

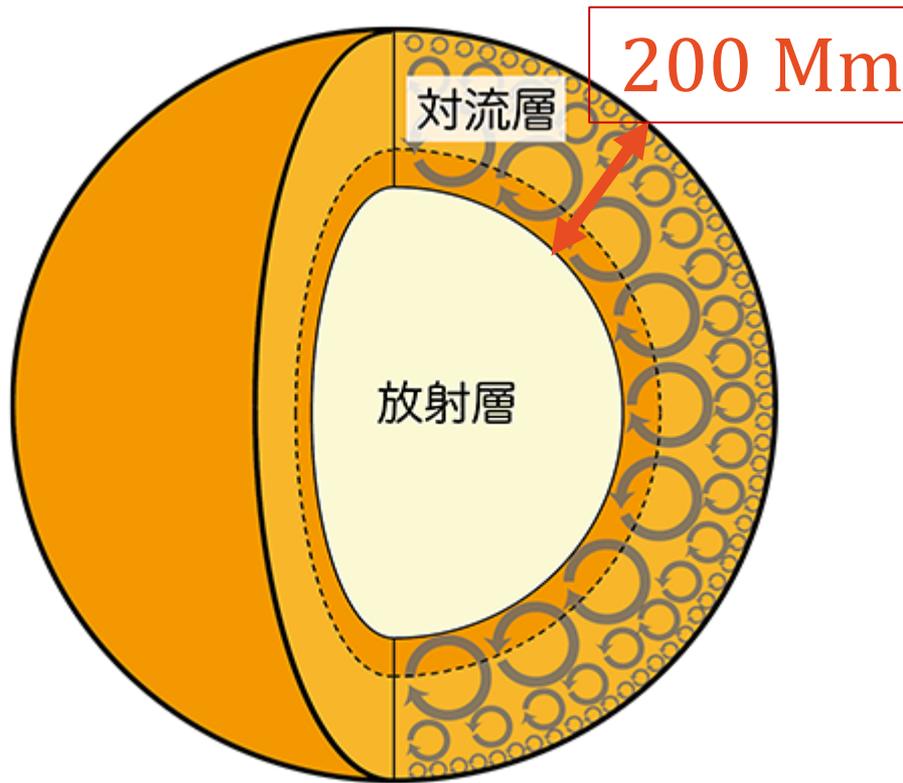
# 太陽対流層での角運動量輸送の 空間スケール分解による 差動回転の理解

---

宇宙物理学研究室

森敬都

# 太陽の内部構造



- 太陽は、中心から約 $0.7R_{\odot}$ が放射層、その上が対流層になっている(実際のスケールに直すと約200 Mm)。

- 対流層では熱対流(乱流の一種)がおもにエネルギーを運んでいる。

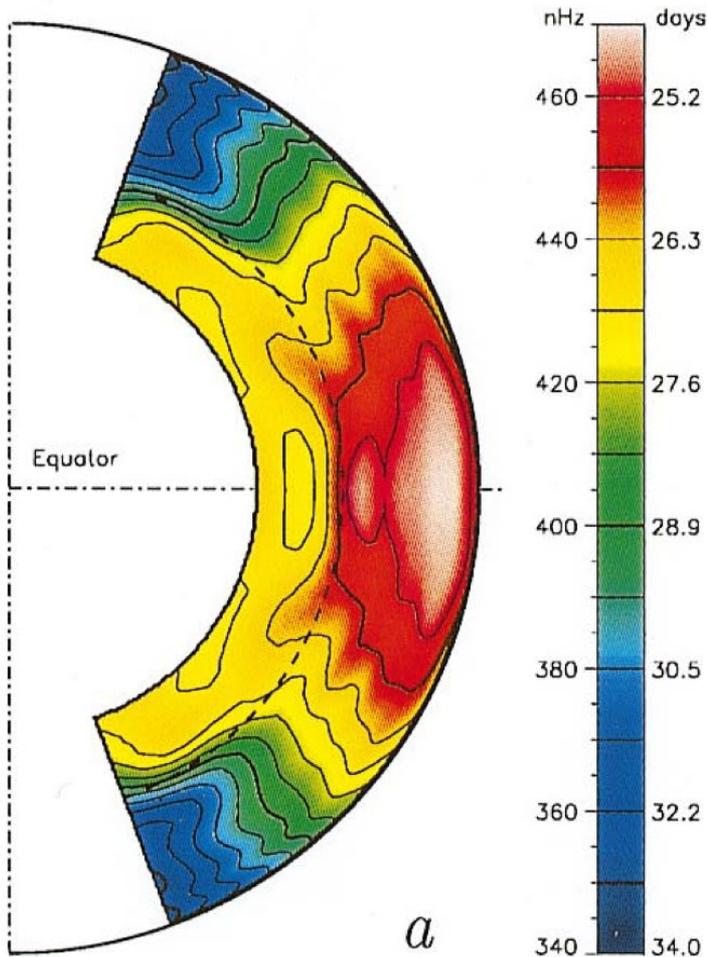
- 対流層内の大規模な構造の一つに、差動回転がある。

図1:太陽の内部構造

出典: <http://www.icehap.chiba-u.jp/plasma/solar.html>,

千葉大学ハドロン宇宙国際センター, 作成者:堀田英之, 図3

# 差動回転



- 太陽対流層では、赤道が極よりも速く自転している差動回転が形成されている。

- 左の図は、観測をもとに作られた差動回転の分布図。

- この差動回転は、数値シミュレーションでも再現されている。

図2: Miesch+2000, GONG(太陽望遠鏡ネットワーク)のデータから得られた結果をもとに作られた太陽内部の差動回転の様子

# 熱対流の研究の例(Brun+2002)

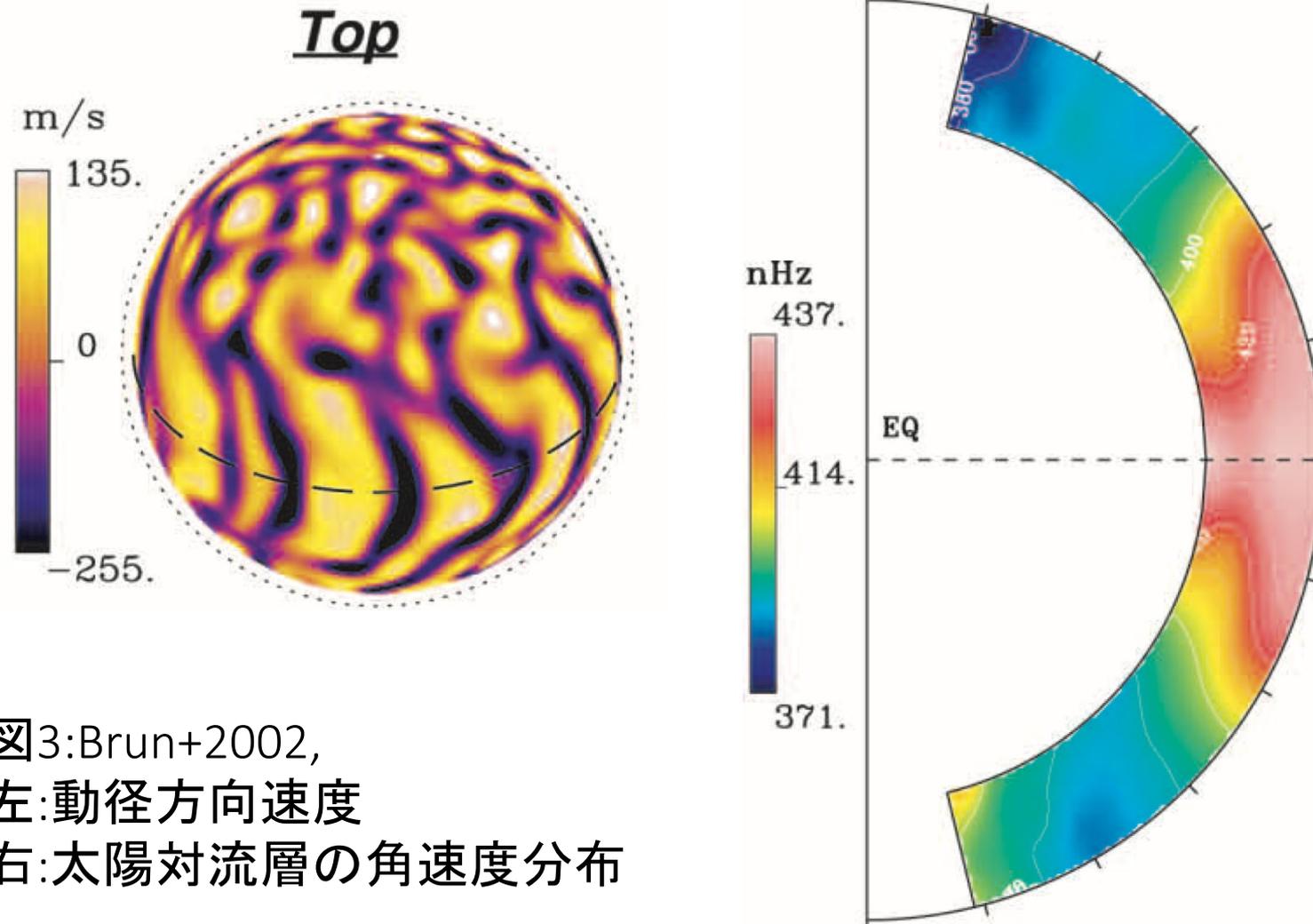


図3: Brun+2002,  
左: 動径方向速度  
右: 太陽対流層の角速度分布

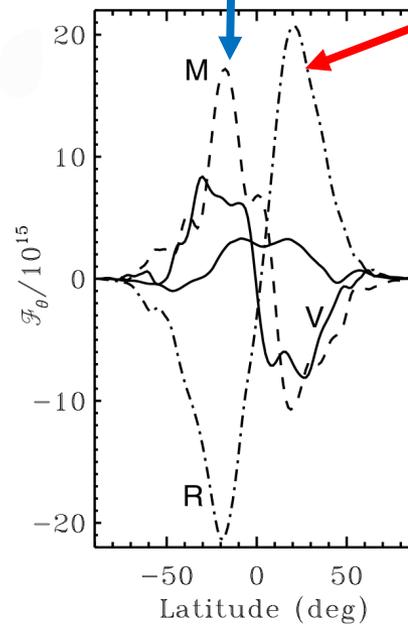
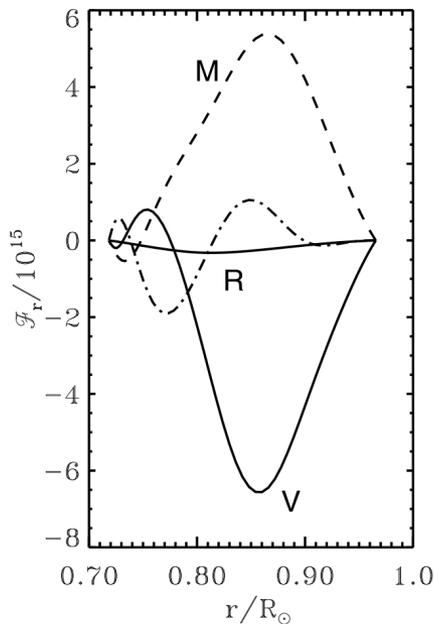
# 角運動量輸送の式

- 角運動量の輸送の項に注目した角運動量の時間発展の式( $\lambda = r \sin \theta$ )

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 \langle L \rangle) = -\nabla \cdot (\rho_0 \lambda \langle \mathbf{u}_m \rangle \langle u_\phi \rangle) - \nabla \cdot (\rho_0 \lambda \langle \mathbf{u}'_m u'_\phi \rangle)$$

平均流

乱流



太陽の乱流は、  
角運動量を運んでいる。

$$\mathbf{u}_m \equiv u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta$$

$\langle \rangle \dots$  経度方向平均

図4: Brun+2002,  
乱流角運動量フラックスの位置依存性。

# 動機

- この研究のように、これまでは角運動量フラックスは平均流と乱流に分けて考えられてきた。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 \langle L \rangle) = -\nabla \cdot \underbrace{(\rho_0 \lambda \langle u_m \rangle \langle u_\phi \rangle)}_{\text{平均流}} - \nabla \cdot \underbrace{(\rho_0 \lambda \langle u'_m u'_\phi \rangle)}_{\text{乱流}}$$

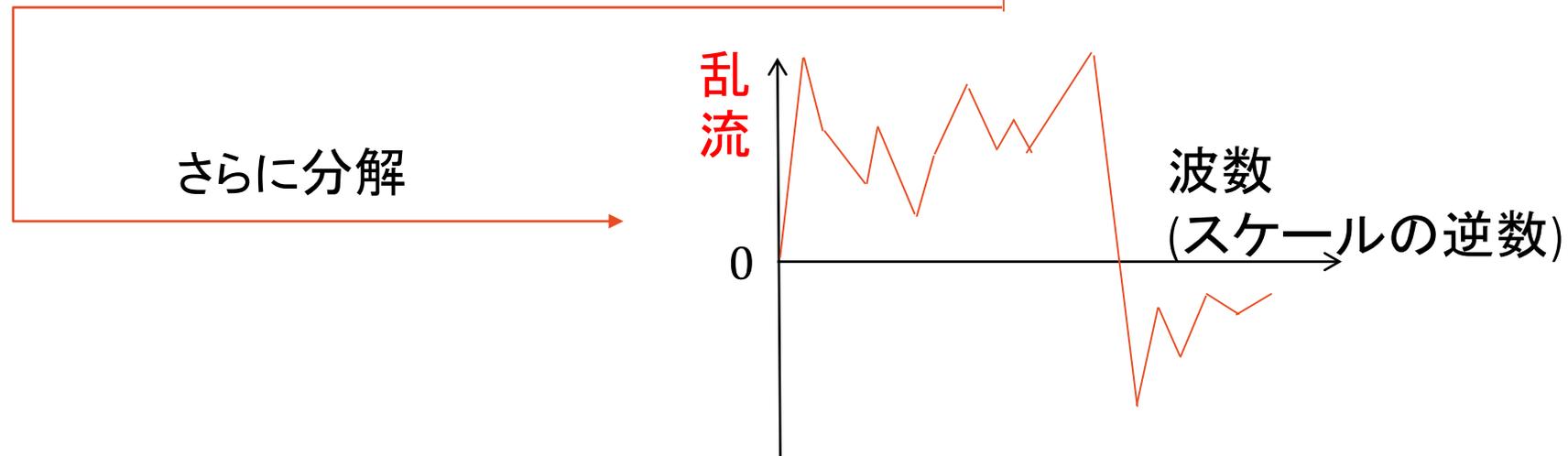


図5:スケール分解のイメージ

## 目的

- 乱流の影響を表す項 $\langle u'_m u'_\phi \rangle$ をスケール(大きさ)ごとに分けて、角運動量フラックスへの、乱流の空間スケールごとの寄与を調べる。
- スケール分解した結果が速度関連の理論と一致するかを確認する。
- スケール分解した結果をもとに太陽の差動回転を物理的に理解する。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 \langle L \rangle) = -\nabla \cdot \underbrace{(\rho_0 \lambda \langle u_m \rangle \langle u_\phi \rangle)}_{\text{平均流}} - \nabla \cdot \underbrace{(\rho_0 \lambda \langle u'_m u'_\phi \rangle)}_{\text{乱流}}$$

角運動量輸送の式。右辺の()内が角運動量フラックス。

# 速度相関の理論

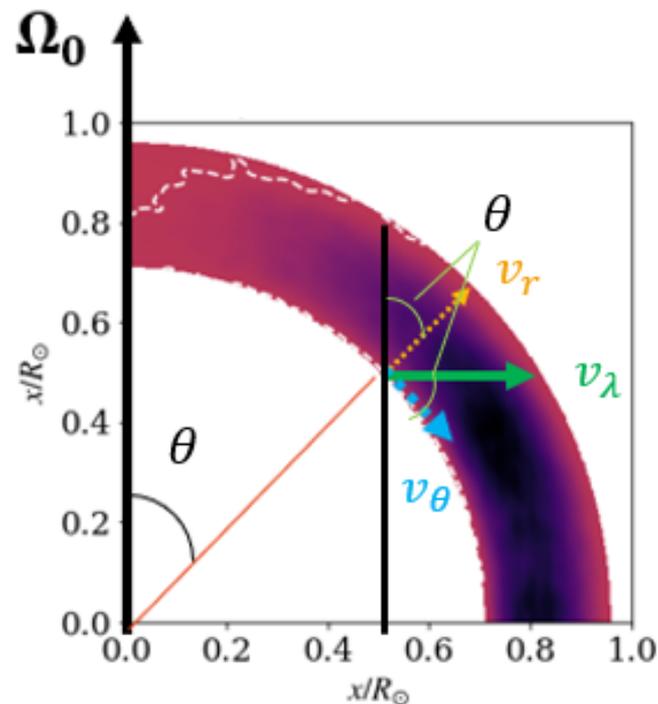
- コリオリ力に注目した運動方程式

$$\frac{\partial v_\lambda}{\partial t} = [\dots] + 2v_\phi \Omega_0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} = [\dots] - 2v_\lambda \Omega_0 \quad \dots \textcircled{2}$$

- 回転の影響が大きいとき(スケール大)  
→  $v_\phi$ (経度方向流れ)が支配的になり、  
①から  $\langle v'_\lambda v'_\phi \rangle > 0$

- 乱流の影響が大きいとき(スケール小)  
→  $v_\lambda$ (下降流、特に熱対流)が支配的になり、  
②から  $\langle v'_\lambda v'_\phi \rangle < 0$



$$v_\lambda \equiv v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta$$

# 堀田先生が解いている式

- 計算コードは、R2D2(Hotta et al. 2019; Hotta & Iijima 2020)。
- 添え字0が基準状態、1が摂動を表す。

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\frac{1}{\xi^2} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) - \nabla p_1 - \rho_1 g \mathbf{e}_r \\ + 2\rho \mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}_0 + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$\rho T \frac{\partial s_1}{\partial t} = -\rho T (\mathbf{v} \cdot \nabla) s + Q_s$$

$$p_1 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \rho_1 + \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho s_1$$

…質量保存則

…運動方程式

…磁場の誘導方程式

…エネルギー保存則

…状態方程式

## 堀田先生の計算の設定

---

- 3次元極座標で計算。計算領域は、 $r : 0.7101R_{\odot} \leq r \leq 0.960R_{\odot}$ 。
- $\theta, \phi$ は、Yin-Yang grid(Kageyama & Sato 2004)というグリッドを用いて全球で計算している。
- 領域は、 $(N_r, N_{\theta}, N_{\phi}) = (256, 512, 1024)$ と分割。
- また、5日ごとに出だし、5000日計算した。
- 系の回転角速度について、太陽の回転角速度(414 nHz)の1倍、2倍、3倍回転のものがある。

# フーリエ変換を用いたスケール解析

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 \langle L \rangle) = -\nabla \cdot \underbrace{(\rho_0 \lambda \langle \mathbf{u}_m \rangle \langle u_\phi \rangle)}_{\text{平均流}} - \nabla \cdot \underbrace{(\rho_0 \lambda \langle \mathbf{u}'_m u'_\phi \rangle)}_{\text{乱流}}$$

$$\langle \mathbf{u}'_m u'_\phi \rangle = 2 \sum_{n=1}^{N/2-1} \text{Re}[\hat{\mathbf{u}}_m(n) \hat{u}'_\phi(n)] + \text{Re} \left[ \hat{\mathbf{u}}_m \left( \frac{N}{2} \right) \hat{u}'_\phi \left( \frac{N}{2} \right) \right]$$

