2次元放射流体力学コード

物理学科　宇宙物理研究室
菅野　裕次

⇉ aplab security measures

発表の流れ

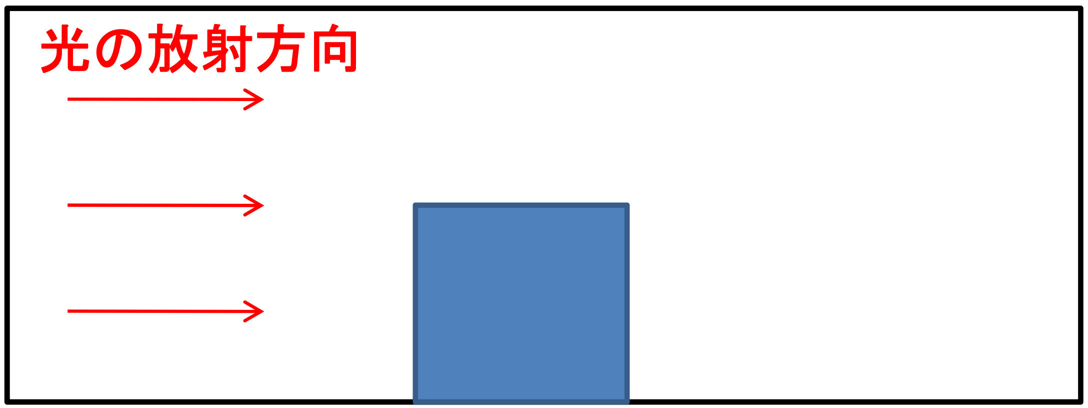
1.序論（動機、物理モデル）
2.目的
3.1.基礎方程式
3.2.数値計算方法（HLL法）
4.結果
5.考察
6.まとめ
7.参考文献

序論

光の放射によるエネルギー輸送の様子を明らかにすることは、恒星の物理的構造を決める重要なポイントである。

物理モデル

定常流の場合で光の輸送の仕方を調べる。

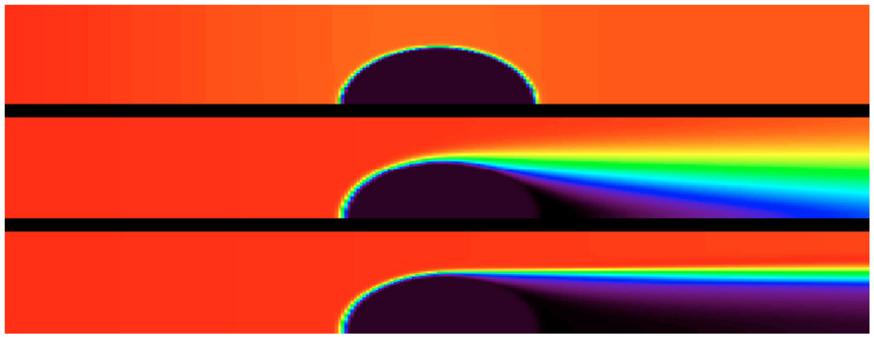


目的

- まずは、1次元で光の放射輸送方程式をモーメントモデルを使って解き、数値計算を行う。

- 2次元に拡張し数値計算を行い、shadow test として図に表す。

shadow test



M.Gonzalez et al,2006

基礎方程式

放射輸送方程式

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{n}\cdot\nabla\right)I(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{n},\nu)=\sigma_{\mathrm{a}}^{\nu}B(\boldsymbol{x},t,\nu)-\sigma^{\nu}I(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{n},\nu)+\sigma_{\mathrm{s}}^{\nu}\int_{4\pi}g(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}')I(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{n}',\nu)\mathrm{d}\boldsymbol{n}'$$

$I(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{n},\nu)$:光の強度

$\sigma_{\mathrm{a}}^{\nu}$:吸収係数,　$\sigma_{\mathrm{s}}^{\nu}$:散乱係数

$\sigma^{\nu}=\sigma_{\mathrm{a}}^{\nu}+\sigma_{\mathrm{s}}^{\nu}$:全断面積

B :光を発生させる関数

g :散乱時の方向を決める関数

散乱が等方性であると仮定すると、

放射輸送方程式

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{n}\cdot\nabla\right)I(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{n},\nu)=\sigma_{\mathrm{a}}^{\nu}B(\boldsymbol{x},t,\nu)-\sigma^{\nu}I(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{n},\nu)$$
$$\cancel{+\sigma_{\mathrm{s}}^{\nu}\int_{4\pi}g(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}')I(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{n}',\nu)\mathrm{d}\boldsymbol{n}'}$$

・・・（１）

（１）式を振動数で平均をとると。

$$\partial_t E_r^\nu + \nabla\cdot\boldsymbol{F}_r^\nu = \sigma_a^\nu\left(4\pi B - cE_r^\nu\right) \quad \cdots（２．１）$$

$$\partial_t \boldsymbol{F}_r^\nu + c^2\nabla\cdot\mathsf{P}_r^\nu = -\sigma^\nu c\boldsymbol{F}_r^\nu \quad \cdots（２．２）$$

