

# Jackknife法を用いた より高精度な重力レンズ解析法の確立

西田 峻

宇宙物理学研究室 4年

1. 重力レンズとは（レンズ方程式）
2. 重力レンズ解析（最小二乗法、 $\chi^2$ 分布）
3. 現在の評価方法の問題点
4. 新しい評価方法の候補：Jackknife法
5. シミュレーションの手順
6. 結果
7. 結論

重力レンズ：時空の歪みが可視化されている現象

$\vec{\beta}$ ：ソース天体の位置ベクトル

$\vec{\theta}$ ：ずれた像の位置ベクトル  
(観測される)

$\vec{\alpha}$ ：観測者から見た曲がり角

レンズ方程式

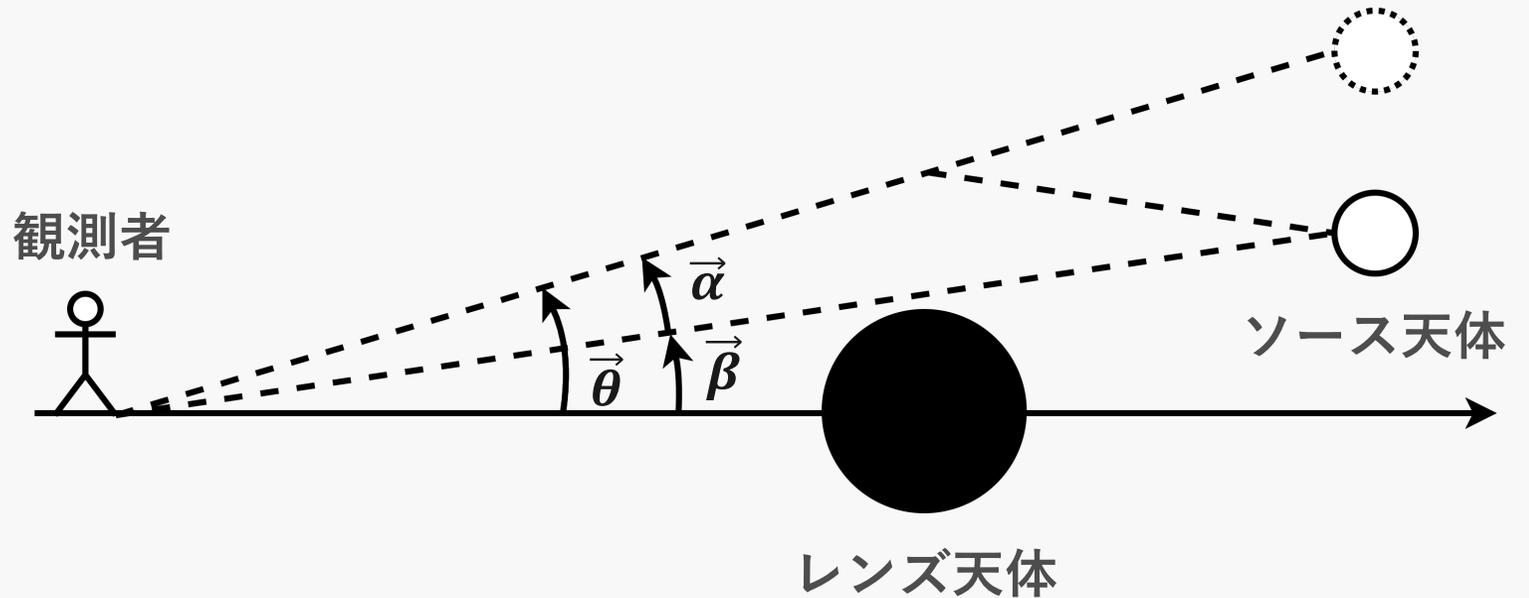
$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\alpha}(\vec{\theta})$$

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) \equiv \nabla_{\vec{\theta}} \phi(\vec{\theta})$$

重力レンズ天体の  
質量分布

重力レンズポテンシャル

$$\phi(\vec{\theta}) \equiv \frac{1}{\pi \Sigma_{\text{cr}}} \int d\vec{\theta}' \Sigma(\vec{\theta}') \log |\vec{\theta} - \vec{\theta}'|$$



