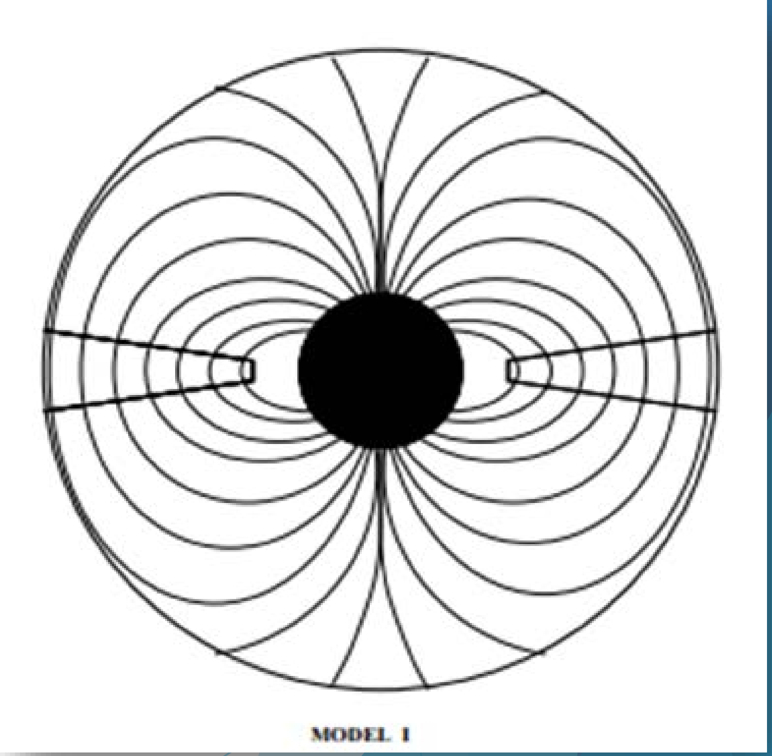
強磁場中心天体と周辺プラズマの相互作用シミュレーション

2018/2/22

宇宙物理学研究室　河村浩良

目的

- 数値計算により、中心天体がダイポール磁場を持つ場合の相互作用の様子をシミュレーション。
- ダイポール磁場のような強い背景場が存在しても、安定して数値計算できる工夫が必要。
- 今回は、その数値コードの開発まで。



MILLER ＆ STONE (1997)

ダイポール磁場とは？

- 地磁気もダイポール磁場。
- 磁場の式は以下の様になる。

$$\boldsymbol{B_0} = -\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\boldsymbol{m}}{r^3} - \frac{3(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})}{r^5}\boldsymbol{r}\right\}$$

$\boldsymbol{m}$:磁気双極子モーメント

- 次のような特徴を持つ。

$$\nabla \times \boldsymbol{B_0} = 0$$

シミュレーション方法

- 磁気流体コードCANS+を使用。
- 初期条件にダイポール磁場を与えた。
- 強磁場の場合、安定して計算するのは難しい。
- 数値計算において、磁場を$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B_0} + \boldsymbol{B_1}$の形に分離。
- $\boldsymbol{B_1}$ について解くコードへCANS+を変更。
- 特に、数値フラックスを求めるための近似リーマン解法に対して、修正を行った。(最終的にはHLLD法に切り替え)

なぜ、磁場を分離する必要があるのか？

- 計算による誤差が大きくなるのを防ぐため。例えば、エネルギーについて考える。背景場が大きい場合、全エネルギーに占める磁場のエネルギーが多くなる。
- 全エネルギーから磁気エネルギーの差をとったときに桁落ちが生じてしまい、圧力などの計算で誤差が大きくなってしまう。
- また、背景場が大きい場合、数値計算で磁場の誤差により $\nabla \times \boldsymbol{B}$ が大きくなり、誤差から生じるローレンツ力による運動が起こる。これを抑えたい。
- 背景場分離したMHD方程式を導出し、CANS+に導入した。

理想MHD方程式

- 一般的な方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{F} = 0$$

- 但し、

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{B} \\ e \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \rho \boldsymbol{v} \\ \rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v} + p_T \ddot{\boldsymbol{I}} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{v}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{v} \\ (e + p_T)\boldsymbol{v} - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{B}) \end{pmatrix}$$

ρ: 質量密度　$\boldsymbol{v}$:速度ベクトル　$\ddot{\boldsymbol{I}}$: 単位行列

$$p_T = p + \frac{|\boldsymbol{B}|^2}{2}$$

$$e = \rho\left(\varepsilon + \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{2}\right) + \frac{|\boldsymbol{B}|^2}{2}$$

p:圧力　$\varepsilon = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}$:内部エネルギー