E_r^ν ：放射のエネルギー密度

$\boldsymbol{F}_r^\nu$ ：放射のエネルギーフラックス

P_r^ν ：放射による圧力

このとき、

$$E_r^\nu = \frac{1}{c}\oint_{4\pi} I\left(\boldsymbol{x},\mathrm{t};\boldsymbol{n},\nu\right)\mathrm{d}\boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{F}_r^\nu = \oint_{4\pi} \boldsymbol{n}I\left(\boldsymbol{x},\mathrm{t};\boldsymbol{n},\nu\right)\mathrm{d}\boldsymbol{n} \quad \cdots（３）$$

$$\mathsf{P}_r^\nu = \frac{1}{c}\oint_{4\pi} \boldsymbol{nn}I\left(\boldsymbol{x},\mathrm{t};\boldsymbol{n},\nu\right)\mathrm{d}\boldsymbol{n}$$

を使った。

（２．１）、（２．２）式で、単一の波長のみを考えると、

$$\boxed{\begin{aligned}&\partial_{\mathrm{t}} E_{\mathrm{r}} + \nabla\cdot\boldsymbol{F}_{\mathrm{r}} = c\left(\sigma_{\mathrm{P}} B(T) - \sigma_{\mathrm{E}} E_{\mathrm{r}}\right)\\ &\partial_{\mathrm{t}} \boldsymbol{F}_{\mathrm{r}} + c^2\nabla\cdot\mathsf{P}_{\mathrm{r}} = -c\sigma_{\mathrm{F}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{r}}\end{aligned}} \quad \cdots（４）$$

これを数値計算で解いていく。

ここで、$\sigma_{\mathrm{P}}, \sigma_{\mathrm{E}}, \sigma_{\mathrm{F}}$ は、それぞれ吸収係数である。

また、$\underline{\mathsf{P}_{\mathrm{r}} = \mathbf{D} E_{\mathrm{r}}}$

$$\mathbf{D} = \frac{1-\chi}{2}\mathsf{I} + \frac{3\chi - 1}{2}\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n} \quad : \text{ Eddington tensor}$$

$$\chi = \frac{3+4\|\boldsymbol{f}\|^2}{5+2\sqrt{4-3\|\boldsymbol{f}\|^2}} \quad : \text{Eddington factor} \qquad \boldsymbol{f} = \frac{\boldsymbol{F}_{\mathrm{r}}}{cE_{\mathrm{r}}}$$

- opacity　κ

$$\kappa = \frac{n\sigma}{\rho}$$（ n :数密度、 ρ:質量密度 ）

- optical depth（光学的深さ）　τ

　系のサイズをRとしたとき、

$$\tau = \frac{\mathrm{R}}{l} \equiv n\sigma \mathrm{R}$$（ l :平均自由行程 ）

数値計算方法

ｃ＝１の単位系を使う。

HLL法（1次元の場合）

（４）式を、

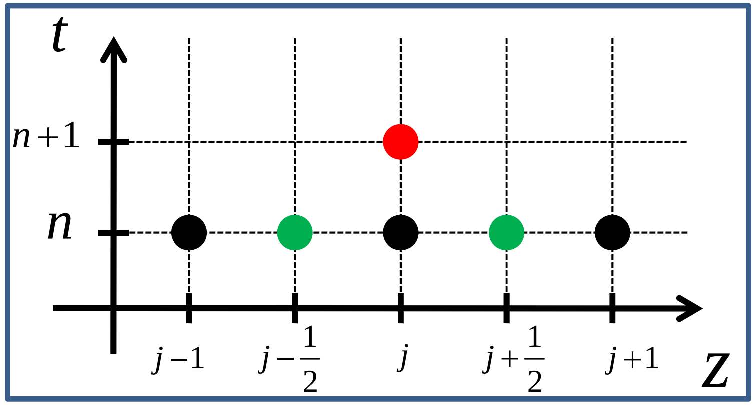
$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{S}} \qquad \cdots(5)$$

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}E_{\mathrm{r}}\\F_{\mathrm{r}}\end{pmatrix},\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}F_{\mathrm{r}}\\P_{\mathrm{r}}\end{pmatrix},\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}\sigma_{\mathrm{P}}B(T)-\sigma_{E}E_{\mathrm{r}}\\-\sigma_{F}F_{\mathrm{r}}\end{pmatrix}$$

と書き換える。

ここで、

$$\boldsymbol{U}_j^n \equiv \boldsymbol{U}\left(z = j\Delta z, t = n\Delta t\right)$$



とし、(5)式を $\int_{t=n\Delta t}^{t=(n+1)\Delta t}\int_{z=\left(j-\frac{1}{2}\right)\Delta z}^{z=\left(j+\frac{1}{2}\right)\Delta z} dtdz$ で積分すると、

$$\boxed{\boldsymbol{U}_j^{n+1} = \boldsymbol{U}_j^n - \left(\boldsymbol{F}_{j+\frac{1}{2}}^n - \boldsymbol{F}_{j-\frac{1}{2}}^n\right)\frac{\Delta t}{\Delta z} + \boldsymbol{S}_j^n \Delta t}$$

このとき、

$$\boxed{\boldsymbol{F}_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{\lambda_{\mathrm{R}}\boldsymbol{F}_j^n - \lambda_{\mathrm{L}}\boldsymbol{F}_{j+1}^n + \lambda_{\mathrm{R}}\lambda_{\mathrm{L}}\left(\boldsymbol{U}_{j+1}^n - \boldsymbol{U}_j^n\right)}{\lambda_{\mathrm{R}} - \lambda_{\mathrm{L}}}}$$