パーシバルの定理

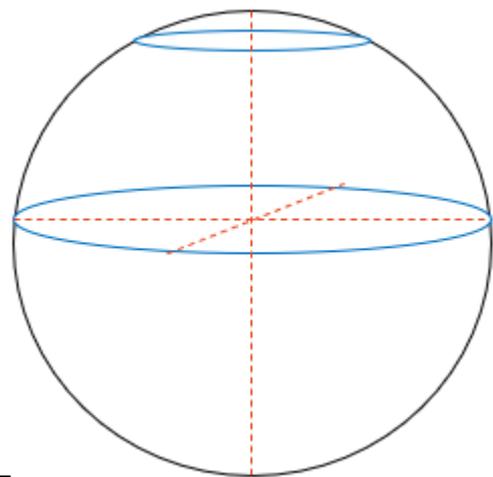


図6:  
波数が同じでも空間スケール  
が異なる例。

$\hat{\phantom{x}}$  は経度方向( $\phi$ 方向)のフーリエ変換。  
同じ波数でも、位置によりスケールが異なる。

空間スケールの最小、最大値を全体  
で同じ値に決めて、その範囲の寄与  
を位置ごとに考え、プロットした。

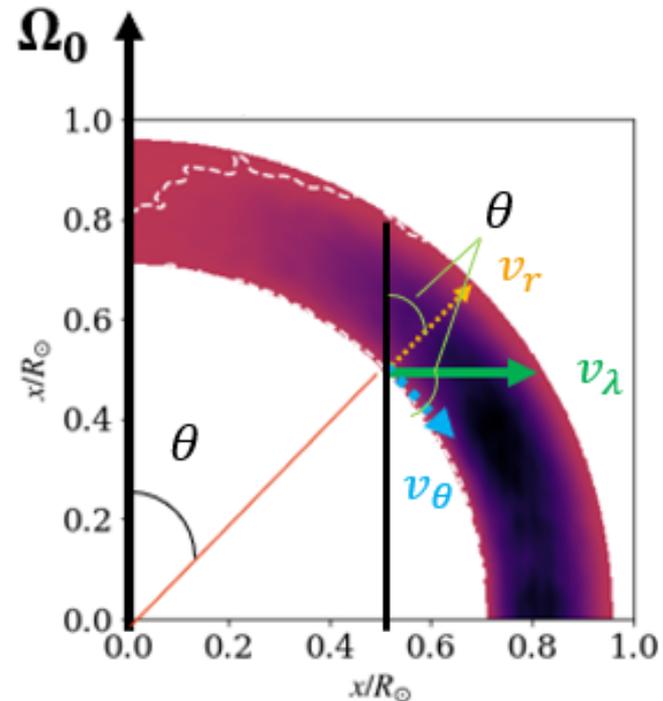
## 結果の図に関するの注意点(1/2)

- ここでは、回転軸に垂直な向きの角運動量輸送に注目する。
- 回転軸に垂直な向きの角運動量フラックス $F_{R,\lambda}$ を、次のように定義する。

$$F_{R,\lambda} \equiv \rho_0 r \sin\theta \langle v'_\lambda v'_\phi \rangle = F_{R,r} \sin\theta + F_{R,\theta} \cos\theta$$

$$(v_\lambda \equiv v_r \sin\theta + v_\theta \cos\theta)$$

- $F_{R,\lambda}$ が正なら回転軸から遠ざかる向き、負なら回転軸に近づく向きに角運動量が輸送される。



## 結果の図に関するの注意点(2/2)

---

- スケール分解した図を、DFT(離散フーリエ変換)図と呼ぶことにする。
- これから、系の基準角速度が太陽の1倍、2倍、3倍のケースを比較する。



図の配置。  
3つの図が表示されている場合、  
以後のスライドでは全てこの配  
置になっている。

# 調べるケースごとの差動回転

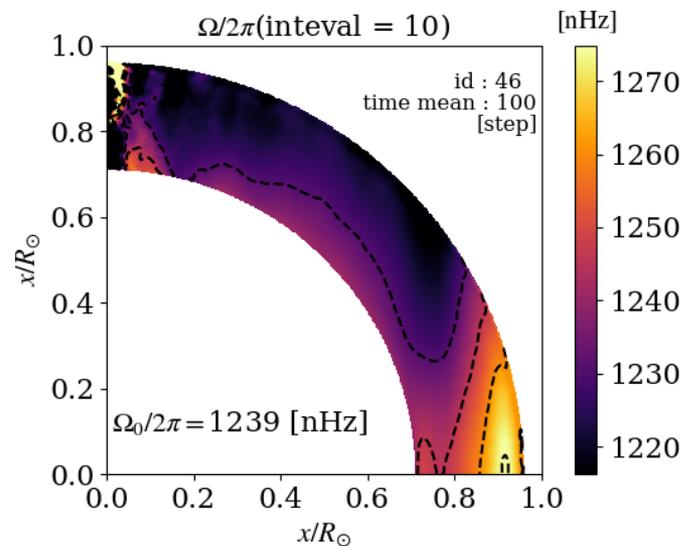
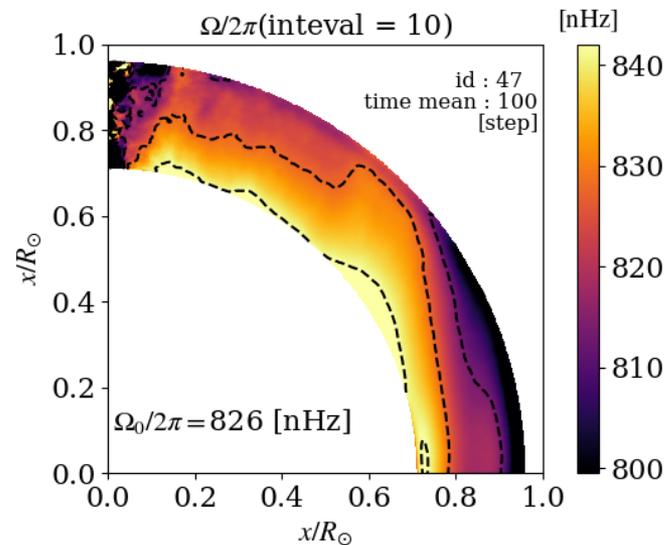
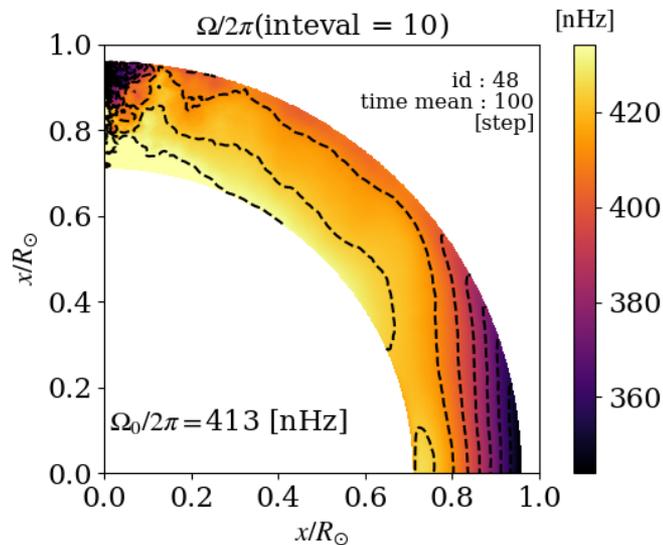
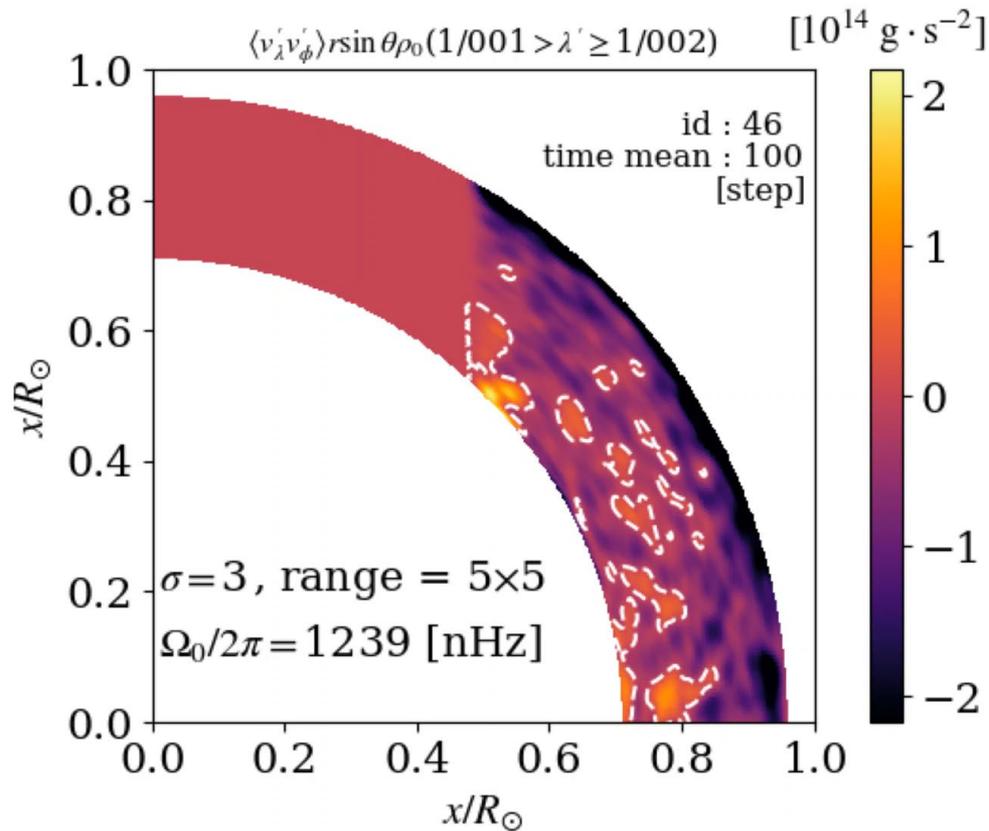


図7:  
左上から反時計回りに、id = 48, 47, 46の、  
回転角速度分布図。Intervalは、等高線  
の間隔を表す。

# 結果： $\langle v'_\lambda v'_\phi \rangle r \sin \theta \rho_0$ のDFT図, id = 46(3倍回転)の場合)



動画中で、空間スケールの大きさは、次第に小さくなる。

スケールが小さくなると、負の領域が支配的になる。

➤ 乱流の影響が強いときの理論と一致している。

次に、ケースごとの違いが見られたスケールを比較する。

図8： $\langle v'_\lambda v'_\phi \rangle r \sin \theta \rho_0$  のDFT図, id = 46

# 結果：角運動量フラックス $F_{R,\lambda}$ (スケール[140 Mm ~ 280 Mm])

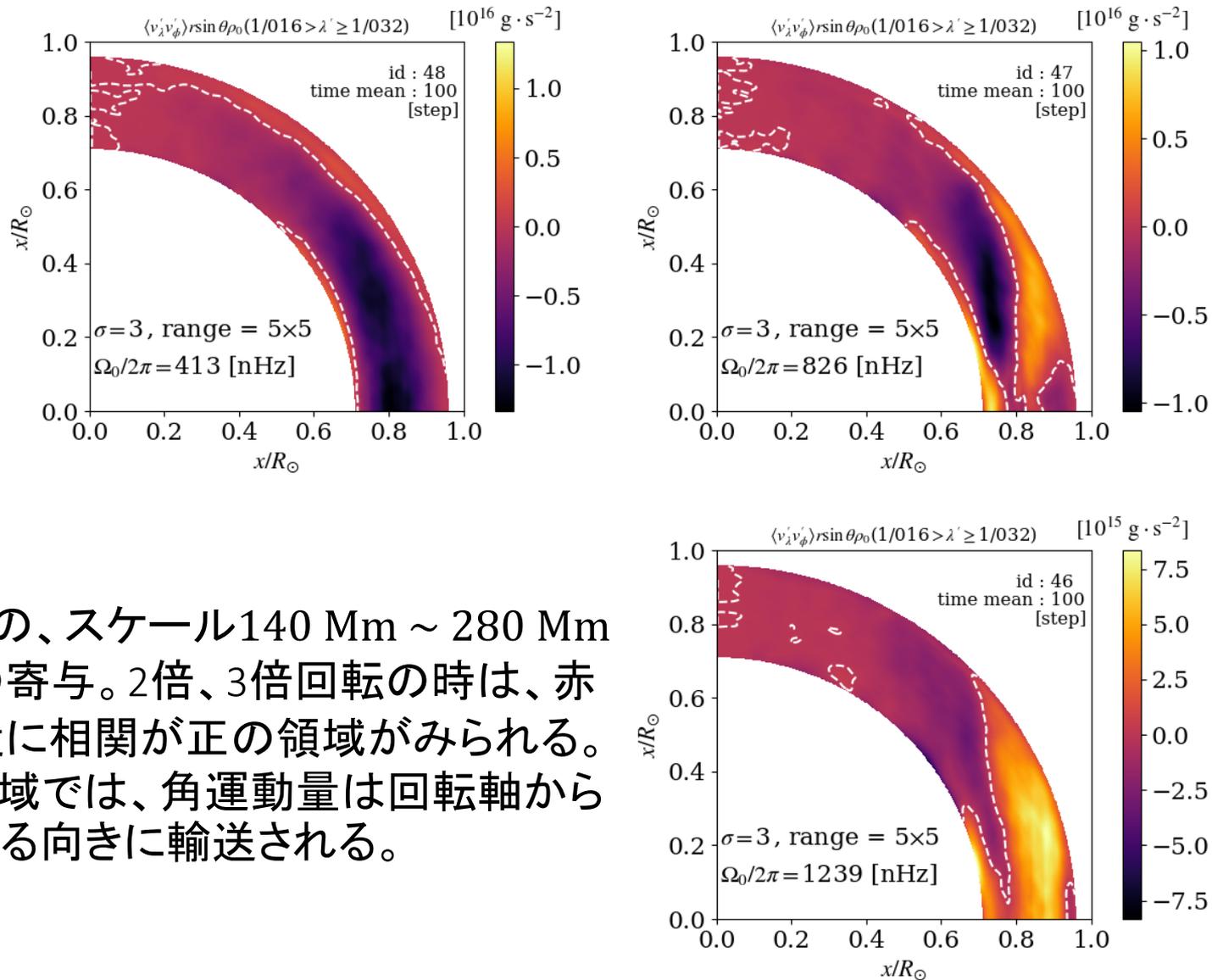


図9:

$F_{R,\lambda}$  への、スケール140 Mm ~ 280 Mm 程度の寄与。2倍、3倍回転の時は、赤道付近に相関が正の領域がみられる。この領域では、角運動量は回転軸から遠ざかる向きに輸送される。

# 結果：角運動量フラックス $F_{R,\lambda}$ (スケール [70 Mm ~ 140 Mm])

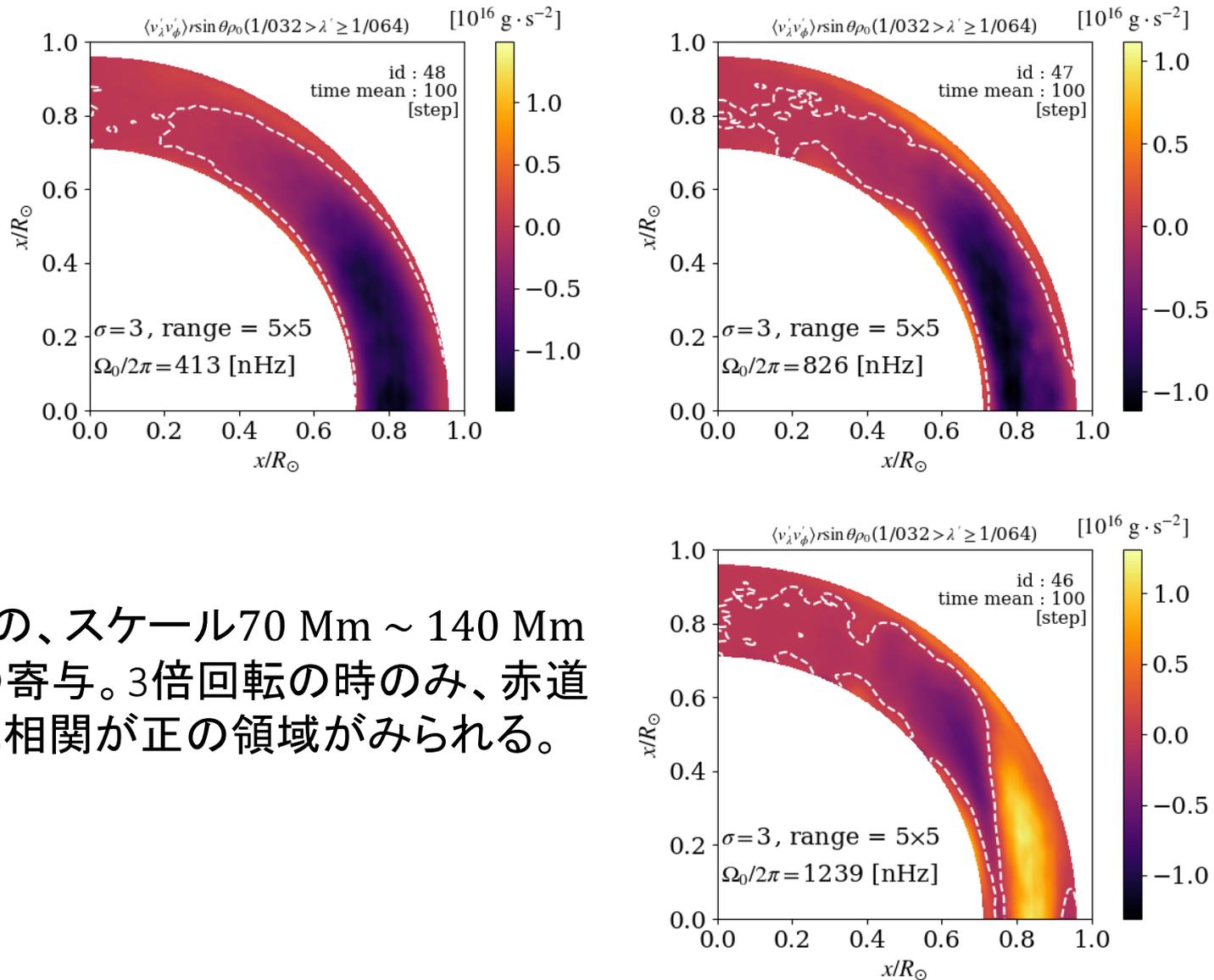


図10:  
 $F_{R,\lambda}$  への、スケール70 Mm ~ 140 Mm  
 程度の寄与。3倍回転の時のみ、赤道  
 付近に相関が正の領域がみられる。

## まとめ(1/2)

- 全てのケースで、スケールが小さくなると相関が負になっていた。

→ 乱流の影響が大きい(スケールが小さい)ときの理論と一致

- 2倍回転のケースは200 Mm程度、3倍回転のケースは100 Mm, 200 Mm程度のスケールで赤道～中緯度の相関が正になっていた。

→ 回転の影響が大きい(スケールが大きい)ときの理論と一致

$$\frac{\partial v_\lambda}{\partial t} = [\dots] + 2v_\phi \Omega_0 \quad \dots \textcircled{1}$$

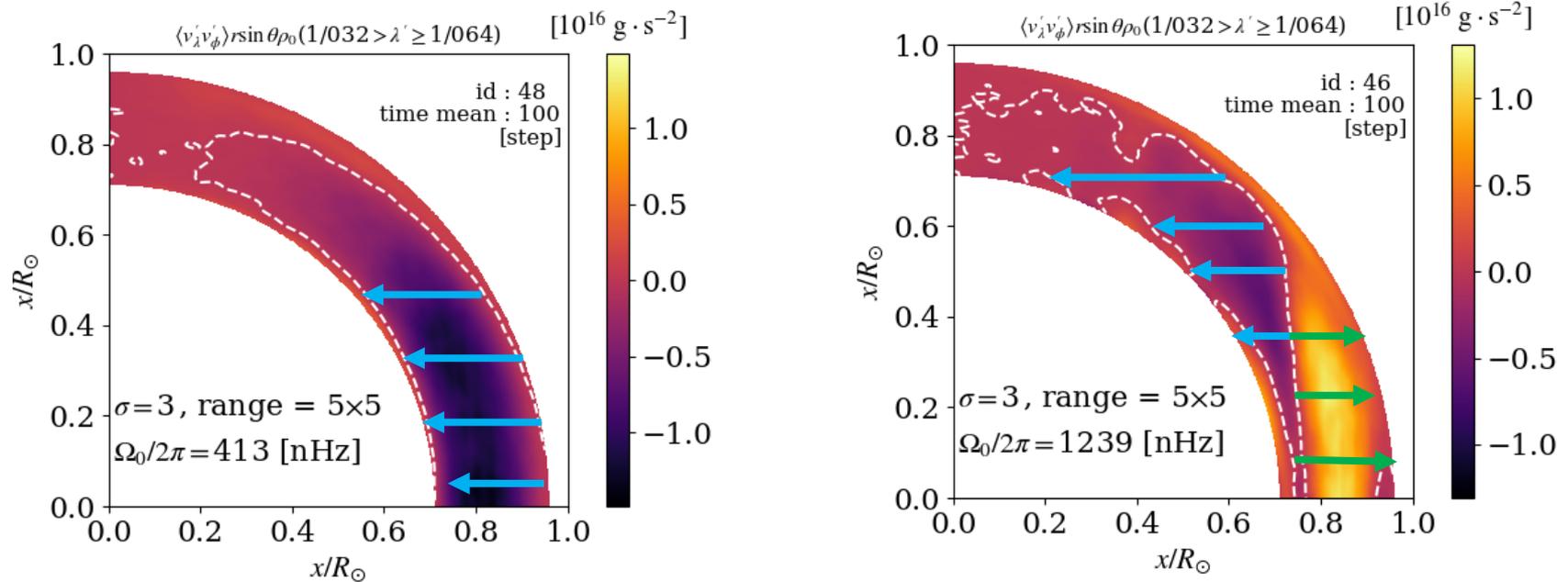
$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} = [\dots] - 2v_\lambda \Omega_0 \quad \dots \textcircled{2}$$

