# 衝撃波面における音波の反射および透過

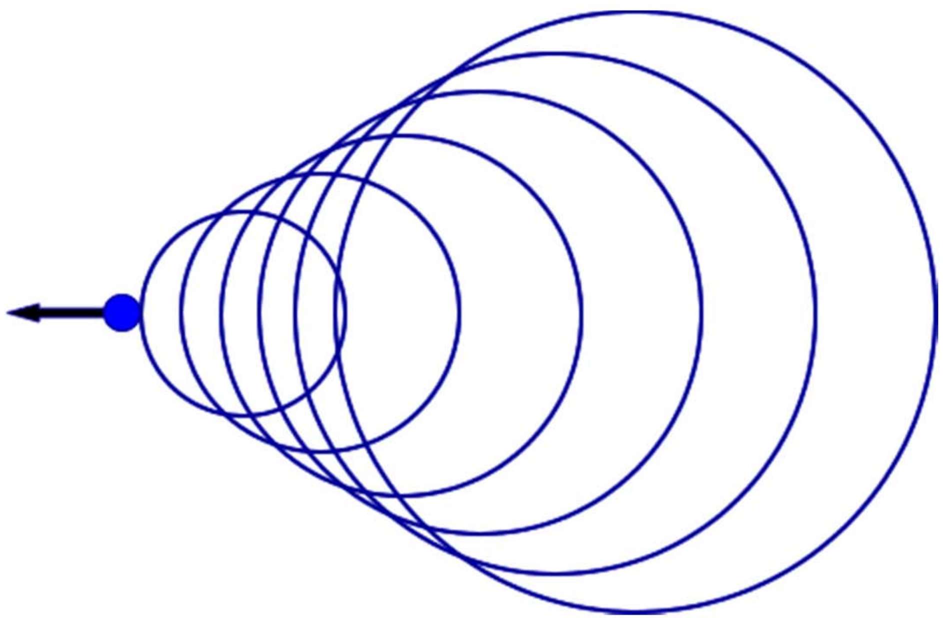
宇宙物理学研究室

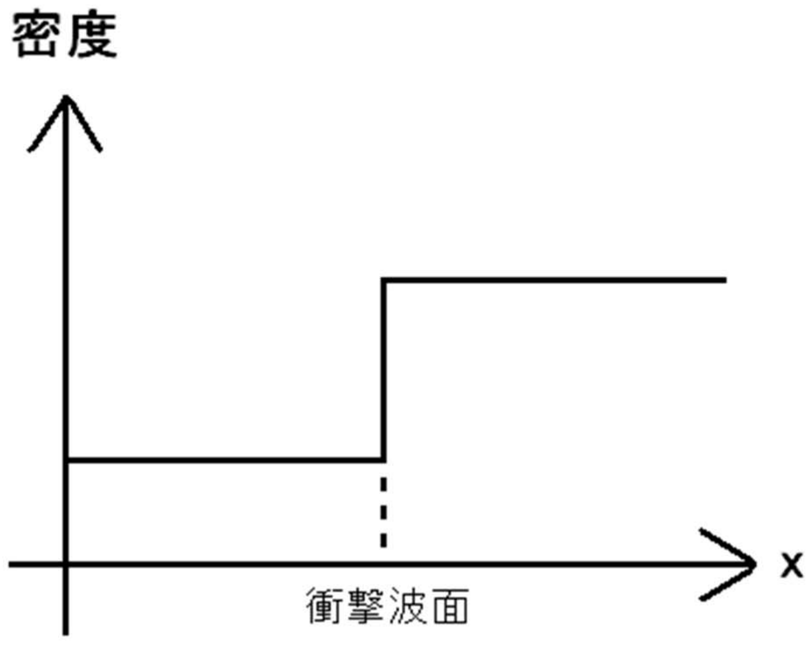
⇉ *aplab security measures*

黒川拓真

# イントロダクション～衝撃波とは～

流体中を物体が超音速で運動すると発生する
物理量が不連続に変化する面





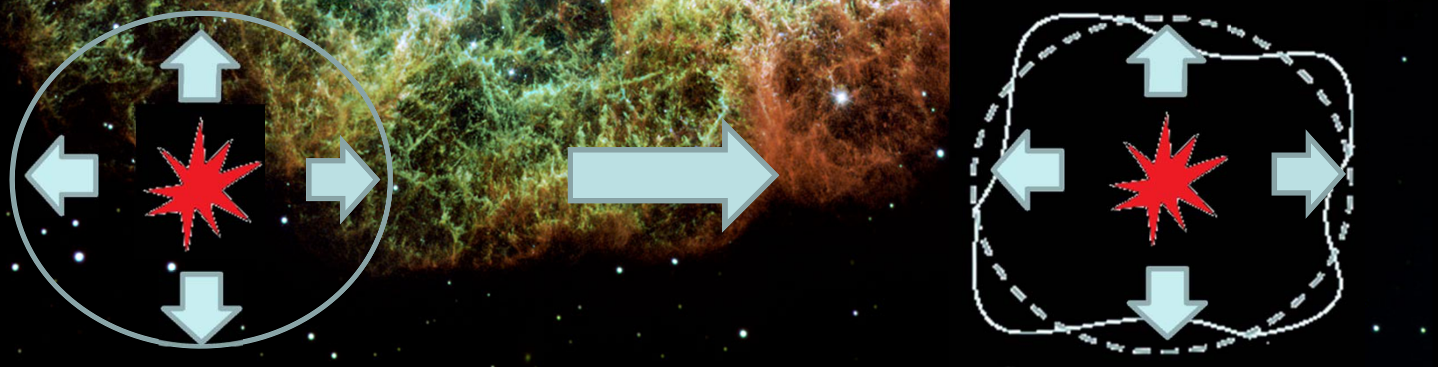
# 研究を行う動機

超新星爆発をシミュレーションで再現するには衝撃波を正しく解く必要がある

問題点

- 衝撃波のシミュレーションは誤差が大きい
- 衝撃波面のゆがみによって反射・透過時に音波が増幅される（理論的予想）

→正しく解けているのか？

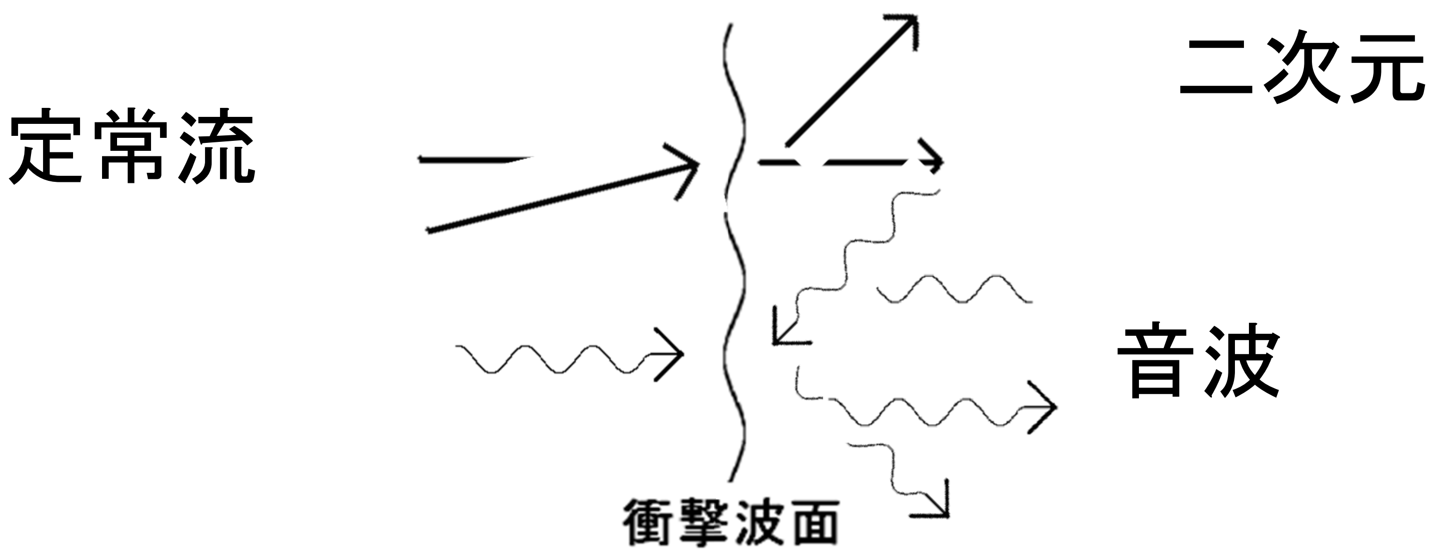


# 本研究の状況設定

定常流　＋　音波（1次の微小量）

