

Cole-Karckkainen法を用いた 数値チェレンコフ不安定性の抑制

千葉大学 理学部物理学科

宇宙物理学研究室 4年

細谷 周平

本研究の背景

宇宙線発生メカニズムはいまだ不明な点が多く、
プラズマがどう加速されるかもその謎の一つ



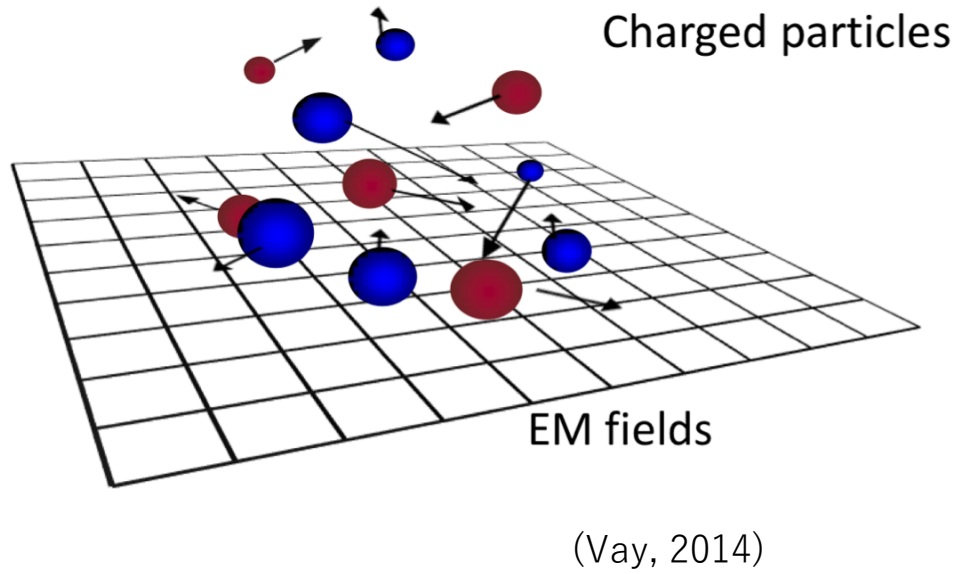
シミュレーション上で相対論的プラズマ（衝撃波）を扱う際には
数値的な不安定性が成長し、計算が困難になることが知られていた



その不安定性を抑制することが重要な物理課題となっている

PIC (Particle-In-Cell) シミュレーション

粒子が空間格子内を自由に運動
電磁場は格子点上に存在



Maxwell 方程式 (cgs系)

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c \nabla \times \vec{B} - 4\pi \vec{j}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \vec{E}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

相対論的運動方程式

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{q}{m} \left(\vec{E} + \frac{\vec{u}}{\gamma c} \times \vec{B} \right)$$

ローレンツ因子

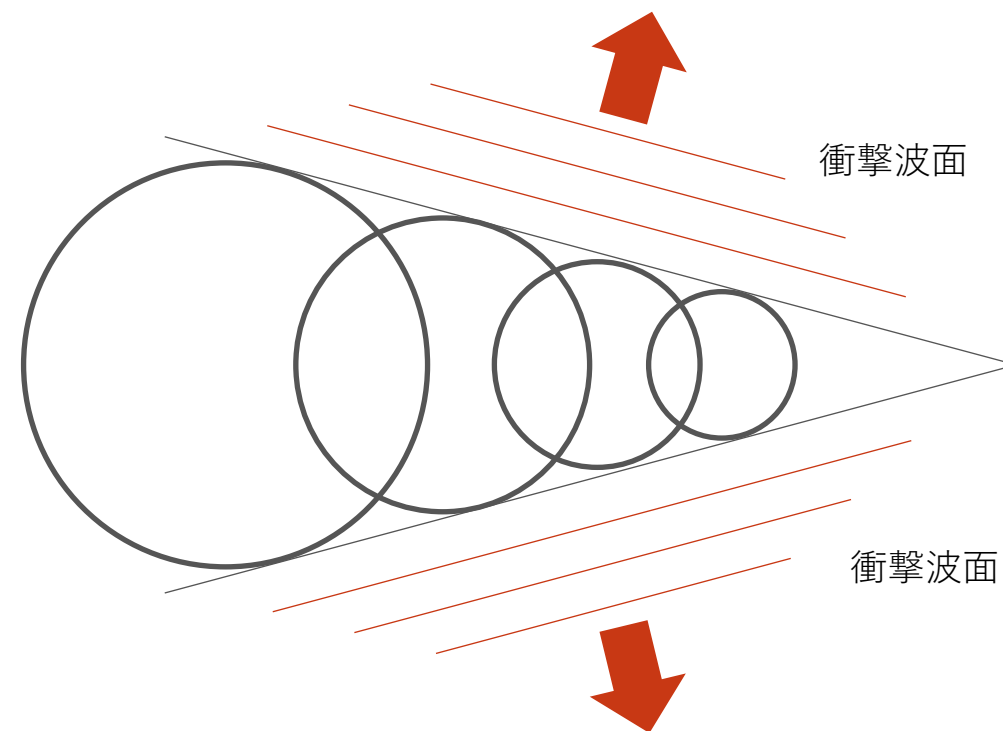
$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{u^2}{c^2}}$$

