重力波の発生及び
その検出に向けて

千葉大学 宇宙物理学研究室4年
栗山 智宏

指導教員：花輪 知幸 教授

本日の流れ

1. 研究目的　(大学院での研究)

2. 重力波の理論（電磁気学との対比）

   ①重力波の伝播

   ②重力波の生成

   ③重力波の運ぶエネルギー

   （公転周期減少，KAGRAの歪み）

3. 重力波観測

4. 今後の課題

研究目的

来年度からのKAGRAでの研究に向けて

- 重力波の発生機構の理解
- 連星系の重力波放出に伴う観測結果の理論的な理解
- 重力波によるKAGRAの歪み

重力波とは

- 光速で伝わる時空の歪み

  アインシュタイン方程式

$$G^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu}$$

- 重力波の存在の間接的証明

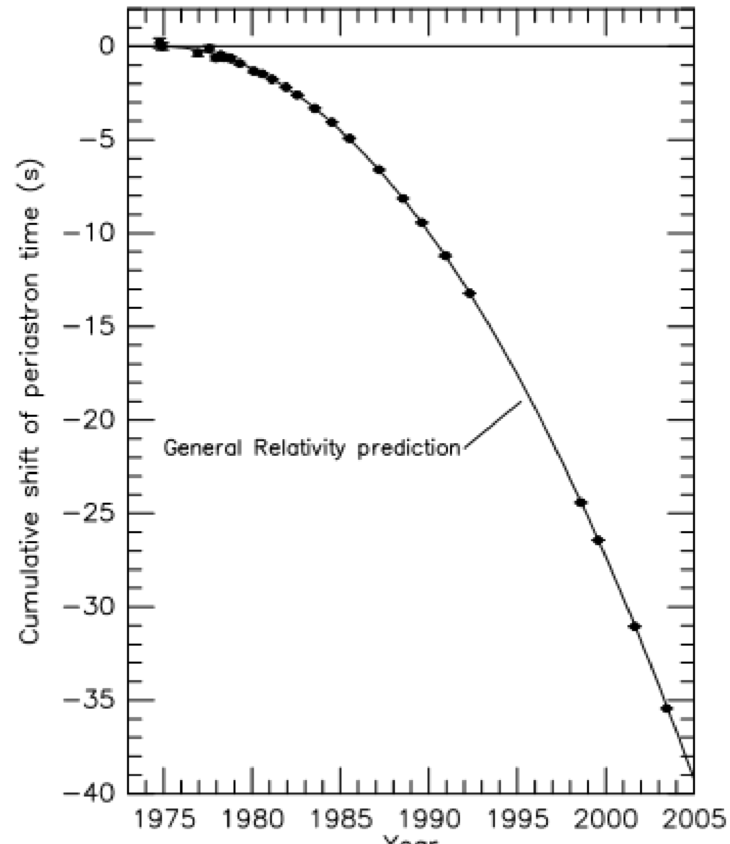
  PSR B1913+16 の公転周期の減少が相対論による予測と一致！

  (1993年ノーベル物理学賞)

- 重力波の直接検出

  $36M_\odot$と29 $M_\odot$の連星BHの合体による重力波を検出

  (Advanced LIGO)



Weisberg et al.,ASP.328(2005)

弱い重力場のアインシュタイン方程式

〈電磁気学〉

◇方程式

$$\boxed{\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2\right)\Phi=-\frac{\rho_e(t)}{\varepsilon_0}}$$

時間変化する $\rho_e(t)$ によって電磁波が放射される。

◇ローレンツゲージ条件

$$\nabla\cdot A+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial^2 t}=0$$

$P^0=-\Phi\,, P^i=A^i$ とすると

$\underline{P^\nu{}_{,\nu}=0}$ となる

〈一般相対論〉

◇方程式

$$\boxed{\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2\right)\bar{h}^{\mu\nu}=-16\pi T^{\mu\nu}}$$

$T^{\mu\nu}$ ：エネルギー運動量テンソル

$g_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\beta}+h_{\alpha\beta}\,,\quad \bar{h}^{\alpha\beta}=h^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}h$

$G^{\mu\nu}$ は計量の摂動 $\bar{h}^{\mu\nu}$ で表せる

時間変化する $T^{\mu\nu}$ によって重力波が放射される。

◇ゲージ条件

$$\underline{\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0}$$

真空中の重力波の伝播

- 弱い場のアインシュタイン方程式の解

　真空中を伝播 $T^{\mu\nu} = 0$

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right)\bar{h}^{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{h}^{\mu\nu} = A^{\mu\nu}\exp\left(\mathrm{i}k_\mu x^\mu\right)$$