以下を検証する

- 解析解をどの程度再現できるのか
- 反射・透過時の音波の振幅の変化はどうか



# 研究方法

一次元計算→二次元計算

１．解析解を求める

２．数値シミュレーション

・計算コードはCANS（※）を用いる

・計算法

修正Lax-Wendroff法　+　人工粘性

roe法

３．計算結果を解析解と比較

※宇宙シミュレーション統合ソフトウェア（Coordinated Astronomical Numerical Software）

http://www-space.eps.s.u-tokyo.ac.jp/~yokoyama/etc/cans/

# 流体方程式

$\rho$ : 密度　　$\mathbf{v}$ : 速度　　$P$ : 圧力

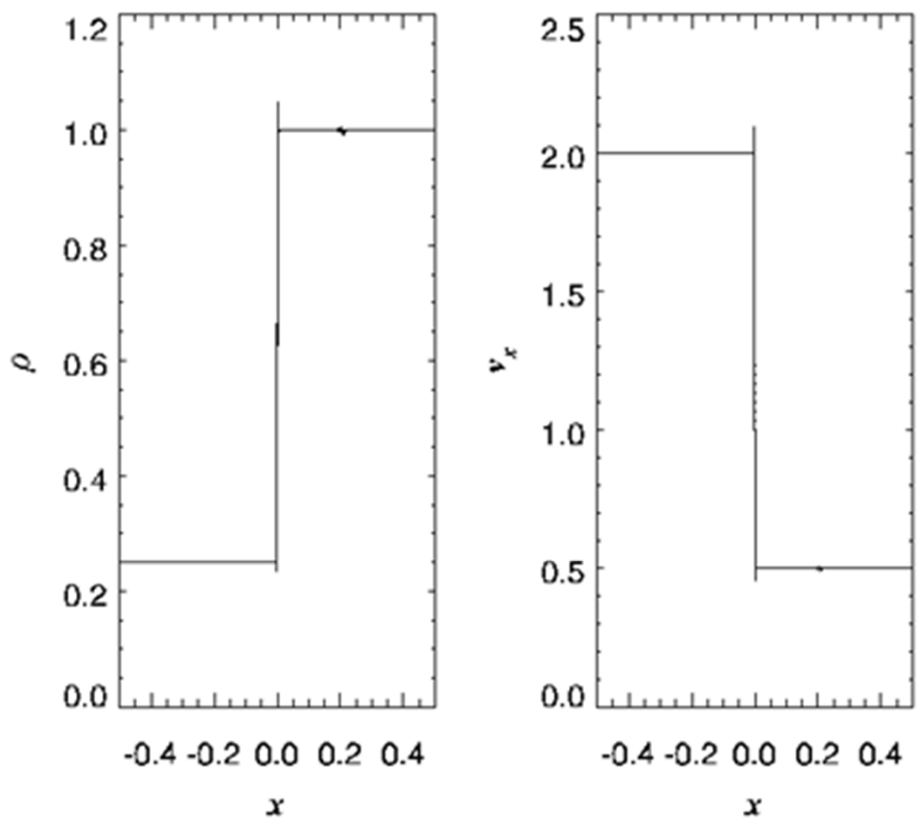
連続の式
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) = 0$$

