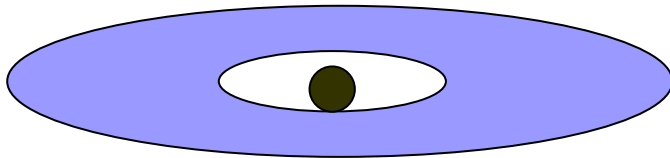




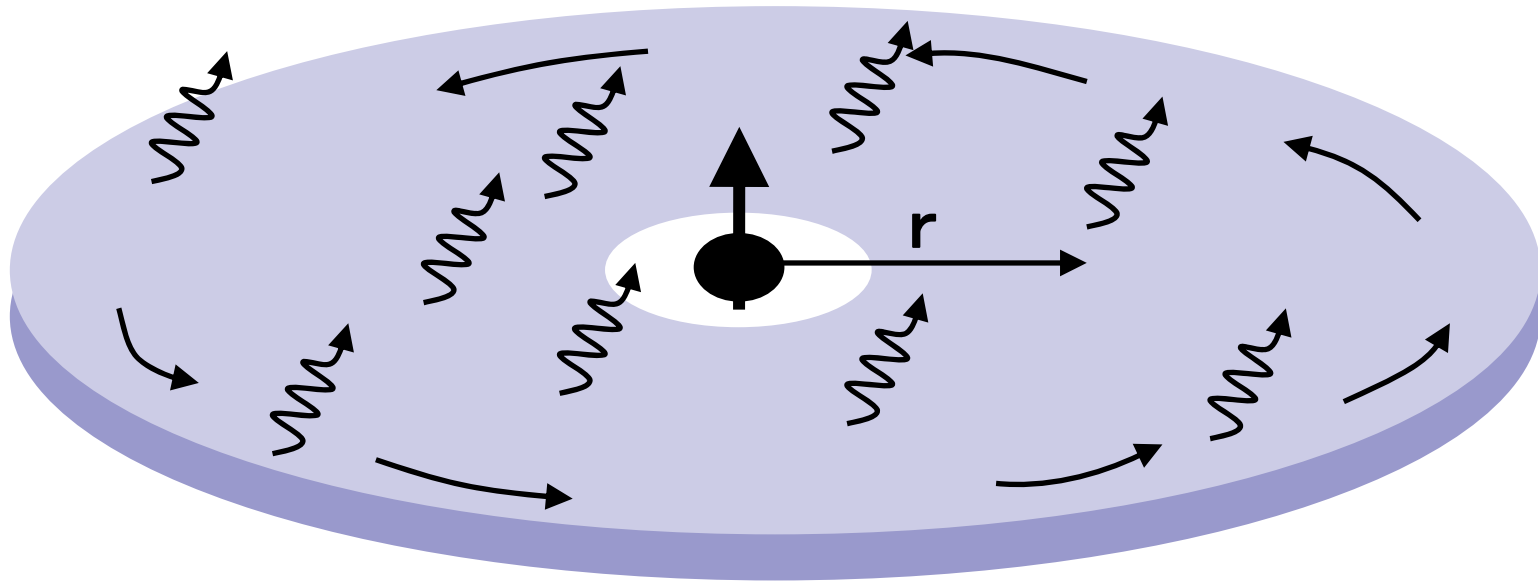
カーブブラックホールの周りの 降着円盤からの放射



宇宙物理学研究室

水野良祐

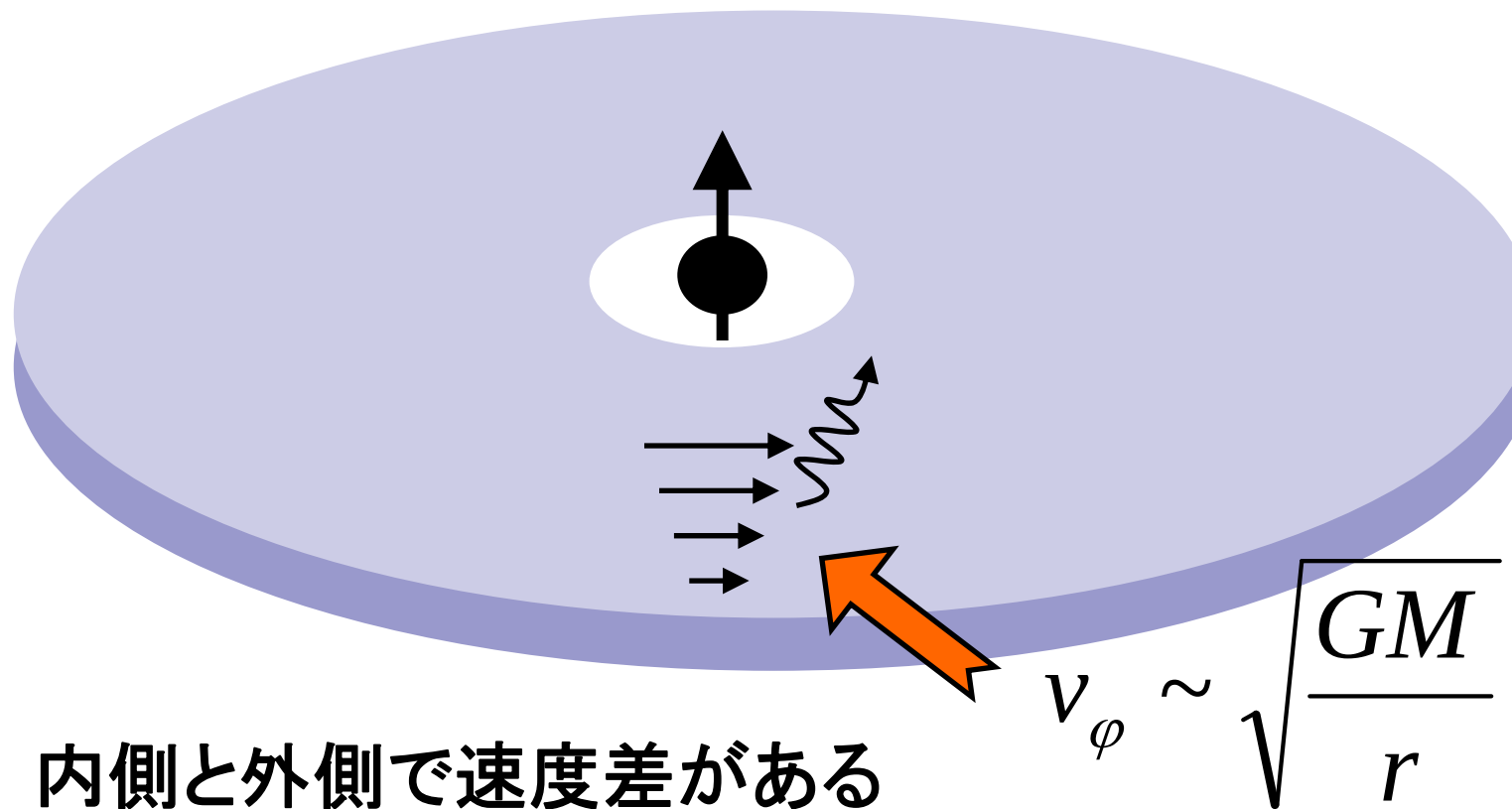
目的：カーブラックホールの周りの降着円盤からの放射エネルギーを r の関数として求める



カーブラックホール：自転しているブラックホール
降着円盤：流入してきた物質が天体の周りに作る円盤
回転運動しながら徐々に中心に落ちていく

Page & Thorneの論文
『DISK-ACCRETION ONTO A BLACK HOLE』(1974)の紹介です

◆なぜ放射が起こるのか？



内側と外側で速度差がある
⇒摩擦が起こる
⇒摩擦熱が発生⇒放射

◆ どうやって円盤からの放射を考えるのか？

■ 一般相対論の復習

- 重力を空間の曲がり具合として表わす

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad \leftarrow \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

- 流体の運動方程式

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \quad \leftarrow \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$$

◆ どうやって円盤からの放射を考えるのか？

$$\mathbf{T} = \rho_0 \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{t} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{q} + \mathbf{q} \otimes \mathbf{u}$$

$\mathbf{t}$: 流体静止系でのストレステンソルの平均

$\mathbf{q}$: エネルギーの流れ

これを $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ に代入することによって、 $\mathbf{q}$ の空間依存性を求める。

しかしこれは連立偏微分方程式になるため、
一般には解析解は求まらない。

ステップ①

$$\mathbf{T}_0 \equiv \rho_0 \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \cancel{\mathbf{t} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{q} + \mathbf{q} \otimes \mathbf{u}}^{\text{摂動項}}$$