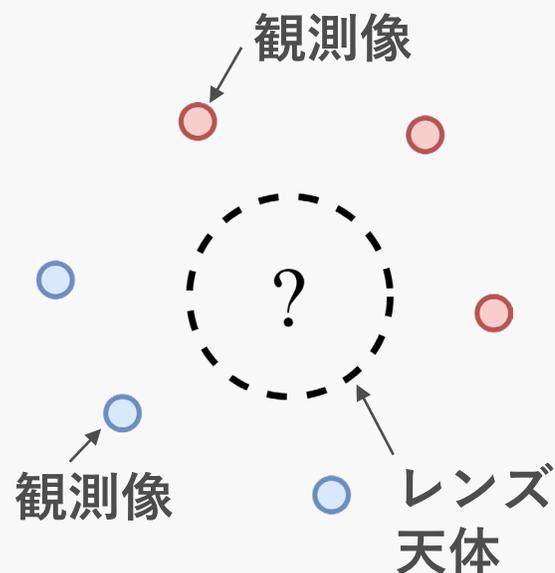
重力レンズ解析

→ 質量分布

→ 増光率、ハッブル定数

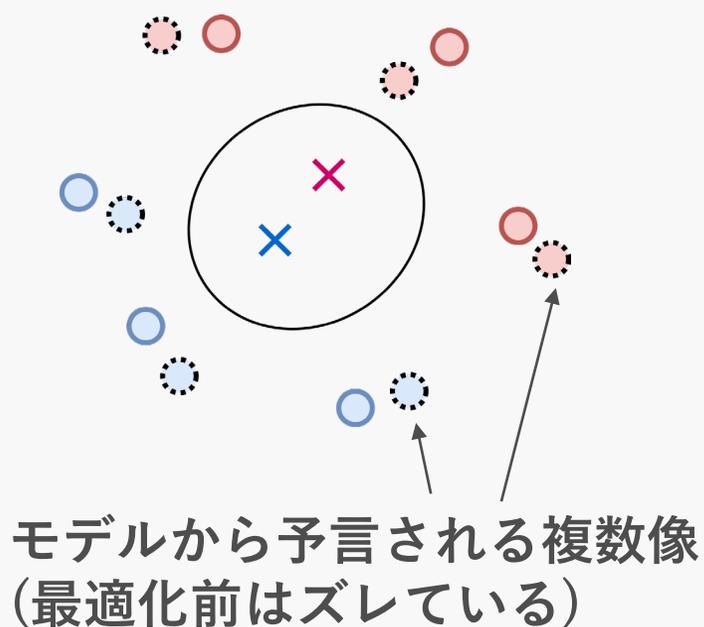
## 1 観測結果を得る

- 観測された複数像の赤方偏移や位置を得る



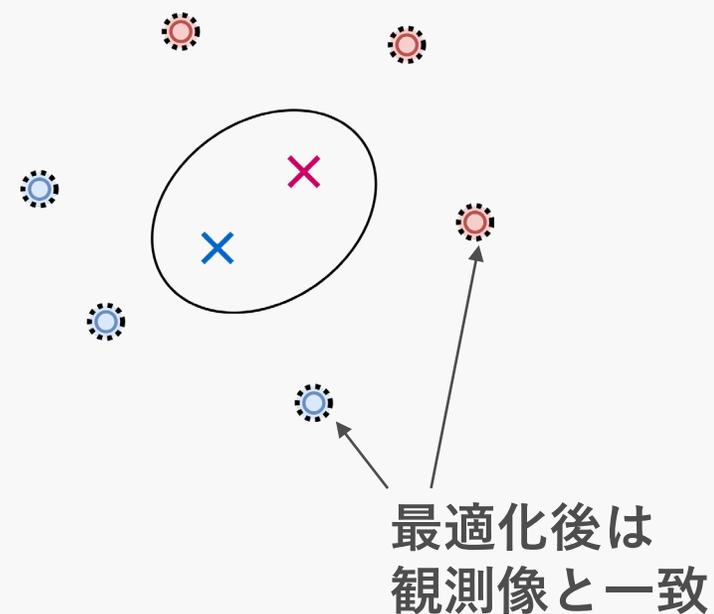
## 2 マスモデルを仮定

- ソース天体、レンズ天体を仮定
- どの物理量をパラメータにするかを指定



## 3 最適化(Optimize)

- パラメータを動かして観測結果に合うようなマスモデルを探す
- 最小二乗法



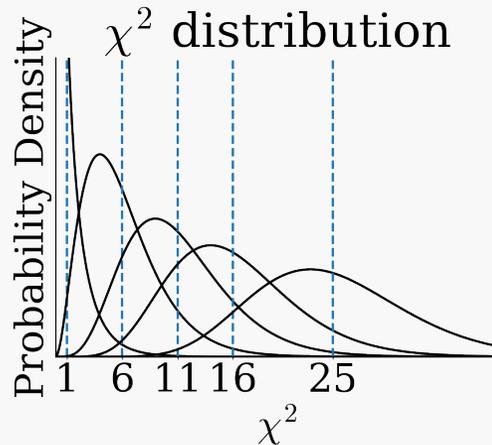
## 最小二乗法を用いた重カレンズ解析

- 複数像 $N$ 個のデータ点 $\vec{\theta}_i^{obs} = (x_i, y_i)$ を $M$ 個のパラメータを持つモデルで当てはめる

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{|\vec{\theta}_i^{obs} - \vec{\theta}_i^{model}(a_1, \dots, a_M)|^2}{\sigma_i^2} \left( \frac{\text{観測値} - \text{モデル値}}{\text{測定誤差}} \right)^2$$