コリオリ力に注目した運動方程式。

回転の影響大 → ①

乱流の影響大 → ②

## まとめ(2/2)



1倍回転(左)と、3倍回転(右)のスケール100 Mm程度の寄与の比較。

1倍 : 200 Mm, 100 Mmのスケールで、乱流 > 回転 → 極が加速

2倍 : 200 Mmのスケールで、乱流 < 回転、100 Mmで乱流 > 回転

3倍 : 200 Mm, 100 Mmのスケールで、乱流 < 回転 → 赤道が加速



差動回転生成には、スケール100 Mmの輸送が重要

## 今後の展望

---

- 実際の角運動量輸送の式を書き下すと、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 \langle L \rangle) = -\nabla \cdot \left( \rho_0 \lambda \langle \mathbf{u}_m u_\phi \rangle - \frac{1}{4\pi} \lambda \langle \mathbf{B}_m B_\phi \rangle \right)$$

となる。つまり、角運動量の時間発展には、磁場も影響している。

Hotta & Kusano 2021, Nature Astronomyでは、高解像度シミュレーションにおいては、小規模磁場の働きが大きくなるため、実際に差動回転を決めている角運動量フラックスは磁場であると説明されている。

- 高解像度データを扱う場合は、磁場もスケール分解し、どのスケールが重要かを知る必要がある



# 補足

---

## 補足1.スケール分解

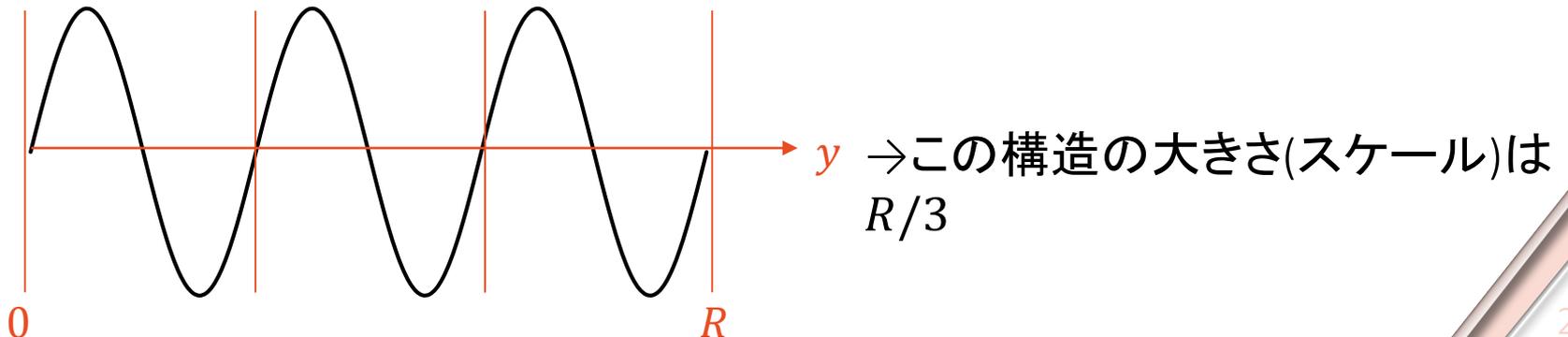
### ◆ スケール分解

ある物理量 $Q[y]$ を有限区間 $0 \leq y \leq R$ でフーリエ変換すると、その物理量を異なる波長の線形結合として表すことができる。

このとき、フーリエ変換する方向を $y$ 軸とすると、離散フーリエ変換の場合は、刻み幅 $\Delta y$ について、  
 $\Delta y = R/N$

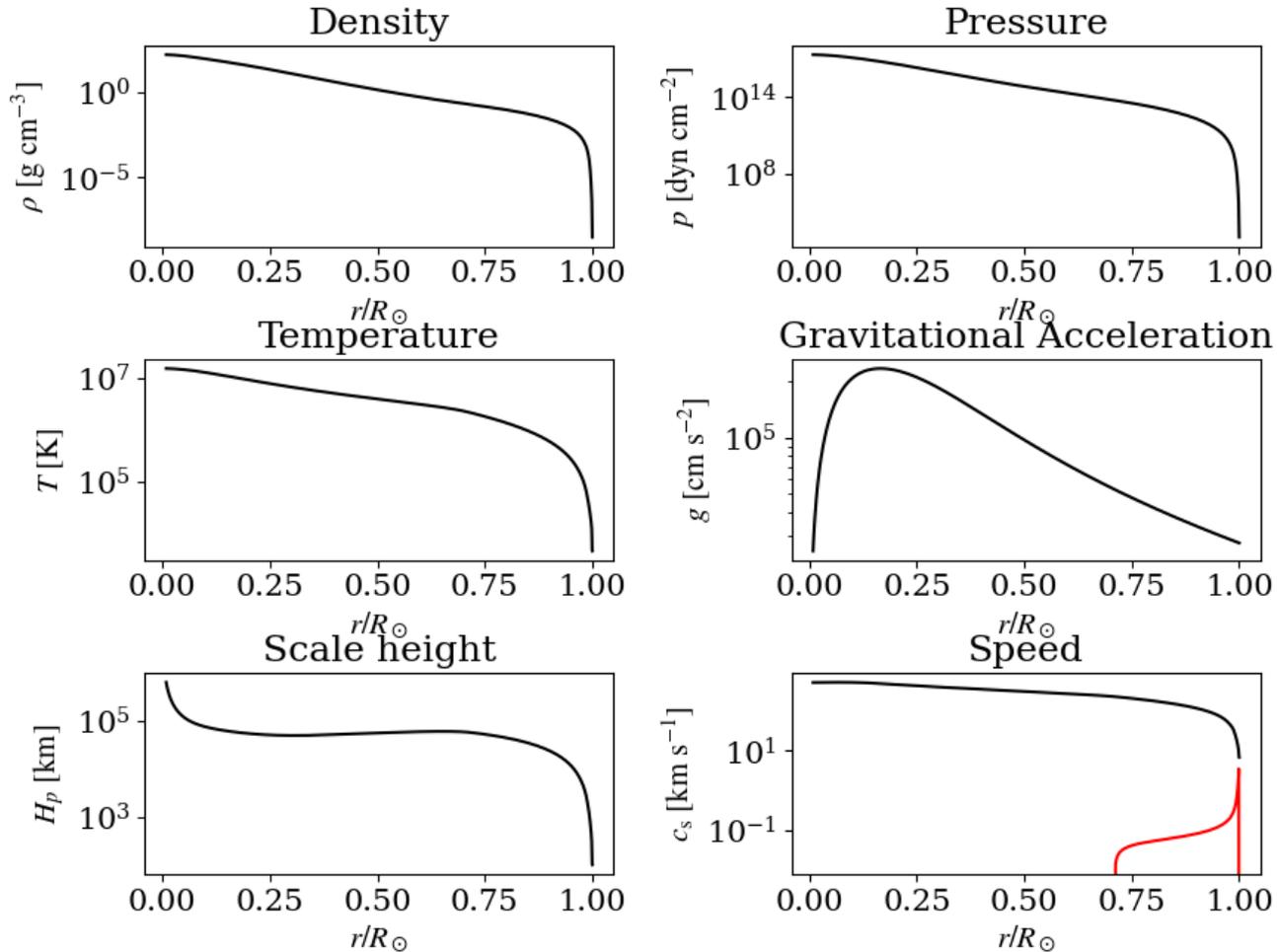
の関係が成立する。 $N$ は $0 \leq y \leq R$ の離散データの総数である。また、以下ではフーリエ変換後の物理量を $\hat{Q}$ で表す。

- 例えば、周期 $N/3$ ( $\hat{Q}[y'] = \hat{Q}[y' + N/3]$ )の波の場合、波長 $\lambda$ は $\lambda = R/3$ である。つまり、この波は有限区間 $0 \leq y \leq R$ 内で同じ構造を3つ持つ。



## 補足2.背景場

- 背景場と重力加速度は、Model S(Christensen-Dalsgaard et al.1996)から採用。



## 補足3.境界条件

---

### ◆ 上部境界

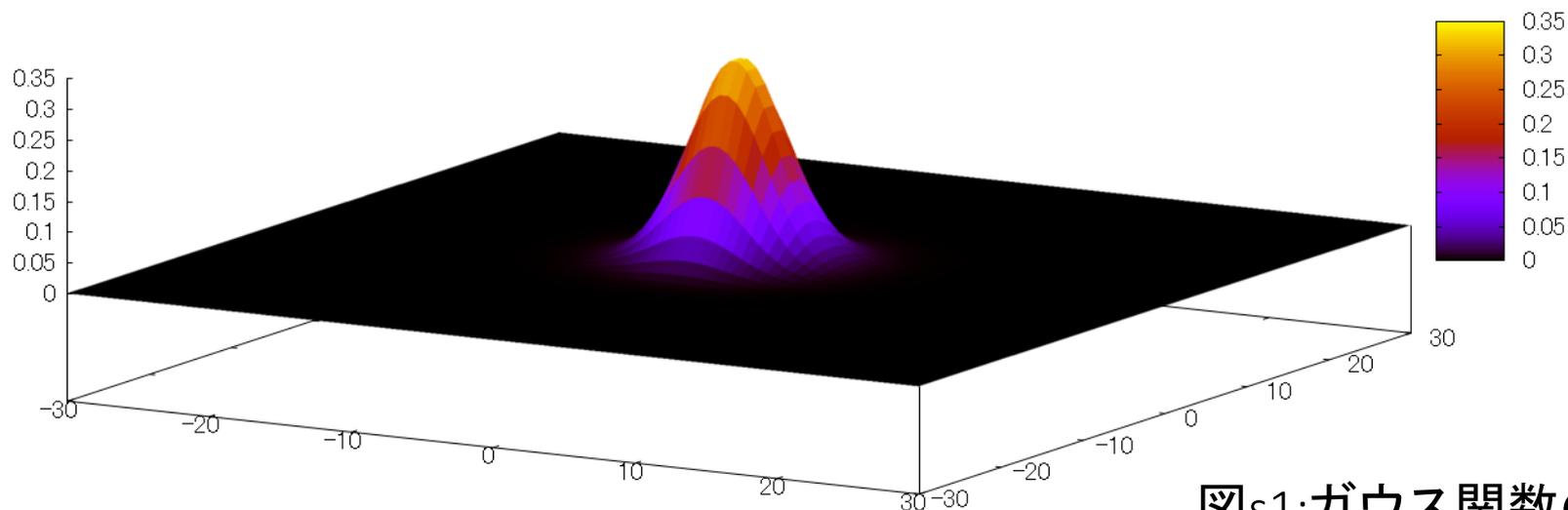
磁場があるときは、上部ではポテンシャル磁場境界条件を使う。

### ◆ 下部境界

- 開くとき、どの質量フラックスも対象にする。計算領域内の質量を一定に保つために、水平に平均した密度 $\bar{\rho}_1$ は反対称。そこからはずれ $\rho_1 - \bar{\rho}_1$ は対称な境界条件。
- エントロピーは、上昇流で反対称、下降流で対称?な境界条件をとる。

## 補足4.ガウシアンフィルタ

- 乱流を考慮するため、データの変動が大きくなっている。この欠点を解消するためにガウシアンフィルタを使った。以下の形の関数を使って、重みをつけた平均をとる。



図s1:ガウス関数の概形

- 式で書くと次の通り。 
$$g(x, y, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$$
- 全てのケースで  $\sigma = 3$  とし、フィルタ半径は5とした。

## 方程式の各項の説明

- エントロピー方程式、式 (付録 B.4)

加熱項  $Q_s$  は、2つの放射流束で以下の式のように表される。

$$Q_s = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 (F_{\text{rad}} + F_{\text{art}})] \quad (\text{付録 B.6})$$

$$F_{\text{rad}} = -\kappa_r \frac{dT_0}{dr} \quad (\text{付録 B.7})$$

$$F_{\text{art}} = L_{\odot} \left( \frac{r}{r_{\text{max}}} \right)^2 \exp \left[ - \left( \frac{r - r_{\text{max}}}{d_{\text{art}}} \right) \right] \quad (\text{付録 B.8})$$

ここで、 $F_{\text{rad}}$  は放射流束、 $F_{\text{art}}$  は人工エネルギー流束である。

$F_{\text{rad}}$  について、ここでは拡散近似を使い、放射拡散係数は Model S のものを採用する。

また、 $F_{\text{art}}$  の項は、計算領域に光球が含まれないため、光球による放射エネルギーを補うために採用されている。この項により、上部境界  $r_{\text{max}} = 0.96R_{\odot}$  から太陽光度  $L_{\odot}$  を抽出する。 $d_{\text{art}}$  は深さ方向の冷却層であり、 $d_{\text{art}} = 2H_p(r_{\text{max}})$  で定義される ( $H_p(r_{\text{max}}) = 9.46 \text{ Mm}$  は  $r = 0.96R_{\odot}$  での圧力スケールハイト)。

- 熱力学的関係、式 (付録 B.5)

この式は圧力  $p$  を  $(\rho, s)$  の関数としてその微小変化を考えたものである。右辺の係数  $(\partial p / \partial \rho)_s$  と  $(\partial p / \partial s)_\rho$  は、OPAL repository (Rogers et al. 1996) を用いて計算される。

## 角運動量輸送の式

- 角運動量の輸送の項に注目した角運動量輸送の式。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 \langle L \rangle) = -\nabla \cdot (\rho_0 \lambda \langle \mathbf{u}_m u_\phi \rangle)$$

$\rho L = \rho r \sin \theta u_\phi$  : 単位体積当たりの角運動量

$$\lambda = r \sin \theta$$

$\mathbf{u}_m \equiv u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta$  : 慣性系での速度

$\langle \dots \rangle$  : 経度方向平均

- $\mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}'$  として、(経度方向)平均部分と摂動部分に分けた式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 \langle L \rangle) = -\nabla \cdot (\rho_0 \lambda \langle \mathbf{u}_m \rangle \langle u_\phi \rangle) - \nabla \cdot (\rho_0 \lambda \langle \mathbf{u}'_m u'_\phi \rangle)$$

## 補足5.角運動量輸送の式の導出(1/2)

- 角運動量輸送の式は、運動方程式の $\phi$ 成分に $r\sin\theta$ をかけ、経度方向平均をとると導出できる。
- 慣性系で考えたときの $\phi$ 方向の運動方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_\phi) = -[\nabla \cdot (\rho u u + \sigma)]_\phi + [\rho K]_\phi$$

$\sigma$ : 応力テンソル  
 $K$ : 外力(体積力)

と書ける。ここで、テンソル $T$ について、 $T_\phi = T_{r\phi} \mathbf{e}_r + T_{\theta\phi} \mathbf{e}_\theta + T_{\phi\phi} \mathbf{e}_\phi$ であり、任意の対称テンソル $T$ について、

$$r \sin \theta [\nabla \cdot T]_\phi = \nabla \cdot (r \sin \theta [T]_\phi)$$

が成り立つ。さらに、粘性応力テンソルの表式を代入すると、圧力勾配項が出てくるが、経度方向平均をとると $\phi$ 依存性が消えるので、最終的には

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho L \rangle = -\nabla (\lambda \langle \rho u u_\phi \rangle)$$

## 補足5.角運動量輸送の式の導出(2/2)

---

(続き)となる。ここで、輸送の項に注目したいので、粘性の項と外力の項を無視した。

- さらに、 $\rho_0 \gg \rho_1$ を仮定して $\rho = \rho_0 + \rho_1 \simeq \rho_0$ と近似すると、 $\rho_0$ は半径にのみ依存するので、平均の外に出すことができ、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 \langle L \rangle) = -\nabla \cdot (\rho_0 \lambda \langle \mathbf{u} u_\phi \rangle)$$

という式が得られる。また、 $L = r \sin \theta u_\phi$ ,  $\lambda = r \sin \theta$ であり、 $L$ は単位質量当たりの角運動量である。

## 補足6.スケールと $n$ の対応関係

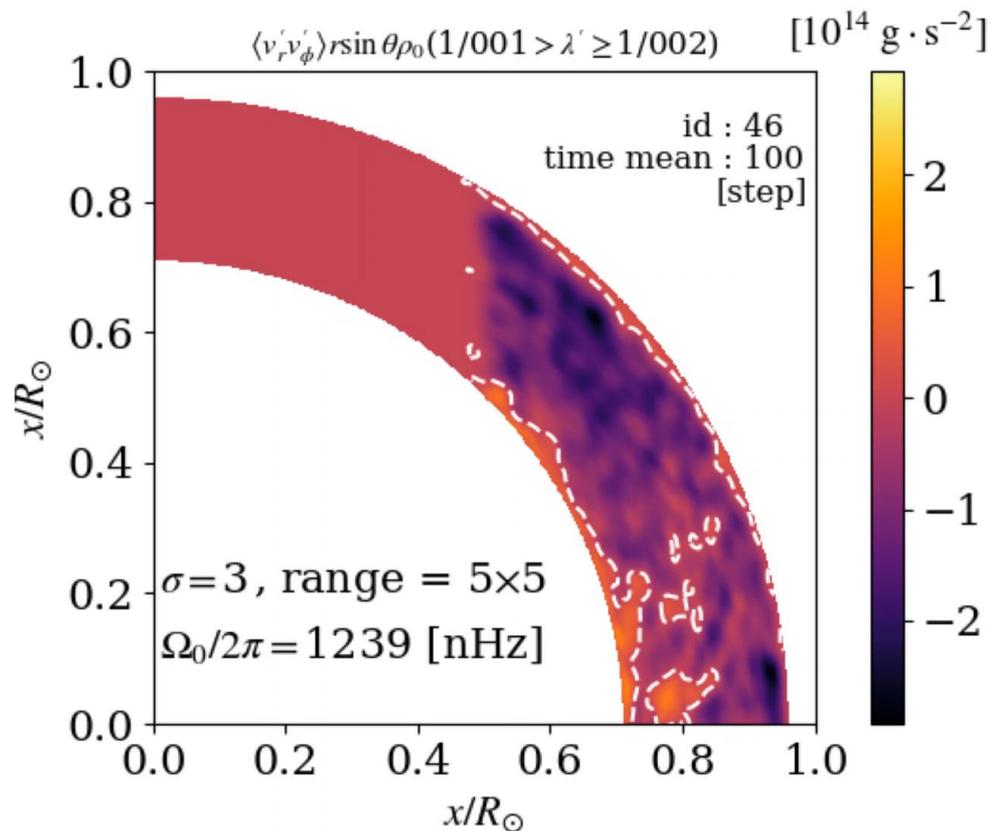
$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
scale(min) [Mm]	2187	1093	547	273	137	68	34	17	9
scale(max) [Mm]	4373	2187	1093	547	273	137	68	34	17

表:

$f_{R,r}(n)$ が実際に表すスケールの、最小値、最大値。 $f_{R,r}(n)$ の定義は、以下の通り。

$$f_{R,r}(n) \equiv 2 \sum_{\lambda'=1/2^n}^{1/2^{n-1}} \operatorname{Re}[\hat{v}_r(\lambda')\hat{v}_\phi^*(\lambda')]$$