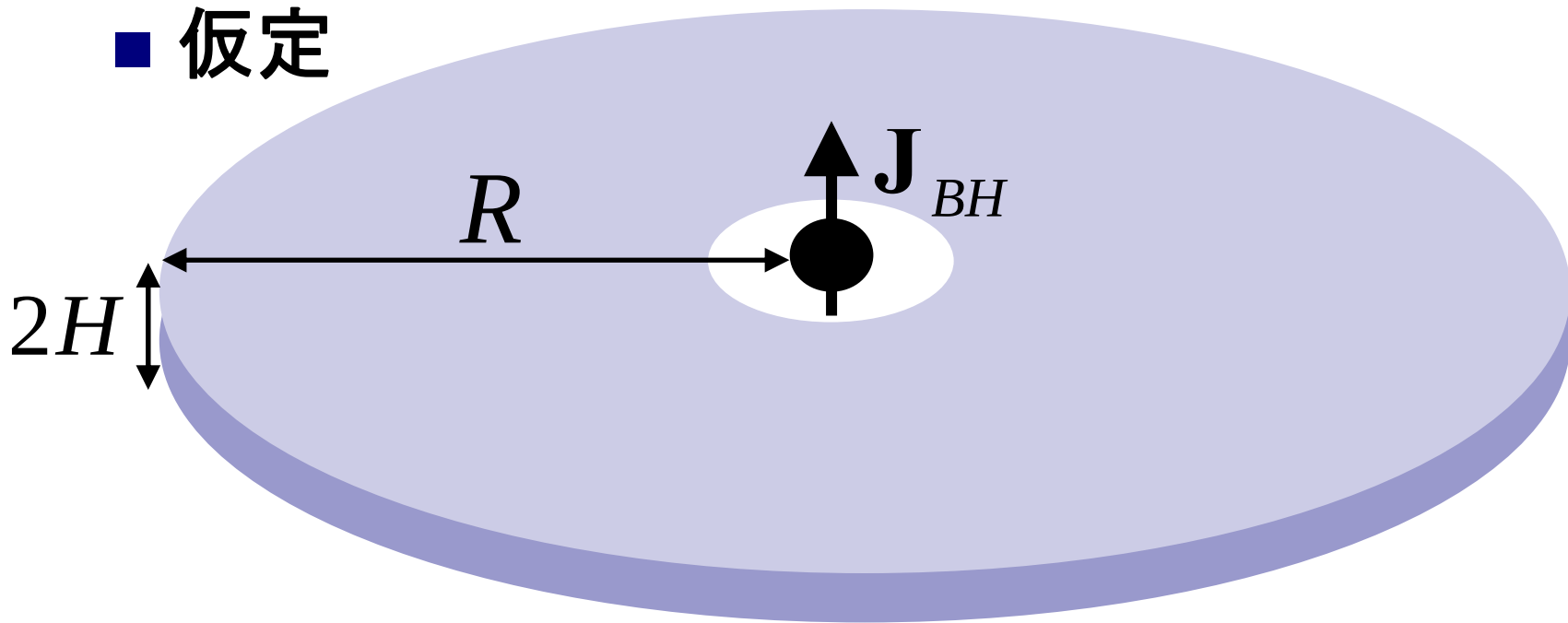
とし、 $\mathbf{T}_0$ に対する運動方程式を解いて、それを粒子の軌道とする。

ステップ②

$\mathbf{T}$ を元に戻して保存則 $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ を解く

◆ステップ①近似的な粒子の軌道を解く

■ 仮定



① $M_{disk} \ll M_{BH}$

③ $H \ll R$

② $\omega_{disk} // \omega_{BH}$

④ $|v_r| \ll |v_\phi|$
円軌道

◆ステップ①近似的な粒子の軌道を解く

■ カー計量 $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$

$$= -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\psi} (d\varphi - \omega dt)^2 + e^{2\mu} dr^2 + dz^2$$

$$e^{2\nu} \equiv \left(1 + a_*^2 x^{-4} + 2a_*^2 x^{-6}\right)^{-1} \left(1 - 2x^{-2} + a_*^2 x^{-4}\right)$$

$$e^{2\psi} \equiv M^2 x^4 \left(1 + a_*^2 x^{-4} + 2a_*^2 x^{-6}\right)$$

$$e^{2\mu} \equiv \left(1 - 2x^{-2} + a_*^2 x^{-4}\right)^{-1}$$

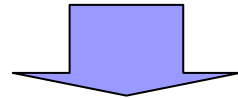
$$\omega \equiv 2a_* M^{-1} x^{-6} \left(1 + a_*^2 x^{-4} + 2a_*^2 x^{-6}\right)^{-1}$$

$$x \equiv \left(\frac{r}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \quad a_* \equiv \frac{a}{M} \quad (|a_*| \leq 1)$$