- $\chi^2$ が最小になるようにパラメータを決定

- モデルが「正しい」ほど、自由度 $\nu = 2N - M$ の $\chi^2$ 分布に従う  
 ↑  
 ( $x_i, y_i$ )なので2倍



### モデルが妥当かの判断

$\chi^2$ 分布は自由度 $\nu$ 付近でピークを持つ。

最小化した $\chi^2$ を自由度 $\nu$ で割った値

$$\frac{\chi^2}{\nu}$$

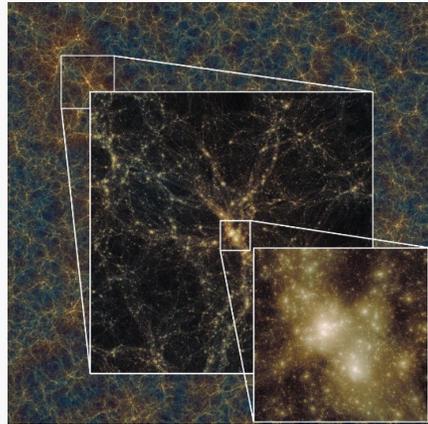
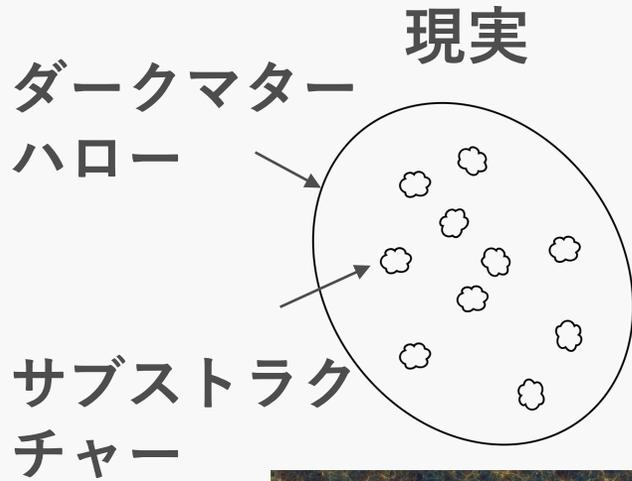
reduced chi-square

がおおよそ1付近かどうかで判断

$$\frac{\chi^2}{\nu} \approx 1$$

$$\frac{\chi^2}{\nu} \not\approx 1$$

現実の銀河団のダークマター分布の複雑さは測定誤差 $\sigma$ に含ませている



ダークマター分布シミュレーション  
(Ishiyama et al. 2015)

「正しい」

複雑さを正確に  
含んだ  
 $\sigma(= \sigma_{eff})$ を仮定

A simple circle representing a smooth model where the complexity is correctly included.