- トランスバース・トレースレス・ゲージ条件

　Z方向への平面波の進行を考える。　（TTゲージ）

$$\begin{cases} A^{\mu\nu}k_\nu = 0 \\ A^{\mu}{}_{\mu} = 0 \\ A_{\mu\nu}U^\nu = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left(A^{\mathrm{TT}}_{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ 0 & A_{xy} & -A_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

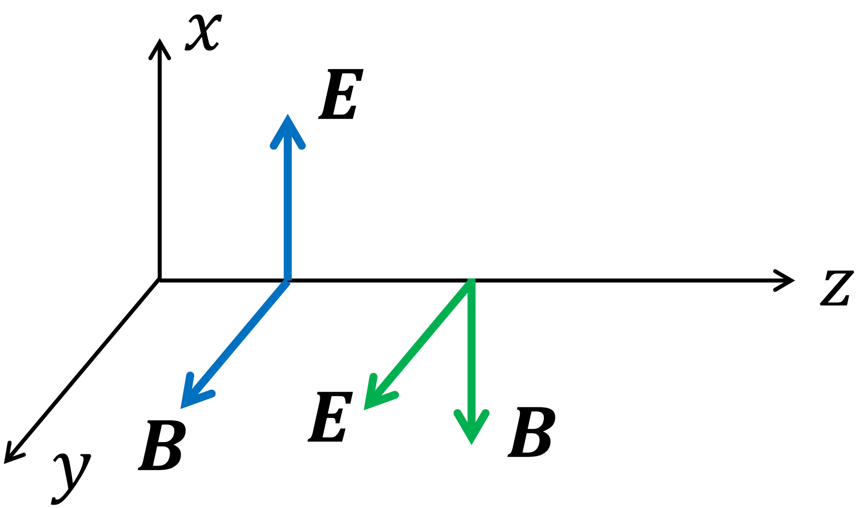
重力波の偏極

〈電磁波〉

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=0$$

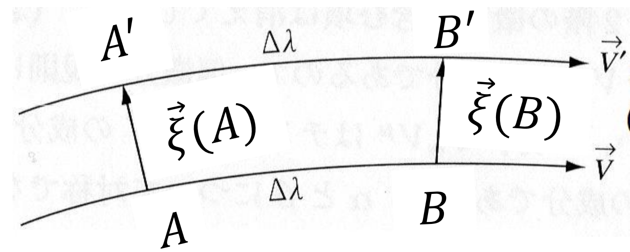
$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2\right)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=0$$

- 電磁波の偏光



(90度回転)

〈重力波〉



相対論入門
(シュッツ)より

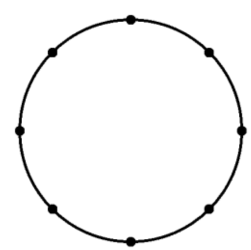
- 測地線偏差の方程式

$$\nabla_V\nabla_V\xi^\alpha=R^\alpha{}_{\mu\nu\beta}V^\mu V^\nu\xi^\beta$$

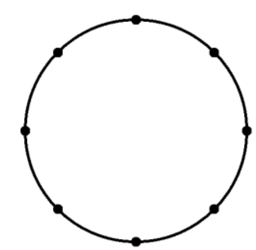
$R^\alpha{}_{\mu\nu\beta}$で重力場の潮汐力を表現可能

- 重力波の偏極

＋モード



xモード



(45度回転)

重力波の自由粒子への影響

- **座標の変化** (A(0,0,0) B(ε,0,0))

（粒子が初め静止しているローレンツ系にTTゲージをとる）

$$\frac{d}{d\tau}U^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}U^{\mu}U^{\nu} = 0 \quad \text{（測地線方程式）}$$

$$\left(\frac{dU^{\alpha}}{d\tau}\right)_0 = -\Gamma^{\alpha}{}_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\left(h_{\beta,00} + h_{0\beta,0} - h_{00,\beta}\right) = 0$$

$(\because h^{\mathrm{TT}}_{\beta 0} = 0)$

⇨ 粒子は波がぶつかっても座標を変えない！

- **固有距離の変化**

$$\Delta l = \int |ds^2|^{1/2} = \int \left|g_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}\right|^{1/2} = \int_0^{\varepsilon}|g_{xx}|^{1/2}dx$$

$$\approx \left[1 + \frac{1}{2}h^{\mathrm{TT}}_{xx}(x=0)\right]\varepsilon$$

⇨ $h^{\mathrm{TT}}_{xx} \neq 0$ より、固有距離は時間変化する！

重力波の生成

〈電気双極子放射〉

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-\nabla^2\Phi=\frac{\rho_e(t)}{\varepsilon_0}$$