$\lambda_R = +c, \lambda_L = -c$ とした。

HLL法（2次元の場合）

（4）式を、

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{S}} \quad \cdots(6)$$

と書き換える。

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix} E_{\mathrm{r}} \\ \boldsymbol{F}_{\mathrm{r}} \end{pmatrix}, \boldsymbol{F}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{F}_{\mathrm{r}} \\ \mathbf{P}_{\mathrm{r}} \end{pmatrix}, \boldsymbol{S}=\begin{pmatrix} \sigma_{\mathrm{P}} B(T)-\sigma_{\mathrm{E}} E_{\mathrm{r}} \\ -\sigma_{\mathrm{F}} \boldsymbol{F}_{\mathrm{r}} \end{pmatrix}$$

ここで、

$$\boldsymbol{U}_{j,i}^{n} \equiv \boldsymbol{U}(z=j\Delta z, x=i\Delta x, t=n\Delta t)$$

（6）式を、$\int_{t=n\Delta t}^{t=(n+1)\Delta t}\int_{z=\left(j-\frac{1}{2}\right)\Delta z}^{z=\left(j+\frac{1}{2}\right)\Delta z}\int_{x=\left(i-\frac{1}{2}\right)\Delta x}^{x=\left(i+\frac{1}{2}\right)\Delta x} dt dz dx$ で積分すると、

このとき、

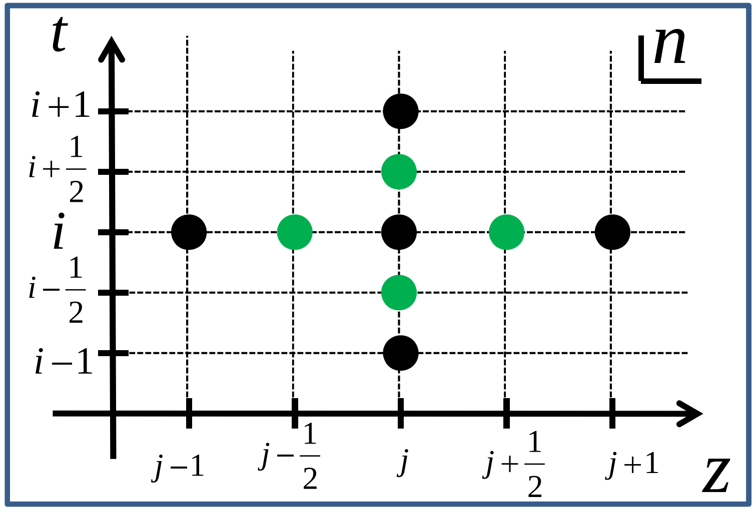
$$\boldsymbol{U}_{j,i}^{n+1}=\boldsymbol{U}_{j,i}^{n}-\left(\boldsymbol{F}_{j+\frac{1}{2},i}^{n}-\boldsymbol{F}_{j-\frac{1}{2},i}^{n}\right)\frac{\Delta t}{\Delta z}-\left(\boldsymbol{F}_{j,i+\frac{1}{2}}^{n}-\boldsymbol{F}_{j,i-\frac{1}{2}}^{n}\right)\frac{\Delta t}{\Delta x}+\boldsymbol{S}_{j,i}^{n}\Delta t$$

とした。

$$\boldsymbol{F}_{j+\frac{1}{2},i}^{n}=\frac{\lambda_{\mathrm{R}}\boldsymbol{F}_{j,i}^{n}-\lambda_{\mathrm{L}}\boldsymbol{F}_{j+1,i}^{n}+\lambda_{\mathrm{R}}\lambda_{\mathrm{L}}\left(\boldsymbol{U}_{j+1,i}^{n}-\boldsymbol{U}_{j,i}^{n}\right)}{\lambda_{\mathrm{R}}-\lambda_{\mathrm{L}}}$$