「正しくない」

複雑さを正確に  
含んでいない  
 $\sigma(\neq \sigma_{eff})$ を仮定

A cloud-like shape representing an incorrect model where the complexity is not correctly included.

摂動を過剰に加えてパラ  
メータを増やしている  
→ **オーバーフィッティング**  
(過学習)

摂動

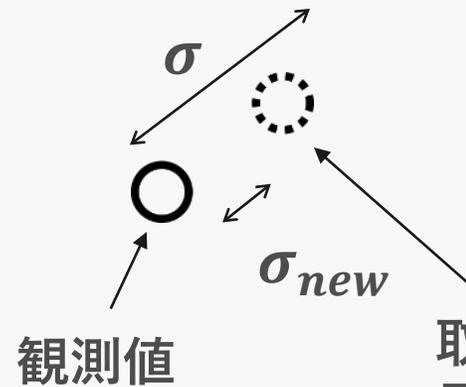
$$-\frac{\varepsilon}{m} r^2 \cos m \left( \theta - \theta_m - \frac{\pi}{2} \right)$$

問題点： **$\sigma_{eff}$ の正確な値は不明**  
仮定する $\sigma$ の値を変えることで $\chi^2/\nu \approx 1$ とすることが可能

## 新たな判断基準：モデルの**予言能力**

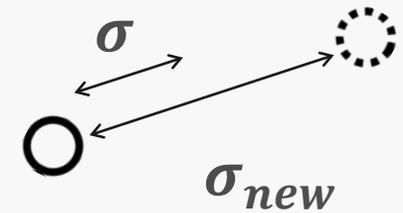
- マスモデルにより予言される物理量を正確に求められる  
= 「正しい」
- **Jackknife法**を用いる。
- フィットに使わない複数像の位置をどれほど再現できるか？

