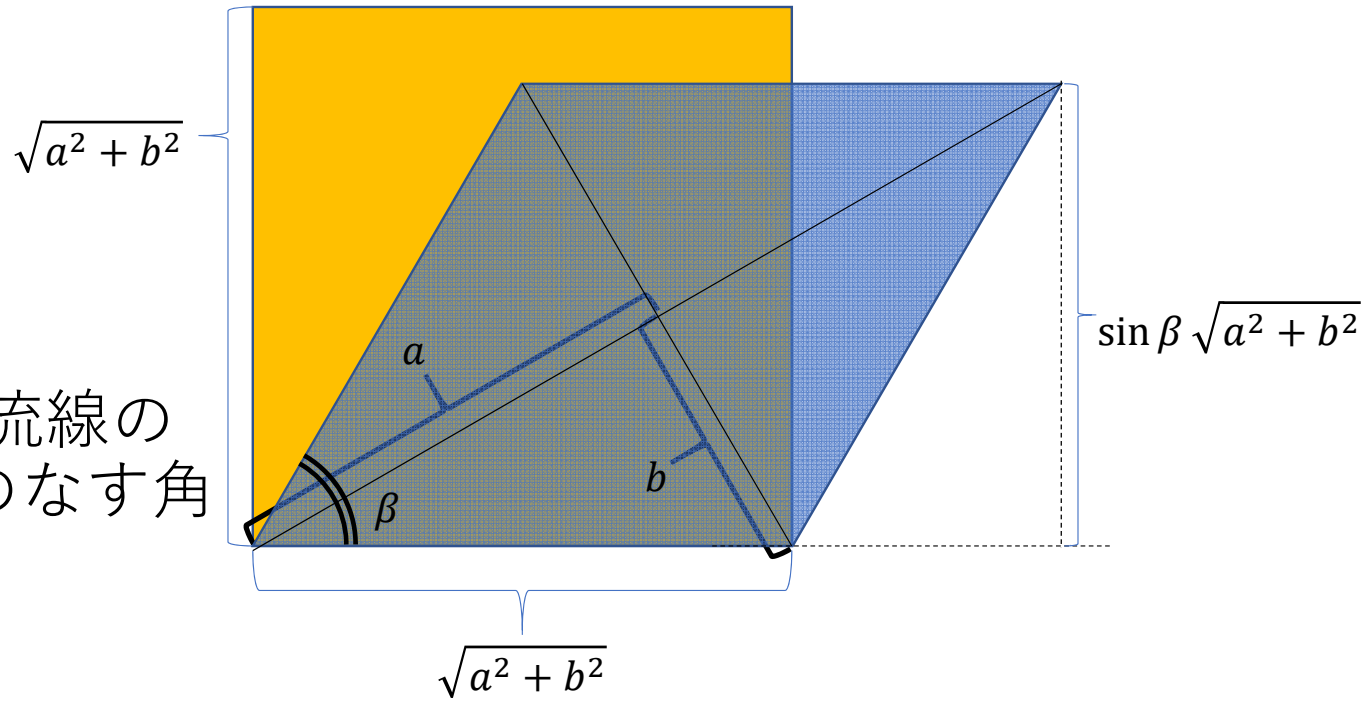
となった。



StrainとStrain strengthの比$\boldsymbol{\lambda_s/s}$

$$s = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)|\dot{\theta}|$$
$$= \frac{a^2 + b^2}{2ab}|\dot{\theta}|$$
$$\frac{\lambda_s}{s} = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$
$$= \sin\beta$$

このときβは、歪みの流線の双曲線の2つの漸近線のなす角となる。



例：$v_r = p, v_\theta = rq$としたとき、(p, qは定数)

- ベクトル場は、
  - $\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{r} & -\frac{y}{r} \\ \frac{y}{r} & \frac{x}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{px}{r} - qy \\ \frac{py}{r} + qx \end{bmatrix}$
- ベクトル勾配テンソルは、

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} \frac{px}{r^2} & -q \\ q & \frac{py}{r^2} \end{bmatrix}$$

- 固有値は、

$$\lambda_\pm = \left(\frac{p(x+y)}{2r^2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{p(x-y)}{2r^2}\right)^2 - q^2}$$