$\boldsymbol{F}_{j,i+\frac{1}{2}}^{n}$ についても同様。

$\lambda_R=+c,\lambda_L=-c$ とした。



1次元

モデルと境界条件の設定

空間メッシュ：100

時間メッシュ：1000

$$E(-z)=E(z)$$
$$F(-z)=-F(z)$$

初期値

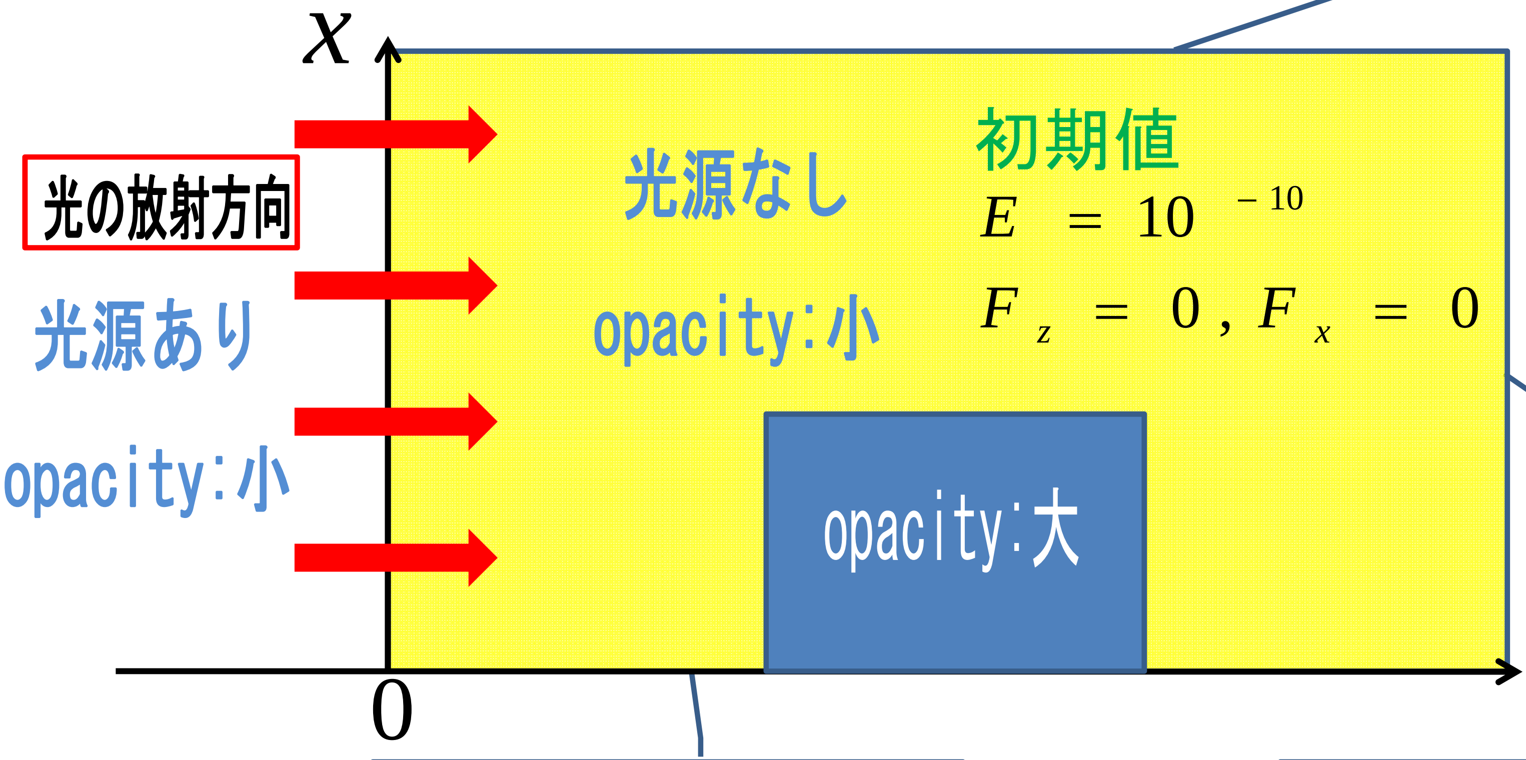
$$E(z,0)=10^{-10}$$
$$F(z,0)=0$$

$$E(z)=E(z-1)\cdot\exp(-\sigma\cdot dz)$$
$$F(z)=E(z)$$

2次元

モデルと境界条件の設定

$$E(z,x,t)=E(z,x-1,t)$$
$$F_z(z,x,t)=F_z(z,x-1,t)$$