◆ステップ①近似的な粒子の軌道を解く

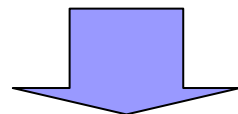
■ ラグランジュの運動方程式

$$\nabla_{\alpha} T^{\alpha\beta} = 0$$



重力しかない場合は

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\alpha}} = \frac{\partial L}{\partial x^{\alpha}} \quad L = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} \frac{dx^{\beta}}{d\tau}$$



$$\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = -\tilde{E} = \text{const} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \tilde{L} = \text{const}$$

$$r^3 \dot{r}^2 = \tilde{E}^2 \left(r^3 + a_*^2 M^2 r + 2M^3 a_*^2 \right) - 4a_* M^2 \tilde{E} \tilde{L} \\ - (r - 2M) \tilde{L}^2 - r^3 + 2Mr^2 - a_*^2 M^2 r$$

◆ステップ①近似的な粒子の軌道を解く

右辺=0と、右辺の r 方向微分=0の条件より

$$\tilde{E} = \left(1 - 3\frac{M}{r} + 2\frac{a}{M}\left(\frac{M}{r}\right)^{\frac{3}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - 2\frac{M}{r} + \frac{a}{M}\left(\frac{M}{r}\right)^{\frac{3}{2}} \right)$$

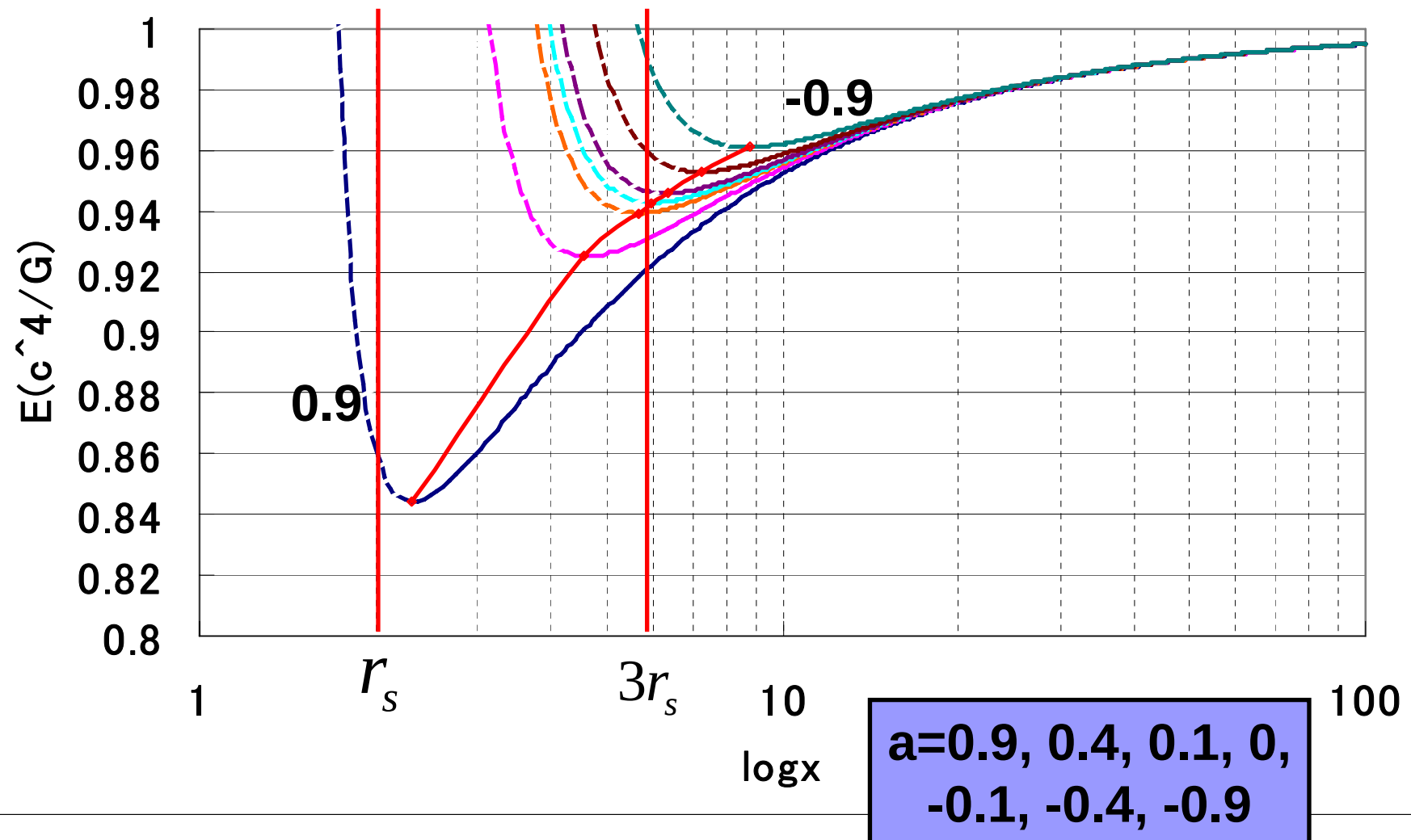
$$\approx 1 - \frac{M}{2r} + \frac{3}{8}\left(\frac{M}{r}\right)^2 - \frac{a}{r}\left(\frac{M}{r}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\tilde{L} = (Mr)^{\frac{1}{2}} \left(1 - 3\frac{M}{r} + 2\frac{a}{M}\left(\frac{M}{r}\right)^{\frac{3}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - 2\frac{a}{M}\left(\frac{M}{r}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right)$$