$q = 0$のとき

$$\lambda_+ = \frac{px}{r^2}$$

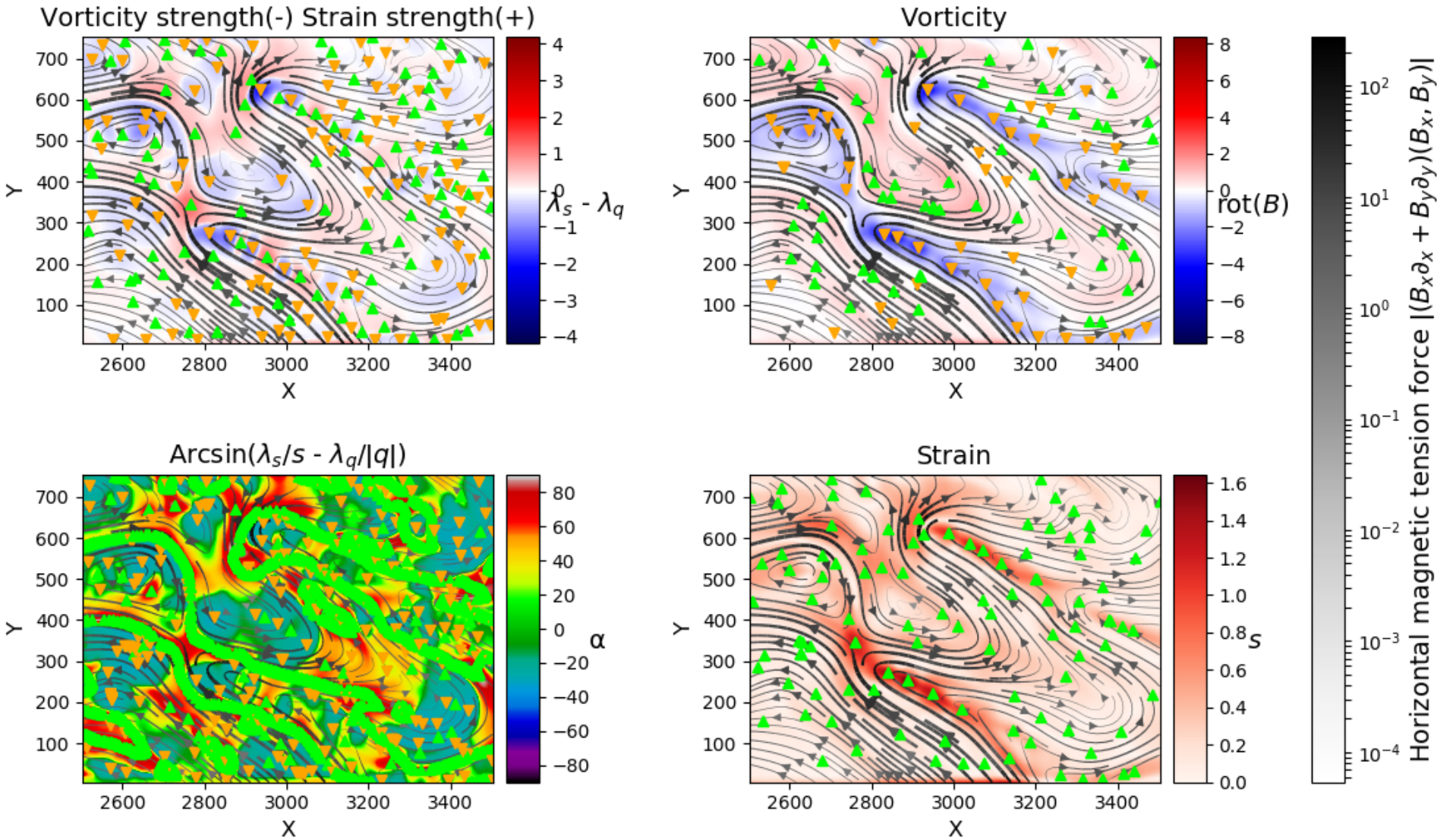