$$F_x(z,x,t)=-F_x(z,x-1,t)$$



初期値

$$E=10^{-10}$$
$$F_z=0,\ F_x=0$$

空間メッシュ

30×30

時間メッシュ

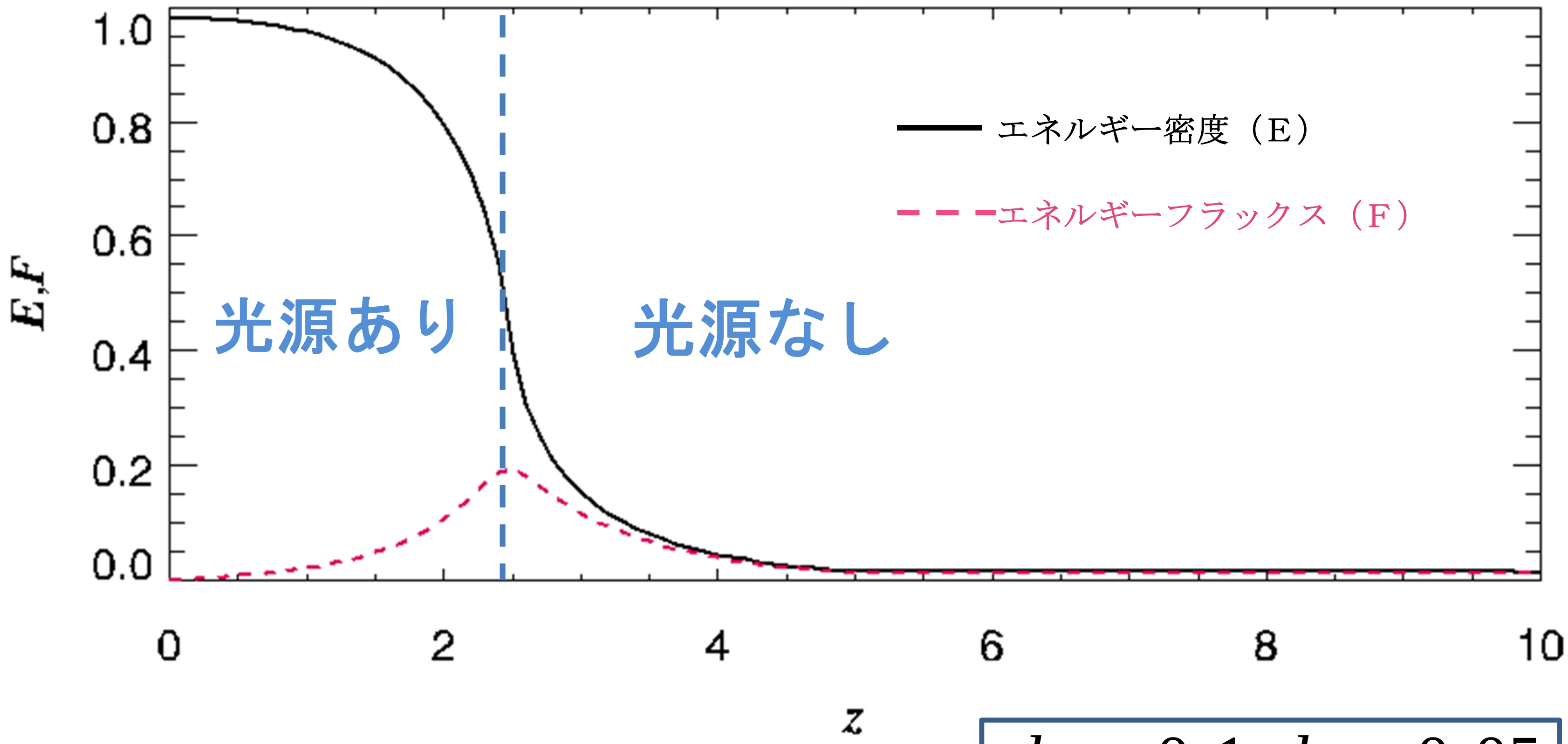
70

$$E(z,-1,t)=E(z,0,t)$$
$$F_z(z,-1,t)=F_z(z,0,t)$$
$$F_x(z,-1,t)=-F_x(z,0,t)$$

$$E(z,x,t)=E(z-1,x,t)$$
$$F_z(z,x,t)=F_z(z-1,x,t)$$
$$F_x(z,x,t)=F_x(z-1,x,t)$$

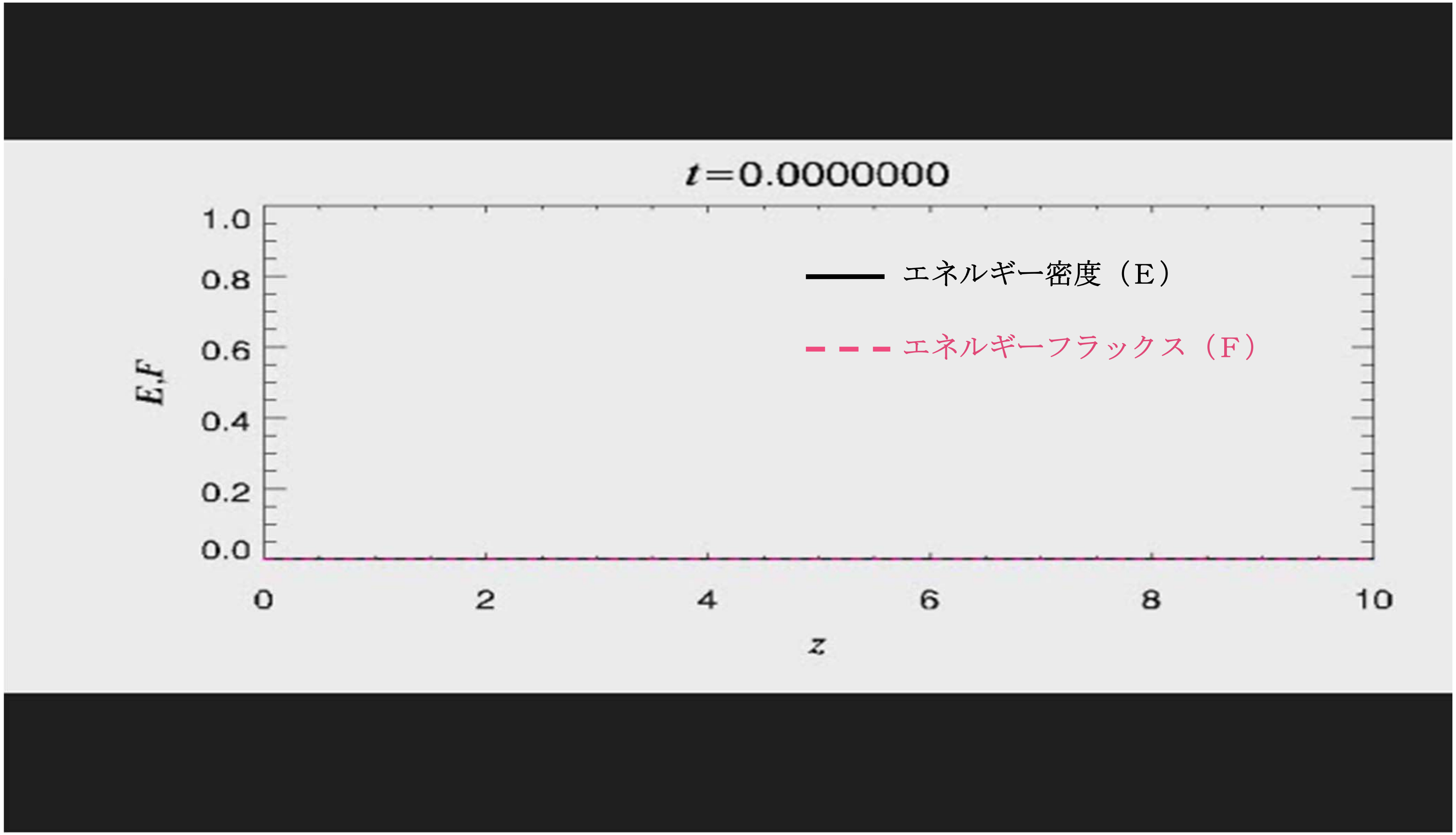