⇩

$$\Phi(\mathbf{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho_\mathrm{e}(t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c\,,\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\mathrm{d}^3x'$$

〈重力波の放射〉

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2\right)\bar{h}^{\mu\nu}=-16\pi T^{\mu\nu}$$

⇩

$$\bar{h}^{\mu\nu}=4\int\frac{\tau^{\mu\nu}(t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|,\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\mathrm{d}^3x'$$

$\tau^{\mu\nu}$ ：エネルギー運動量 擬テンソル

四重極放射

- 四重極モーメント $\quad I_{ij} = \int \rho x^i x^j \, \mathrm{d}^3 x$
- トレースレス部分 $\quad \text{Ɨ}_{ij} = \int \rho \left(x^i x^j - \frac{1}{3}\delta_{ij} r^2\right) \mathrm{d}^3 x$
- 重力源から距離 r 離れた場所での振幅は

$$h_{ij}^{\mathrm{TT}} = \frac{2}{r}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\text{Ɨ}_{ij}(t-r)$$

- 四重極波の角度依存性(球座標)

$$h_{\theta\theta} = h_{ij}^{\mathrm{TT}} \frac{\partial x^i}{\partial \theta}\frac{\partial x^j}{\partial \theta}, h_{\varphi\varphi} = h_{ij}^{\mathrm{TT}} \frac{\partial x^i}{\partial \varphi}\frac{\partial x^j}{\partial \varphi}, h_{\theta\varphi} = h_{ij}^{\mathrm{TT}} \frac{\partial x^i}{\partial \theta}\frac{\partial x^j}{\partial \varphi}$$

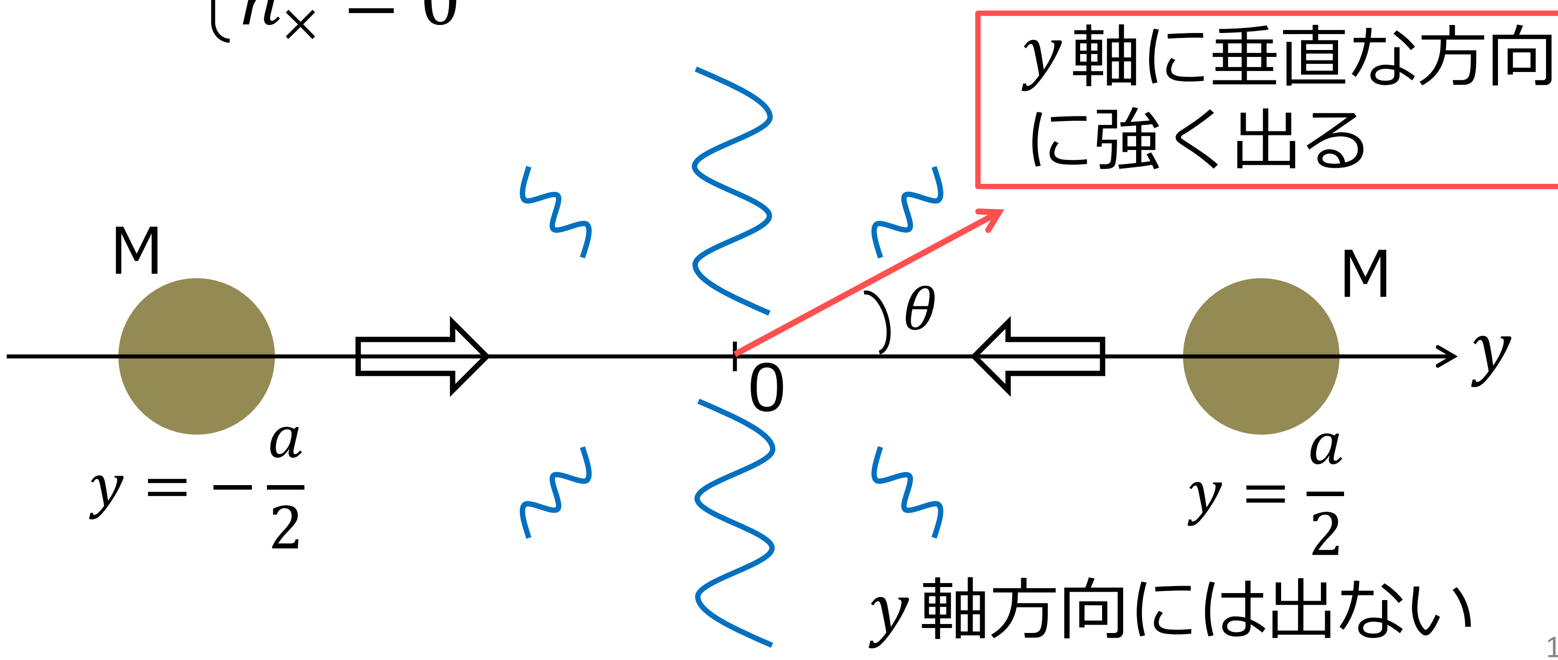
$$\boxed{h_+ = \frac{h_{\theta\theta}}{r^2} = -\frac{h_{\varphi\varphi}}{r^2 \sin^2\theta}, h_\times = \frac{h_{\theta\varphi}}{r^2 \sin^2\theta}}$$