- $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B_0} + \boldsymbol{B_1}$の形に分離すると

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}_1}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{F}_1 = 0$$

- 但し、

$$\boldsymbol{U}_1 = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{B_1} \\ e_1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{F}_1 = \begin{pmatrix} \rho \boldsymbol{v} \\ \rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v} + p_T \ddot{\boldsymbol{I}} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B_1} + \boldsymbol{B_1}\boldsymbol{B_0} \\ \boldsymbol{v}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{v} \\ \left(e_1 + p_T + \boldsymbol{B_0}^2\right)\boldsymbol{v} - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{B}) \end{pmatrix}$$

ρ: 質量密度　$\boldsymbol{v}$:速度ベクトル　$\ddot{\boldsymbol{I}}$: 単位行列

$$p_T = p + \frac{|\boldsymbol{B_1}|^2}{2} + \boldsymbol{B_1} \cdot \boldsymbol{B_0}$$

$$e_1 = \rho\left(\varepsilon + \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{2}\right) + \frac{|\boldsymbol{B_1}|^2}{2} + \boldsymbol{B_1} \cdot \boldsymbol{B_0}$$

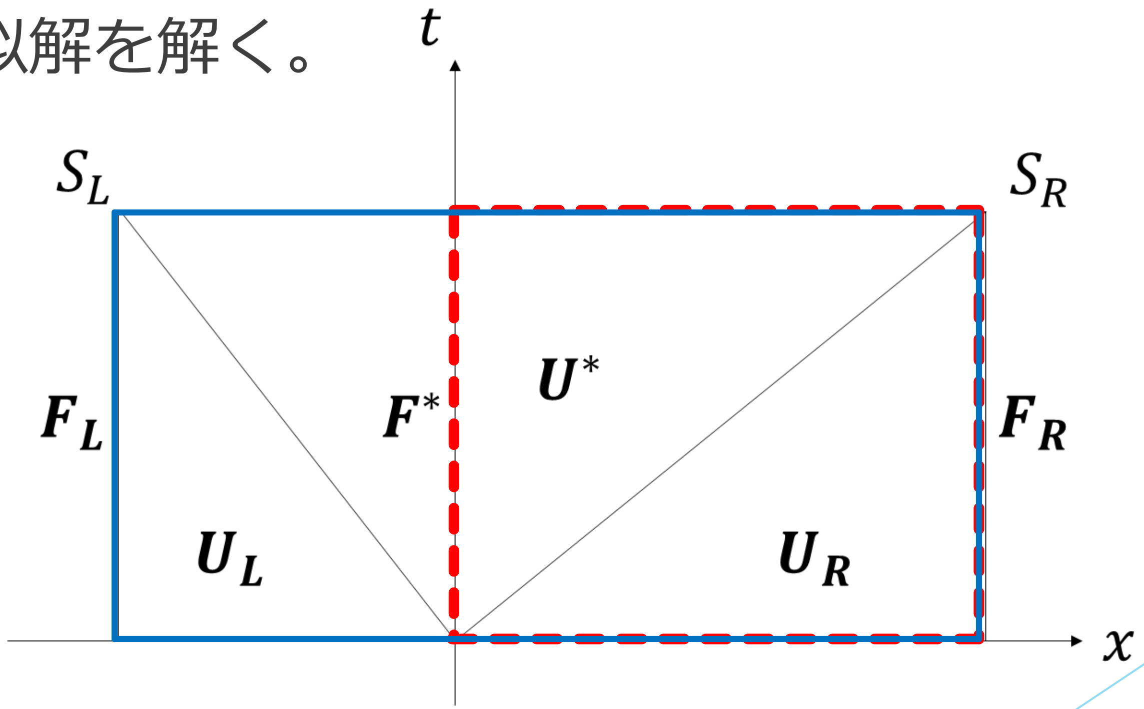
p_T:圧力　$\varepsilon = \frac{p}{(\gamma-1)\rho}$:内部エネルギー

HLL法　$\dfrac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{F} = 0$ の数値解法

- 速い速度S_Rと遅い速度S_Lによって囲まれた$[S_L\Delta t, S_R\Delta t] \times [0, \Delta t]$領域(青線)において

$$\frac{1}{\Delta t}\int_{S_L\Delta t}^{S_R\Delta t} \boldsymbol{U}(x,t)dx - S_R\boldsymbol{U_R} + S_L\boldsymbol{U_L} + \boldsymbol{F_R} - \boldsymbol{F_L} = 0 \quad \cdots(1)$$