結果

- 1次元　　エネルギー（E）、エネルギーフラックス（F）

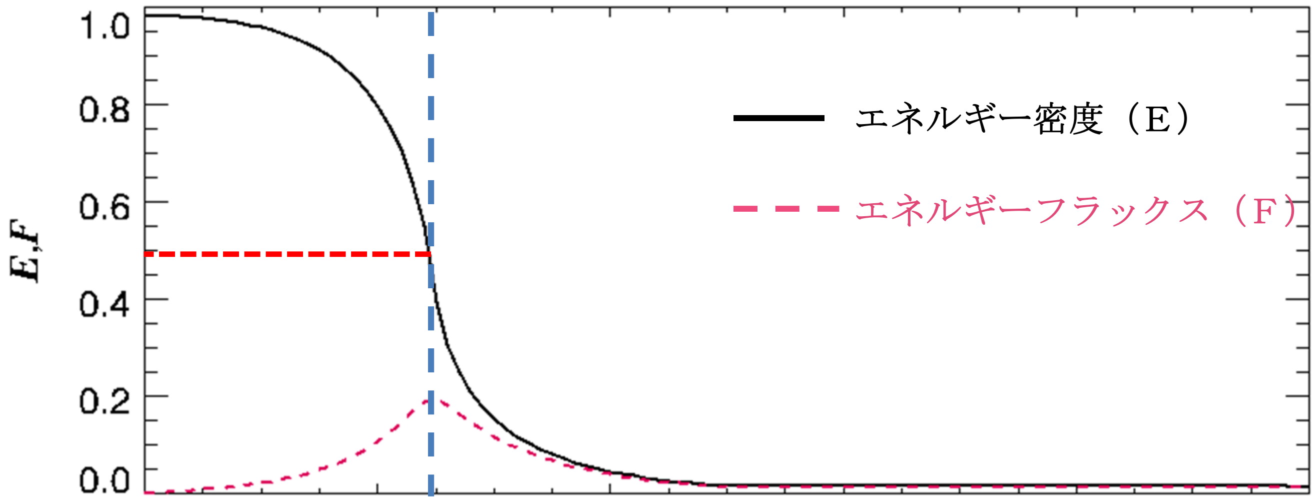


$$dz = 0.1, dt = 0.05$$

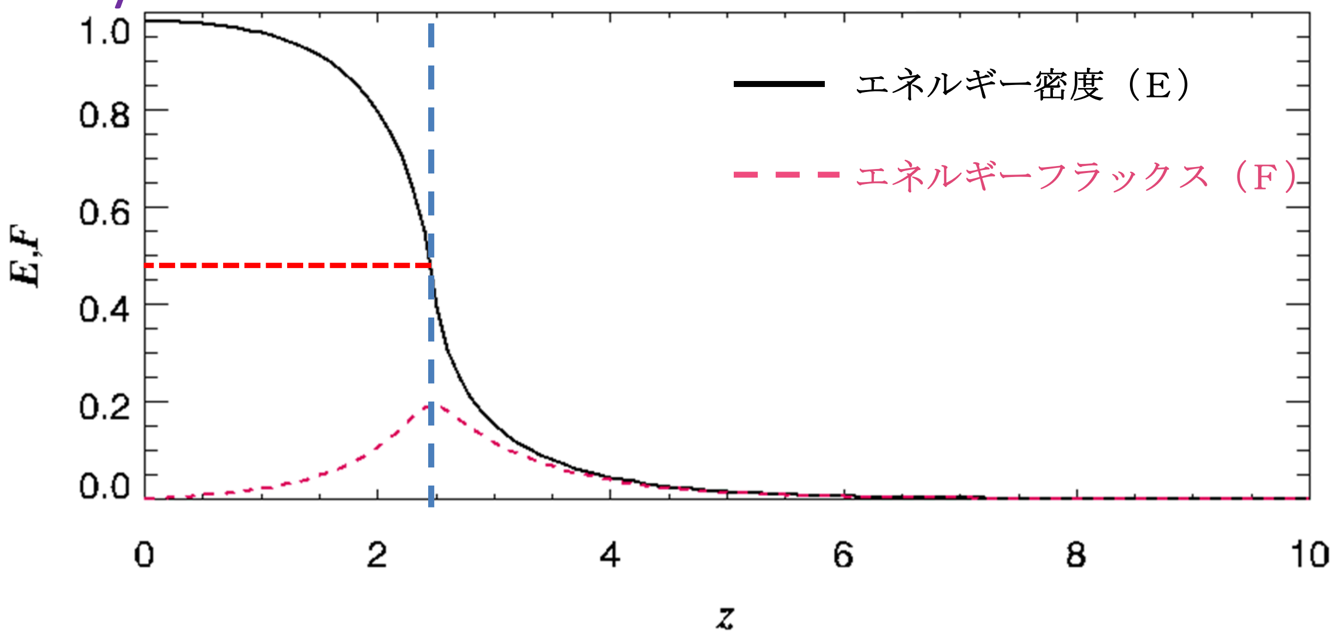
放射エネルギー密度（E）とエネルギーフラックス（F）のグラフ



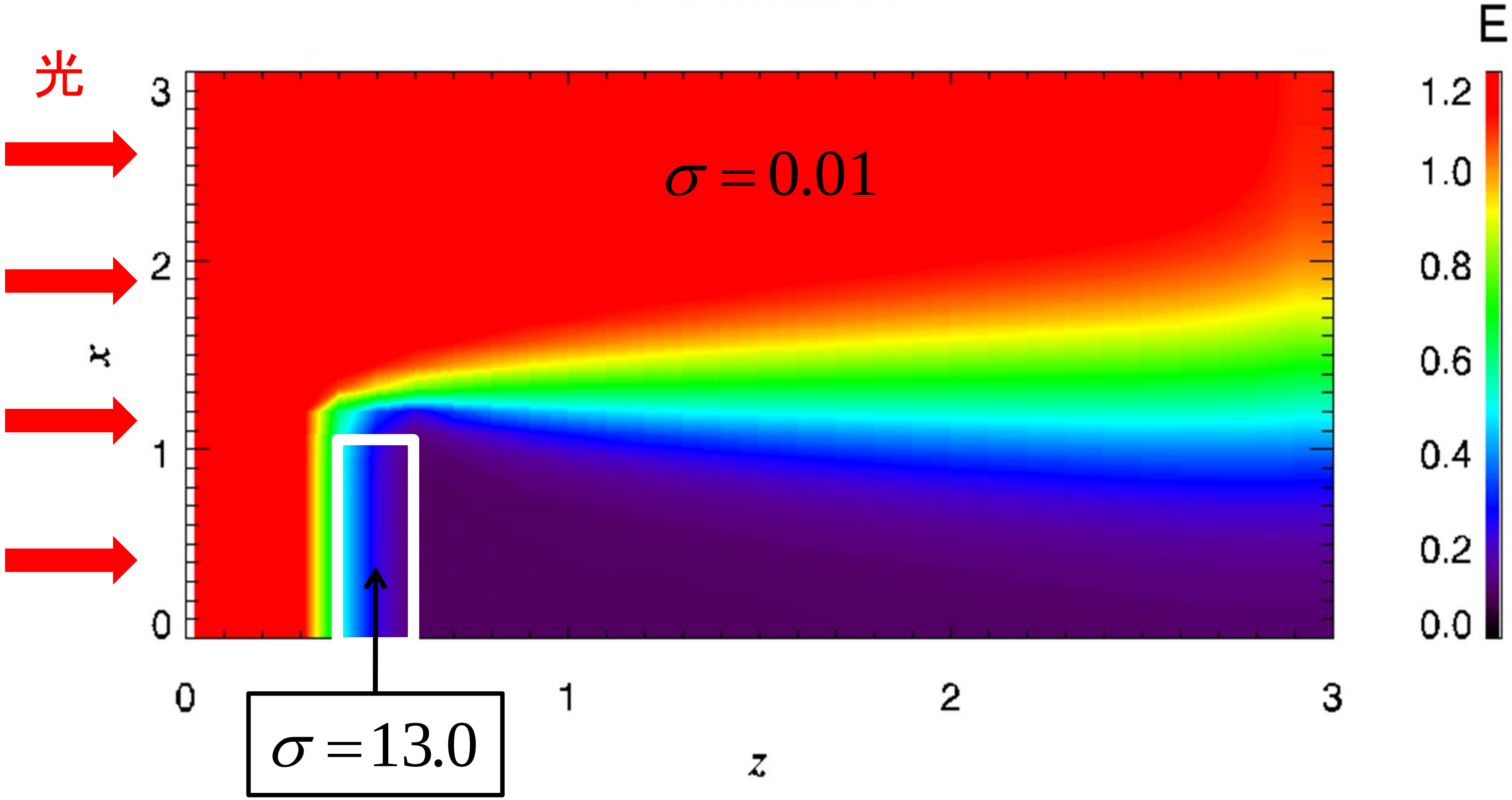
- opacity = 0.01



- opacity = 1.0

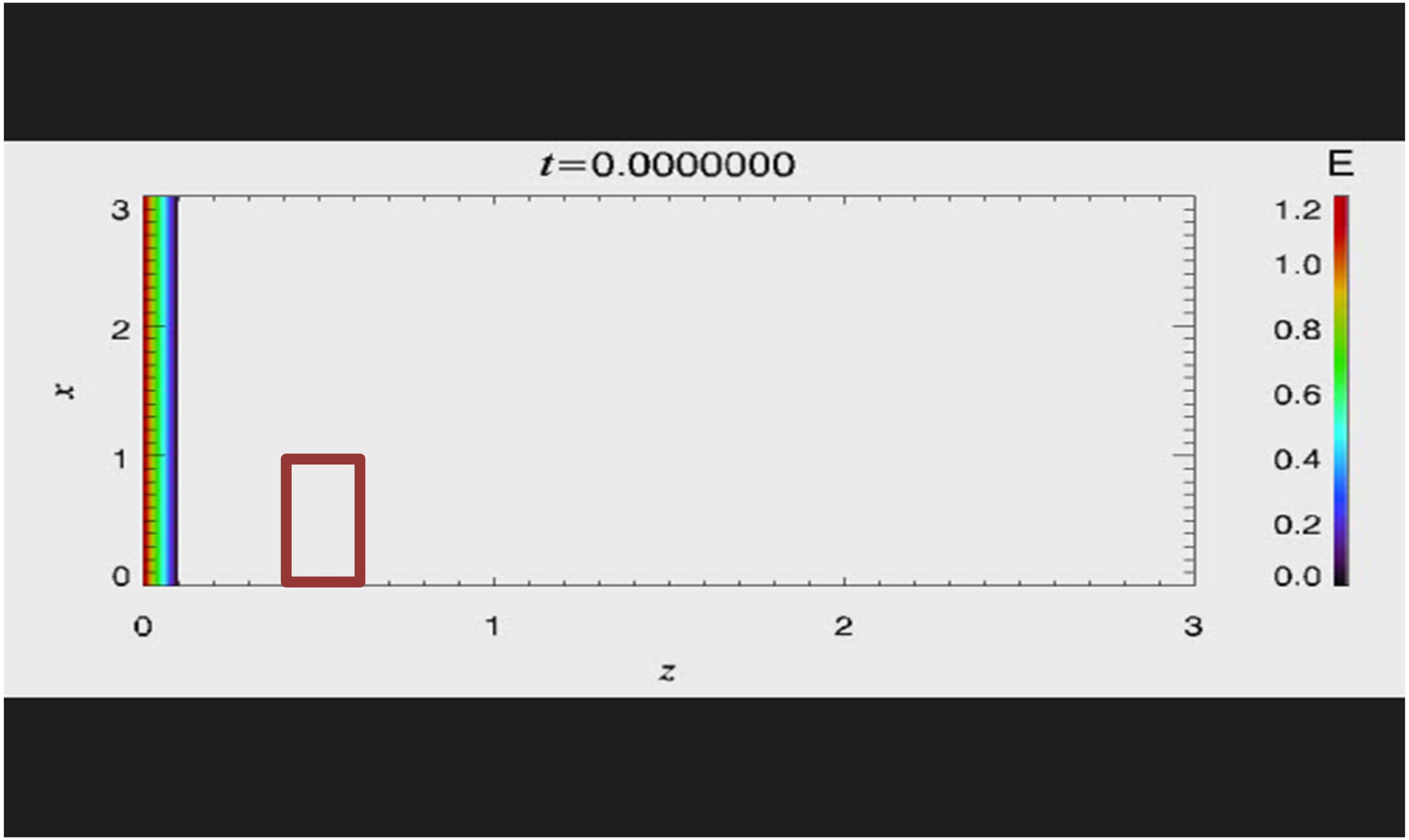


- 2次元　　　エネルギー密度（E）



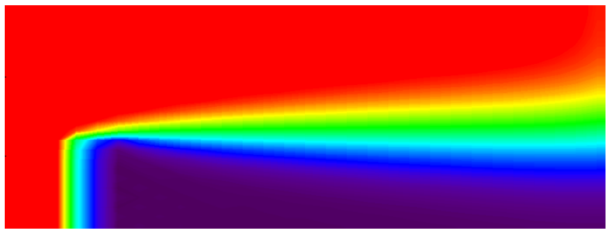