相対論的プラズマにおける数値チェレンコフ不安定

Maxwell方程式を有限差分近似することで、
波数が高いほど位相速度が光速 c より遅くなる
→プラズマの速度が電磁波の速度を超える



**数値チェレンコフと呼ばれる
数値的不安定性が発生**



本研究の目的

数値チェレンコフ不安定性の成長率を抑制することは、
相対論的プラズマを扱う上で重要な課題。

ある条件において、不安定性の成長率が
落ちることが近年になり報告された。

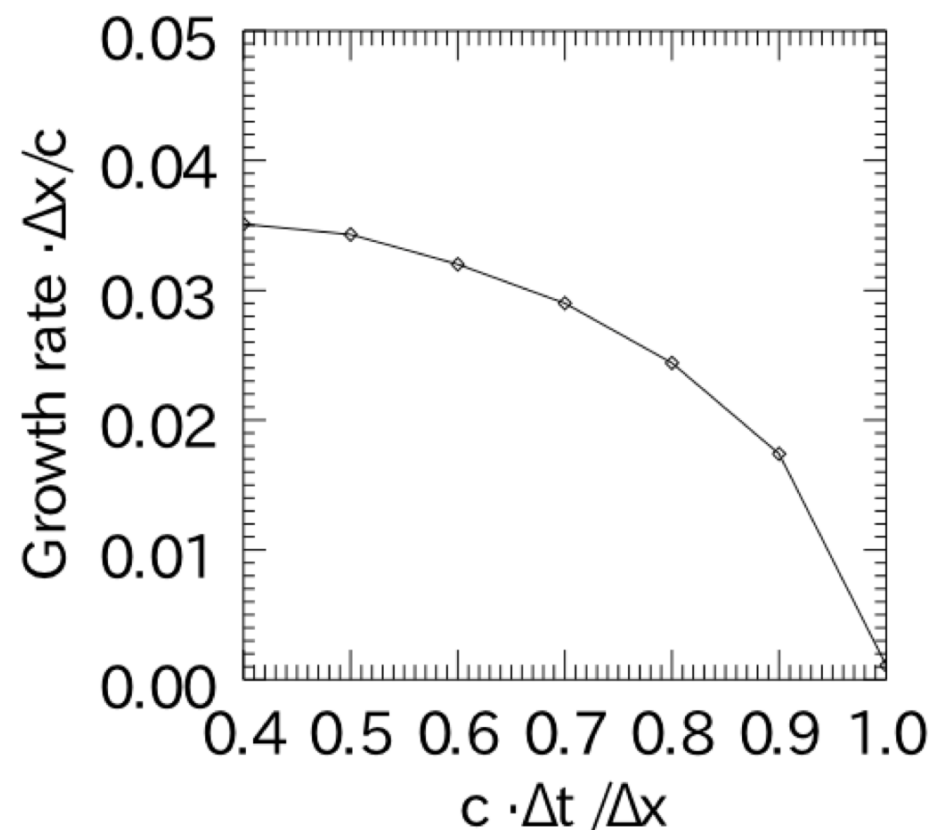
(Godfrey & Vay, 2013; Ikeya & Matsumoto, 2015)

しかし、準相対論的な場合では抑制が
不十分であることが知られていた。

従来とは異なる

Maxwell方程式の数値解法により

さらに成長率が抑えられるかを確認する。



(Ikeya & Matsumoto, 2015)

pCANSを用いた相対論的プラズマシミュレーション

公開PICコード”pCANS”では、陰的（implicit）な解法を用いている。

implicitにおける離散化の手法

$$\frac{B^{t+\Delta t} - B^t}{\Delta t} = -c\nabla \times E^{t+\theta\Delta t} \quad \frac{E^{t+\Delta t} - E^t}{\Delta t} = c\nabla \times B^{t+\theta\Delta t} - 4\pi J^{t+\theta\Delta t}$$

ここで $f^{t+\theta\Delta t} = \theta f^{t+\Delta t} + (1 - \theta)f^t$ とする。

CK (Cole-Karkkainen) 法

電場 E に作用する演算子にのみ変化を加える

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \vec{E}$$

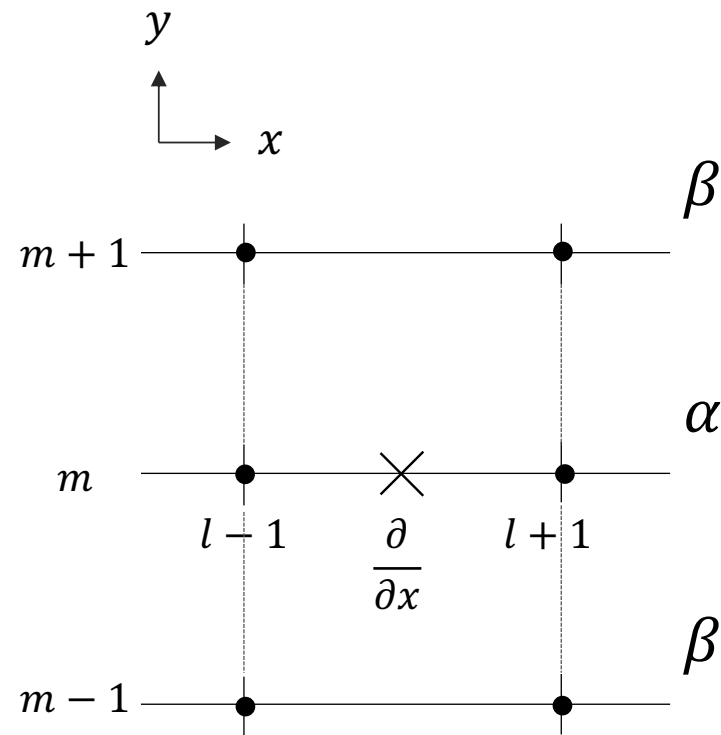


$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c \nabla^* \times \vec{E}$$

$$\nabla^* = (\alpha + \beta S_x^1) \nabla$$

$$S_x^1 G_x|_{l,m} = G_x|_{l,m+1} + G_x|_{l,m-1}$$

$$\alpha + 2\beta = 1$$



1. 陰的CK法による光の分散関係の導出とその安定性の解析を行い,
 α, β による光の伝搬特性を探る
2. PICシミュレーションコードに実装し, 数値チェレンコフ不安定の抑制特性を調べる

光の分散関係（2次元）と安定条件

分散関係

$$\tan\left(-\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{qS_x^2 + pS_y^2}} + 2i\left(\theta - \frac{1}{2}\right)}{4\left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{qS_x^2 + pS_y^2}}$$

$$S_x = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \sin \frac{k_x \Delta x}{2} \quad p = \alpha + 2\beta \cos(k_x \Delta x)$$

$$S_y = \frac{c\Delta t}{\Delta y} \sin \frac{k_y \Delta y}{2} \quad q = \alpha + 2\beta \cos(k_y \Delta y)$$