を満たす近似解を解く。



- S_RとS_Lによって囲まれた領域で、$\boldsymbol{U}^*$は一定であると仮定する。(1)式は以下の様に変形できる。

$$(S_R - S_L)\boldsymbol{U}^* - S_R\,\boldsymbol{U_R} + S_L\boldsymbol{U_L} + \boldsymbol{F_R} - \boldsymbol{F_L} = 0$$

$$\boldsymbol{U}^* = \frac{S_R\boldsymbol{U_R} - S_L\boldsymbol{U_L} - \boldsymbol{F_R} + \boldsymbol{F_L}}{S_R - S_L} \quad \cdots (2)$$

- 次に、赤の点線によって囲まれた領域での保存則を考える。
- (1)より、

$$S_R\boldsymbol{U}^* - S_R\boldsymbol{U_R} + \boldsymbol{F_R} - \boldsymbol{F}^* = 0 \quad \cdots (3)$$

が得られる。(2), (3)より、

$$\boldsymbol{F}^* = \frac{S_R\boldsymbol{F_L} - S_L\boldsymbol{F_R} + S_R S_L(\boldsymbol{U_R} - \boldsymbol{U_L})}{S_R - S_L} \quad \cdots (4)$$

が得られる。ここで、S_R, S_L は、

$$S_R = \max\left(v_R + c_{fR}, v_L + c_{fL}\right)$$
$$S_L = \min\left(v_R - c_{fR}, v_L - c_{fL}\right)$$

であると、近似する。

- 例えば、

$$F_{rxl} = \rho_{xl} {v_{xl}}^2 + p_{tl} - {B_x}^2$$

$$\Downarrow$$

$$F_{rxl} = \rho_{xl} {v_{xl}}^2 + p_{tl} - \{(B_0 + B_x) \times B_x + B_x \times B_0\}$$

のように変更。他の成分、右側のフラックスも分離したMHD方程式に変更。

$$\boldsymbol{U_1} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{B_1} \\ e_1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{F_1} = \begin{pmatrix} \rho \boldsymbol{v} \\ \rho \boldsymbol{v} \boldsymbol{v} + p_T \ddot{\boldsymbol{I}} - \boldsymbol{B} \boldsymbol{B_1} + \boldsymbol{B_1} \boldsymbol{B_0} \\ \boldsymbol{v} \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} \boldsymbol{v} \\ \left(e_1 + p_T + {\boldsymbol{B_0}}^2\right) \boldsymbol{v} - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{B}) \end{pmatrix}$$

規格化

- 空間スケール：中心天体の半径 H_0(以降 R で表記)
- 磁場スケール：極での磁場 B_0
- 密度スケール：中心天体の密度 ρ_0
- 速度スケール：$v_a = \dfrac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}$
- 時間スケール：$t_0 = \dfrac{R}{v_a}$
- 圧力スケール：$p_0 = \rho_0 {v_a}^2$

計算モデル

- 初期条件

$$R = 1.0 \quad \rho = 1.0$$
$$v_x = v_y = v_z = 0.0$$
$$p = 0.010 \pm 0.001(10\%\text{の擾乱})$$