$dz = 0.1, dx = 0.12, dt = 0.05$

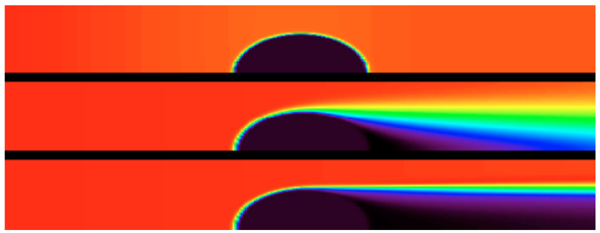
shadow test



考察

- 1次元でのopacityを変えた計算結果より、opacityの小さいほうが、より遠くまで光が伝わることが確認できた。
- 光源のある領域とない領域の境界の位置でエネルギー密度が最大の0.5倍になっていたのは、左側からの光の伝播だけを考えたからであると考えられる。
- 2次元計算でのshadow testの結果から、光の伝播の仕方が計算できた。計算結果と論文の図を比較すると、真ん中や下のパネルに似た図ができている。
- 物体内部への光の浸みこみや、影のでき方は、数値計算の精度も関係しているが、温度の変化や、密度の変化、opacityの変化を加えることで改善できる可能性がある。





M.Gonzalez et al,2006

まとめ

- 境界条件の決め方などの数値計算の仕方で、今後に活かせる技術を勉強することができた。
- 拡散方程式を解いたとき、論文のようになるか見なければいけなかったので、これは今後の課題とする。
- 今回は定常流での結果まで研究できたので、定常流でないときの振る舞いについて研究を進めることができると良いと思われる。

参考文献

- HERACLES:a three-dimensional radiation hydrodynamics code,M.Gonzalez et al,2006
- 恒星　シリーズ現代の天文学　第7巻,野本憲一・定金晃三・佐藤勝彦,2009