安定条件

$\text{Im}(\omega\Delta t) < 0$ となる場合に安定となる

安定となるためには、ナイキスト波数の点で
 $qS_x^2 + pS_y^2 > 0$ となれば良い

$\alpha + 2\beta = 1$ の条件とあわせると

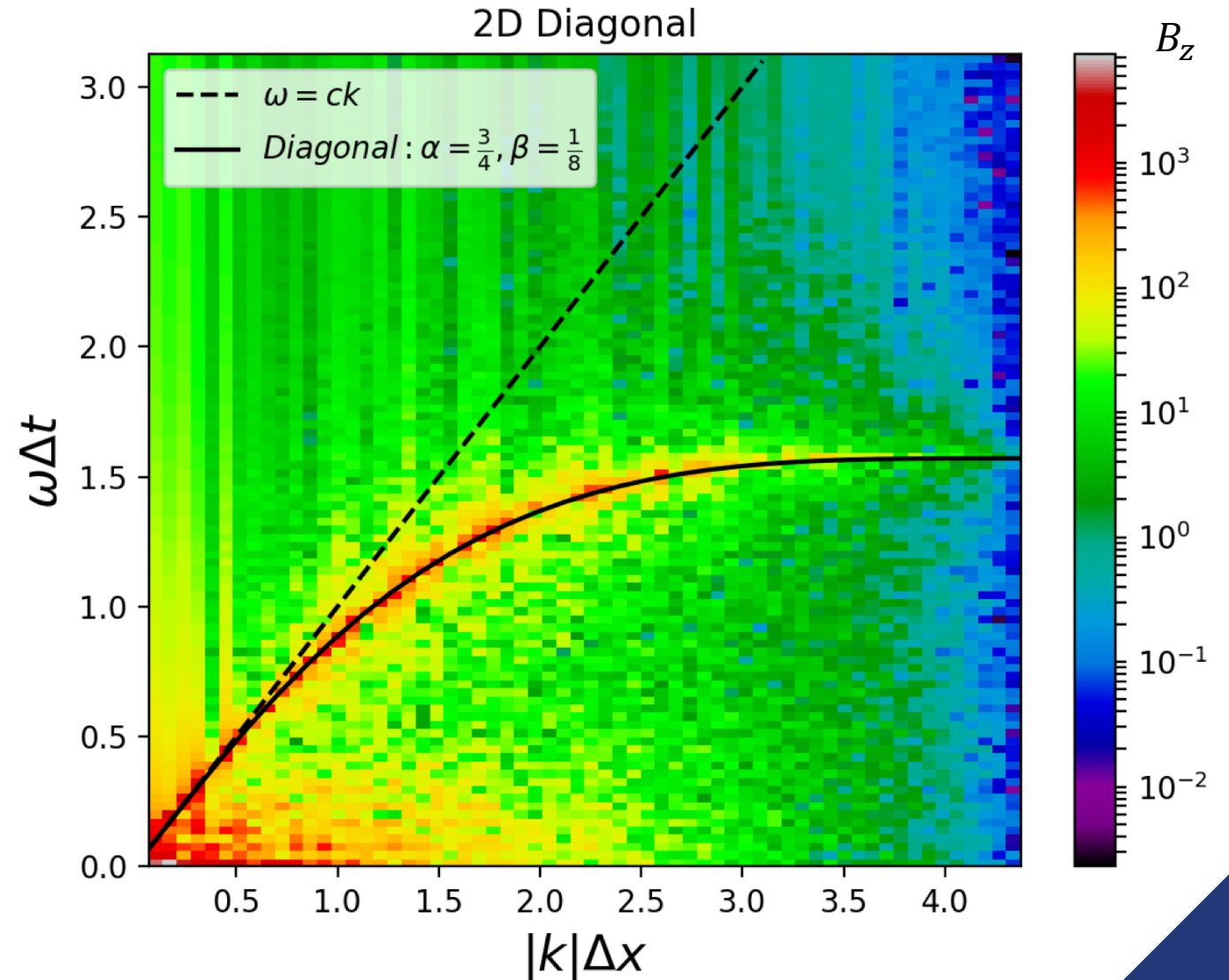
$$\alpha > \frac{1}{2}, \beta < \frac{1}{4}$$