運動量保存則
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_x v_y) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x v_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y^2 + p) = 0$$

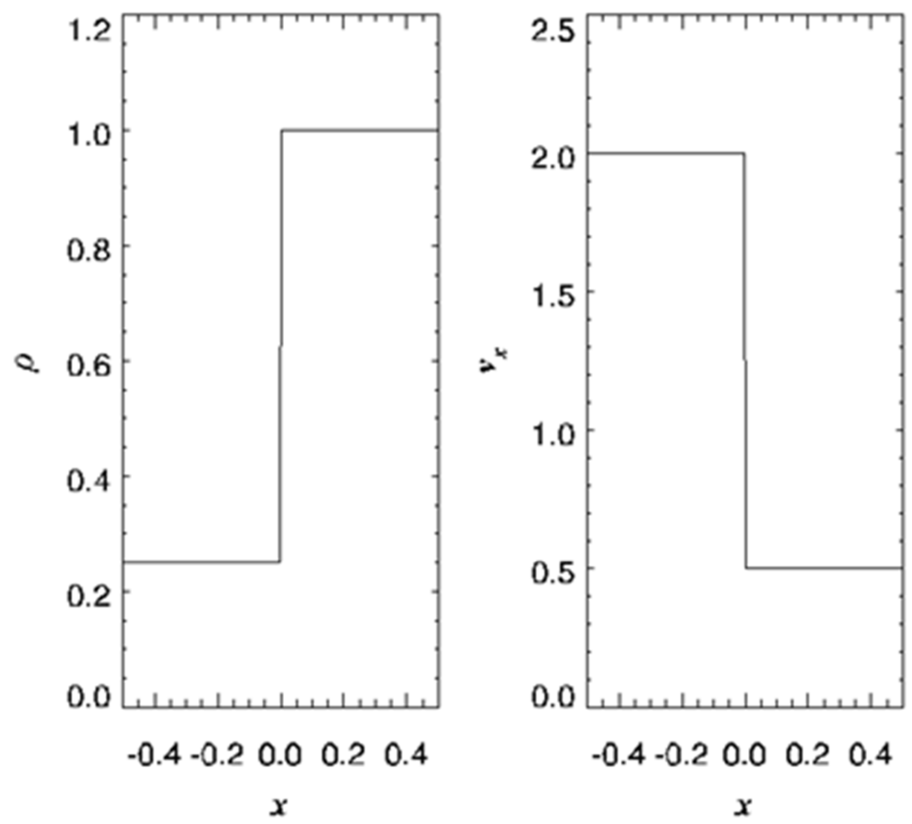
等温仮定
$$P = C_s^2 \rho \qquad (\text{音速：} C_s = \text{一定})$$