$$\approx (Mr)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3}{2}\frac{M}{r} - \frac{3a}{M}\left(\frac{M}{r}\right)^{\frac{3}{2}} \right)$$

$a > 0$ なら少ない角運動量
で安定になる。
⇒斥力が加わっていることに

粒子のエネルギーの位置依存性





◆ステップ①近似的な粒子の軌道を解く

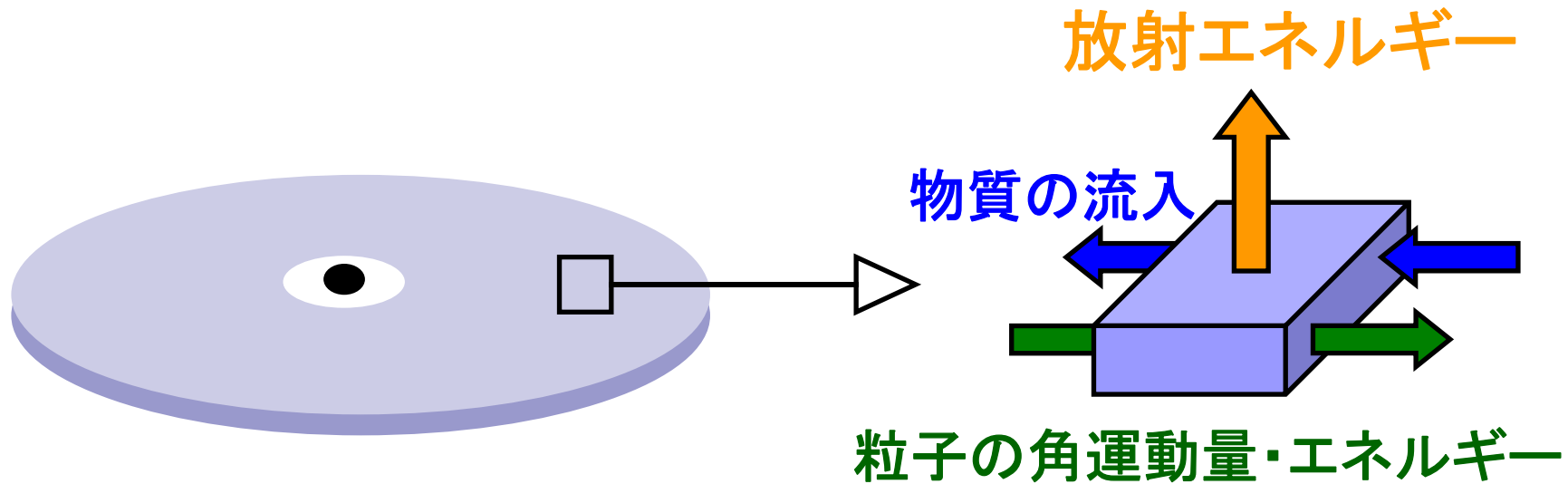
さらに右辺の2階 r 方向微分 ≥ 0 の条件(安定性の条件)より、円軌道が存在する限界は

$$r_0 = M \left[3 + Z_2 - \text{sgn}(a_*) \{ (3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2) \}^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$Z_1 \equiv 1 + \left(1 - a_*^2 \right)^{\frac{1}{3}} \left\{ \left(1 + a_* \right)^{\frac{1}{3}} + \left(1 - a_* \right)^{\frac{1}{3}} \right\}$$

$$Z_2 \equiv \left(3a_*^2 + Z_1^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