となれば良いことがわかる

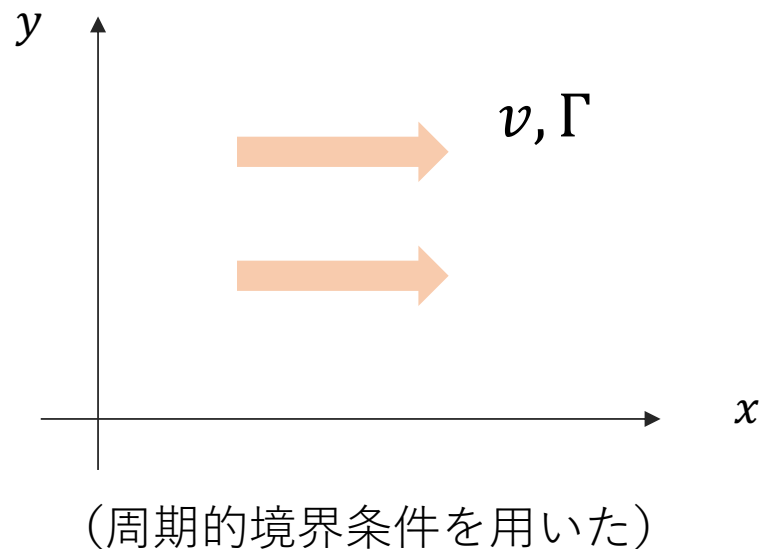
CK法のpCANSへの実装

粒子熱ノイズによる
波動励起のテスト

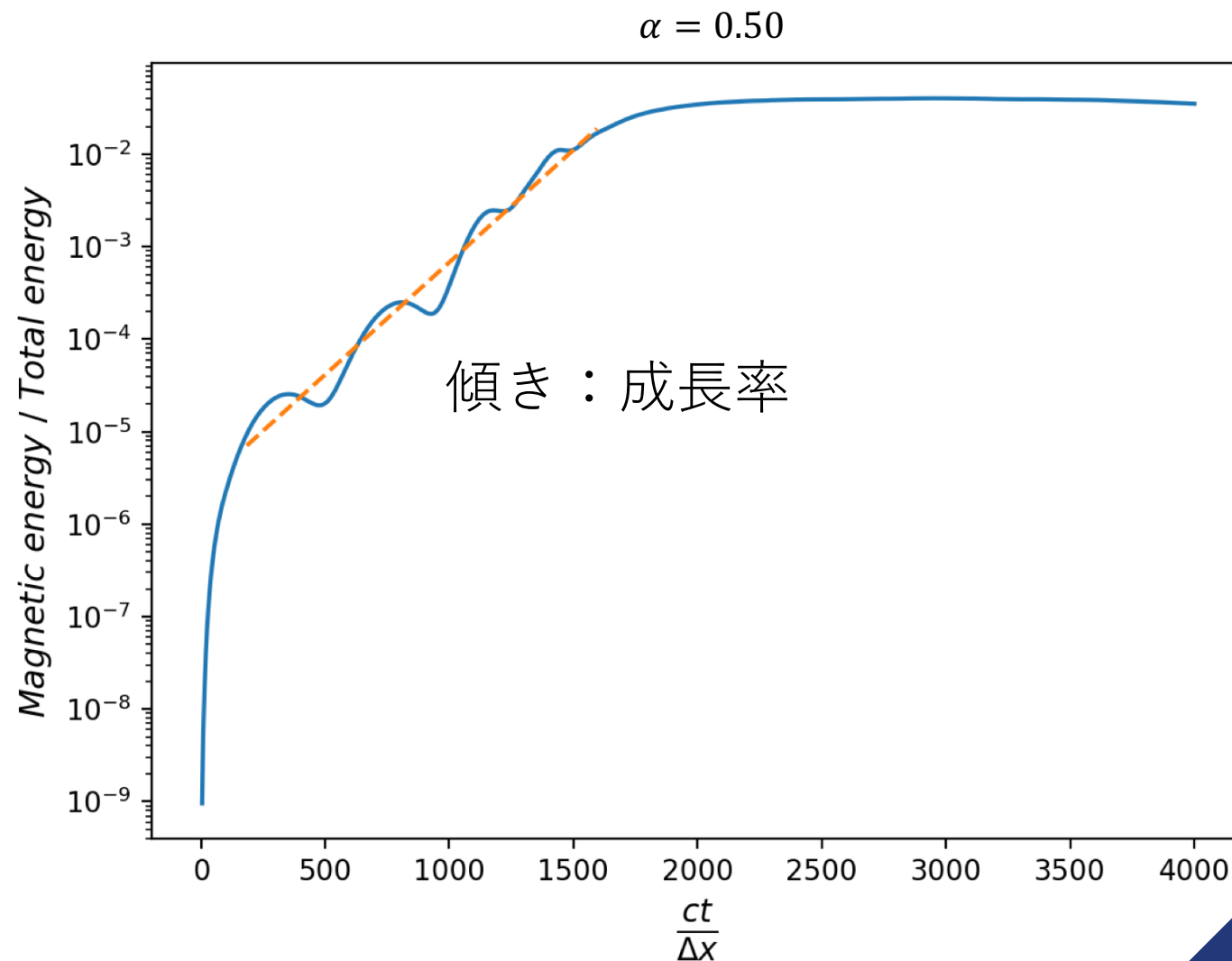
CK法をpCANSに実装し、
理論式とシミュレーション結果で
光の分散関係を比較した。