# 定常解

$$\rho_1 = 0.25 \quad v_1 = 2.0 \qquad \rho_2 = 1.0 \quad v_2 = 0.5$$




Lax-Wendroff法




roe法

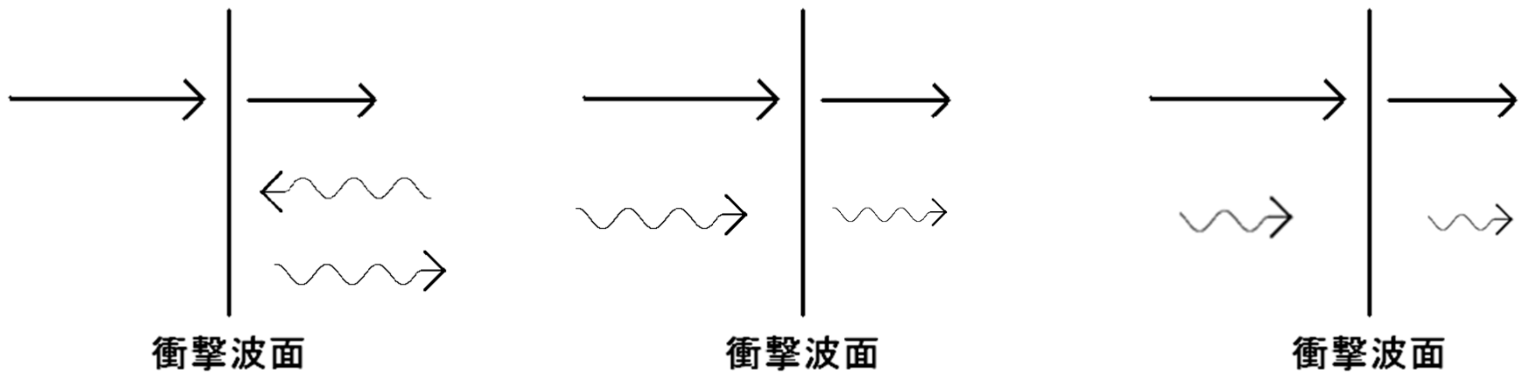
# 平面波解

$$\rho(x,t) = \rho_0 + \delta\rho \exp(ikx - \omega t)$$

$$v(x,t) = v_0 + \delta v_x \exp(ikx - \omega t)$$

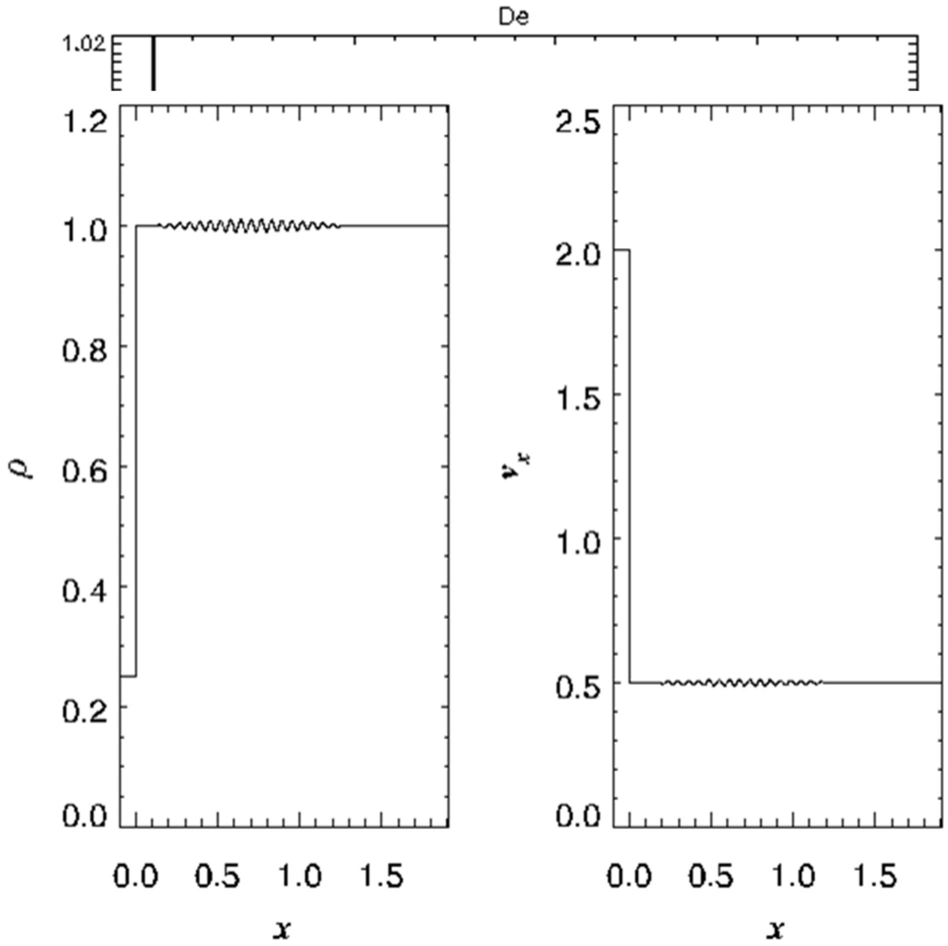
$$P(x,t) = C_s^2 \rho(x,t)$$

3つの状況を考える

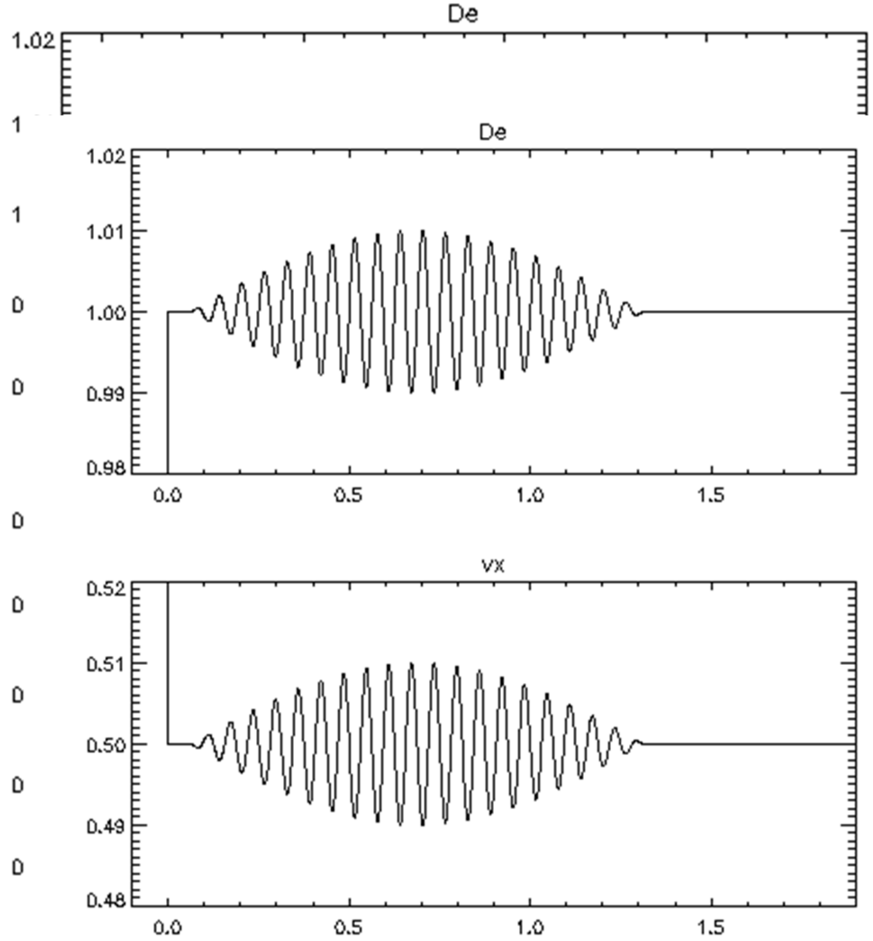


# 一次元反射

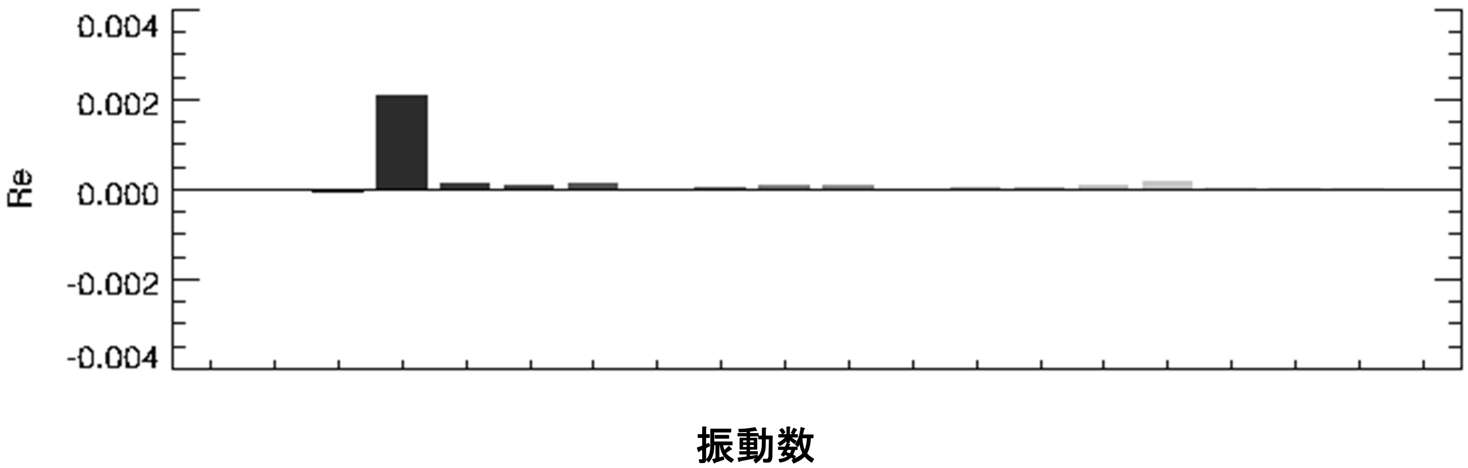
## Lax-Wendroff法



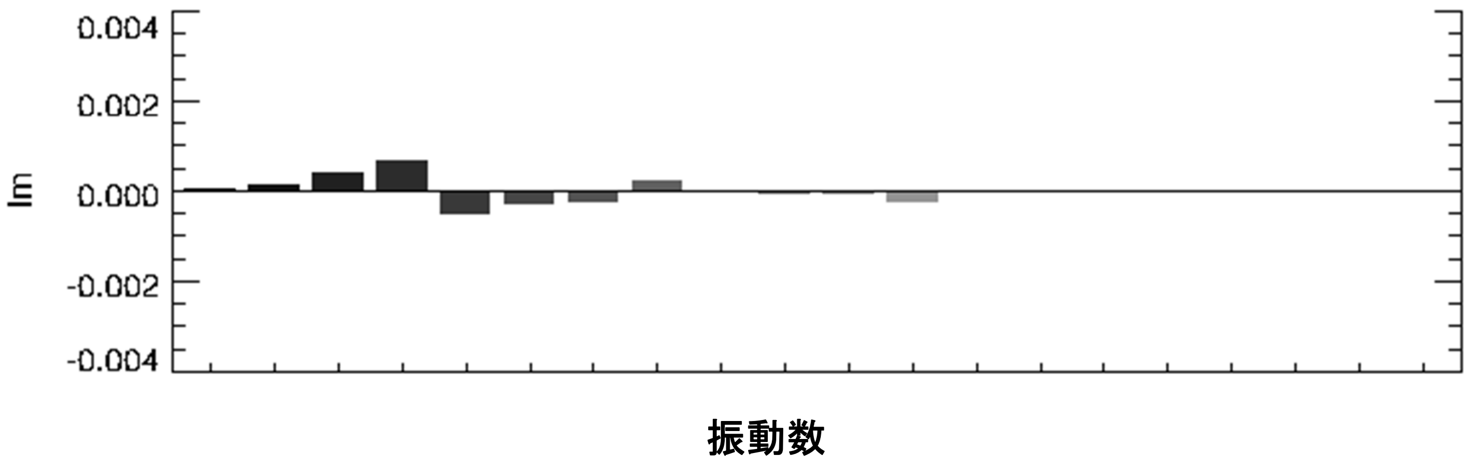