重力波放射の例

- 2つの質量Mの星が互いの重力で引き合うとき

  (角運動量ゼロ, y軸上を運動)

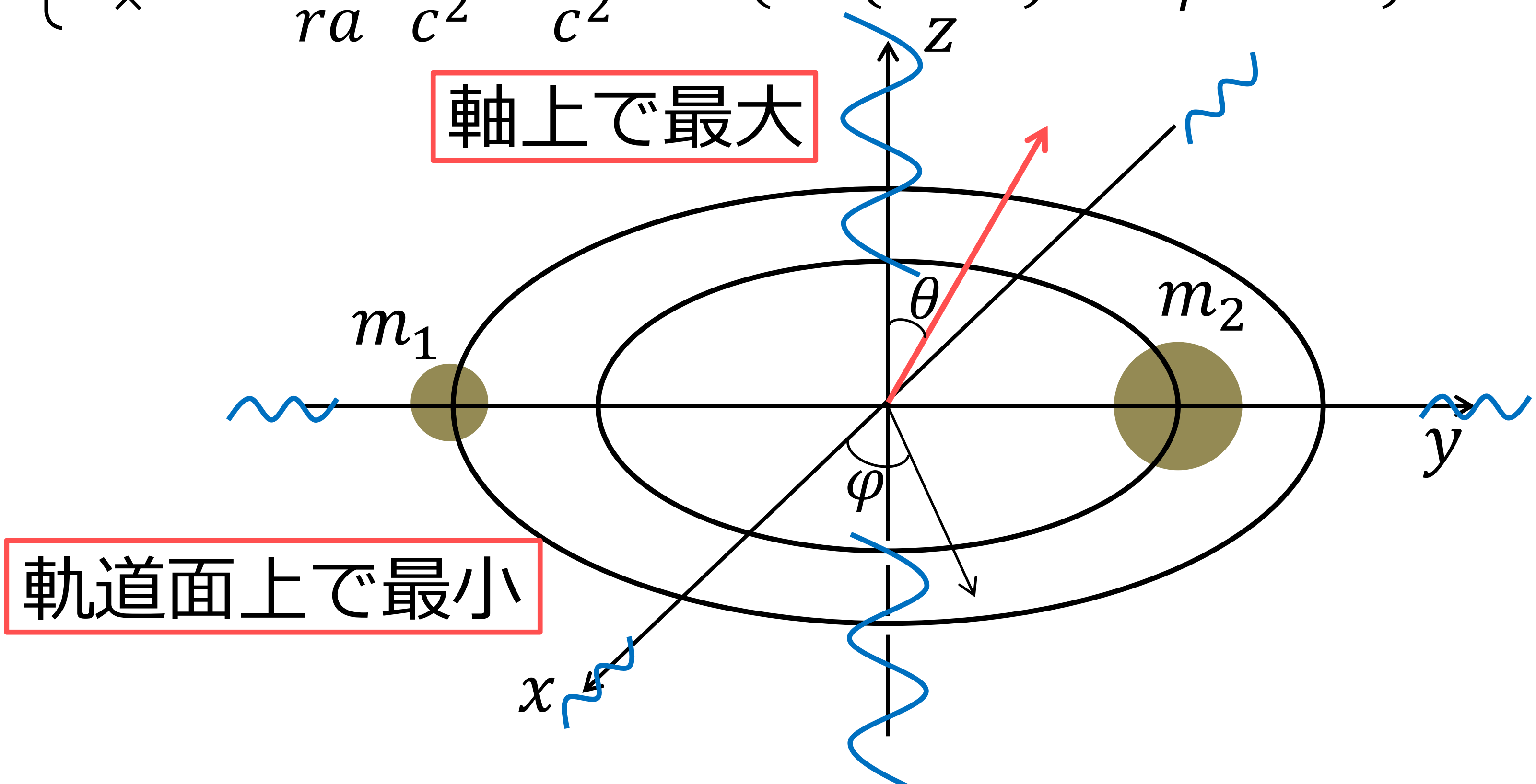
$$
\begin{cases}
h_{+} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2M}{r}\right)\left(\dfrac{2M}{a(t-r)}\right)\sin^2\theta \\[2ex]
h_{\times} = 0
\end{cases}
$$