磁場は、極で大きさが 1.0 になるようにダイポール磁場を与えた。

$$\text{グリッド数} = 128 \times 128$$

計算領域：$(0 \le r \le 10, -5.0 \le z \le 5.0)$

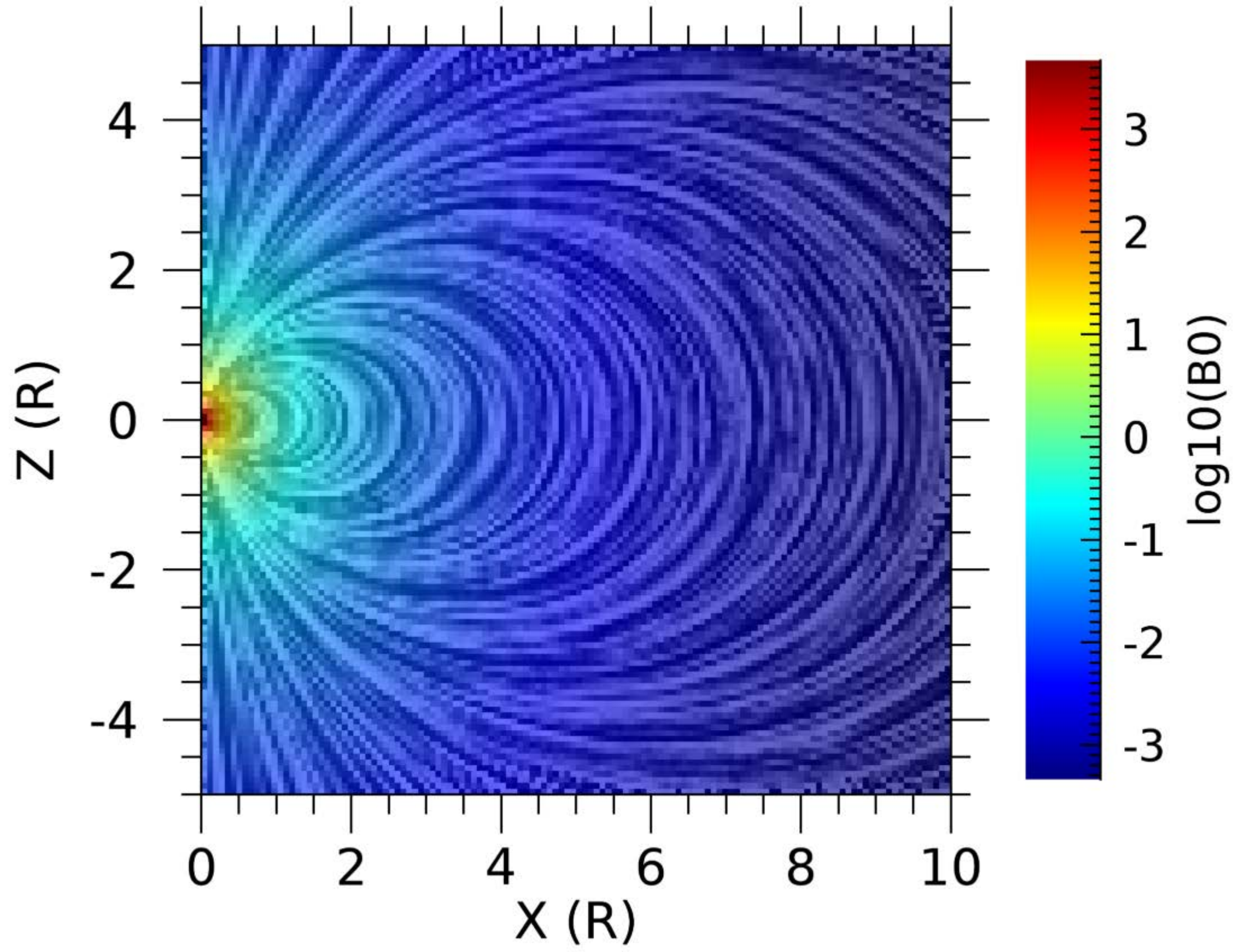