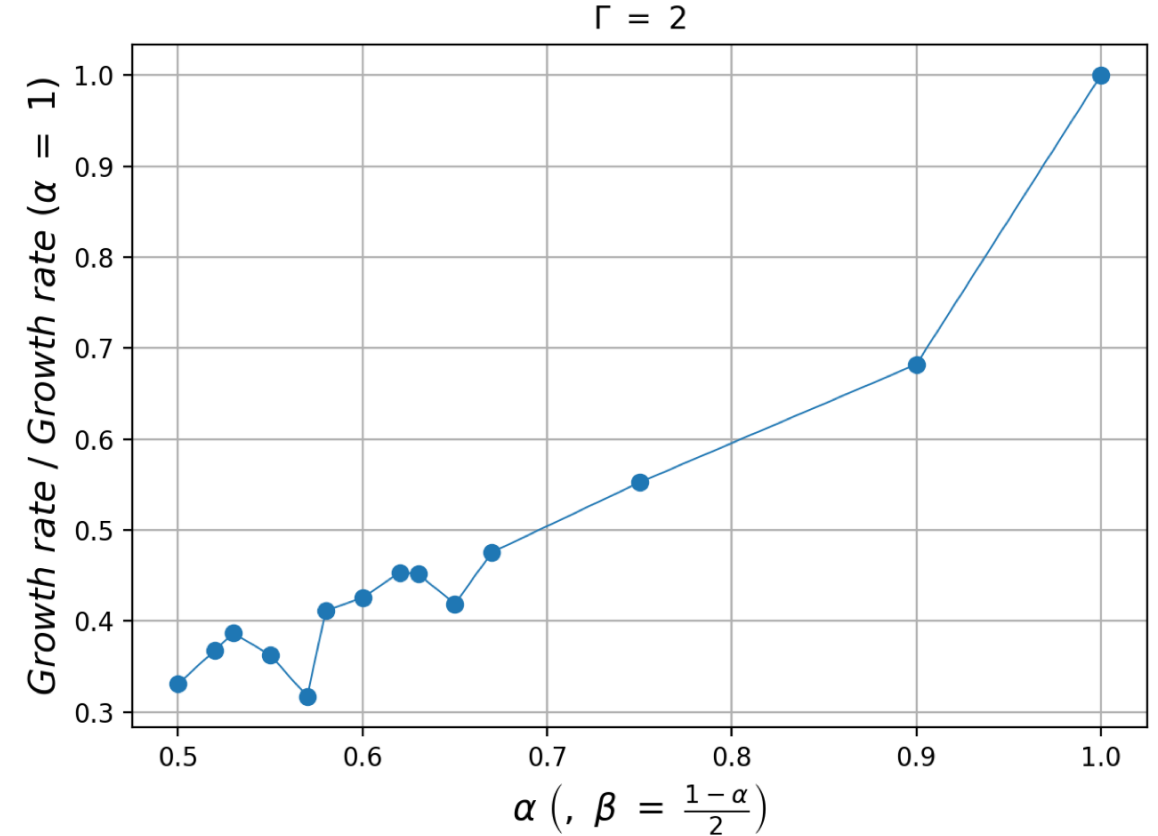
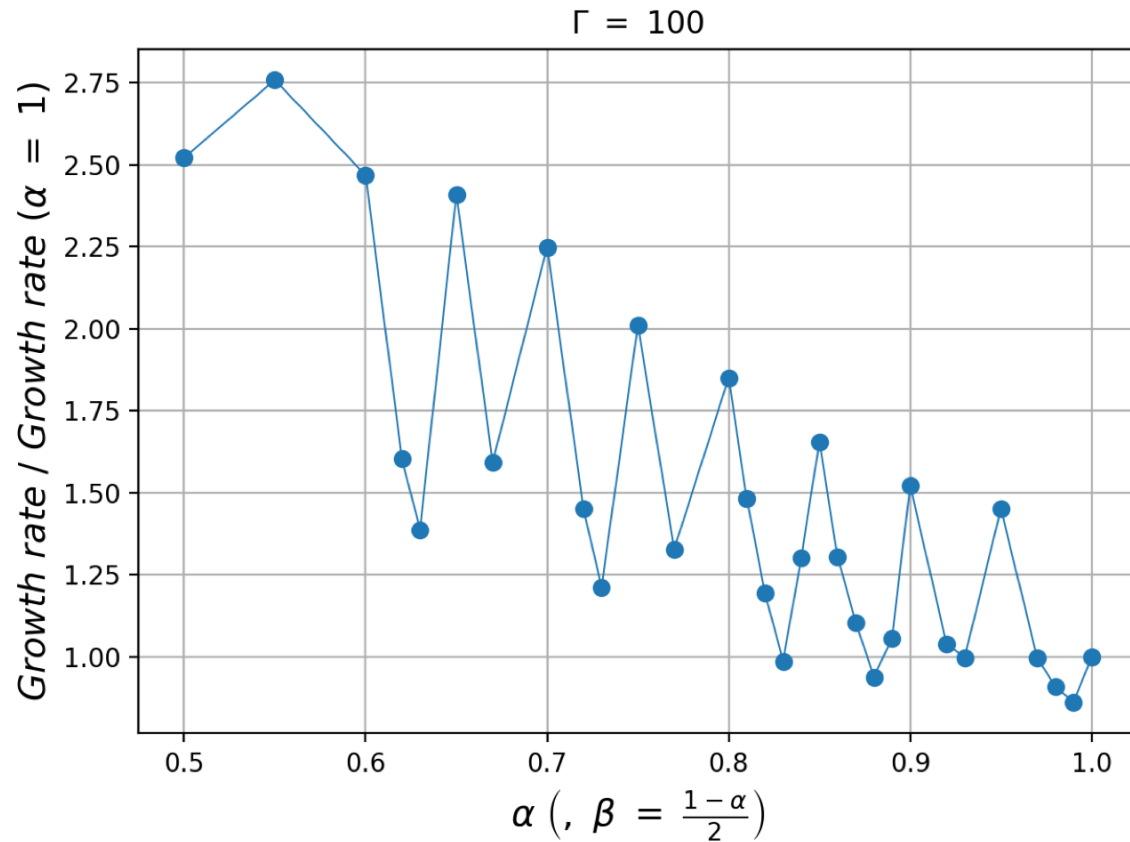
数値チェレンコフの数値実験と成長率の算出