円軌道の連星系からの重力波

- 円軌道をまわる質量 m_1 と m_2 の連星から出る重力波

$$\begin{cases} h_+ = -\dfrac{2}{ra}\dfrac{Gm_1}{c^2}\dfrac{Gm_2}{c^2}\cos(2\Omega(t-r)-2\varphi+2\Phi)(\cos^2\theta+1) \\ h_\times = -\dfrac{2}{ra}\dfrac{Gm_1}{c^2}\dfrac{Gm_2}{c^2}\sin(2\Omega(t-r)-2\varphi+2\Phi)\,2\cos\theta \end{cases}$$



エネルギー・角運動量輸送

- 重力波のエネルギー・運動量テンソル(TTゲージ)

$$T_{\mu\nu}^{\mathrm{GW}} = \frac{1}{32\pi} < \bar{h}_{jk,\mu}^{\mathrm{TT}} \bar{h}_{jk,\nu}^{\mathrm{TT}} >$$

$< \ >$:Brill-Hartle平均,
数波長にわたる平均

電磁波のエネルギー密度

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \langle E^2 \rangle$$

- **重力波のエネルギー放出率 L_{GW}**

$$L_{\mathrm{GW}} = \frac{1}{5} < \dddot{I}_{jk} \dddot{I}_{jk} > \quad \text{(四重極公式)}$$

- **角運動量の時間変化**

$$\frac{\mathrm{d}J_i^{\mathrm{GW}}}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{5} \epsilon_{ijk} < \ddot{I}_{km} \dddot{I}_{mj} >$$

三階時間微分
=
加速度の時間微分
=
重力波は時間変動の激しい運動で効率よく出る

楕円軌道の場合

- 右のような楕円軌道を考える。

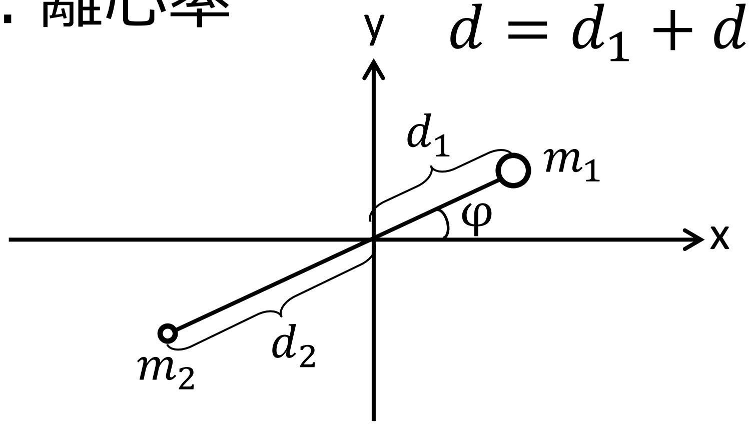
  慣性モーメント

a：軌道長半径

e：離心率

$$\begin{cases} I_{xx} = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2} d^2 \cos^2\varphi \\ I_{yy} = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2} d^2 \sin^2\varphi \\ I_{xy} = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2} d^2 \sin\varphi\cos\varphi \end{cases}$$

$d = d_1 + d_2$



PETERS & MATHEWS(1963)参考

$\frac{1}{2} d^2 \dot{\Phi} = \frac{\pi a b}{P_b}$ (面積速度一定)

$a = -\frac{G m_1 m_2}{2E}$ (全エネルギー E と a との関係)

$\frac{G(m_1+m_2)}{a^3} = \left(\frac{2\pi}{P_b}\right)^2$ (ケプラーの第三法則)