- 境界条件

$r < 1.0$：初期状態を代入

φ 方向：周期境界条件

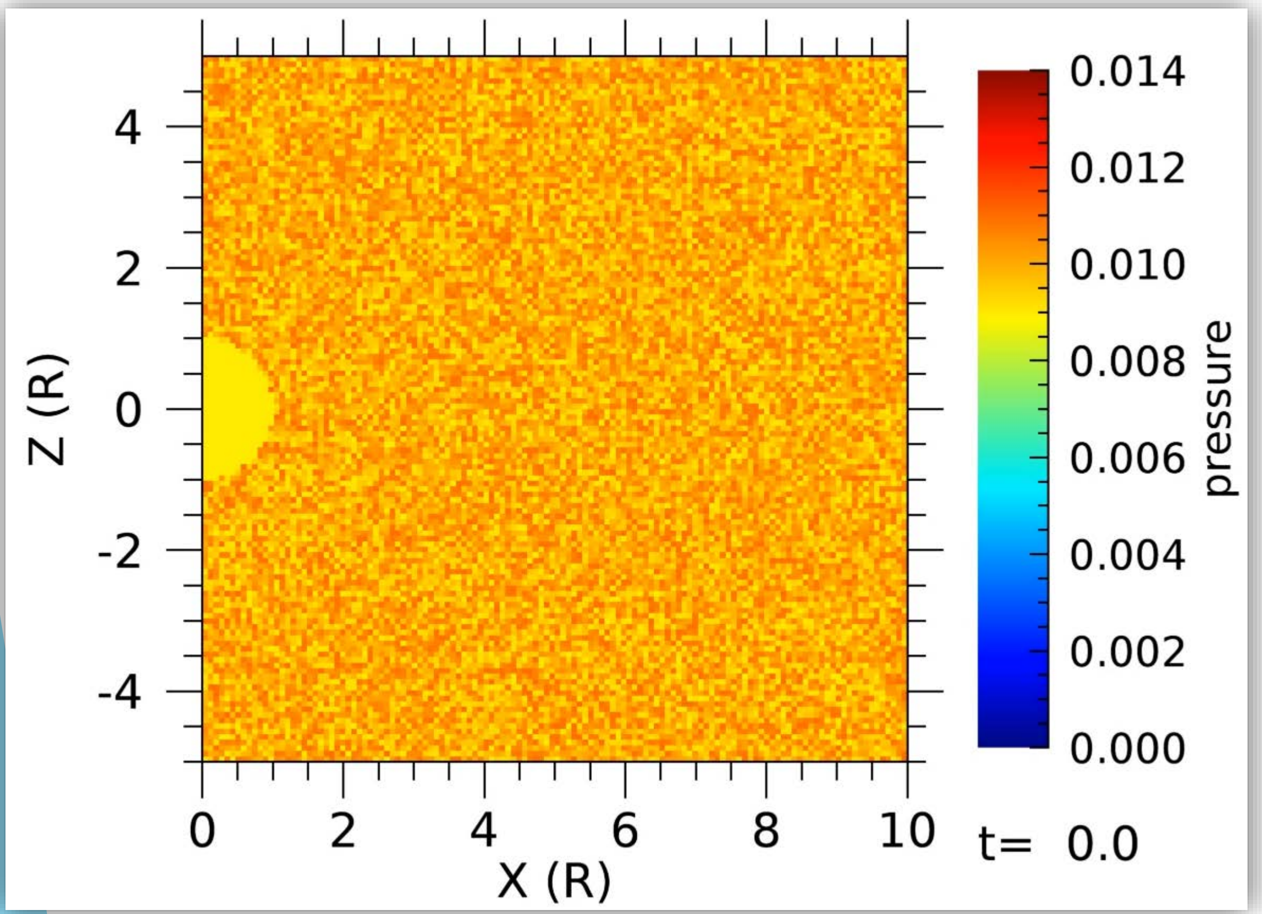
z軸：ρ, p, v_z, B_z は対称。v_x, B_x は半対称。

それ以外の計算領域の境界：自由境界条件(物理量外挿)