# 結果( $\langle v'_r v'_\phi \rangle r \sin \theta \rho_0$ )のDFT図, id = 46(3倍回転)の場合)



動画中で、空間スケールの大きさは、次第に小さくなる。

スケールが小さくなると、負の領域が支配的になる。これは、乱流の影響が強いときの傾向である。

次に、どのスケールの寄与が一番大きいかを調べる。

図: $\langle v'_r v'_\phi \rangle r \sin \theta \rho_0$ のDFT図, id = 46

## 補足7. $\int dV |f_{R,r}(n)|$

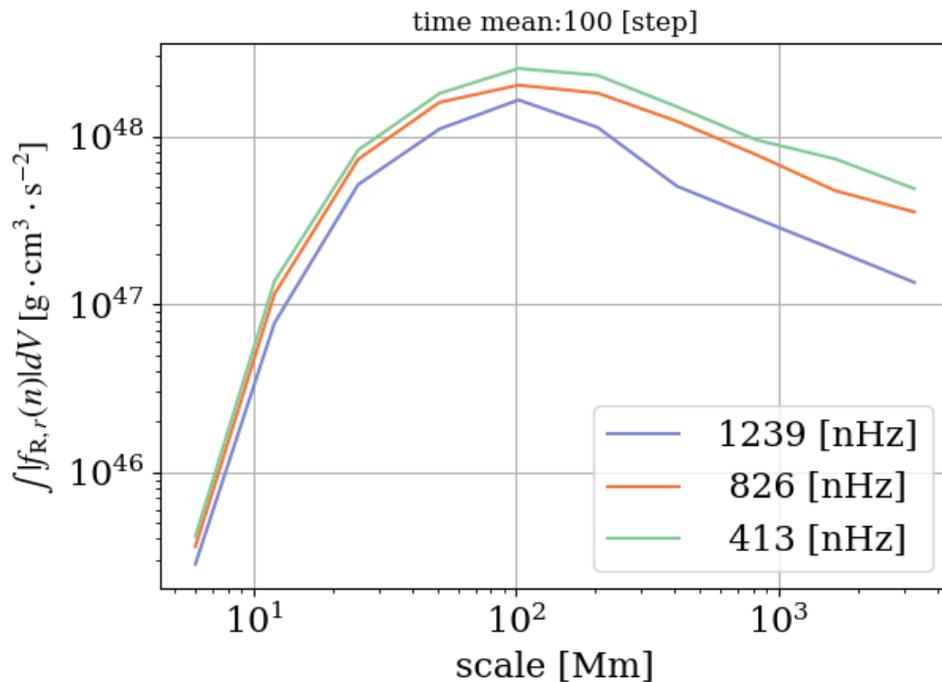


図:

$\int dV |f_{R,r}(n)|$  の図。プロットする位置は、例えば  $n = 6$  の場合、実際のスケールに直すと 70 Mm ~ 140 Mm なので、  
(70 + 140)/2 の位置になっている。

図を見ると、 $n = 6$  (スケール 100 Mm 程度) の寄与が大きいことが分かる。

➤ それぞれのケースで、 $n = 6$  の場合を比較する。

## 結果( $f_{R,r}(6)$ 、基準角速度ごとの比較)

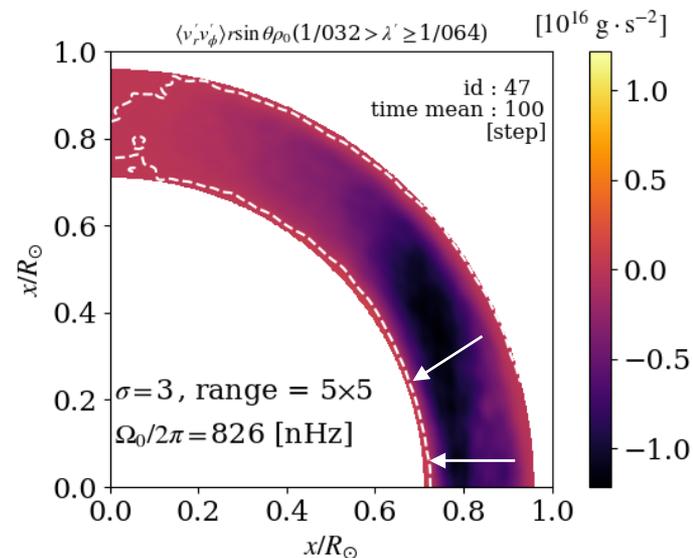
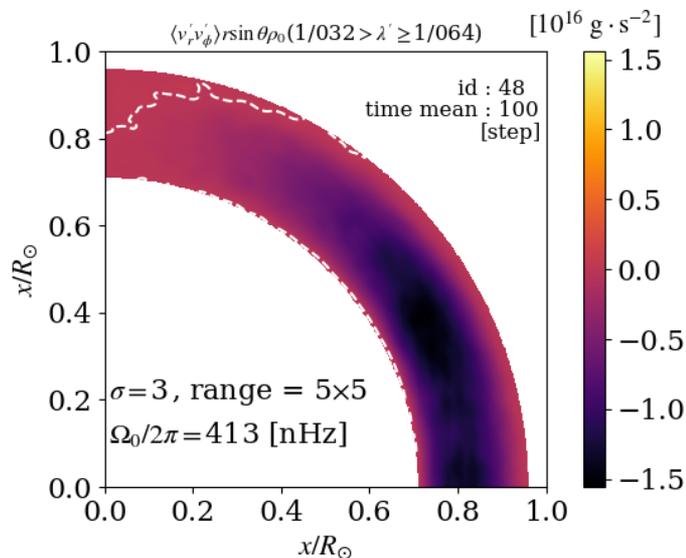
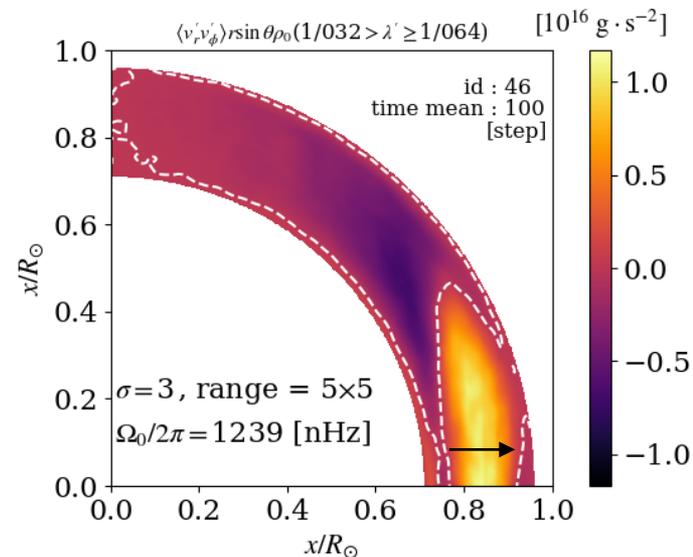
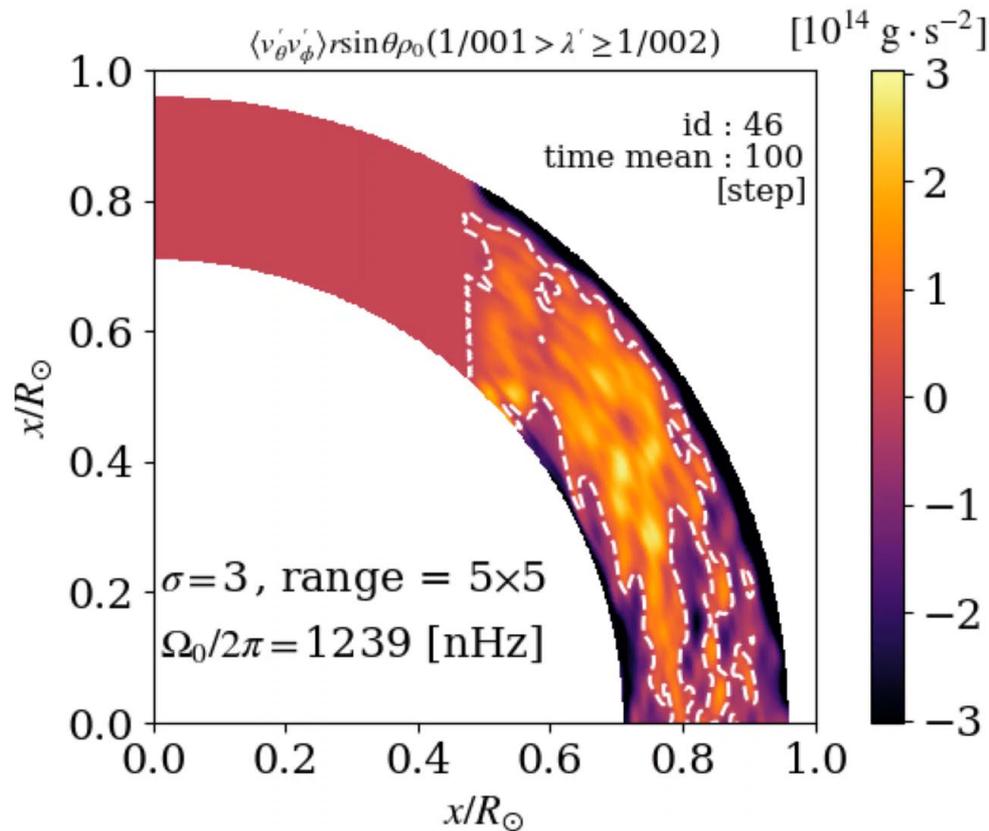


図:

$f_{R,r}(6)$ の、基準角速度ごとの比較。実際のスケールに直すと、[70 Mm ~ 140 Mm]程度になる。3倍回転の時は、赤道付近に相関が正の領域がみられる。この領域では、角運動量は赤道に運ばれ、赤道が極よりも速く自転する。



## 結果( $\langle v'_\theta v'_\phi \rangle r \sin \theta \rho_0$ )のDFT図, id = 46(3倍回転)の場合)



動画中で、空間スケールの大きさは、次第に小さくなる。

スケールが小さくなるにつれて正の領域が支配的になっている。

また、自転角速度が異なるケースを比較しても、大きな違いは見られなかった。

➤ 角運動量フラックスの $\theta$ 成分は、差動回転生成に大きな寄与をしていないと考えられる。

図: $\langle v'_\theta v'_\phi \rangle r \sin \theta \rho_0$ のDFT図, id = 46

## 補足7. $\int dV |f_{R,\theta}(n)|$

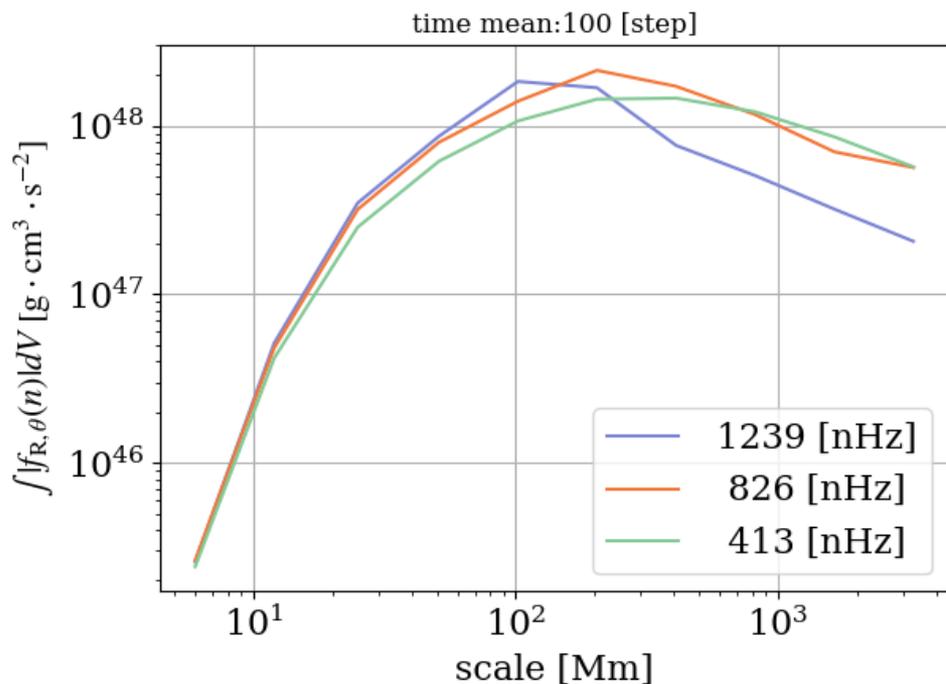


図:

$\int dV |f_{R,\theta}(n)|$  の図。プロットする位置は、例えば  $n = 6$  の場合、実際のスケールに直すと 70 Mm ~ 140 Mm なので、  
(70 + 140)/2 の位置になっている。

図を見ると、3倍回転のみ  $n = 6$  (スケール 100 Mm 程度) の寄与が大きく、その他は  $n = 5$  (スケール 200 Mm 程度) の寄与が大きいことが分かる。

- それぞれのケースで、 $n = 5, 6$  の場合を比較する。

## 補足7.結果( $f_{R,\theta}(5)$ 、基準角速度ごとの比較)

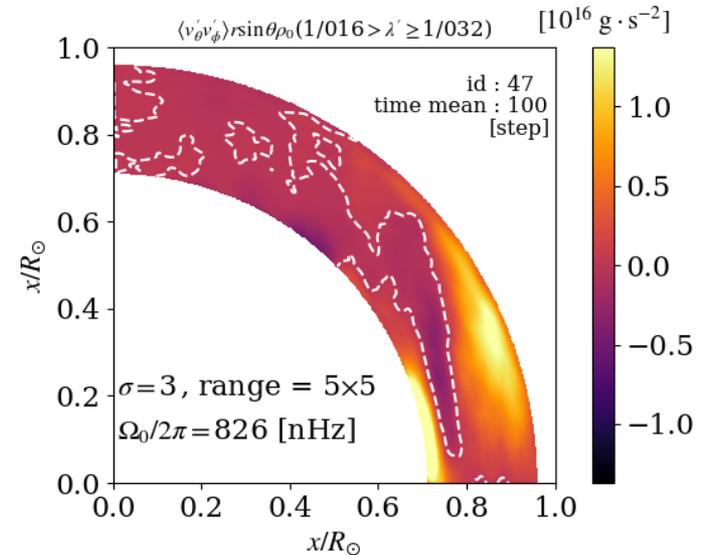
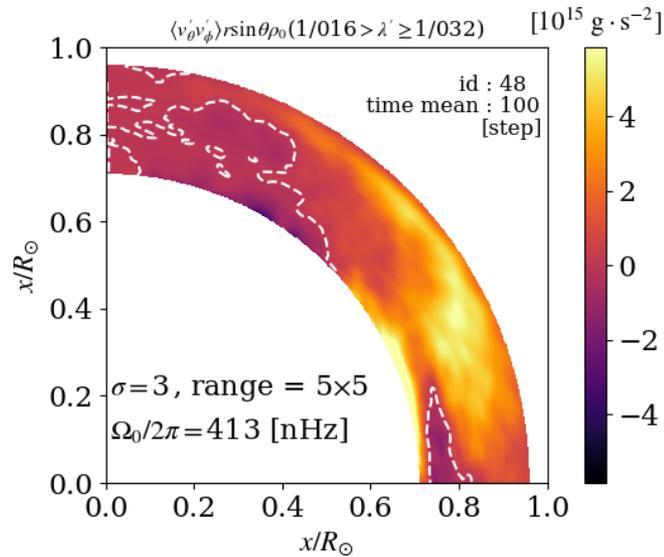
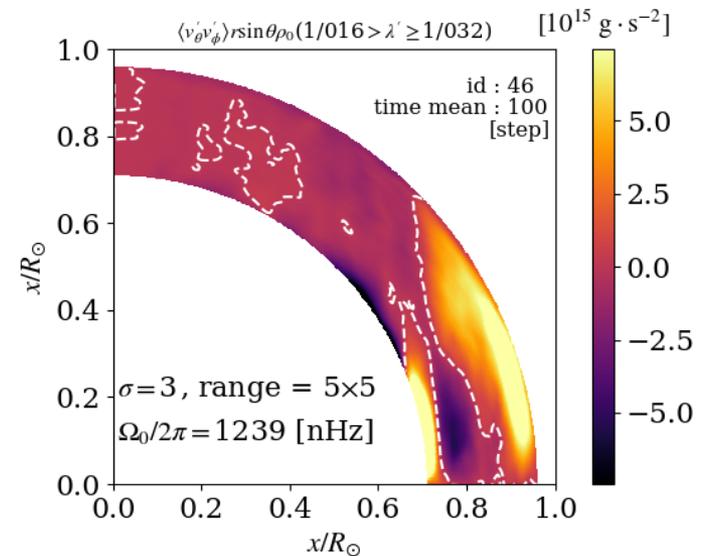


図:  
 $f_{R,\theta}(5)$ の、基準角速度ごとの比較。実際のスケールに直すと、  
 [140 Mm ~ 280 Mm]程度になる。ケースごとの違いは、よく分からない。



## 補足7.結果( $f_{R,\theta}(6)$ 、基準角速度ごとの比較)

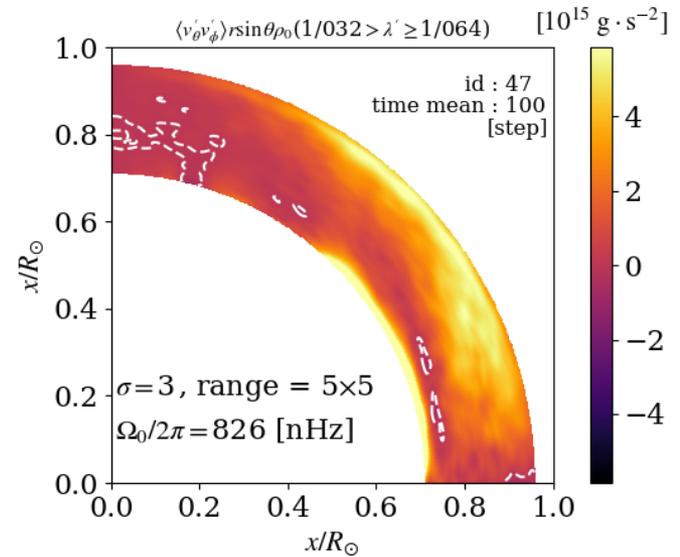
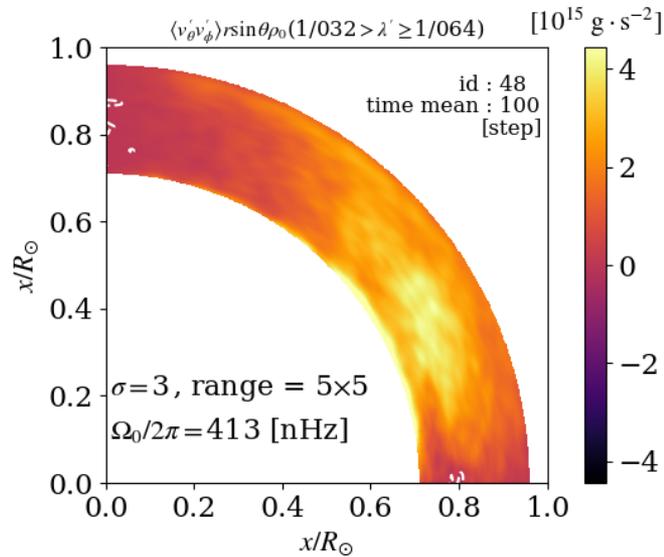
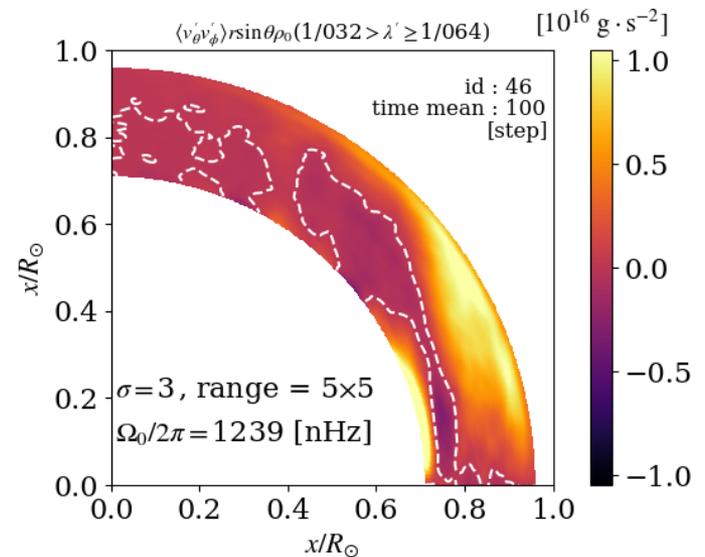


図:

$f_{R,\theta}(5)$ の、基準角速度ごとの比較。実際のスケールに直すと、[70 Mm ~ 140 Mm]程度になる。どのケースも共通して、正の領域が支配的になる。