◆ステップ②保存則から解を求める



$$0 = \int_V dV \nabla \cdot \mathbf{T} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \int_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

エネルギー保存則をガウスの法則で表面積分にして解く

◆ステップ②保存則から解を求める

$$0 = \int_V dV \nabla \cdot \mathbf{T} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \int_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}^{inst}) = 0 \quad (\text{静止質量の保存則})$$

面密度

円環に働く
トルクの平均

エネルギーの
流れの平均

$$\left[2\pi e^{\nu+\psi+\mu} \Sigma u^r \tilde{L} - 2\pi e^{\nu+\psi+\mu} W_\varphi^r \right]_{,r} = 4\pi e^{\nu+\psi+\mu} F \tilde{L}$$

$$\left[2\pi e^{\nu+\psi+\mu} \Sigma u^r \tilde{E} + 2\pi e^{\nu+\psi+\mu} W_t^r \right]_{,r} = 4\pi e^{\nu+\psi+\mu} F \tilde{E}$$

$$\left(2\pi e^{\nu+\psi+\mu} \Sigma u^r \right)_{,r} = 0$$

$$\equiv \dot{M}$$

これを連立させて解くと...



◆ステップ②保存則から解を求める

$$\dot{M}_0 = -2\pi e^{\nu+\psi+\mu} \Sigma u^r$$

$$F(r) = (\dot{M}_0 / 4\pi) e^{-(\nu+\psi+\mu)} f$$

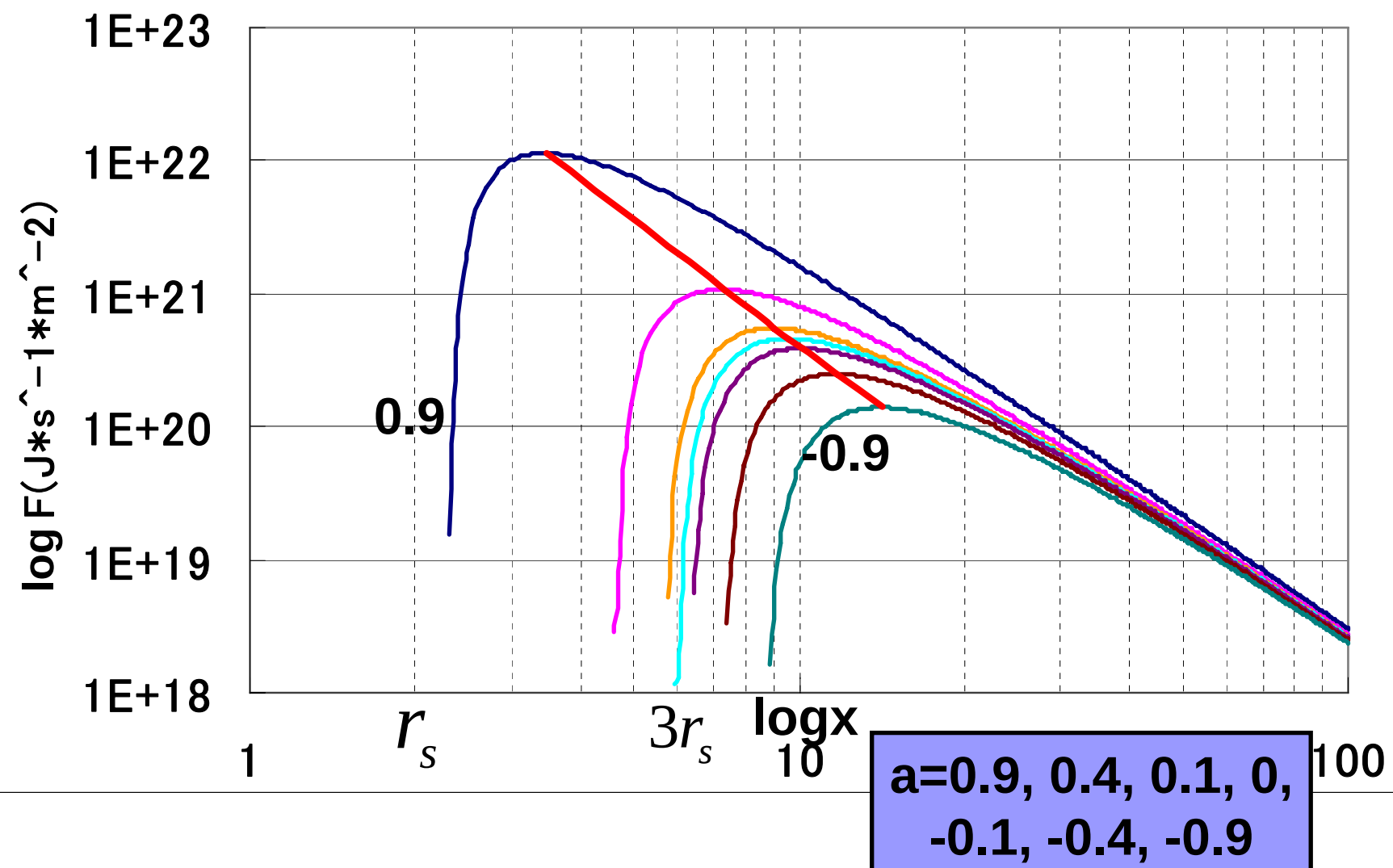
$$W_\varphi^r(r) = (\dot{M}_0 / 2\pi) e^{-(\nu+\psi+\mu)} \left\{ (\tilde{E} - \Omega \tilde{L}) / (-\Omega_{,r}) \right\} f$$