安定条件を満たすように
 α, β を変化させ、
成長率の抑制特性を調べた。



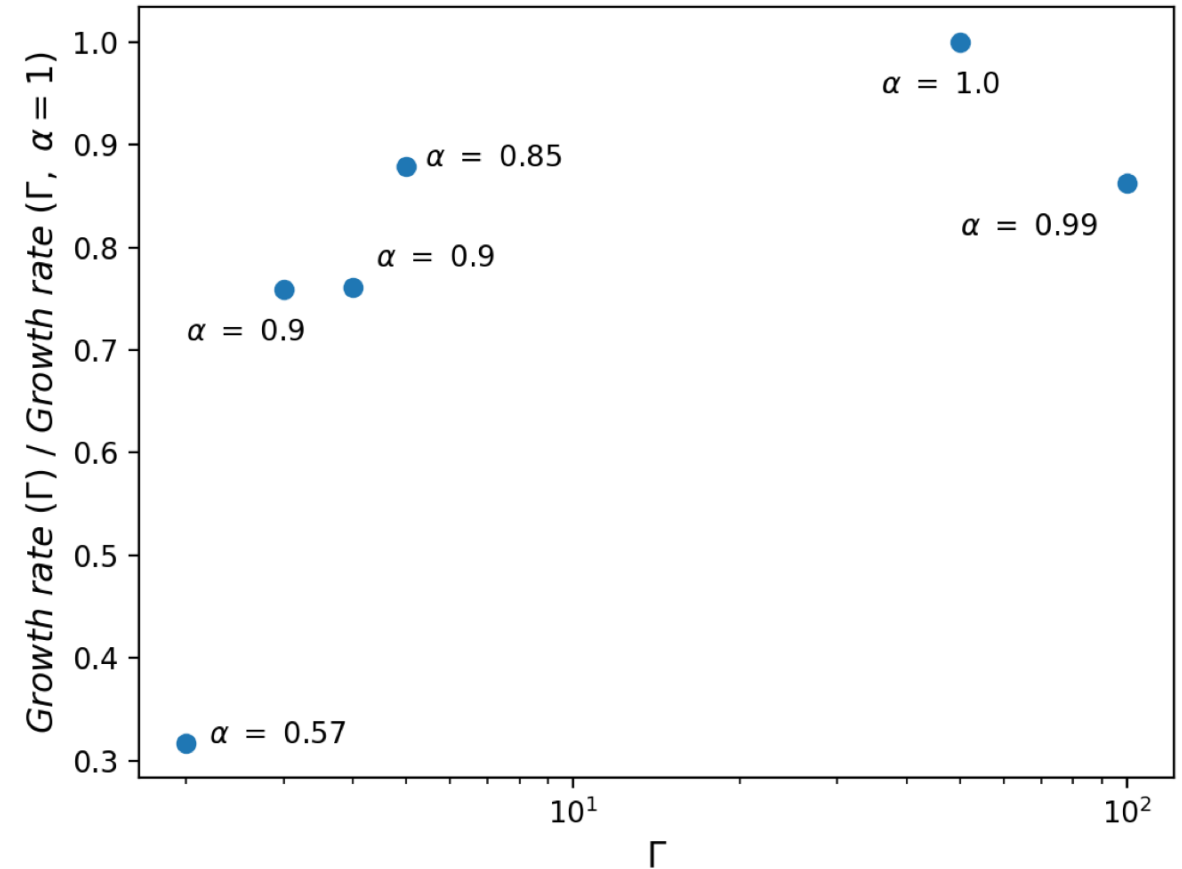
異なるローレンツファクターでの成長率の比較



超相対論では従来の方法，準相対論ではCK法が有効

CK法を用いることで成長率は抑制できるか

- それぞれのローレンツファクター Γ に対して、最も成長率が抑えられた点をプロットした。
- $\Gamma = 2$ などの準相対論的なプラズマにおいては、適切な α を選ぶことで成長率を抑制することができることがわかった。



まとめ

陽的解法

陰的解法

標準解法
(FDTD法)

Godfrey & Vay,
2013

Ikeya & Matsumoto,
2015

CK法

Godfrey & Vay,
2013

今回
新たに調べた

準相対論的プラズマにおいては
陰的CK法が有効



相対論的衝撃波の
解析に応用していく

標準解法における Maxwell方程式の離散化 (2次元)

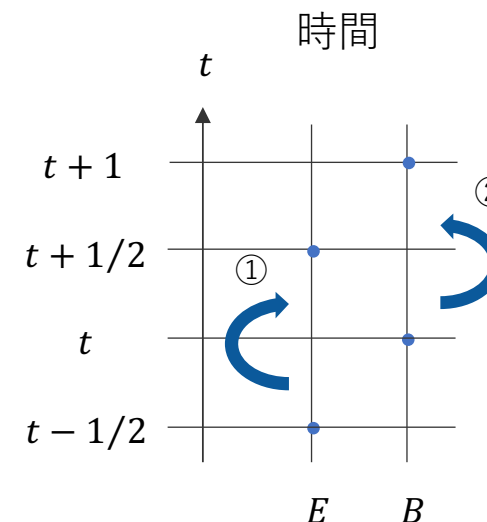
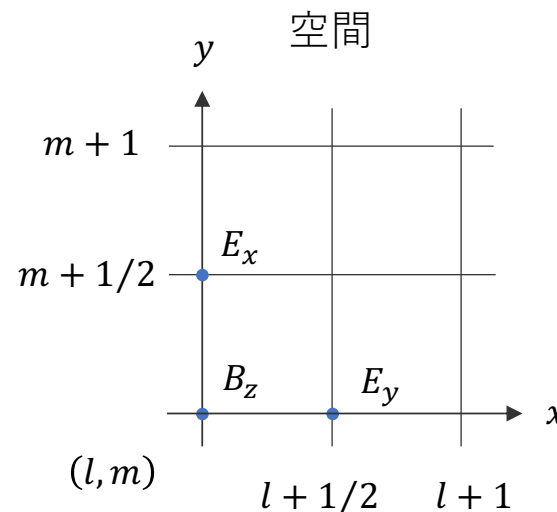
Maxwell方程式の標準的な解法 FDTD法
(Finite-Difference Time-Domain method)

陽的 (explicit) な解法

$$\frac{E_{x(l,m+\frac{1}{2})}^{s+\frac{1}{2}} - E_{x(l,m+\frac{1}{2})}^{s-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = c \frac{B_z^s(l,m+1) - B_z^s(l,m)}{\Delta y}$$

$$\frac{E_{y(l+\frac{1}{2},m)}^{s+\frac{1}{2}} - E_{y(l+\frac{1}{2},m)}^{s-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -c \frac{B_z^s(l+1,m) - B_z^s(l,m)}{\Delta x}$$

$$\frac{B_z^{s+1}(l,m) - B_z^s(l,m)}{\Delta t} = -c \left[\frac{E_{y(l+\frac{1}{2},m)}^{s+\frac{1}{2}} - E_{y(l-\frac{1}{2},m)}^{s+\frac{1}{2}}}{\Delta x} - \frac{E_{x(l,m+\frac{1}{2})}^{s+\frac{1}{2}} - E_{x(l,m-\frac{1}{2})}^{s+\frac{1}{2}}}{\Delta y} \right]$$



光の分散関係

離散化したMaxwell方程式に

$$E_x = E_{x0} \exp[i(k_x l \Delta x + k_y m \Delta y - \omega s \Delta t)]$$

$$E_y = E_{y0} \exp[i(k_x l \Delta x + k_y m \Delta y - \omega s \Delta t)]$$

$$B_z = B_{z0} \exp[i(k_x l \Delta x + k_y m \Delta y - \omega s \Delta t)]$$

を代入することで次の分散関係が得られる

$$\omega \Delta t = 2 \arcsin \left[\sqrt{\left(c \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \frac{k_x \Delta x}{2} \right)^2 + \left(c \frac{\Delta t}{\Delta y} \sin \frac{k_y \Delta y}{2} \right)^2} \right]$$

離散化と光の分散関係（2次元）

標準解法のexplicitと比較し，CK法では次の変更を行う

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -c \left[(\alpha + \beta S_x^1) \frac{\partial}{\partial x} E_y - (\alpha + \beta S_y^1) \frac{\partial}{\partial y} E_x \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{B_z^{s+1}(l,m) - B_z^s(l,m)}{\Delta t} = & -c \left[\alpha \frac{E_y^{s+1/2}(l+1/2, m) - E_y^{s+1/2}(l-1/2, m)}{\Delta x} + \beta \frac{E_y^{s+1/2}(l+1/2, m+1) - E_y^{s+1/2}(l-1/2, m+1) + E_y^{s+1/2}(l+1/2, m-1) - E_y^{s+1/2}(l-1/2, m-1)}{\Delta x} \right] \\ & + c \left[\alpha \frac{E_x^{s+1/2}(l, m+1/2) - E_x^{s+1/2}(l, m-1/2)}{\Delta y} + \beta \frac{E_x^{s+1/2}(l+1, m+1/2) - E_x^{s+1/2}(l+1, m-1/2) + E_x^{s+1/2}(l-1, m+1/2) - E_x^{s+1/2}(l-1, m-1/2)}{\Delta y} \right] \end{aligned}$$