# 補足??.スケール分解する前の、乱流角運動量フラックス $F_{R,\lambda}$

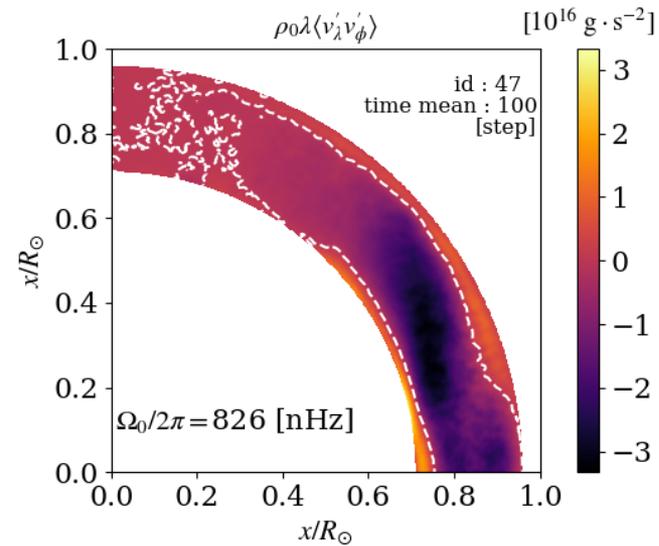
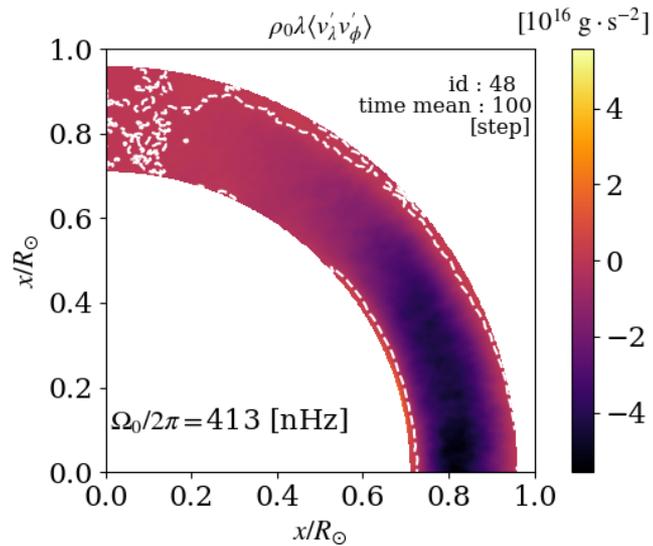
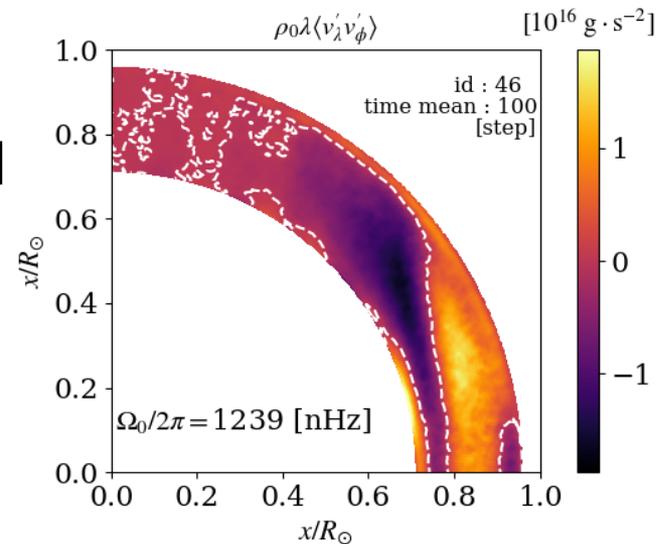


図:  
それぞれのケースの、乱流角運動量フラックス $\rho_0 \lambda \langle v'_\lambda v'_\phi \rangle$ 。3倍回転の時のみ、回転軸から遠ざかる向きの輸送がある。



## 補足8.子午面環流(1/2)

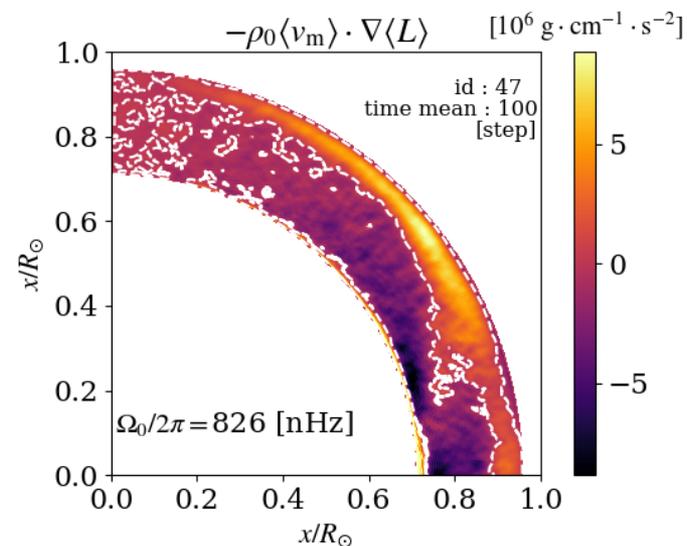
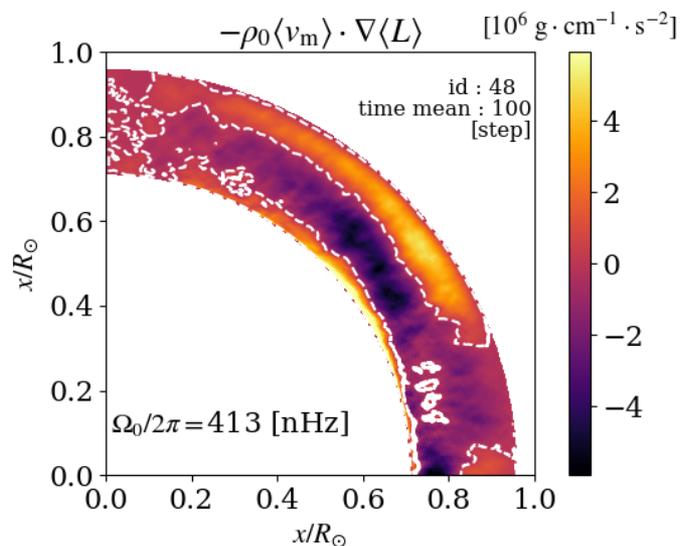
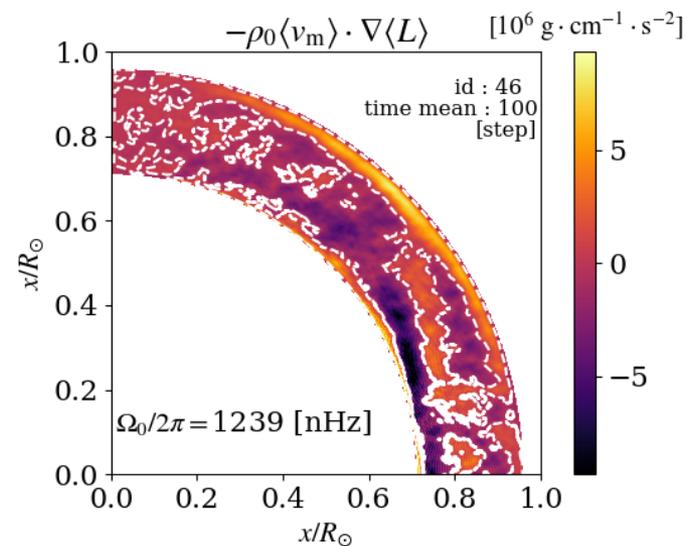


図:  
それぞれのケースの、子午面環流( $-\rho_0 \langle v_m \rangle \cdot \nabla \langle L \rangle$ )。子午面環流とは、子午面における軸対称な流れ $\langle v_r \rangle, \langle v_\theta \rangle$ のことであり、ベクトル形式で書くと、 $\langle v_m \rangle = \langle v_r \rangle \mathbf{e}_r + \langle v_\theta \rangle \mathbf{e}_\theta$ となる。



## 補足8.子午面環流(2/2)

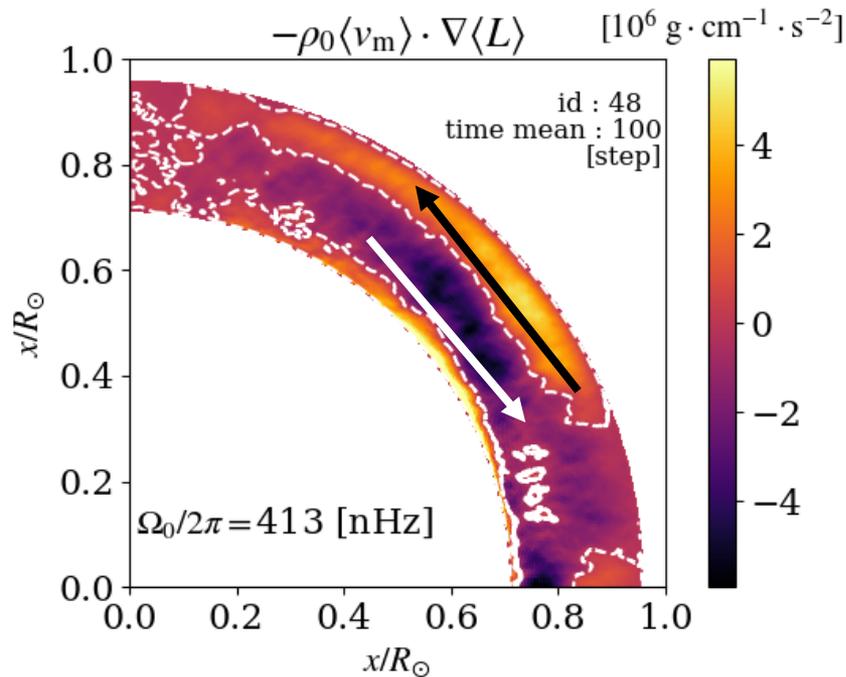


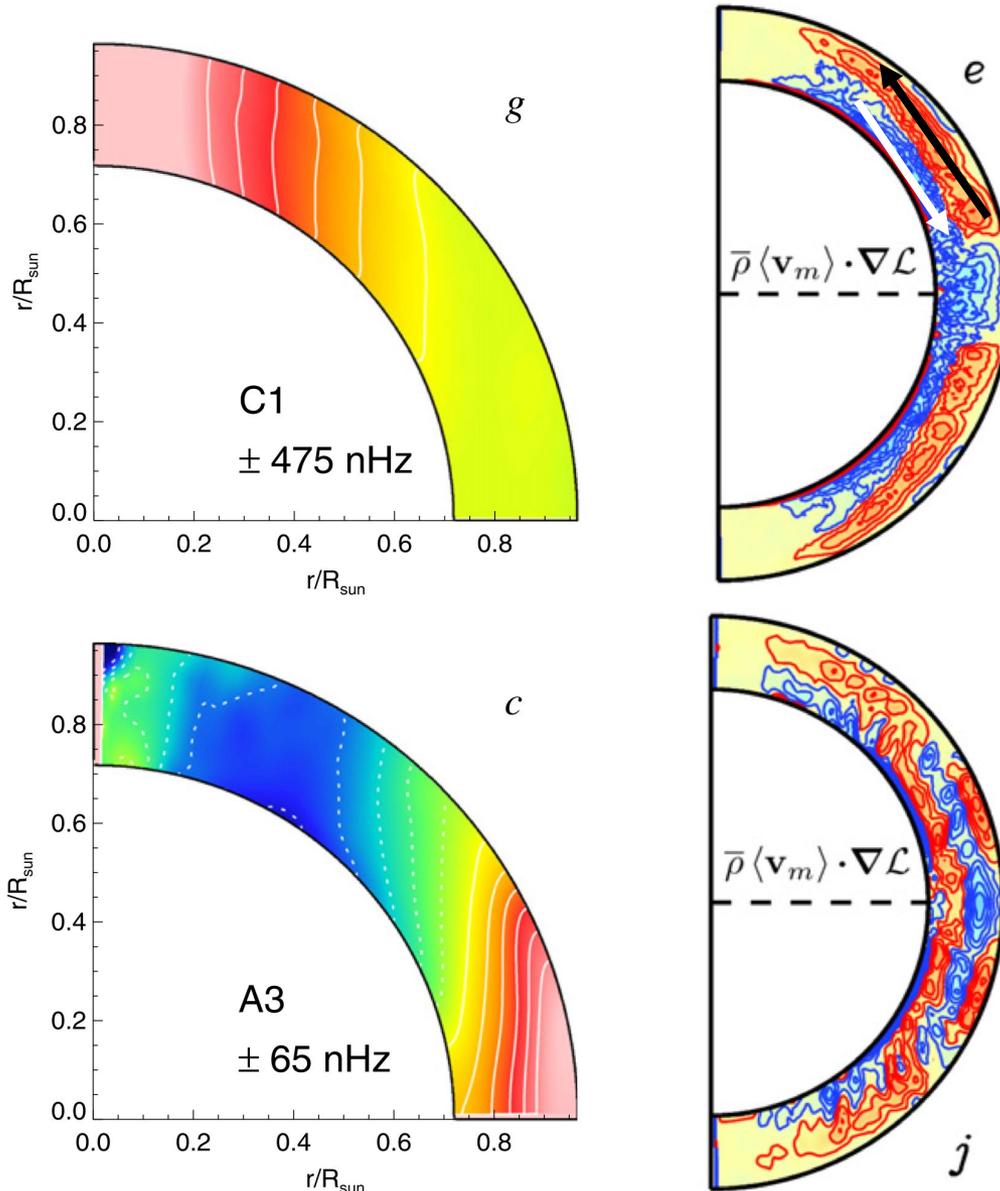
図:  
1倍回転の時の子午面環流。  
1倍回転のケースの場合、流れは図に矢印で書いた向きになる。

$\langle L \rangle$ の値は回転軸からの距離にほぼ比例するので、 $\langle v_m \rangle \cdot \nabla \langle L \rangle \simeq \langle v_\lambda \rangle \times \partial L / \partial \lambda$ となる。

ここで、 $v_\lambda$ は回転軸に垂直な向きの速度であり、 $\lambda = r \sin \theta$ は回転軸からの距離(デカルト座標で言う、 $x$ )を表す。

$\partial L / \partial \lambda > 0$ が成り立つことから、 $-\rho_0 \langle v_m \rangle \cdot \nabla \langle L \rangle$ が正のときは $\langle v_\lambda \rangle$ が負なので、回転軸からの距離が短くなる向きに流れが存在する(黒矢印)。負の時は、反対に白矢印の向きに流れる。

# 補足??.子午面環流と差動回転の関係



- 左の(基準角速度の値を引いた)差動回転の図では、赤が正、青が負になっているのに対し、右の子午面環流の図では赤が負になっている。
- 極が速いときは単一の子午面環流セルができており、赤道が速いときは複数セルができています。

図: Featherstone+, 2015  
 差動回転の図(左)と、それに対応する子午面環流(右、 $\bar{\rho} \langle \mathbf{v}_m \rangle \cdot \nabla \mathcal{L}$ )を表す。

## 補足??.Gyroscopic Pumping

- 角運動量の式において、定常状態を考え、さらに非弾性近似を用いると、次のように式を変形できる。

$$-\rho_0(\langle v_m \rangle \cdot \nabla) \langle L \rangle = \nabla \cdot (\rho_0 \lambda \langle v'_m v'_\phi \rangle)$$

- この式は、gyroscopic pumping と呼ばれる式であり、子午面環流と角運動量フラックスの関係を示している。
- gyroscopic pumpingに現れる変数は $\rho_0$ ,  $\langle v_m \rangle$ ,  $L$ ,  $\langle v'_m v'_\phi \rangle$ の4つ。 $\rho_0$ は初期条件として与えられる量であり、 $L$ はほぼ回転軸からの距離に比例する形になっているので、分かっている変数は $\langle v_m \rangle$ ,  $\langle v'_m v'_\phi \rangle$ の2つである。
- よって、上の式は速度相関 $\langle v'_m v'_\phi \rangle$ (レイノルズ応力)が分かれば平均流 $\langle v_m \rangle$ (子午面環流)が分かる式になっている。つまり、子午面環流の分布を決めるのはレイノルズ応力である。

## 補足??.乱流角運動量フラックスと子午面環流の関係(1/2)

- 1倍回転と3倍回転の角運動量フラックスで異なる点は、赤道~中緯度付近のふるまいである。

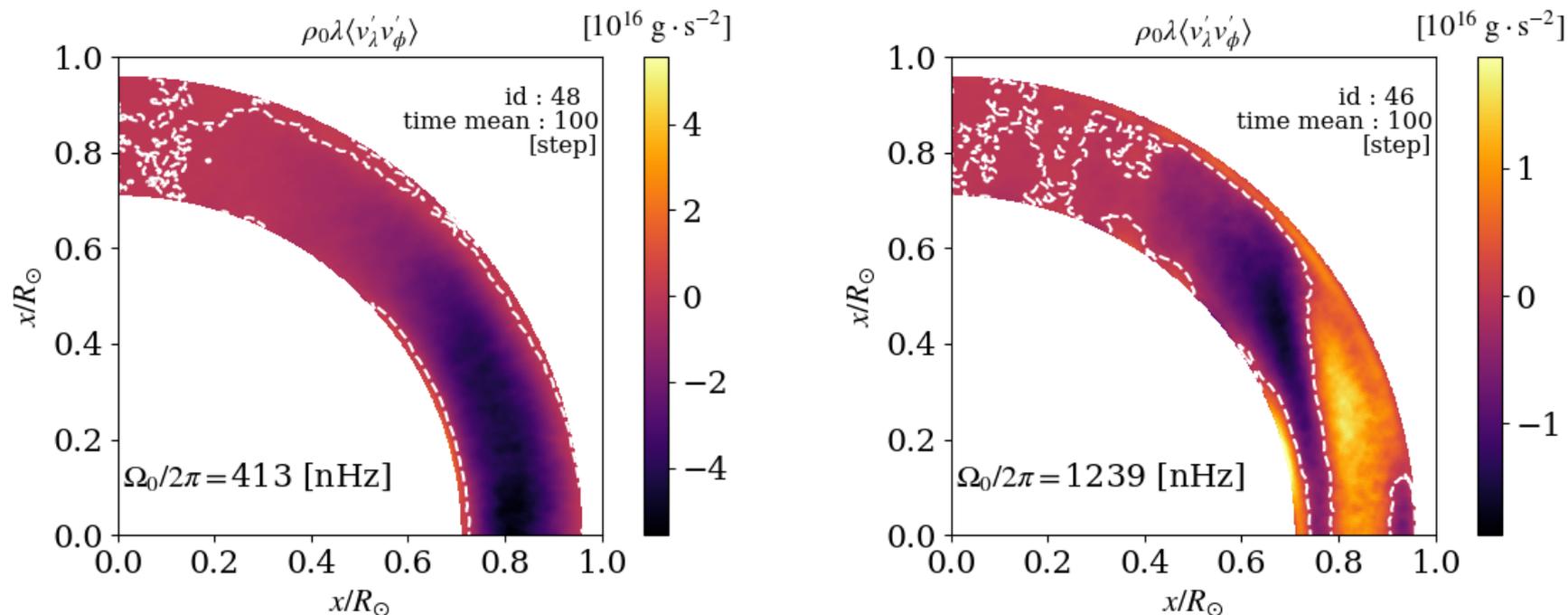
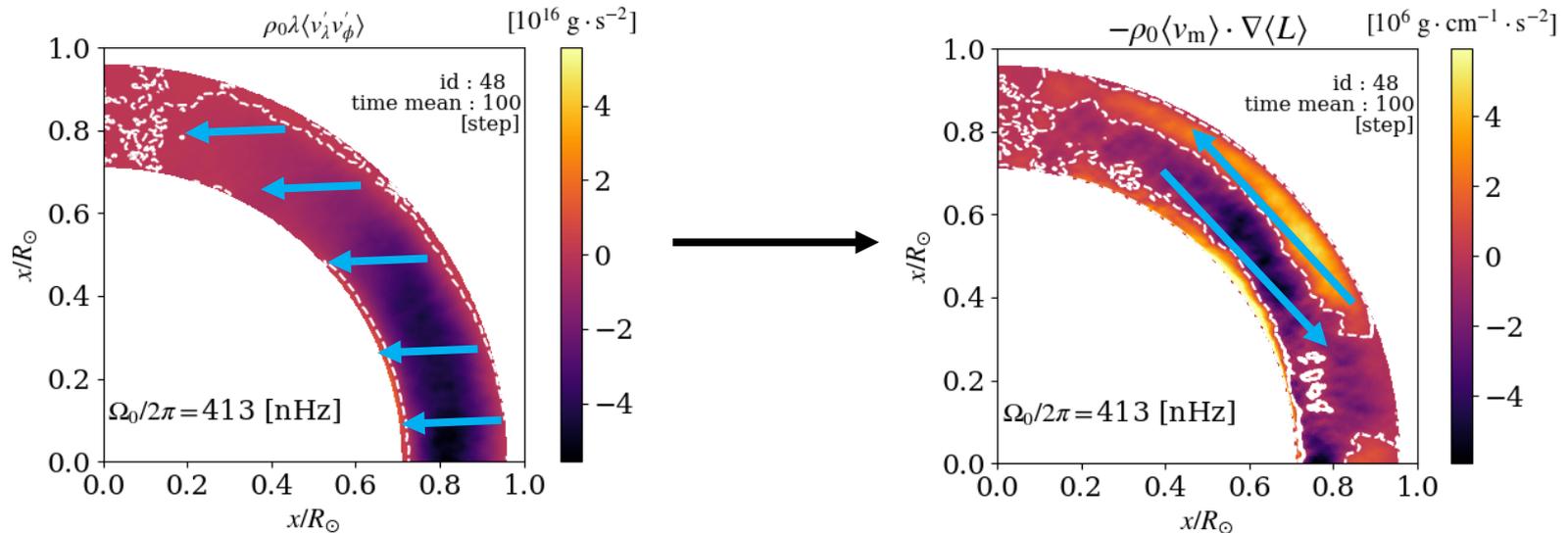