## roe法



# フーリエ変換

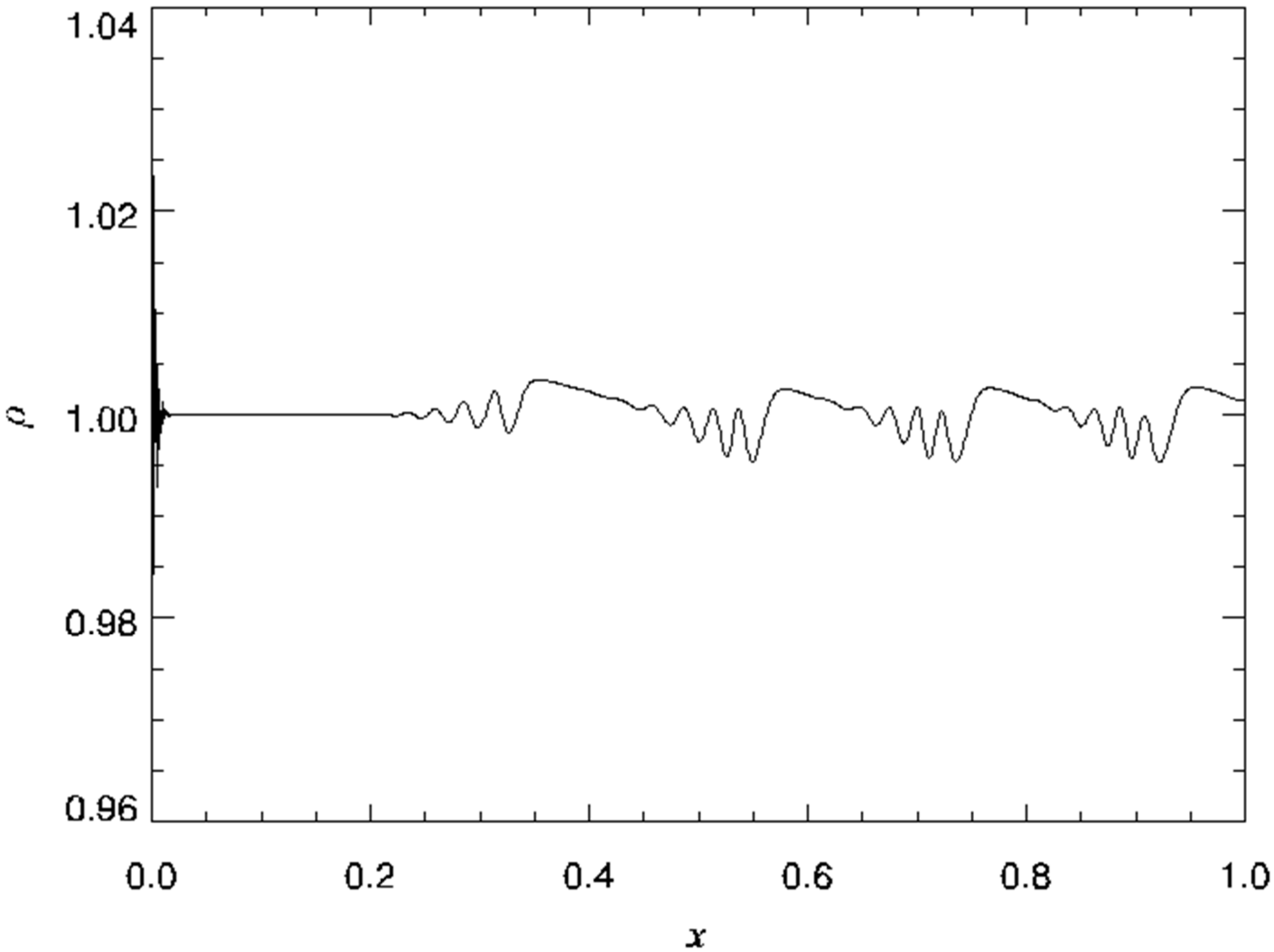


0.004
0.002
Re
0.000
-0.002
-0.004
振動数

0.004
0.002
Im
0.000
-0.002
-0.004
振動数

# 一次元透過



# 二次元流体方程式

$\rho$ : 密度　　$\mathbf{v}$ : 速度　　$P$ : 圧力

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y)=0$$

運動量保存則

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x^2+p)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_x v_y)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_y)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x v_y)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y^2+p)=0$$