標準解法と同様の手順で，次の分散関係が得られる。

$$\omega \Delta t = 2 \arcsin \left[\sqrt{[\alpha + 2\beta \cos(k_y \Delta y)] \left(\frac{c \Delta t}{\Delta x} \sin \frac{k_x \Delta x}{2} \right)^2 + [\alpha + 2\beta \cos(k_x \Delta x)] \left(\frac{c \Delta t}{\Delta y} \sin \frac{k_y \Delta y}{2} \right)^2} \right]$$

explicit におけるFDTD法とCK法の比較

Axis: $k_y \Delta y = 0$

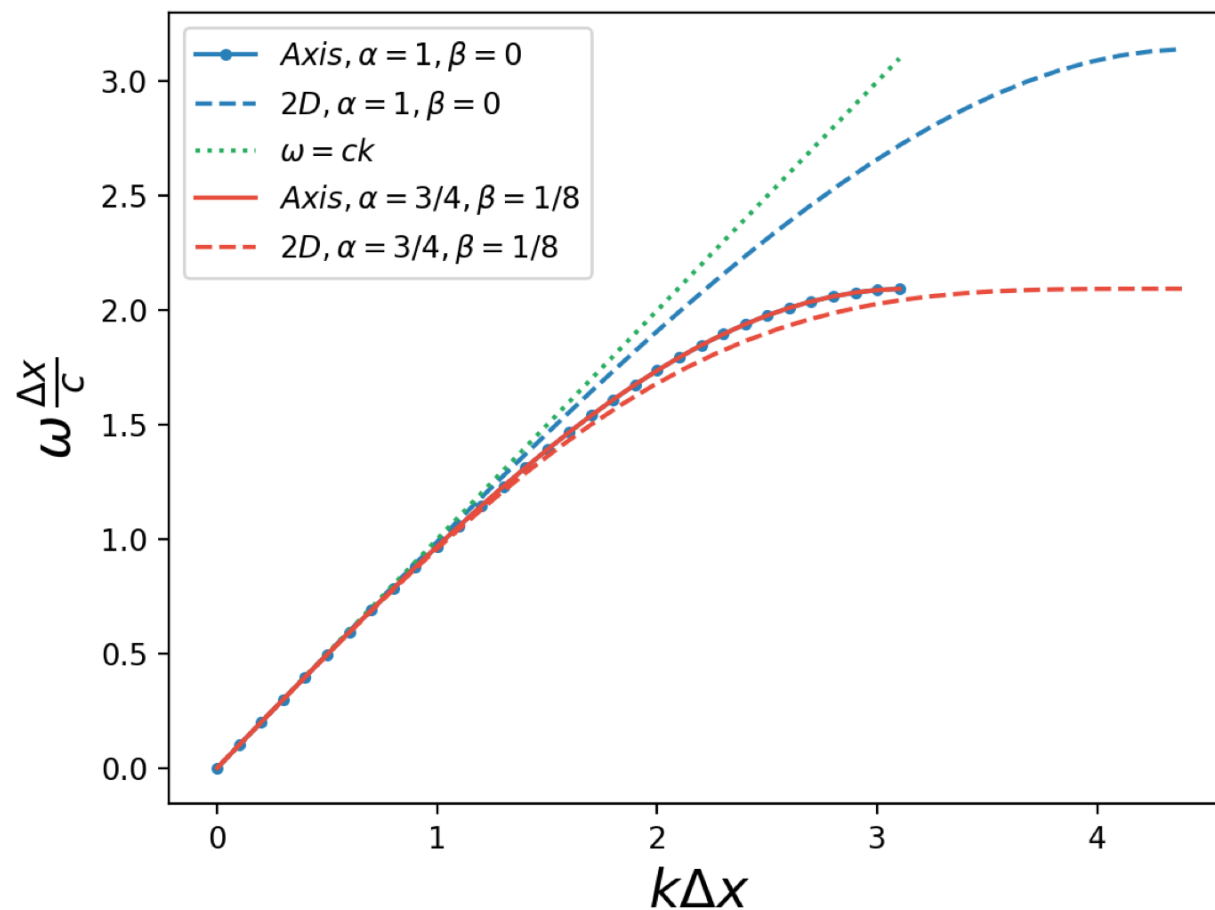
2D: $k_y \Delta y = k_x \Delta x$

- 軸方向ではFDTD法とCK法は一致
- 対角線方向では
CK法は波数が高い領域で
位相速度が減少する

パラメータ

$$c = 1.0, \Delta t = 0.5, \Delta x = 1.0$$

($\alpha=1, \beta=0$ でFDTD法に一致)



電磁場の陰的解法

過去の情報から未来の情報を求める陽的解法 (explicit) に対して、過去・未来の情報を併せて求める手法が陰的解法 (implicit)。

explicit

- ・過去の情報から未来の情報を求める。
- ・計算コストが小さい
- ・クーラン数を1より小さくする必要はある

implicit

- ・未来の情報を含めて求める
- ・電場と磁場が同じ時間ステップ上に定義される
- ・逆行列を求める必要があり、計算コストが大きい
- ・CFLが光速 c に縛られず安定に解ける

離散化の手法

$$\frac{B^{t+\Delta t} - B^t}{\Delta t} = -c\nabla \times E^{t+\theta\Delta t} \quad \frac{E^{t+\Delta t} - E^t}{\Delta t} = c\nabla \times B^{t+\theta\Delta t} - 4\pi J^{t+\theta\Delta t}$$