図:1倍回転(左)と、3倍回転(右)の、回転軸に垂直な向きの乱流角運動量フラックス $\rho_0 \lambda \langle v'_\lambda v'_\phi \rangle$ 。右図を見ると、赤道~中緯度付近の輸送は外向きになっている。

## 補足??.乱流角運動量フラックスと子午面環流の関係(2/2)

- 1倍回転の時、角運動量が赤道から極に運ばれるのは、以下の現象が起きているからである。



1. 内向きの  
角運動量輸送が起きる。

2. 表層付近の角運動量が減少するので、減った角運動量を補おうと、角運動量の多い赤道から運ぶ流れ(子午面環流)が生じる。  
上図中の矢印のような流れになる。

## 補足9.子午面環流による角運動量輸送(1/3)

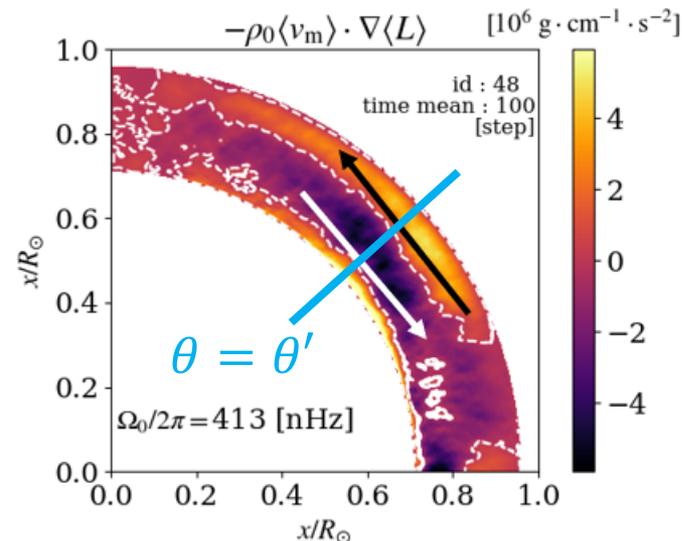
- ここでは、子午面環流があると角運動量が輸送されることを説明する。非弾性近似を用いると、質量保存則は、

$$\nabla \cdot (\rho_0 \langle \mathbf{u}_m \rangle) = \nabla \cdot (\rho_0 \langle \mathbf{u} \rangle) = 0$$

となる。

- ここで、 $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ ,  $\theta' \leq \theta \leq \theta' + \Delta\theta$ の閉曲面 $\Delta S$ を考えると、 $\Delta S$ から流出する正味の質量流束は0になる。さらに、半径方向の境界条件として、表面からの質量流出が0になる条件を採用すると、 $\theta$ 方向のみで、質量流入出が0になる。

$\theta = \theta'$ での、質量流入出の例。  
仮に、右図の黒矢印のような質量流束があった場合、同じ強さで反対向きの白矢印の流れも存在すると考えられる。



## 補足9.子午面環流による角運動量輸送(2/3)

- ここで、角運動量の式を思い出すと、

$$\langle L \rangle = r \sin \theta \langle u_\phi \rangle = \lambda \langle u_\phi \rangle = \lambda (\langle v_\phi \rangle + \lambda \Omega_0) \simeq \lambda^2 \Omega_0$$

と書ける。ここで、 $v_\phi$ は回転系から見た $\phi$ 方向速度であり、 $\lambda \Omega_0$ に比べて小さいので、最後の式で $\simeq$ を用いた。

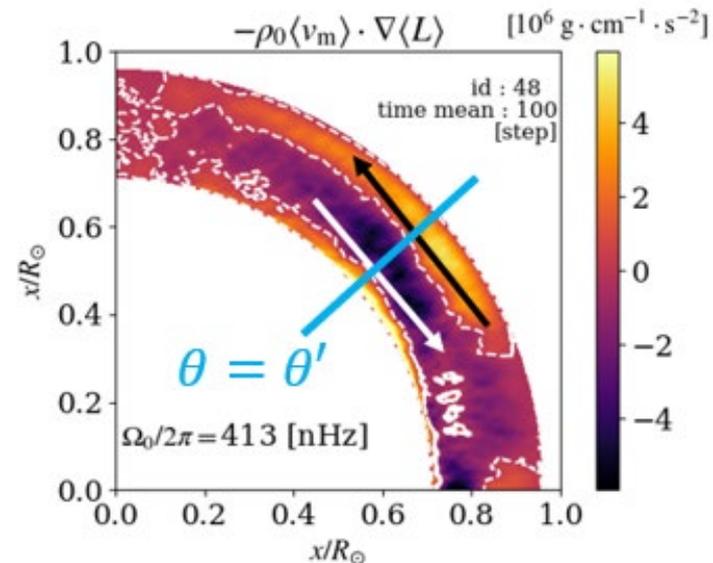
- この $\langle L \rangle$ に $\rho_0 \langle v_m \rangle$ をかけた、 $\rho_0 \langle v_m \rangle \langle L \rangle$ は、角運動量輸送の式に登場する角運動量フラックスである。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 \langle L \rangle) &= -\nabla \cdot (\rho_0 \lambda [\langle \mathbf{u}_m \rangle \langle u_\phi \rangle + \langle \mathbf{u}'_m u'_\phi \rangle]) \\ &= \boxed{-\nabla \cdot (\rho_0 \lambda \langle \mathbf{u}_m \rangle \langle u_\phi \rangle)} - \nabla \cdot (\rho_0 \lambda \langle \mathbf{u}'_m u'_\phi \rangle) \\ &= -\nabla \cdot (\rho_0 \langle L \rangle \langle \mathbf{u}_m \rangle) \end{aligned}$$

- この、赤い四角で囲った項は、角運動量 $\rho_0 \langle L \rangle$ が速度 $\langle \mathbf{u}_m \rangle$ で輸送されることを示す。

## 補足9.子午面環流による角運動量輸送(3/3)

- つまり、下図のような流れがあった場合、 $\langle \mathbf{u}_m \rangle$ による角運動量フラックスの輸送の項( $\rho_0 \langle L \rangle \langle \mathbf{u}_m \rangle$ )のみを見ると、 $\langle \mathbf{u}_m \rangle$ が実際にどの向きに角運動量を運んでいるのかは、 $\langle L \rangle \approx \lambda^2 \Omega_0$ の大きさを比較すればわかる。
- $\langle L \rangle$ は $\lambda (= r \sin \theta)$ の2乗にほぼ比例するので、黒矢印が運ぶ $\langle L \rangle$ のほうが値が大きい。
- 子午面環流 $\langle \mathbf{u}_m \rangle$ による角運動量輸送の向きは、下図の場合赤道から極になる。



# 補足11.太陽内部の角運動量分布

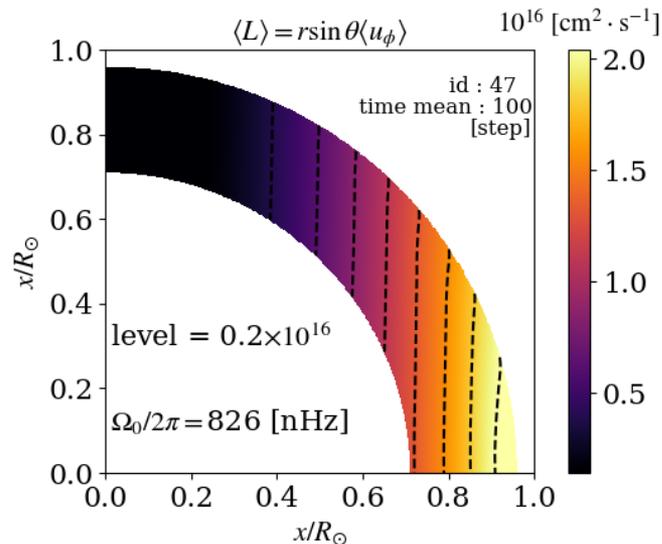
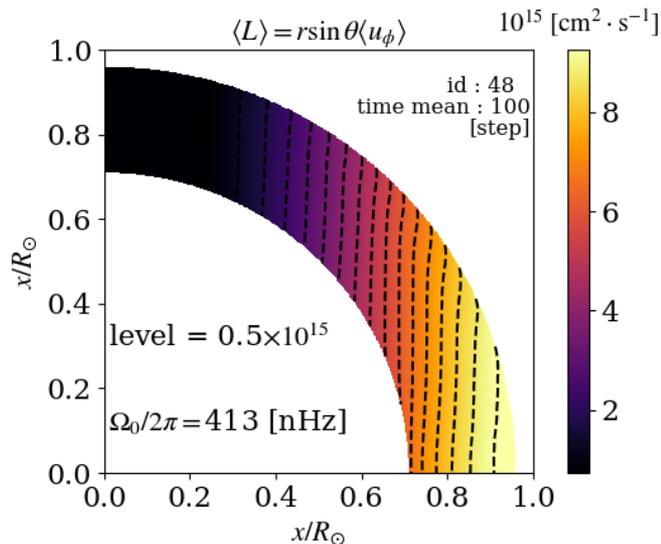
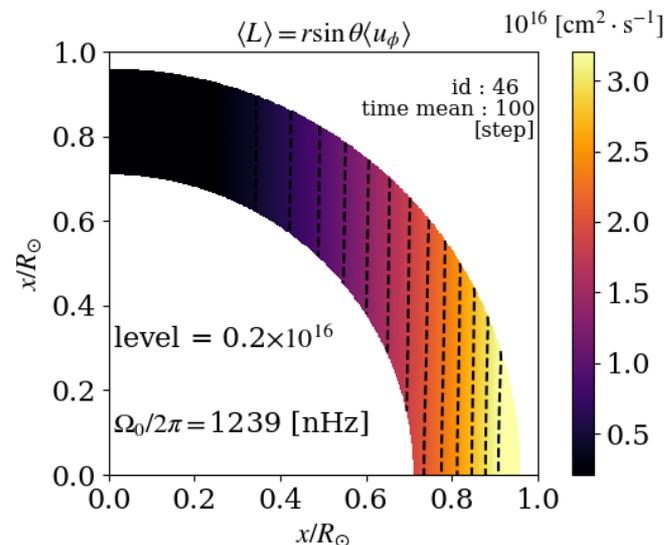


図:  
慣性系から見た、単位質量当たりの角運動量

$\langle L \rangle = r \sin \theta \langle u_\phi \rangle$ , ( $u_\phi = v_\phi + r \sin \theta \Omega_0$ )  
の分布図。すべての系で、等高線は回転軸に平行になっており、回転軸からの距離にほぼ比例していることが分かる。



## 補足12.磁場による角運動量輸送(1/4)

- 磁場の項も含めた角運動量の時間発展の式は、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 \langle L \rangle) = -\nabla \cdot \left( \rho_0 \lambda \langle \mathbf{u}_m u_\phi \rangle - \frac{1}{4\pi} \lambda \langle \mathbf{B}_m B_\phi \rangle \right)$$

となる。さらに、定常状態を考えて、(左辺)=0,  $\nabla \cdot (\rho_0 \langle \mathbf{u}_m \rangle) = 0$  とすると、Gyroscopic Pumpingの式は、

$$-\rho_0 (\langle \mathbf{u}_m \rangle \cdot \nabla) \langle L \rangle = \nabla \cdot \left( \rho_0 \lambda \langle \mathbf{u}'_m u'_\phi \rangle - \lambda \frac{\langle \mathbf{B}_m B_\phi \rangle}{4\pi} \right)$$

となる。よって、乱流の項に加えて、磁場の項も子午面環流の維持に寄与している。

- 各ケースごとに、乱流の寄与、磁場の寄与を比べてどちらが子午面環流の維持寄与しているかを調べる。

# 補足12.磁場による角運動量輸送, 1倍回転(2/4)

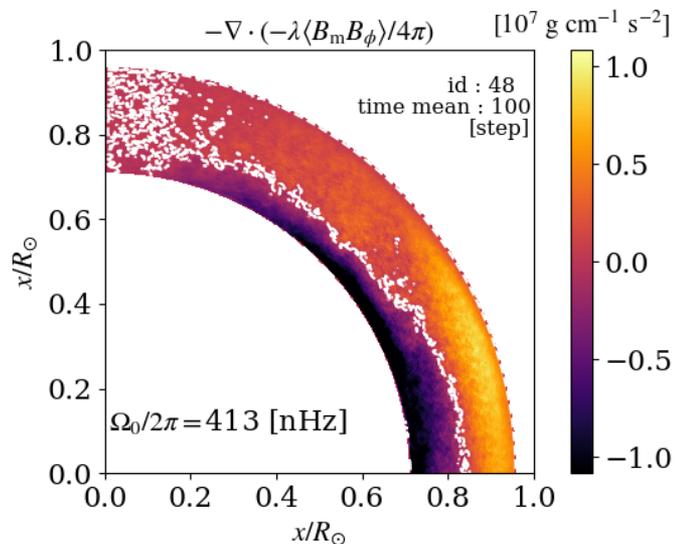
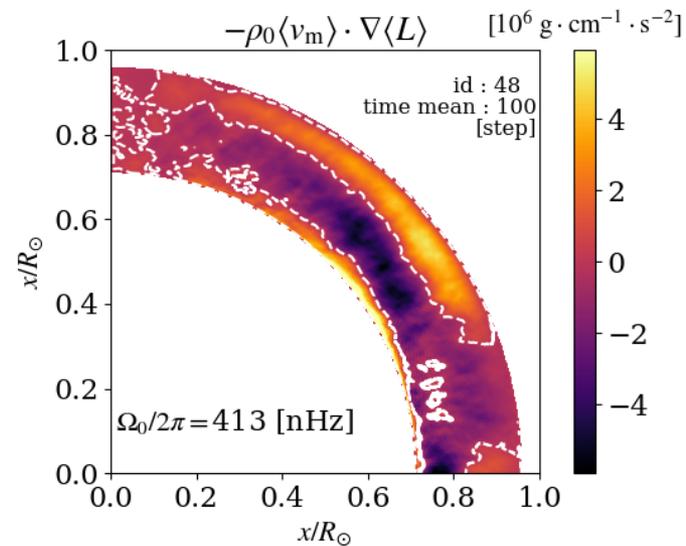
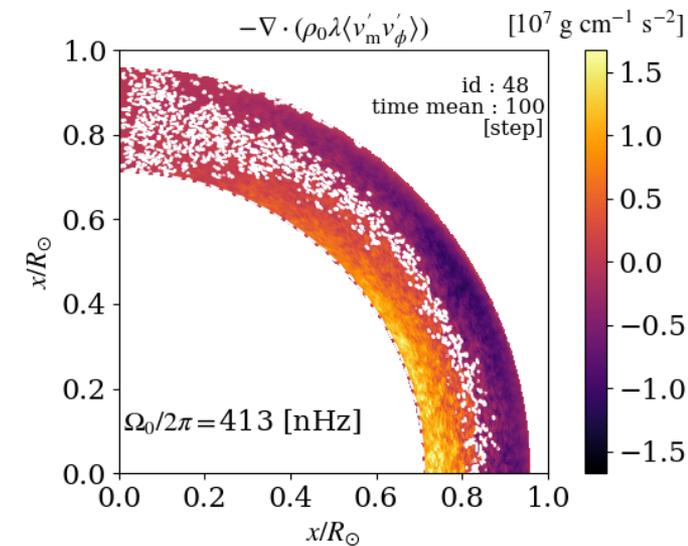
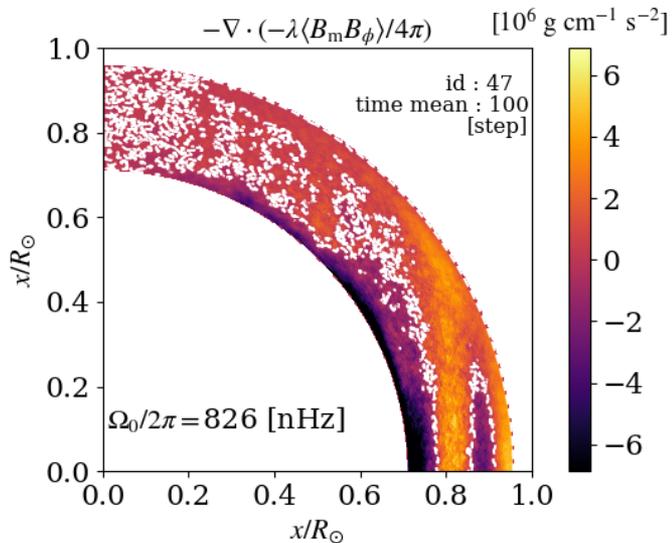
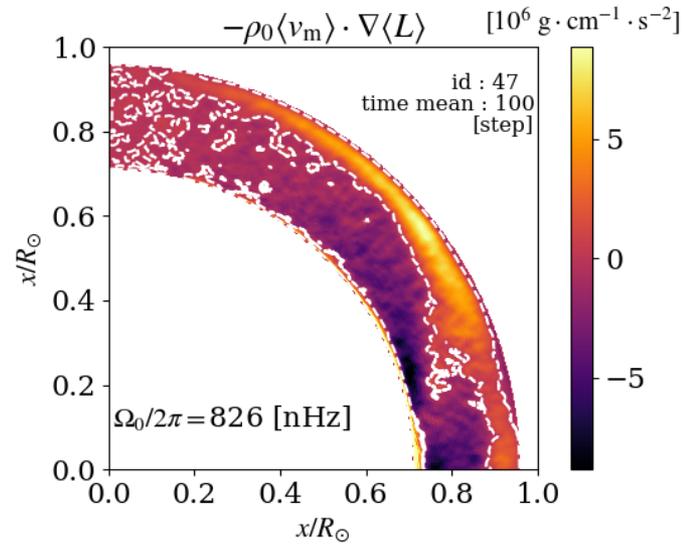
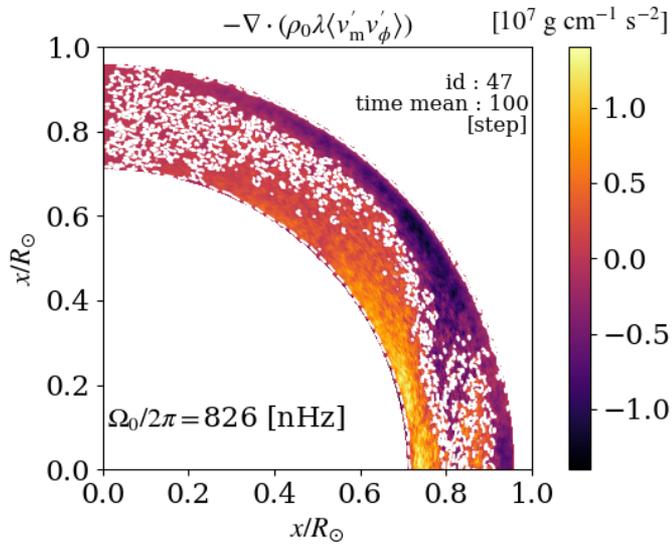


図:  
 1倍回転の時の、  
 $-\nabla \cdot (\rho_0 \lambda \langle v'_m v'_\phi \rangle)$  (左上)、  
 $-\nabla \cdot (\lambda \langle B_m B_\phi \rangle / 4\pi)$  (左下)、  
 $-\rho_0 \langle v_m \rangle \cdot \nabla \langle L \rangle$  (右上)。  
 子午面環流分布を主に決めているのは  
 乱流の項であることが分かる。