$$\lambda_- = \frac{py}{r^2}$$

$p = 0$のとき

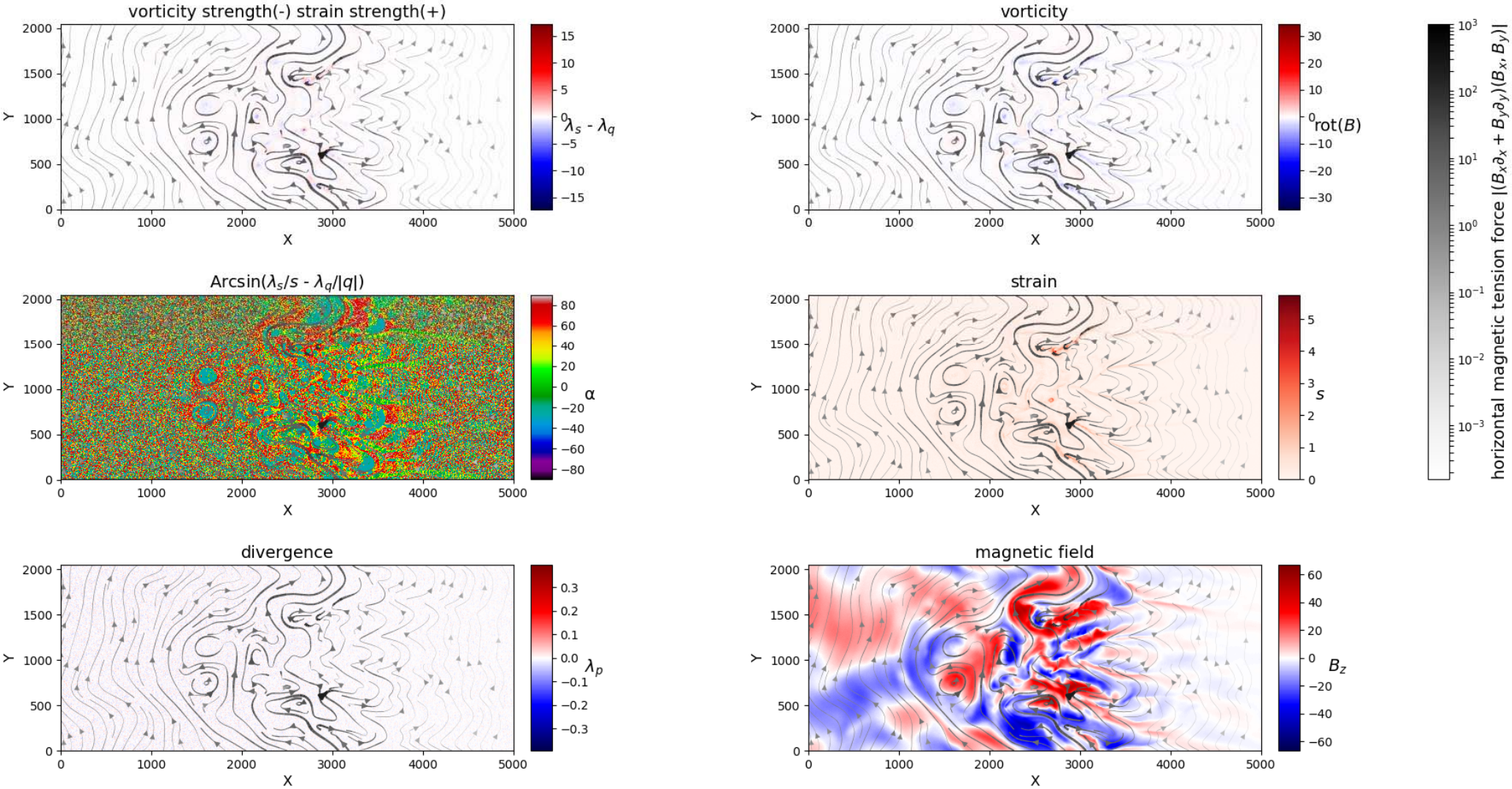
$$\lambda_+ = iq$$