楕円軌道の場合

- 角運動量の時間変化

$\frac{\mathrm{d}J_i^{\mathrm{GW}}}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{5}\epsilon_{ijk} < \ddot{I}_{km}\,\dddot{I}_{mj} >$ 及び $J_z{}^2 = G\frac{m_1{}^2 m_2{}^2}{m_1+m_2}a(1-e^2)$ より

$$\frac{\mathrm{d}J_z}{\mathrm{d}t} = -\frac{32}{5}\frac{G^3 m_1^2 m_2^2 (Gm_t)^{1/2}}{c^5 a^{7/2}(1-e^2)^2}\left(1+\frac{7}{8}e^2\right)$$

- エネルギーの時間変化

$L_{\mathrm{GW}} = \frac{1}{5} < \dddot{I}_{jk}\,\dddot{I}_{jk} >$ 及び $a = -\frac{Gm_1 m_2}{2E}$ より

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -L_{GW} = -\frac{32}{5}\frac{G^4 m_1^2 m_2^2 m_t}{c^5 a^5 (1-e^2)^{7/2}}\left(1+\frac{73}{24}e^2+\frac{37}{96}e^4\right)$$

楕円軌道の場合

- 軌道長半径 a の減少

$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ 及び $a = -\frac{Gm_1m_2}{2E}$ より

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = -\frac{64}{5}\frac{G^3m_1m_2m_t}{c^5a^3(1-e^2)^{7/2}}\left(1+\frac{73}{24}e^2+\frac{37}{96}e^4\right)$$

- 公転周期 P_b の減少

$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$ 及び $\frac{G(m_1+m_2)}{a^3} = \left(\frac{2\pi}{P_b}\right)^2$ より

$$\boxed{\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{P}_\mathbf{b}}{\mathbf{d}\boldsymbol{t}} = -\frac{\mathbf{192}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{5}}\left(\frac{\boldsymbol{P}_\mathbf{b}}{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}\right)^{-\frac{5}{3}}\frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1}-\boldsymbol{e}^2)^{7/2}}\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{73}}{\mathbf{24}}\boldsymbol{e}^2+\frac{\mathbf{37}}{\mathbf{96}}\boldsymbol{e}^4\right)\frac{\boldsymbol{G}^2\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2}{\boldsymbol{c}^5}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{m}_t)^{-1/3}}$$

過去30年にわたる観測で確かめられている。

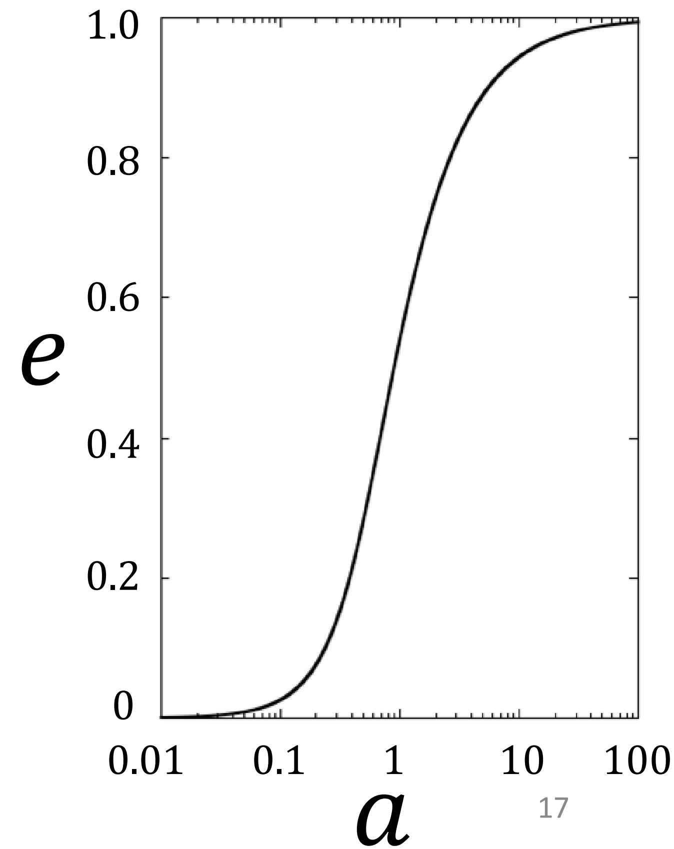
重力波の存在の間接的証明 (Hulse & Taylor)

離心率の変化

- 離心率 e の変化

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = -\frac{304}{15}\frac{G^3 m_1 m_2 m_t}{c^5 a^4 (1-e^2)^{5/2}} e\left(1+\frac{121}{304}e^2\right)$$

$$\frac{a}{a_0} = \frac{1-{e_0}^2}{1-e^2}\left(\frac{e}{e_0}\right)^{\frac{12}{19}}\left[\frac{1+\frac{121}{304}e^2}{1+\frac{121}{304}{e_0}^2}\right]^{\frac{870}{2299}}$$