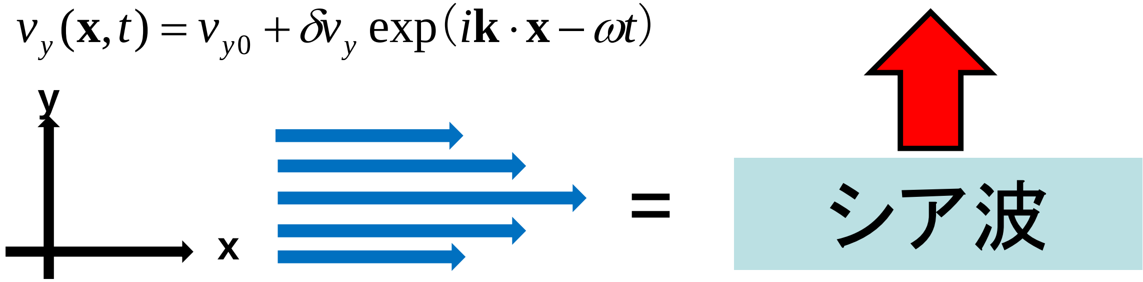
等温仮定　$P=C_s^2\rho$　　(音速：$C_s$ =一定)

平面波解

$$\rho(\mathbf{x},t)=\rho_0+\delta\rho\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)$$

$$v_x(\mathbf{x},t)=v_{x0}+\delta v_x\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)\quad+\quad\delta v_s\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)$$

$$v_y(\mathbf{x},t)=v_{y0}+\delta v_y\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)$$