# 補足12.磁場による角運動量輸送, 2倍回転(3/4)



**図:**  
 2倍回転の時の、  
 $-\nabla \cdot (\rho_0 \lambda \langle v'_m v'_\phi \rangle)$  (左上)、  
 $-\nabla \cdot (\lambda \langle B_m B_\phi \rangle / 4\pi)$  (左下)、  
 $-\rho_0 \langle v_m \rangle \cdot \nabla \langle L \rangle$  (右上)。  
 1倍回転と同様、子午面環流分布を主に  
 決めているのは乱流の項であることが分  
 かる。

# 補足12.磁場による角運動量輸送, 3倍回転(4/4)

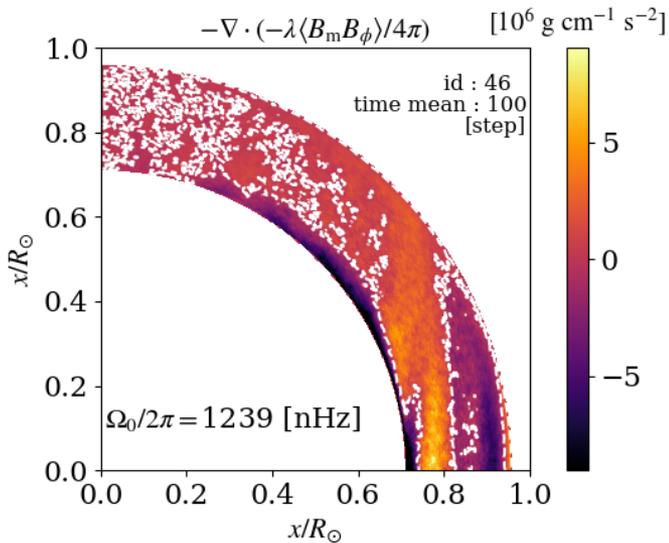
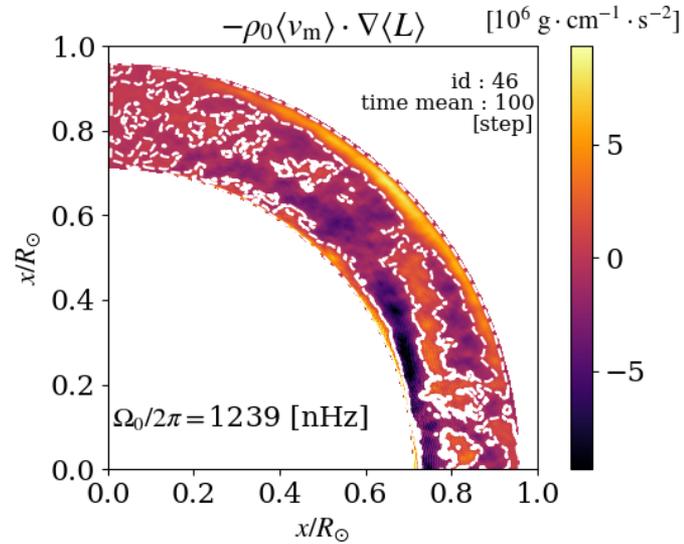
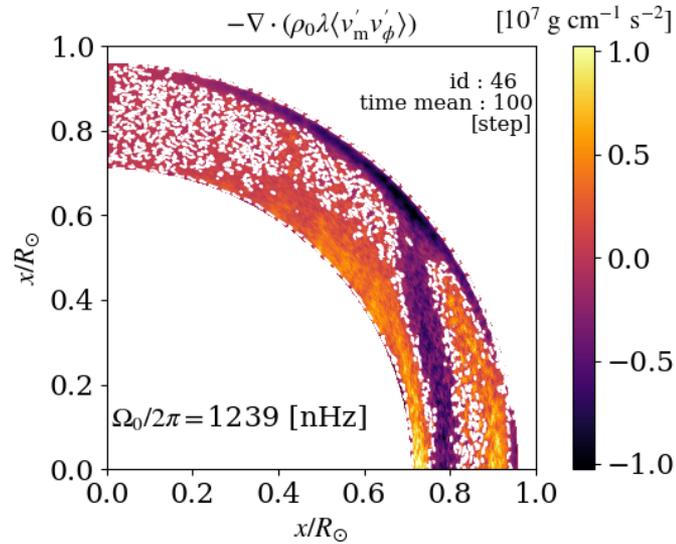


図:

3倍回転の時の、

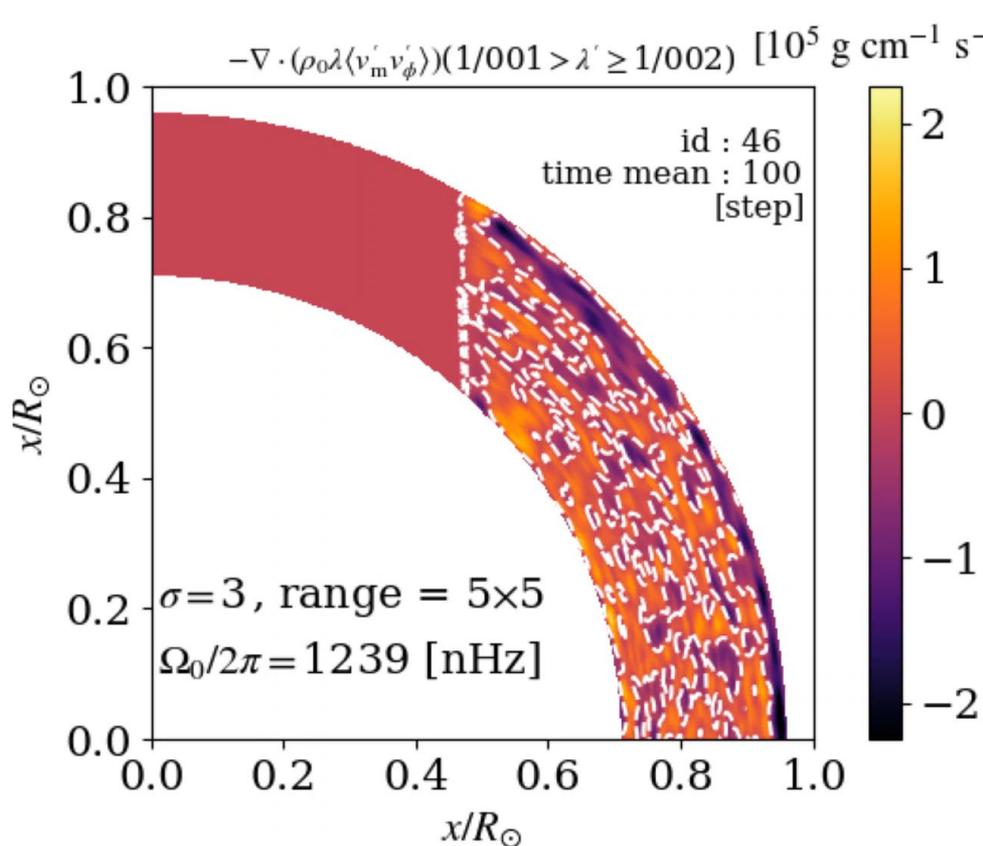
$-\nabla \cdot (\rho_0 \lambda \langle v'_m v'_\phi \rangle)$  (左上)、

$-\nabla \cdot (\lambda \langle B_m B_\phi \rangle / 4\pi)$  (左下)、

$-\rho_0 \langle v_m \rangle \cdot \nabla \langle L \rangle$  (右上)。

1倍回転と同様、子午面環流分布を主に決めているのは乱流の項であることが分かる。

## 補足13. $-\nabla \cdot \mathbf{F}_R = -\nabla \cdot (F_{R,r} \mathbf{e}_r + F_{R,\theta} \mathbf{e}_\theta)$ のDFT図, 3倍回転の場合



動画中で、空間スケールの大きさは、次第に小さくなる。

140 Mm ~ 280 Mm以下のスケール ( $1/016 > \lambda' \ge 1/032$ ) になると、子午面環流のような形が見え始める。

➤ 次に、フラックスの大きさ(絶対値の体積積分)が一番大きかった、 $n=5, n=6$ のときの各ケースを比較する。

図:  $-\nabla \cdot \mathbf{F}_R$  のDFT図, id = 46

# 補足13. $-\nabla \cdot (f_{R,r}(5)\mathbf{e}_r + f_{R,\theta}(5)\mathbf{e}_\theta)$

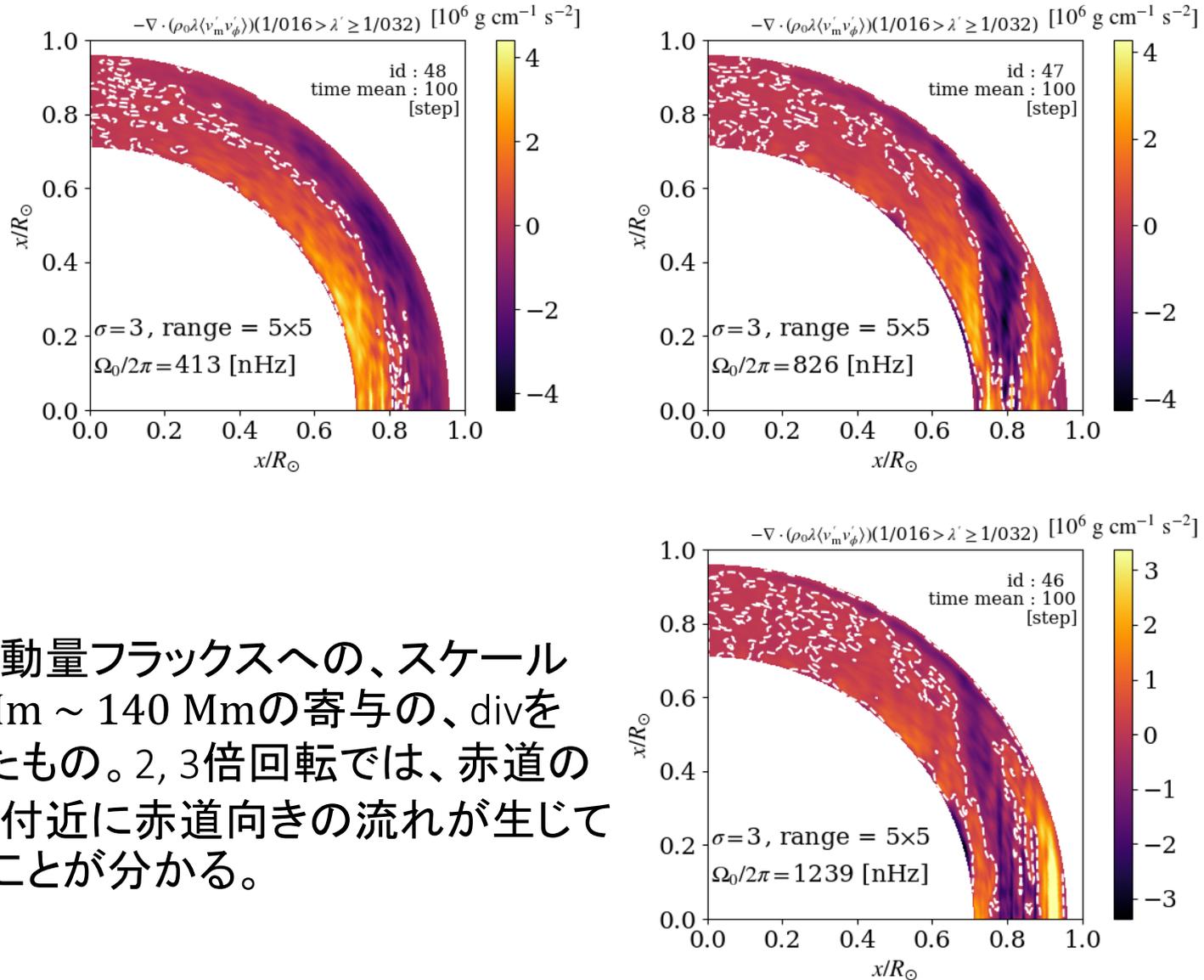


図:  
 角運動量フラックスへの、スケール  
 70 Mm ~ 140 Mmの寄与の、divを  
 とったもの。2, 3倍回転では、赤道の  
 表層付近に赤道向きの流れが生じて  
 いることが分かる。

# 補足13. $-\nabla \cdot (f_{R,r}(6)\mathbf{e}_r + f_{R,\theta}(6)\mathbf{e}_\theta)$

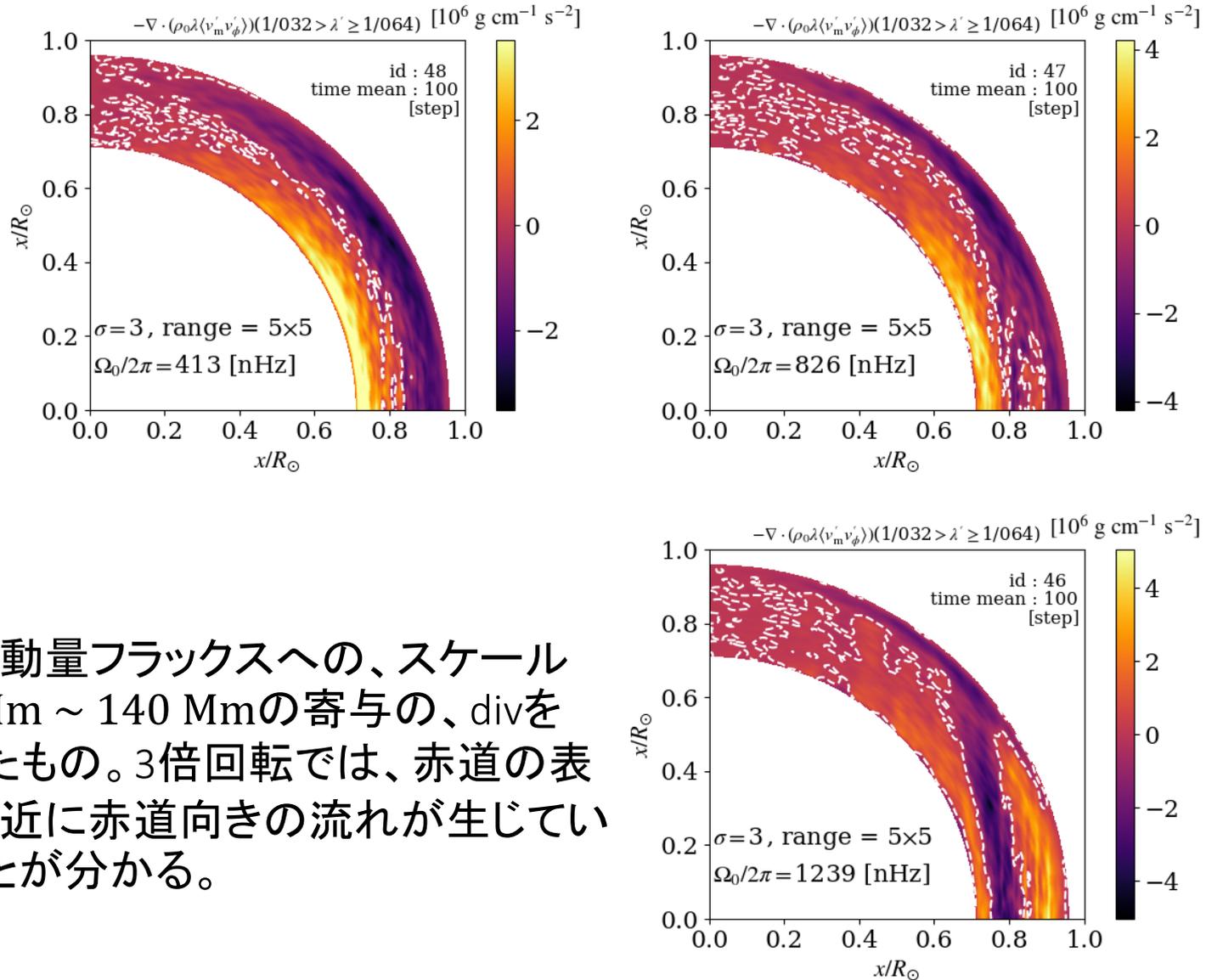


図:  
 角運動量フラックスへの、スケール  
 70 Mm ~ 140 Mmの寄与の、divを  
 とったもの。3倍回転では、赤道の表  
 層付近に赤道向きの流れが生じてい  
 ることが分かる。

## 補足??.スケールと運動方程式の各項の関係

- 運動方程式は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) = & -\nabla \cdot (\rho v v) - \nabla p_1 - \rho_1 g e_r \\ & + 2\rho v \times \Omega_0 + \frac{1}{4\pi}(\nabla \times B) \times B\end{aligned}$$

となっている。ここでは、乱流(速度相関)の項 $-\nabla \cdot (\rho v v)$ と、回転(コリオリ力)の項 $2\rho v \times \Omega_0$ が方程式に与える影響を比べる。

- それぞれの項を典型的スケール長 $L$ 、典型的速度 $V$ を用いて表すと、

$$\begin{aligned}-\nabla \cdot (\rho v v) & \rightarrow \rho V V / L \quad \dots \textcircled{1} \\ 2\rho v \times \Omega_0 & \rightarrow \rho V \Omega_0 \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

スケール大( $L \rightarrow$ 大)で $\textcircled{1} \ll \textcircled{2}$   
スケール小( $L \rightarrow$ 小)で $\textcircled{1} \gg \textcircled{2}$

## 補足??乱流の影響が強いときの相関

- 回転の影響が弱いとき、熱対流の動径方向成分(特に下降流)が支配的になり、運動方程式(の $\phi$ 方向成分)から $\langle v'_r v'_\phi \rangle < 0$ となる。

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = [\dots] + 2v_\phi \Omega_0 \sin \theta$$

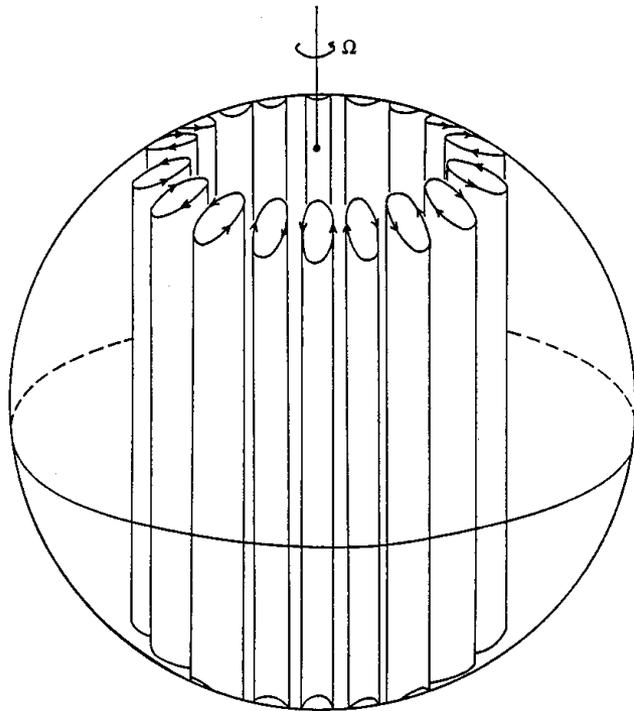
$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = [\dots] + 2v_\phi \Omega_0 \cos \theta$$

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} = [\dots] - 2\Omega_0(v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta)$$