重力波放射で軌道長半径 a が減少

離心率 e も減少，円軌道へ

PSR B1913+16について

- 初めて発見された連星パルサー
- 1974年に発見されてから、一般相対論の検証の対象として積極的に観測が行われてきた。

〈軌道パラメータ,質量,距離〉

e	$0.6171334(5)$
$P_b(\mathrm{d})$	$0.322997448911(4)$
$\dot{P}_b(\mathrm{s/s})$	-2.423×10^{-12}
m_p	$1.4398(2)M_\odot$
m_c	$1.3886(2)M_\odot$
$d(\mathrm{kpc})$	$9.9 \pm 3.1\ \mathrm{kpc}$

Weisberg et al.,APJ(2010)より

寿命：$\frac{P_b}{\dot{P}_b} \approx 3$億年

重力波放出及びそれに伴う変化

Weisberg et al.,APJ(2010)の値より算出した

- **エネルギー放射率**

$$L_{GW} = 7.761 \pm 0.005 \times 10^{24}\ \mathrm{J/s}$$

- **公転周期の減少**

$$\dot{P}_{\mathrm{b}} = -2.4026 \pm 0.0007 \times 10^{-12}\ \mathrm{s/s}$$

⇨ 観測結果：$\dot{P}_{\mathrm{b}} = -2.423 \times 10^{-12}\ \mathrm{s/s}$

- **軌道長半径 a の減少**

$$\dot{a} = -1.1187 \pm 0.0003 \times 10^{-7}\ \mathrm{m/s}$$

⇨ 約3.53 m/年

重力波によるKAGRAの歪み

- 重力波を放出し 円軌道になった場合

$$h_+ = -\frac{2}{ra}\frac{Gm_1}{c^2}\frac{Gm_2}{c^2}\cos(2\Omega(t-r)-2\varphi+2\Phi)(\cos^2\theta+1)$$

$$h_\times = -\frac{2}{ra}\frac{Gm_1}{c^2}\frac{Gm_2}{c^2}\sin(2\Omega(t-r)-2\varphi+2\Phi)\,2\cos\theta$$

$$\frac{2}{ra}\frac{Gm_1}{c^2}\frac{Gm_2}{c^2} \approx 7.2\times 10^{-23}$$

〔無次元量〕

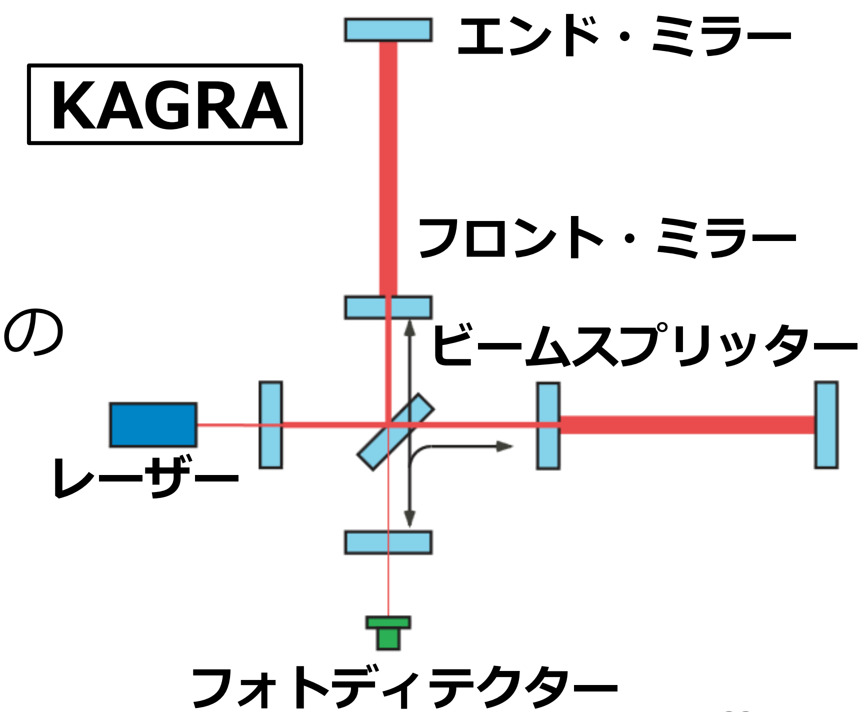
KAGRAのアーム長は $3000\ m$

∴合体前のPSR B1913+16からの
重力波による歪みは、

$$3000m \times 7.2\times 10^{-23}$$

$$\approx 約2.2\times 10^{-19}m$$

(参考：原子核 $10^{-15}m$)