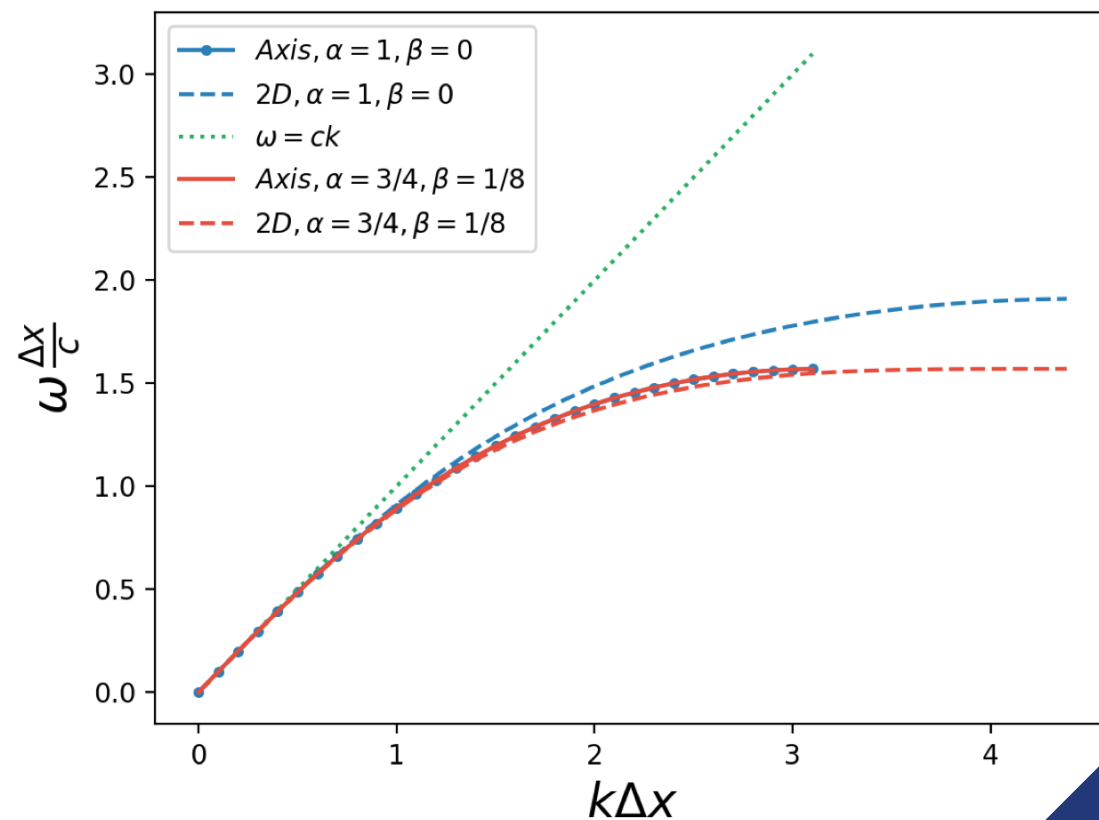
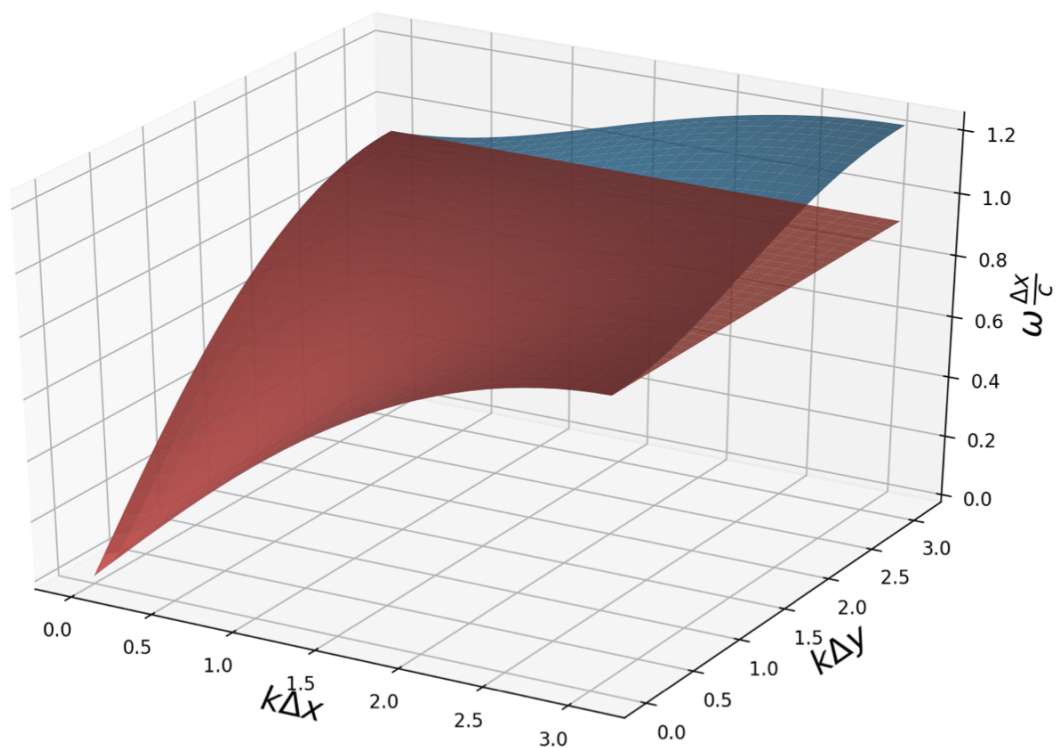
ここで $f^{t+\theta\Delta t} = \theta f^{t+\Delta t} + (1 - \theta)f^t$ とする。



今回新たに陰的CK法の光の分散関係を導出

分散関係の比較 | implicit

パラメータ $c = 1.0, \Delta t = 1.0, \Delta x = 1.0$ ($\alpha = 1, \beta = 0$ でFDTD法に一致)



implicit における減衰率 | CK法 / implicit

- ・ 軸方向ではFDTD法とCK法は一致
- ・ 対角線方向ではCK法において
 1. 減衰率が下がる
 2. 波数が高い領域で減衰率が一樣になる

パラメータ

$$\theta = 0.501, c = 1.0, \Delta t = 1.0, \Delta x = 1.0$$