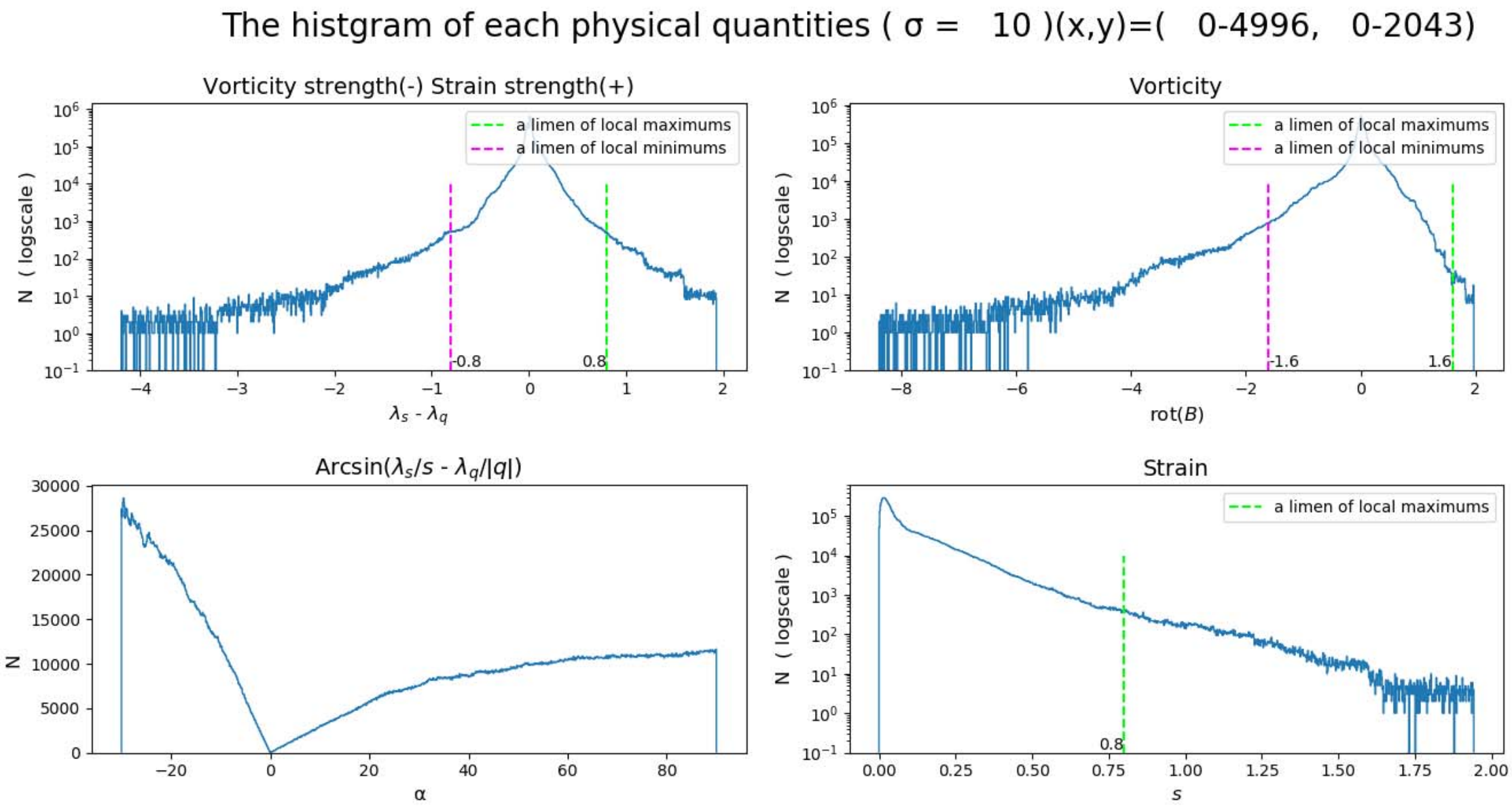
$$\lambda_- = -iq$$

The analysis of magnetic field (σ = 10)(t = 0)