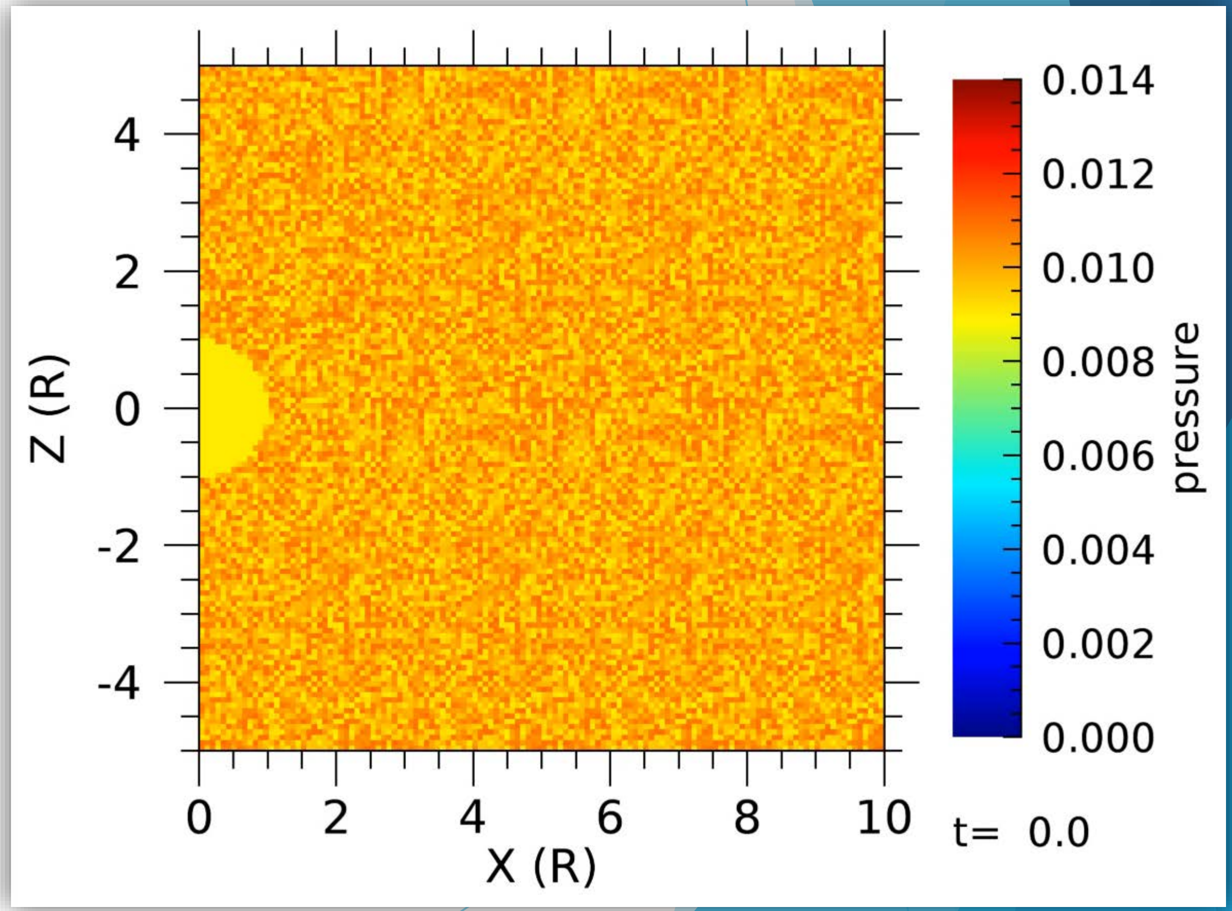


圧力分布

分離なし

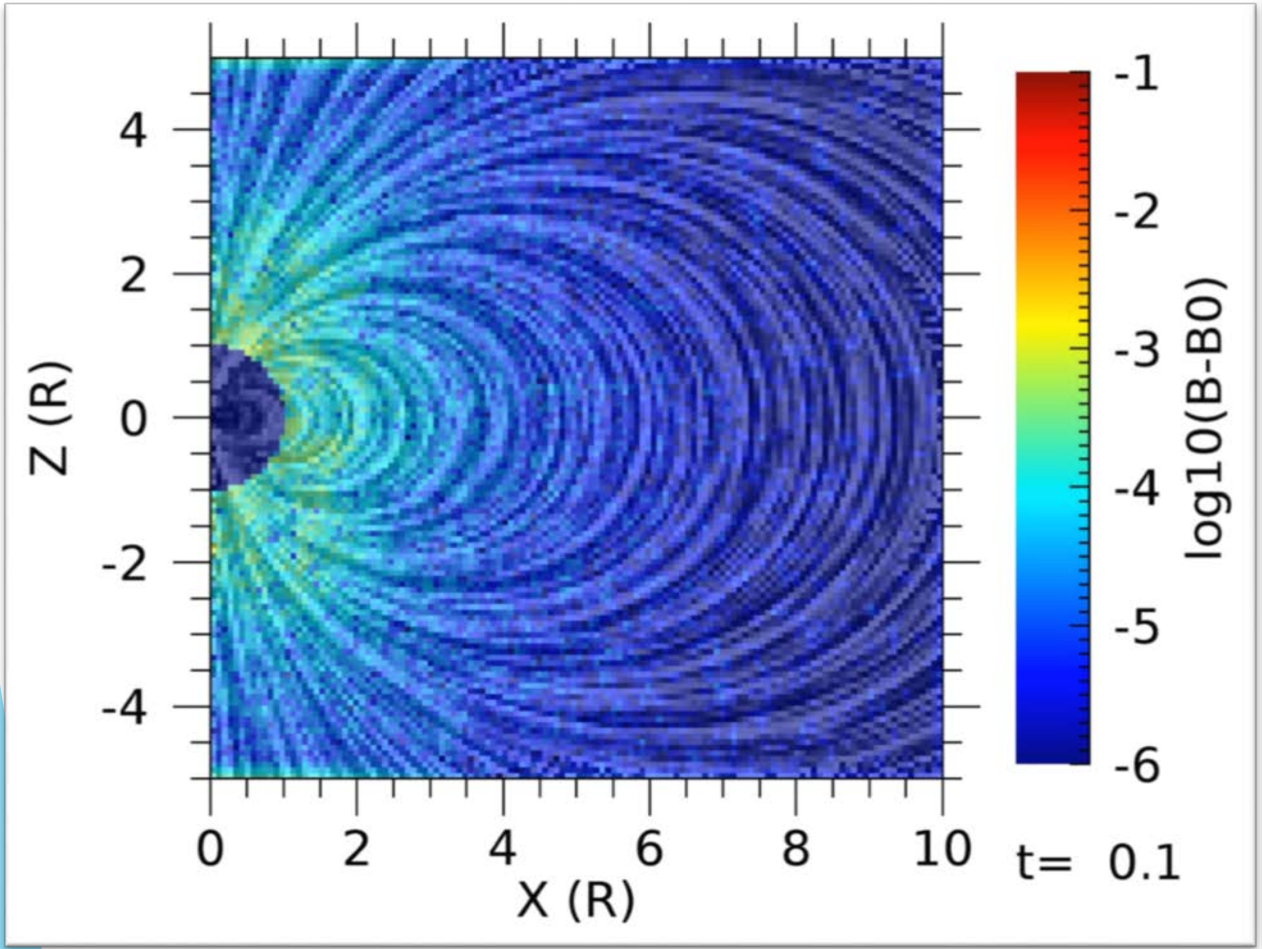


分離あり

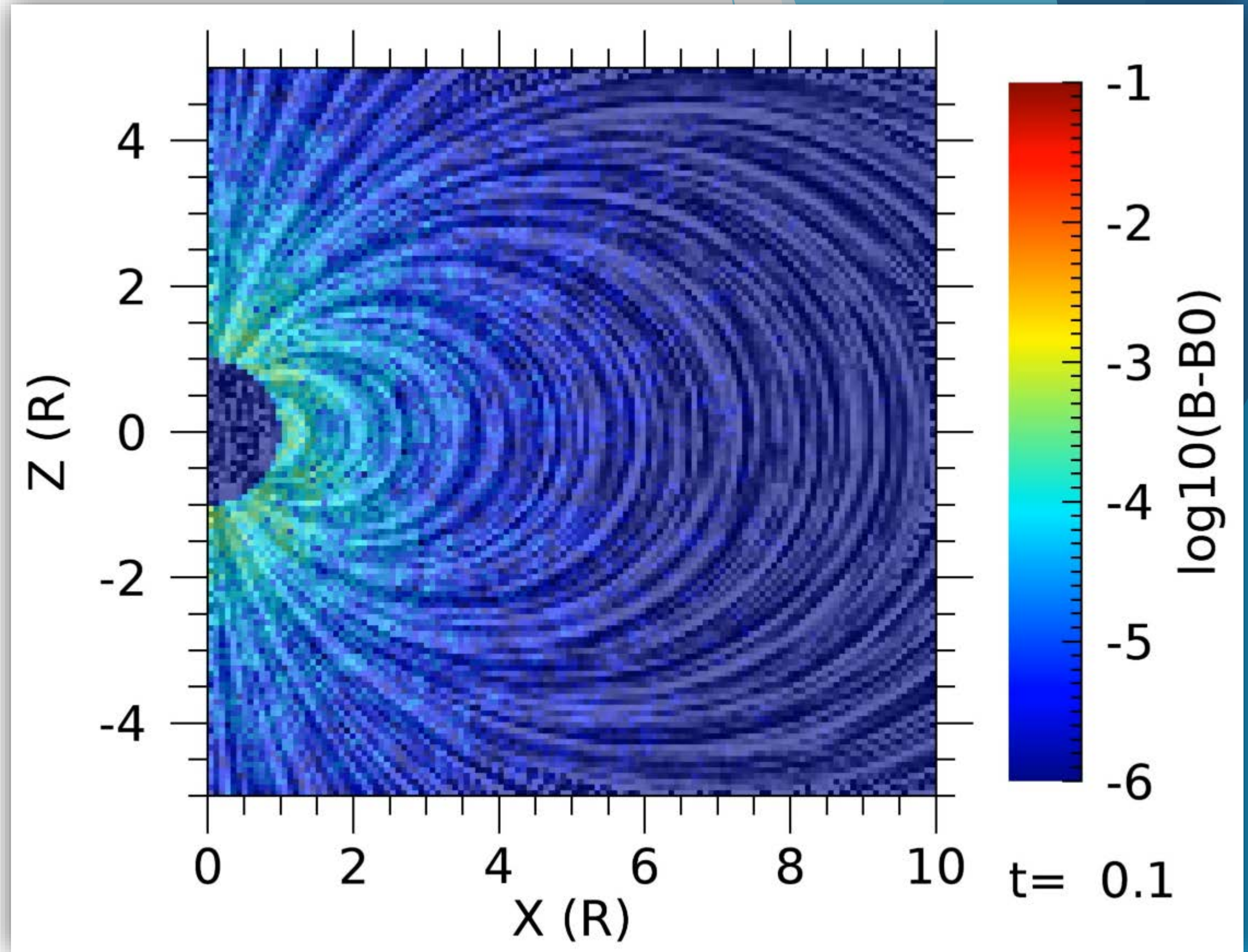