ただし f は...

◆ステップ②保存則から解を求める

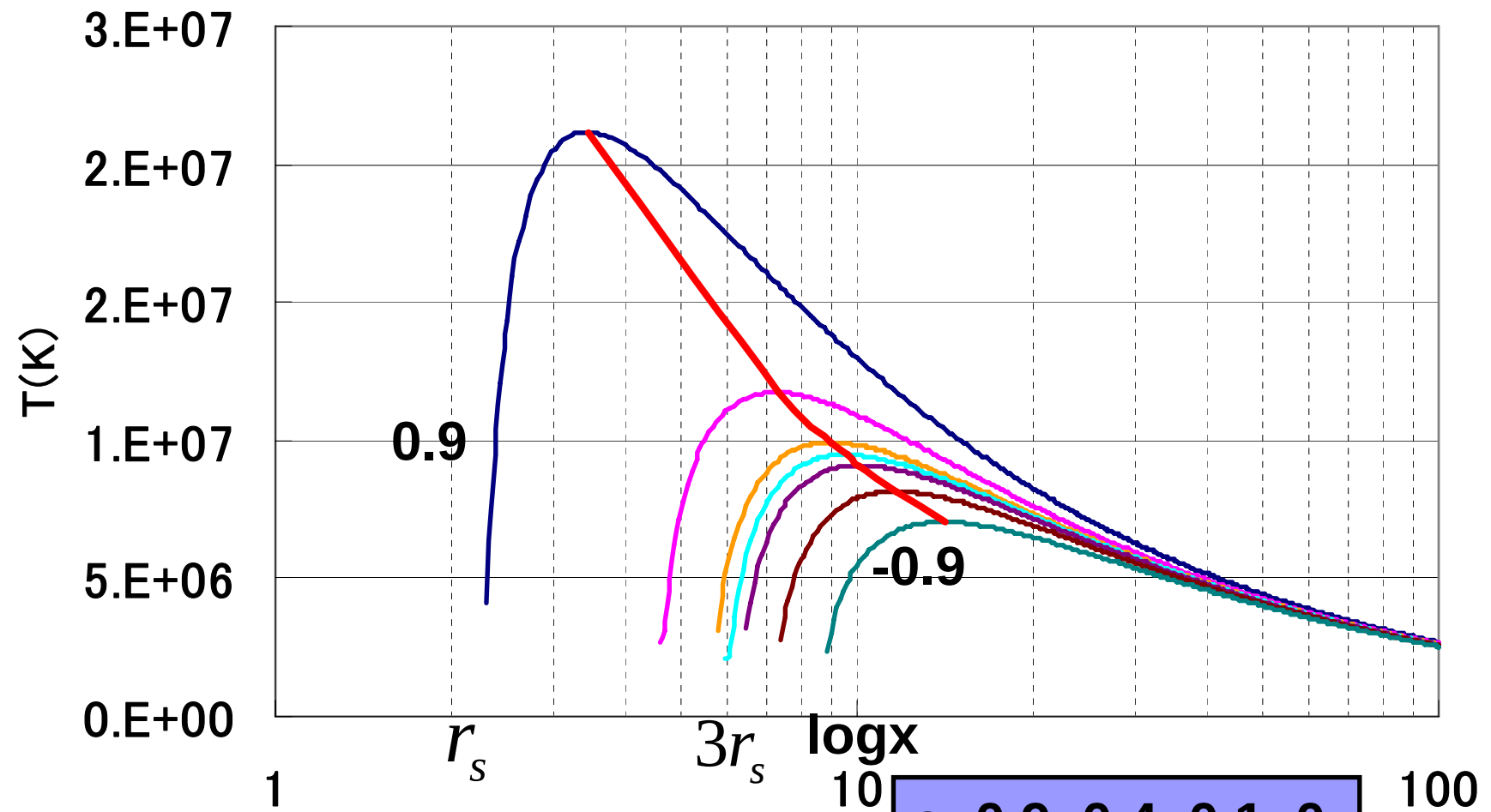
$$f = \frac{3}{2M} \frac{1}{x^2(x^3 - 3x + 2a_*)} \left\{ x - x_0 - \frac{3}{2} a_* \ln \left(\frac{x}{x_0} \right) \right. \\ - \frac{3(x_1 - a_*)}{x_1(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \ln \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) \\ - \frac{3(x_2 - a_*)}{x_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \ln \left(\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \right) \\ \left. - \frac{3(x_3 - a_*)}{x_3(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \ln \left(\frac{x - x_3}{x_0 - x_3} \right) \right\}$$