最後の3分間

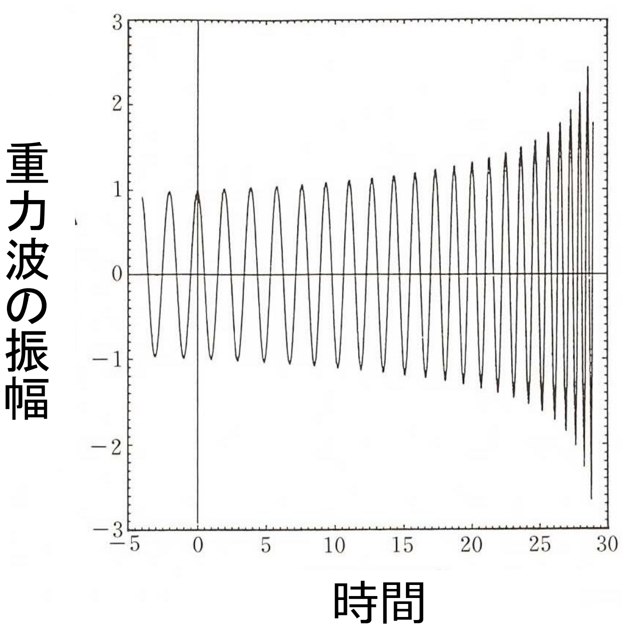
非常に連星間の距離が近くなる

⇩

振動数($f_{\mathrm{GW}} = \frac{2}{P_b}$)が増大

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{96\pi^{8/3}}{5}\frac{G^{5/3}}{c^5} f^{11/3} m_1 m_2 (m_1 + m_2)^{-1/3}$$

(チャープ波)



Chirp mass

$$M_{\mathrm{chirp}} = (m_1 m_2)^{3/5} (m_1 + m_2)^{-1/5}$$

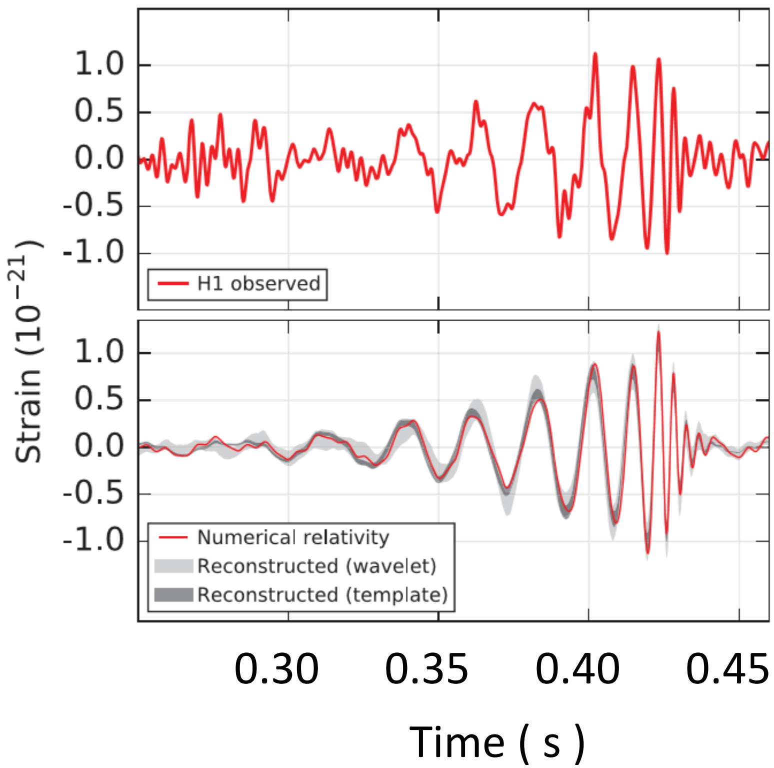
重力波の観測

2016年2月11日

Advanced LIGOが重力波を検出したと発表

(2015年9月14日9時50分45秒(UTC))

400Mpc離れた36$M_\odot$と29 $M_\odot$の連星BHの合体



観測された信号

数値相対論による
シミュレーション

B.P.Abbott et al.,PRL.(2016)

今後の課題

- 楕円軌道から放射される重力波振幅について理解する
- レーザーを用いた検出について理解する
- 検出された重力波の解析手法について学ぶ