磁場の時間変化

分離なし



分離あり

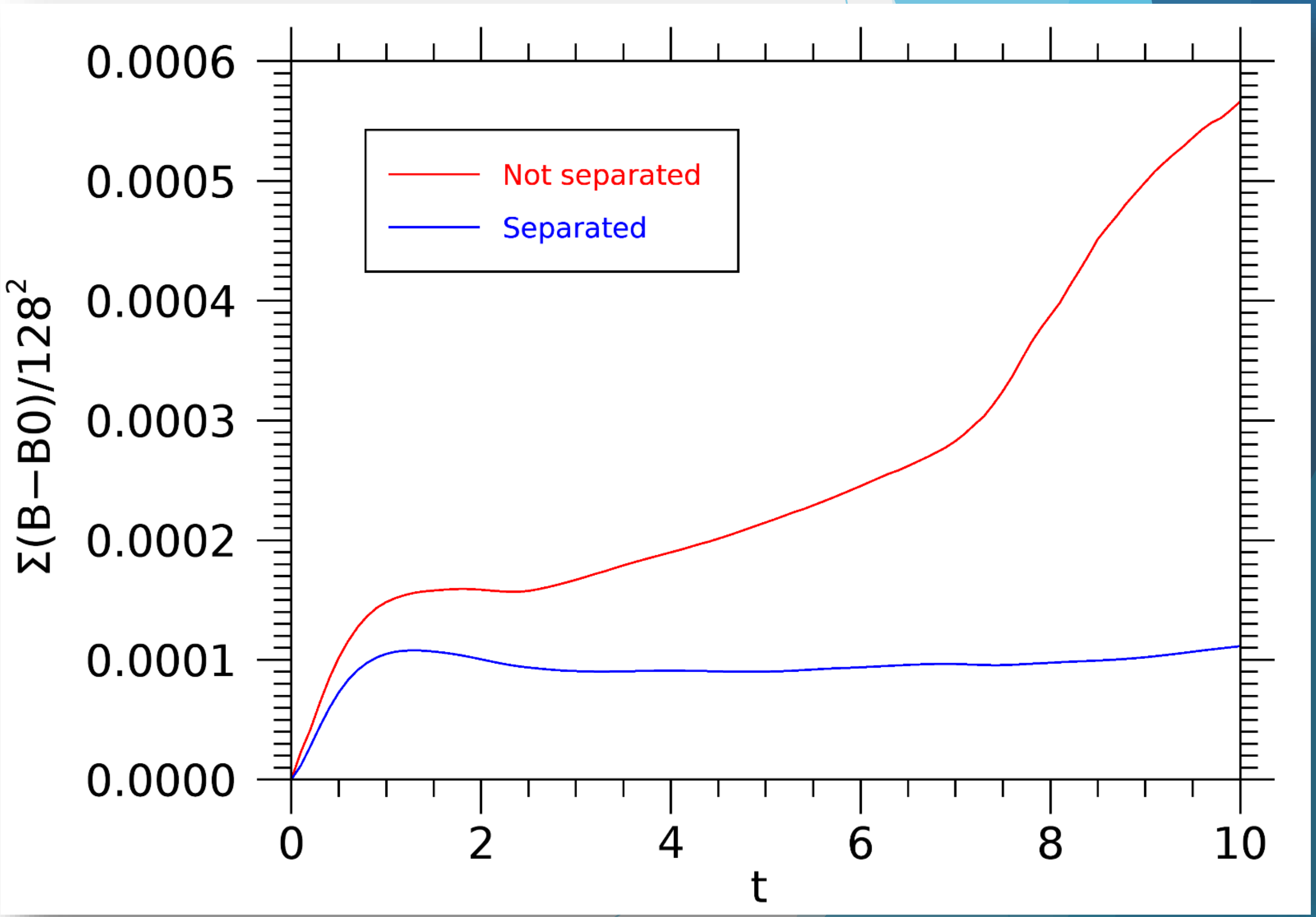


全領域での$B-B_0$の和の時間変化の平均

- 赤線が分離なし。青線が分離あり。
- 分離なしだと、時間経過と共に増加する。

⇩

- 分離すると、およそ$t=1.0$後はほぼ変化しなくなる。



まとめ

- CANS+を修正して、背景場を分離したコードを作成して、テスト計算を実施した。
- 分離する前と比べて、誤差が小さく保たれた。
- 今回は、ダイポール磁場のみ。⇒ 今後、周辺にディスクをおいて相互作用シミュレーションを行う。