放射エネルギーの位置依存性





円盤の温度の位置依存性



$a=0.9, 0.4, 0.1, 0,$
 $-0.1, -0.4, -0.9$





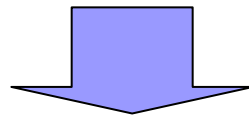
しかしこれでもまだ解けない。

➤ 円盤の形や物質の流れ込む方向等が任意だと解が複雑に

⇒ 解析解が求められない

➤ 変数の数が多すぎる

⇒ 放射エネルギーが位置の関数として求まらない



対象性が高い状況を考え、その上で物理的に妥当な条件をいくつか設けてやる。



◆ 仮定

- 円盤の自己重力は無視する。計量はカー計量を使う。
 - 円盤はブラックホールの赤道面上にある。
 - 円盤の厚みはその半径に比べて十分薄いものとする。厚みの半分の最大値 $\equiv H$
 - 軌道は測地的円軌道であるとする。
- ⇒これは粒子に働く圧力勾配力が小さいことを意味し、したがって粒子の内部エネルギーを無視できるという仮定でもある。



◆ 仮定

- 円盤内では垂直方向のみに熱の流れがあるとする。

$$\langle q(r, z) \rangle \approx \langle q^z(r, z) \rangle \frac{\partial}{\partial z}$$

- ガスの静止系で見たとき、円盤の表面で放射は等方的であるとする。また円盤表面ではz方向のストレスはないとする。

$$\langle t_{\varphi}^z \rangle = \langle t_t^z \rangle = \langle t_r^z \rangle = \langle q_{\varphi} \rangle = \langle q_t \rangle = \langle q_r \rangle = 0$$

- 円盤の表面から放射された光子が円盤の別の領域にエネルギーや運動量を輸送することはない。

◆ステップ②保存則から解を求める

静止質量の流れの平均 (r に依存しない)

$$\dot{M}_0$$

円盤の平均的な動きに乗った観測者から見た単位時間当たり
に単位面積から放射されるエネルギー

$$F(r) \equiv \langle q^z(r, z = H) \rangle = \langle -q^z(r, z = -H) \rangle$$

↑ これが今回求めたい量です。

$$W_\phi^r(r) \equiv \int_{-H}^{+H} dz \langle t_\phi^r \rangle$$

$$\text{面密度} : \Sigma \equiv \int_{-H}^{+H} dz \langle \rho_0 \rangle$$

◆表記

$$\langle \Psi(z, r) \rangle \equiv \int_0^{\Delta t} dt \int_0^{2\pi} d\varphi \Psi(t, r, z, \varphi)$$

$$\text{面密度} : \Sigma \equiv \int_{-H}^{+H} dz \langle \rho_0 \rangle$$

$$\text{平均速度} : \mathbf{u}(r) \equiv \frac{1}{\Sigma} \int_{-H}^{+H} dz \langle \rho_0 \mathbf{u}^{inst} \rangle$$

$$\mathbf{u}(r) \approx \mathbf{w}(r) \equiv \text{(円軌道での4元速度)}$$

$$\tilde{E}(r) \equiv -w_t(r) \quad \tilde{L}(r) \equiv w_\varphi(r) \quad \Omega(r) \equiv \frac{w^\varphi}{w^t}$$