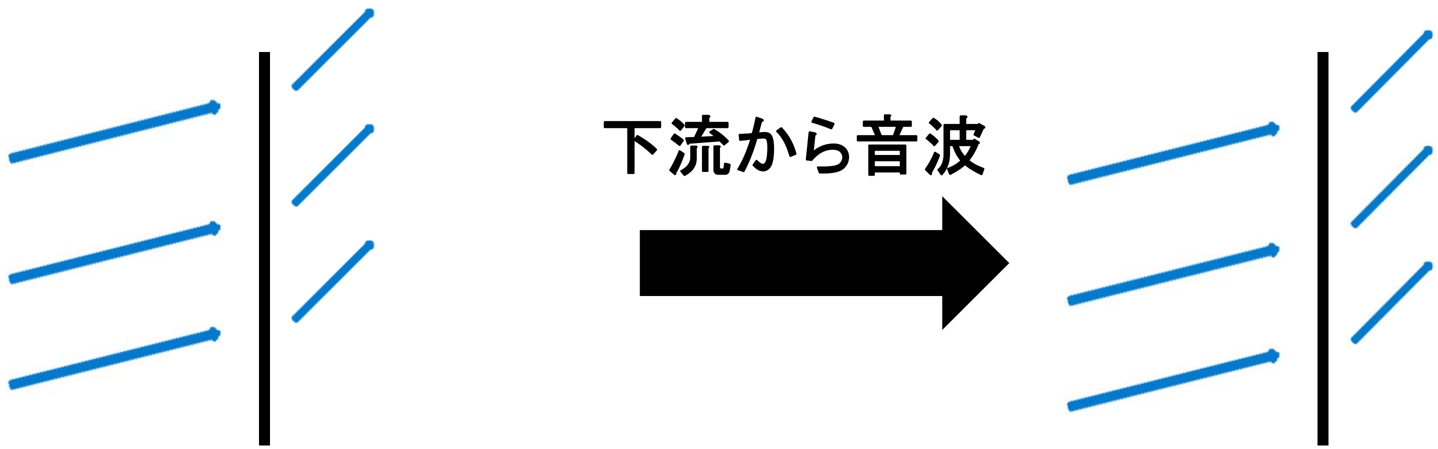


# 音波の増幅

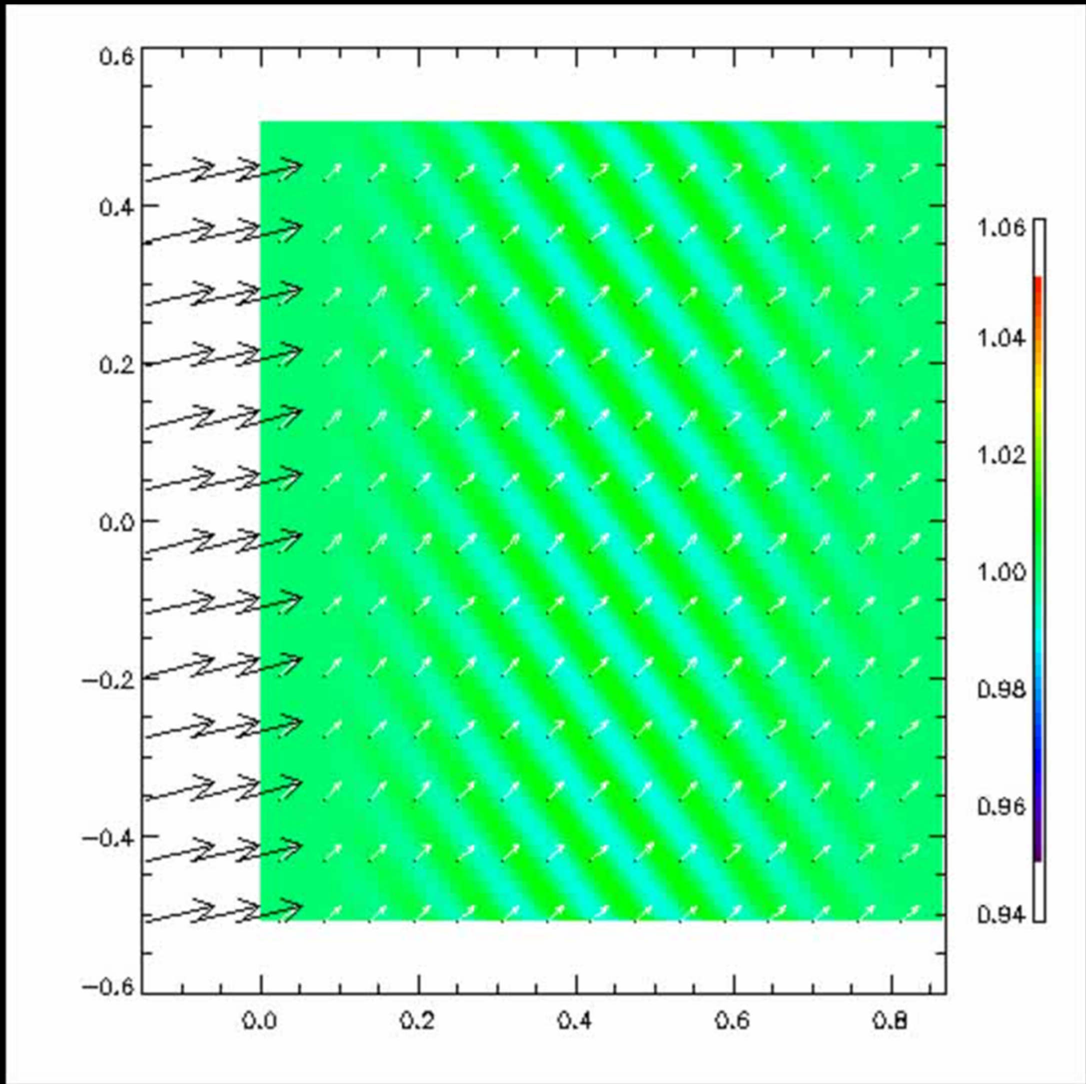
解析解

$$\frac{\delta\rho_{ref}}{\delta\rho_{in}} = -1.2 \qquad \frac{\delta v_{xref}}{\delta v_{xin}} = 0.8$$

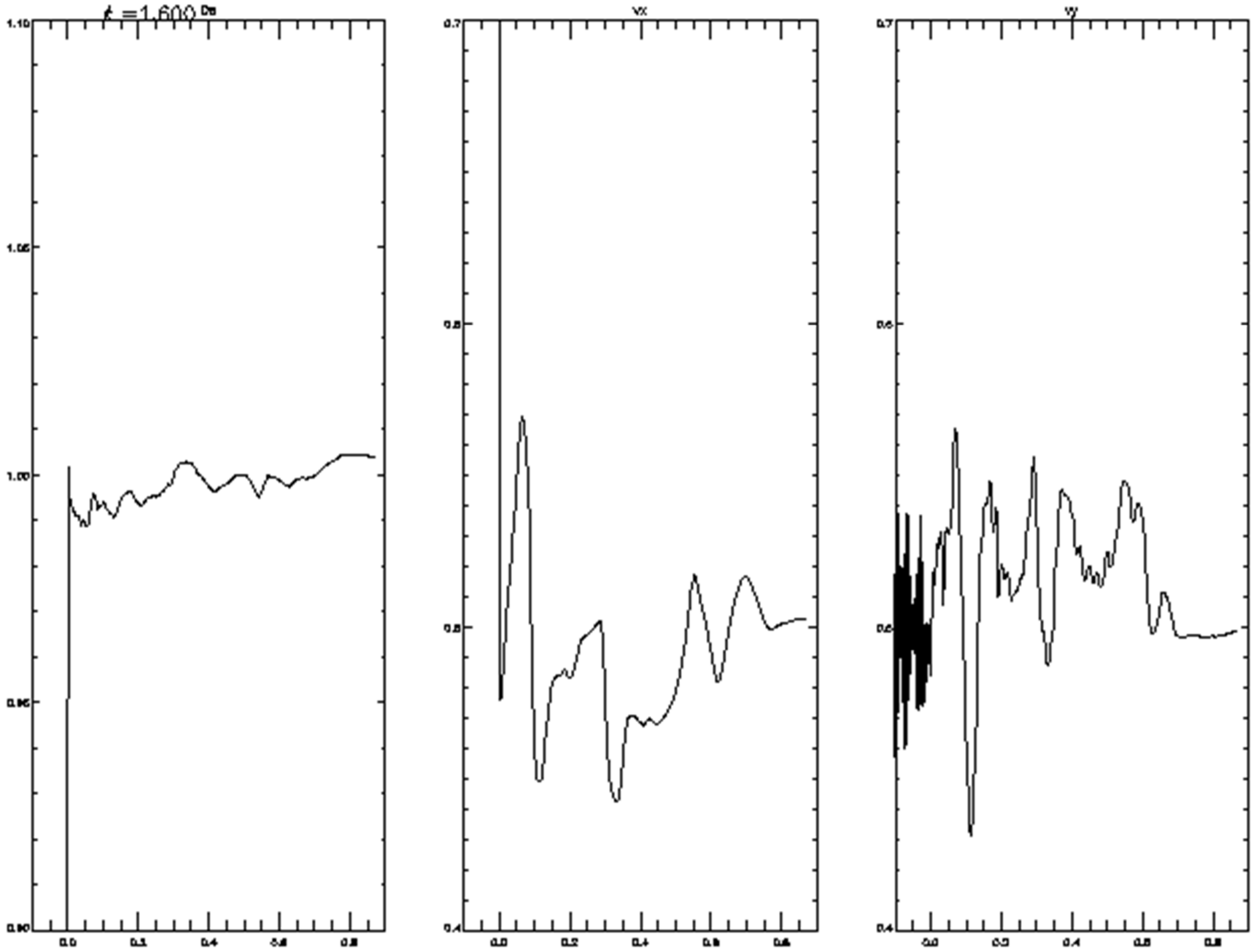
$$\frac{\delta v_{yref}}{\delta v_{yin}} = 0.6 \qquad \frac{\delta v_{sref}}{\delta v_{xin}} = 0.8$$