コリオリ力に注目した  
運動方程式の各成分。  
 $\Omega_0$ は回転系の基準  
回転角速度であり、 $z$   
方向を向く。

## 補足??.回転の影響が強いときの相関(北半球)

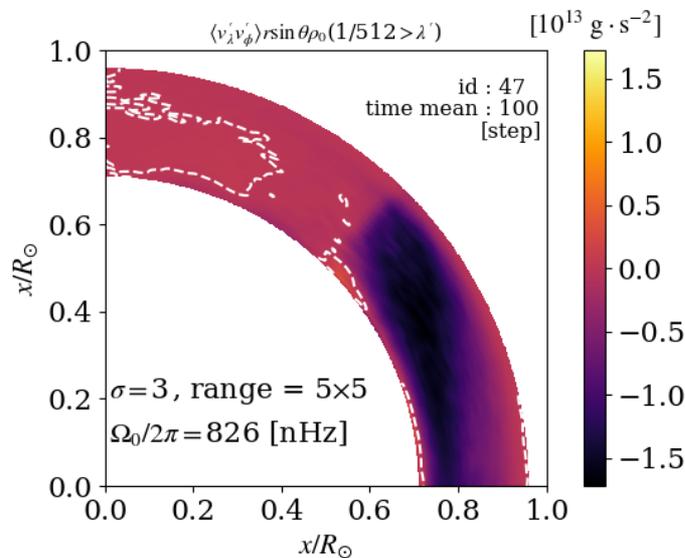
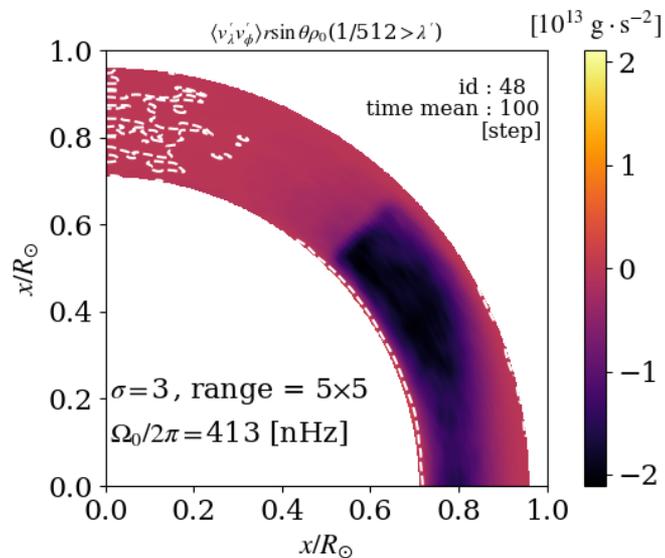
- コリオリ力は  $F_C = 2\rho v \times \Omega_0$  と表される。この形はローレンツ力  $F_L = qv \times B$  と同じ形になっている。ローレンツ力があるとき、電荷は磁場ベクトルを角速度ベクトルとしてその周りで回転する。



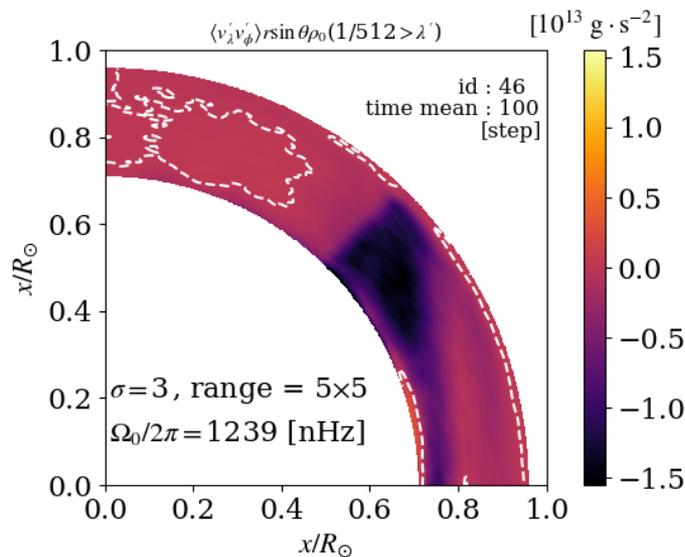
$$\begin{aligned}\frac{\partial v_r}{\partial t} &= [\dots] + 2v_\phi \Omega_0 \sin \theta \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} &= [\dots] + 2v_\phi \Omega_0 \cos \theta \\ \frac{\partial v_\phi}{\partial t} &= [\dots] - 2\Omega_0(v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta)\end{aligned}$$

コリオリ力に注目した運動方程式。  
テイラー柱があるときは、上の2式が重要。  
➤ テイラー柱が形成されている場所で、  
 $\langle v'_r v'_\phi \rangle, \langle v'_\theta v'_\phi \rangle$  は正になる。

# 補足?? $F_{R,\lambda}$ への小スケールの寄与



**図:**  
 小スケールの寄与。  
 どのケースも、負の領域が支配的になっている。



## スケールの寄与の大きさを示す変数の定義

- 速度摂動の相関の角運動量フラックスを、

$$F_R \equiv \rho_0 \lambda \langle \mathbf{u}'_m u'_\phi \rangle$$

と定義する( $\lambda = r \sin \theta$ )。ここで、 $F_R$ の $\lambda$ 方向成分 $F_{R,\lambda}$ について、以下のように定義する。

$$F_{R,\lambda} = \rho_0 \lambda \sum_{n=1}^{\log_2(N/2)} f_{R,\lambda}(n) + (\text{小スケールの寄与}),$$

$$f_{R,\lambda}(n) \equiv 2 \sum_{\lambda'=1/2^n}^{1/2^{n-1}} \text{Re}[\hat{v}_\lambda(\lambda') \hat{v}_\phi^*(\lambda')]$$

$f_{R,\lambda}(n)$ が、スケール $2\pi R_\odot/2^n \sim 2\pi R_\odot/2^{n-1}$ の寄与を表す。

## 結果( $\int dV |f_{R,\lambda}(n)|$ )

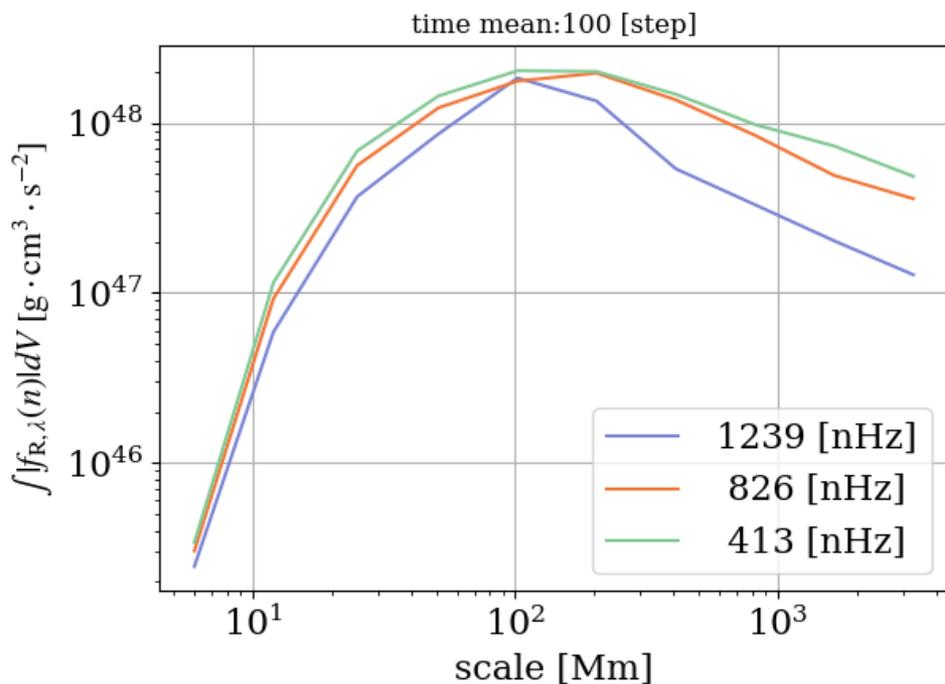


図:

$\int dV |f_{R,\lambda}(n)|$  の図。プロットする位置は、例えば  $n = 6$  の場合、実際のスケールに直すと 70 Mm ~ 140 Mm なので、  
(70 + 140)/2 の位置になっている。

図を見ると、 $n = 5, 6$  (スケール 200 Mm, 100 Mm 程度) で値が大きくなっていることが分かる。

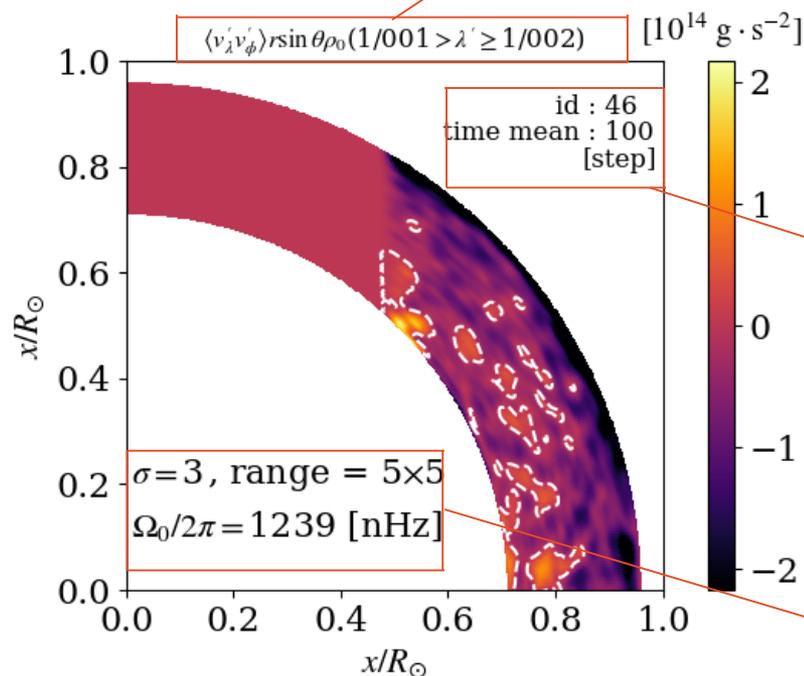
- それぞれのケースで、 $n = 5, 6$  の場合を比較する。

## 結果の図に関するの注意点

- 以下のスライドでは、下の図のような形で図を表示する。

$$\langle v'_\lambda v'_\phi \rangle r \sin \theta \rho_0 (1/001 > \lambda' \geq 1/002)$$

規格化波長  $1 > \lambda' \geq 1/2$  のスケールの、 $\langle v'_\lambda v'_\phi \rangle$  の全寄与(部分和)に  $r \sin \theta \rho_0$  をかけプロットした図( $r, \theta$  の2次元平面図)になる。実際のスケールに直すと、 $(1/2 \times 2\pi R_\odot, 1/1 \times 2\pi R_\odot)$  になる。



time mean : 100 [step]

100 step : time step が、900~1000 で時間平均をとっている。

$\sigma$ : ガウシアンフィルタの標準偏差。  
全ケースで共通して3。  
 $\Omega_0/2\pi$ : 系の基準回転角速度。

## 解析方法(1/5)

- 摂動の相関をスケールごとに分けるときに使う式は、以下の定理である。

- パーシバルの定理 (の特殊な場合)

$G_1 = \mathcal{F}[g_1], G_2 = \mathcal{F}[g_2]$  であり、さらに  $g_1(k), g_2(k)$  が実数である場合、

$$\langle g_1 g_2 \rangle = \sum_{m=0}^{N-1} G_1(m) G_2^*(m)$$

が成り立つ。

ここで、 $G = \mathcal{F}[g]$  は離散フーリエ変換を表し、以下で定義される。

$N$  個のデータ列  $\{g(k) | k = 0, 1, \dots, N-1\}$  が与えられたとき、 $g$  を周期  $N$  の関数をみなす。ここで、 $g(k)$  が円周上でのデータの場合、 $g(k) = g(k+N)$  は自動的に満たされる。 $g(k)$  の離散フーリエ変換 (DFT) を、

$$G(m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g(k) \exp\left(-i \frac{2\pi mk}{N}\right)$$

と定義する。

## 解析方法(2/5)

- このパーシバルの定理を速度摂動の相関に適用し、変形すると次の関係が得られる。

$$\langle v'_m v'_\phi \rangle = 2 \sum_{n=1}^{N/2-1} \text{Re}[\hat{v}_m(n) \hat{v}_\phi^*(n)] + \text{Re} \left[ \hat{v}_m \left( \frac{N}{2} \right) \hat{v}_\phi^* \left( \frac{N}{2} \right) \right]$$

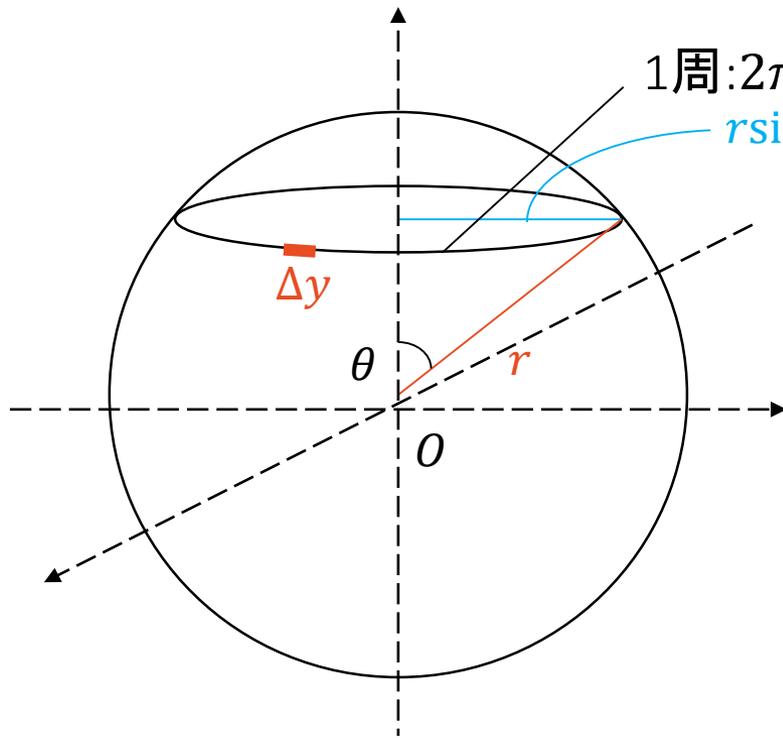
- ここで、 $\hat{v}_i (i = r, \theta, \phi)$  は  $v_i(r, \theta, \phi_k)$  を経度方向に逆フーリエ変換した式

$$v_i(r, \theta, k) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{v}_i(n) \exp\left(i \frac{2\pi n k}{N}\right) \equiv \sum_{n=0}^{N-1} \hat{v}_i(n) f_k(n)$$

を見ると、その意味が分かりやすい。

- しかし、異なる2点で、同じ  $n$  が同じスケールを表すとは必ずしも言えない。

# 解析方法(3/5)



1周:  $2\pi r \sin\theta \equiv R$

$r \sin\theta$

経度方向のグリッド幅を $\Delta y$ とすると、  
 $N\Delta y = 2\pi r \sin\theta \equiv R$ の関係が成立。

位置 $(r, \theta)$ において、周期 $N/n$ の波の波長  
 $\lambda_n(r, \theta)$ は、

$$\lambda_n(r, \theta) = \frac{\text{有限の区間}}{\text{その区間に入る波の数}} = \frac{R}{n}$$

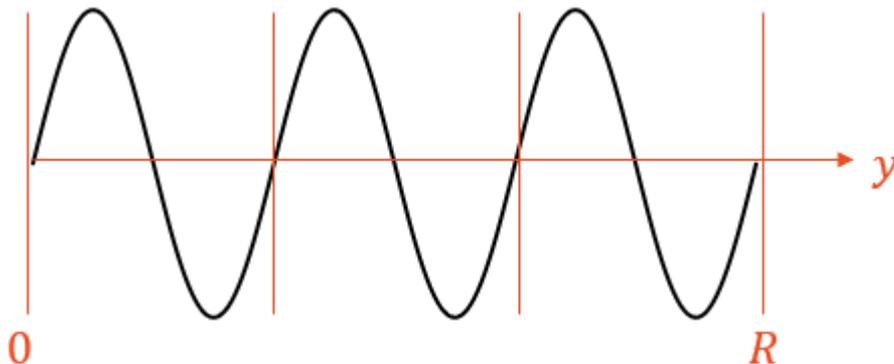


図4(左上):位置 $(r, \theta)$ での、 $\phi$ 方向  
1周の長さを表す図。

図5(左下):波長の具体例。 $n = 3$   
(周期 $N/3$ )を表す。

## 解析方法(4/5)

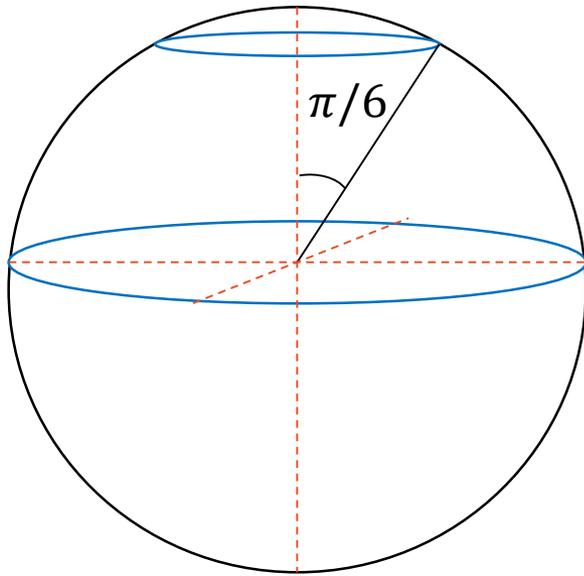


図6:  $(r, \theta) = (R_{\odot}, \pi/2)$ と、  
 $(r, \theta) = (R_{\odot}, \pi/6)$ の比較。

それぞれの位置で、経度方向1周(青線)の長さ  $R = 2\pi r \sin\theta$  は、

$$\begin{aligned} R(R_{\odot}, \pi/2) &= 2\pi R_{\odot} \sin(\pi/2) = 2\pi R_{\odot} \\ R(R_{\odot}, \pi/6) &= 2\pi R_{\odot} \sin(\pi/6) = \pi R_{\odot} \end{aligned}$$

経度方向1周に入る波の数  $n$  が1のとき、波長  $\lambda_1$  は、

$$\begin{aligned} \lambda_1(R_{\odot}, \pi/2) &= 2\pi R_{\odot} / n = 2\pi R_{\odot} \\ \lambda_1(R_{\odot}, \pi/6) &= \pi R_{\odot} / n = \pi R_{\odot} \end{aligned}$$

位置  $(r, \theta)$  が異なると、同じ  $n$  を考えてもスケール(大きさ)が変わってくる。

## 解析方法(5/5)

- ここで、「規格化」波長 $\lambda'$ を以下のように定義する。

$$\lambda'(r, \theta) \equiv \frac{\lambda_n}{2\pi R_\odot} = \frac{1}{2\pi R_\odot} \cdot \frac{2\pi r \sin\theta}{n} = \frac{(r/R_\odot) \sin\theta}{n}$$

$n$ : 経度方向1周に入る波の数  
 $R_\odot$ : 太陽半径( $6.9599 \times 10^{10}$  cm)

この規格化波長の最小値 $L_{\min}$ 、最大値 $L_{\max}$ を全体で一つの値に決めて、その範囲にある $\lambda'(r, \theta)$ の寄与をすべての位置 $r, \theta$ ごとに考える。

スケール $L_{\min} \leq \lambda' \leq L_{\max}$  の速度摂動相関 $\langle u'_m u'_\phi \rangle$ への総寄与は、部分と

$$2 \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} \text{Re}[\hat{v}_m(n) \hat{v}_\phi(n)]$$

で表すことができる。

ここで、 $n_{\min(\max)} \equiv (r/R_\odot) \sin\theta / L_{\max(\min)}$ と定義した。

## 解析する式の説明

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 \langle L \rangle) &= -\nabla \cdot (\rho_0 \lambda [\langle \mathbf{u}_m \rangle \langle u_\phi \rangle + \langle \mathbf{u}'_m u'_\phi \rangle]) \\ &= -\nabla \cdot (\underbrace{\rho_0 \lambda \langle \mathbf{u}_m \rangle \langle u_\phi \rangle}_{\text{M}}) - \nabla \cdot (\underbrace{\rho_0 \lambda \langle \mathbf{u}'_m u'_\phi \rangle}_{\text{R}}) \end{aligned}$$

角運動量輸送の式。  
右辺の()内が角運動量フラックス。

$$\underbrace{\rho_0 \lambda \langle u'_\alpha u'_\phi \rangle}_{\text{R}} \equiv F_{\text{R},\alpha} = \sum_{n=1}^{n_{\text{max}}} \hat{f}_{\text{R},\alpha}(n), \quad (\alpha = r, \theta)$$

- 上の式の乱流部分(R)をスケール分解する。今説明した通り、場所によって波長に対応するスケールが異なることに注意する。
- 全体で同程度のスケールになるように和をとる  $n_{\text{min}} \leq n \leq n_{\text{max}}$  の範囲を位置ごとに調整して、図にプロットした。

$$2 \sum_{n=n_{\text{min}}}^{n_{\text{max}}} \text{Re}[\hat{\mathbf{v}}_m(n) \hat{v}_\phi(n)]$$

スケール  $L_{\text{min}} \leq \lambda' \leq L_{\text{max}}$  の  
速度摂動相関  $\langle \mathbf{v}'_m \mathbf{v}'_\phi \rangle$  への総寄与