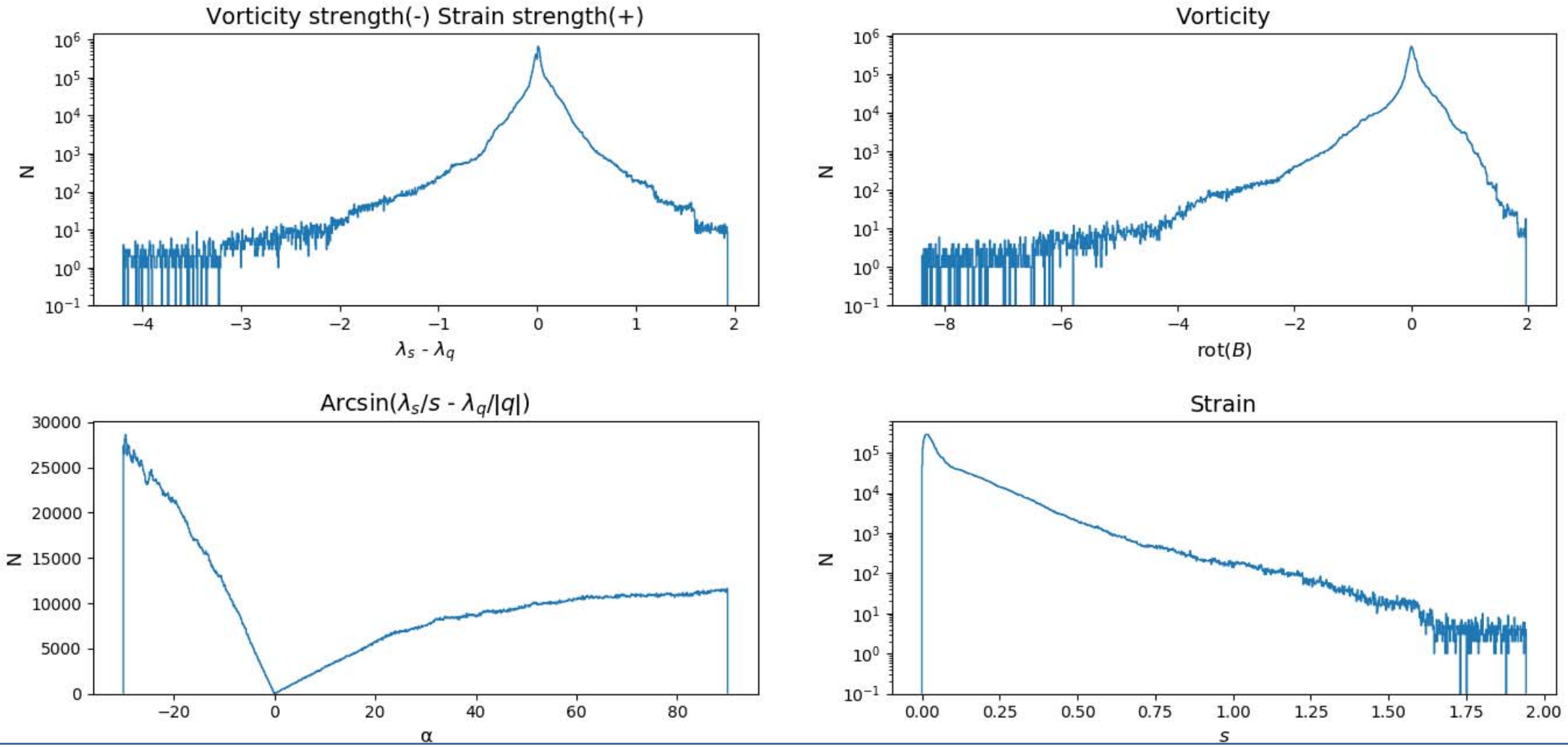
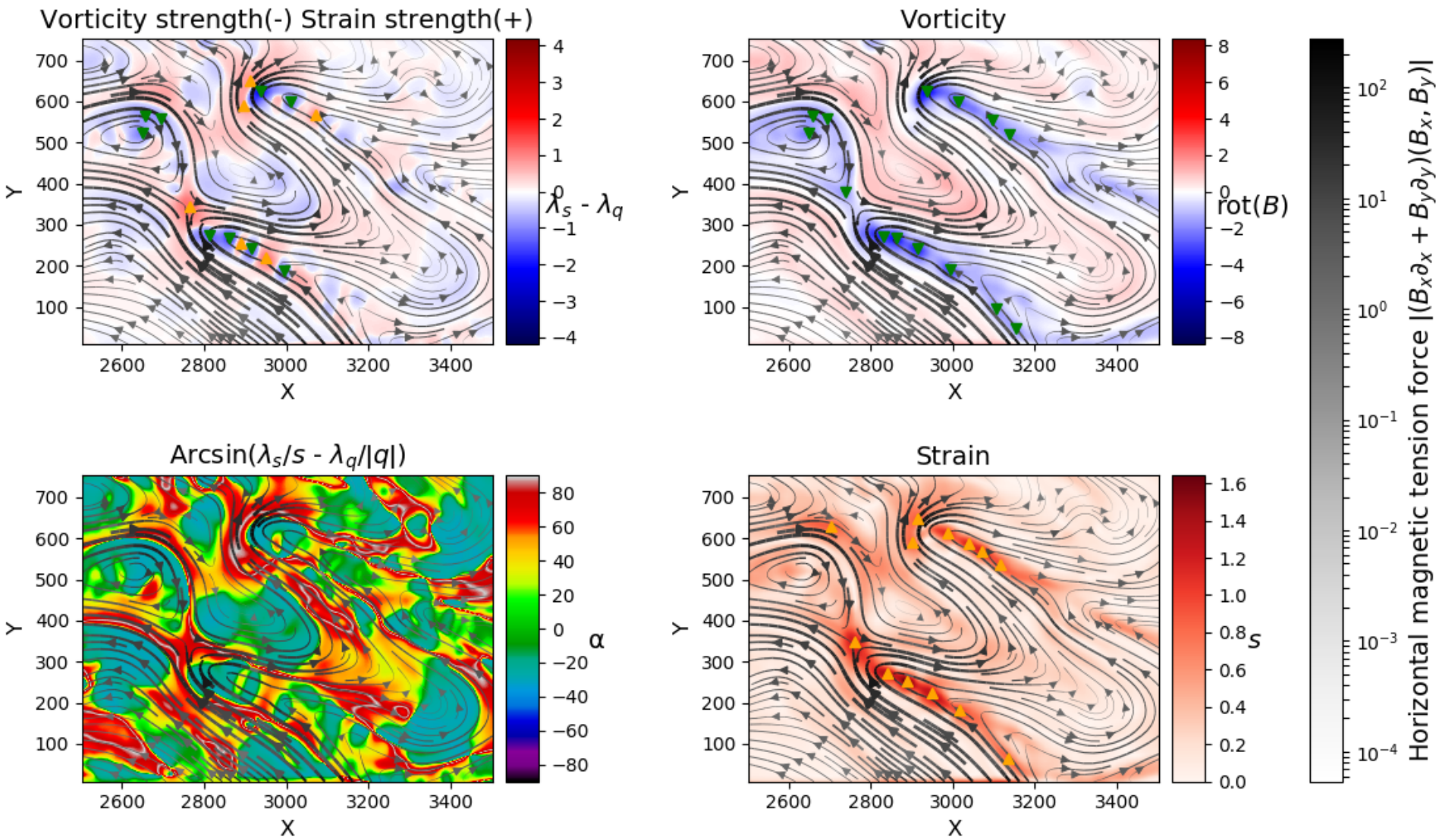


The analysis of magnetic field(t = 0000)(s=0000)




The histgram of each physical quantities (σ = 10)(x,y)=(0-4996, 0-2043)
Vorticity strength(-) Strain strength(+)
a limen of local maximums
a limen of local minimums
N (logscale)
-0.8
0.8
λ_s - λ_q
Vorticity
a limen of local maximums
a limen of local minimums
N (logscale)
-1.6
1.6
rot(B)
Arcsin(λ_s/s - $\lambda_q/|q|$)
N
α
Strain
a limen of local maximums
N (logscale)
0.8
s

The histgram of each physical quantities (σ = 10)(t = 0)(x,y)=(0-4996, 0-2043)



The analysis of magnetic field (σ = 10)(t = 0)