# 二次元シミュレーション結果



# 一次元表示



# 結論

- 衝撃波のシミュレーションは1%程度の誤差で解ける。ただし、振幅だけは誤差を生じやすい
- 衝撃波問題にはroe法が有効である
- １次元では反射による音波の増幅は発生しない
- 2次元では反射時に音波が増幅される
- 今回使った計算コードでは2次元シミュレーションでは振幅を正しく求められなかった

end

# 定常解

$$\rho_2 = M_1^2 \rho_1 \qquad (M_1 \equiv \frac{v_1}{C_s})$$

$$M_2 = \frac{1}{M_1} \qquad (M_2 \equiv \frac{v_2}{C_s})$$

# 波動方程式（平面波解追加）

$\rho$ : 密度　　$v$ : 速度　　$P$ : 圧力

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = C_s^2 \nabla^2 \rho$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = C_s^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = C_s^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = C_s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

# 解析解　反射

領域１

$$\rho(x,t)=\rho_1$$

$$v(x,t)=v_1$$

領域２

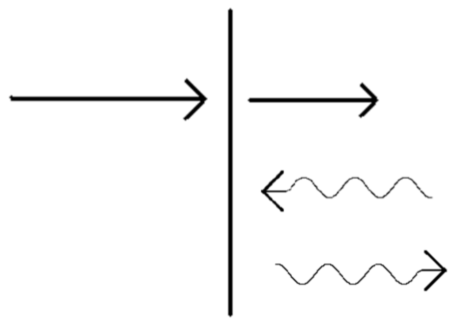
$$\rho(x,t)=\rho_2+\delta\rho_{in}\exp(-ik_{in}x-i\omega t)+\delta\rho_{ref}\exp(ik_{ref}x-i\omega t)$$

$$v(x,t)=v_2+\delta v_{in}\exp(-ik_{in}x-i\omega t)+\delta v_{ref}\exp(ik_{ref}x-i\omega t)$$

$$P(x,t)=C_s^2\rho(x,t)$$

$$\frac{\delta\rho_{ref}}{\delta\rho_{in}}=-\left(\frac{1-M_2}{1+M_2}\right)^2 \qquad \frac{k_{ref}}{k_{in}}=\frac{1-M_2}{1+M_2}$$

$$\frac{\delta v_{ref}}{\delta v_{in}}=\left(\frac{1-M_2}{1+M_2}\right)^2$$



衝撃波面

# 解析解　透過1

領域１

$$\rho(x,t)=\rho_1$$

$$v(x,t)=v_1$$

領域２

$$\rho(x,t)=\rho_2+\delta\rho_{in}\exp(-ik_{in}x-i\omega t)+\delta\rho_{ref}\exp(ik_{ref}x-i\omega t)$$

$$v(x,t)=v_2+\delta v_{in}\exp(-ik_{in}x-i\omega t)+\delta v_{ref}\exp(ik_{ref}x-i\omega t)$$

$$P(x,t)=C_s^2\rho(x,t)$$

$$\frac{\delta\rho_{ref}}{\delta\rho_{in}}=-\left(\frac{1-M_2}{1-M_2}\right)^2 \qquad \frac{k_{ref}}{k_{in}}=\frac{1-M_2}{1+M_2}$$

$$\frac{\delta v_{ref}}{\delta v_{in}}=\left(\frac{1-M_2}{1-M_2}\right)^2$$

# 解析解　透過2

領域１

$$\rho(x,t)=\rho_1+\delta\rho_1\exp(-ik\_x-i\omega t)$$

$$v(x,t)=v_1+\delta v_1\exp(-ik\_x-i\omega t)$$

領域２

$$\rho(x,t)=\rho_2+\delta\rho_2\exp(ik_2x-i\omega t)$$

$$v(x,t)=v_2+\delta v_2\exp(ik_2x-i\omega t)$$

$$P(x,t)=C_s^2\rho(x,t)$$

$$\frac{\delta\rho_2}{\delta\rho_1}=-\frac{M_1^2(M_1-1)(3M_1-1)}{(M_1+1)^2} \qquad v_1-C_s=\frac{\omega}{k\_} \qquad C_s+v_2=\frac{\omega}{k_2}$$

$$\frac{\delta v_2}{\delta v_1}=\frac{(3M_1+1)(M_1-1)}{(2M_1-1)(M_1+1)^2}$$