「正しい」モデル



$\sigma_{new}/\sigma$ が1程度  
= 「正しい」

「正しくない」モデル

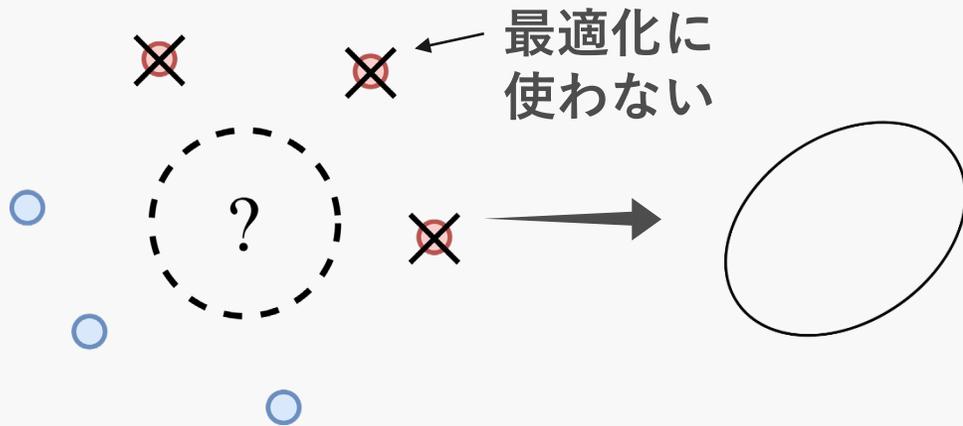


$\sigma_{new}/\sigma$ が1より比較的大きい  
= 「正しくない」

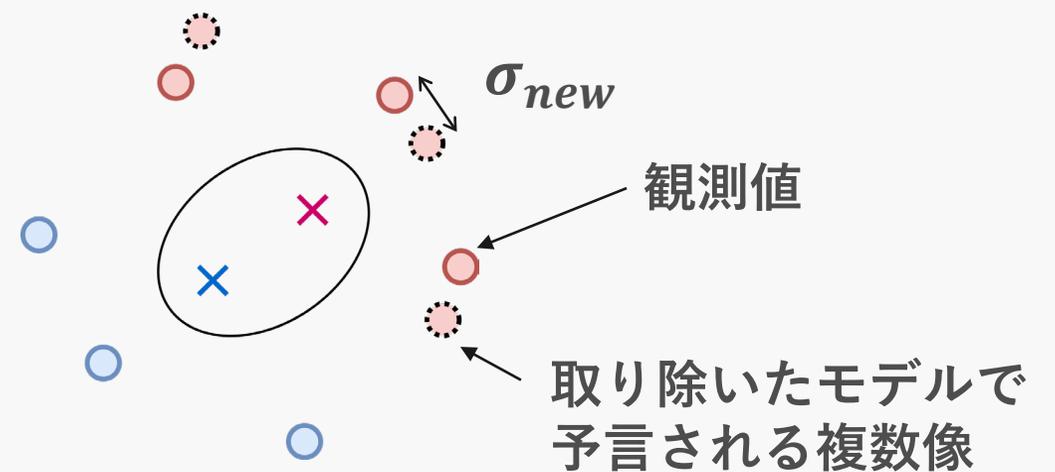
### 今回の研究の目的

重力レンズ解析においてJackknife法は新たな評価方法として有効か？

- 1 観測結果からある1つのソース天体の複数像を取り除いて、モデルを最適化する

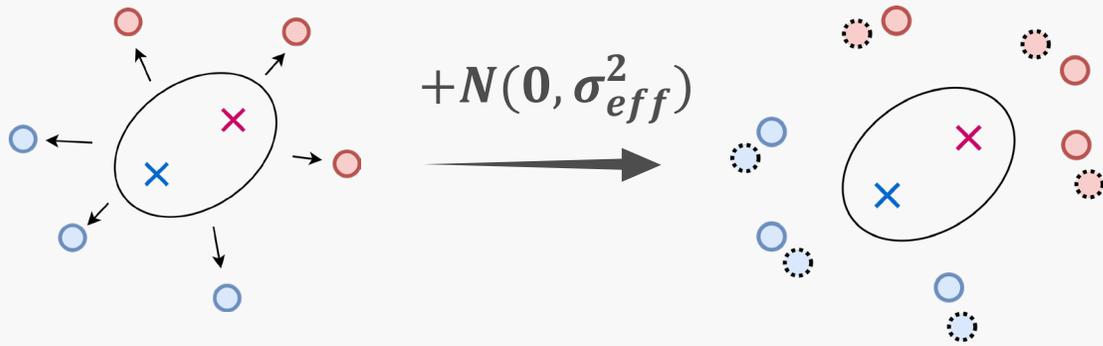


- 2 ①で最適化したモデルを用いて、取り除いたソース天体の複数像を計算する  $\sigma_{new}/\sigma$  の  $x, y$  成分  $\Delta x/\sigma, \Delta y/\sigma$  の分布を出す



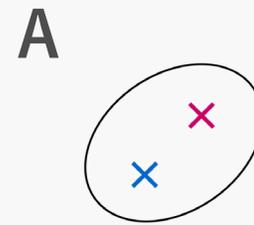
- 「正しい」モデルは**1程度に分布（正規分布）**
- overfitしている「正しくない」モデルなら、**1より大きく分布し正規分布から外れる**

## 1 模擬観測データを作成

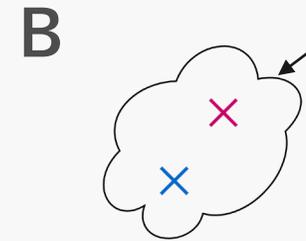


- 正解モデルを自分で設定し複数像の位置  $(x, y)$  を計算
- 複数像の位置  $(x, y)$  に  $N(0, \sigma_{eff}^2)$  を足す  
→ 「測定誤差  $\sigma_{eff}$  の模擬観測データ」を作る

## 2 「正しい」モデルAと「正しくない」モデルBを作成 → Jackknifeの解析を行う



$\sigma_{eff}$  を仮定して最適化

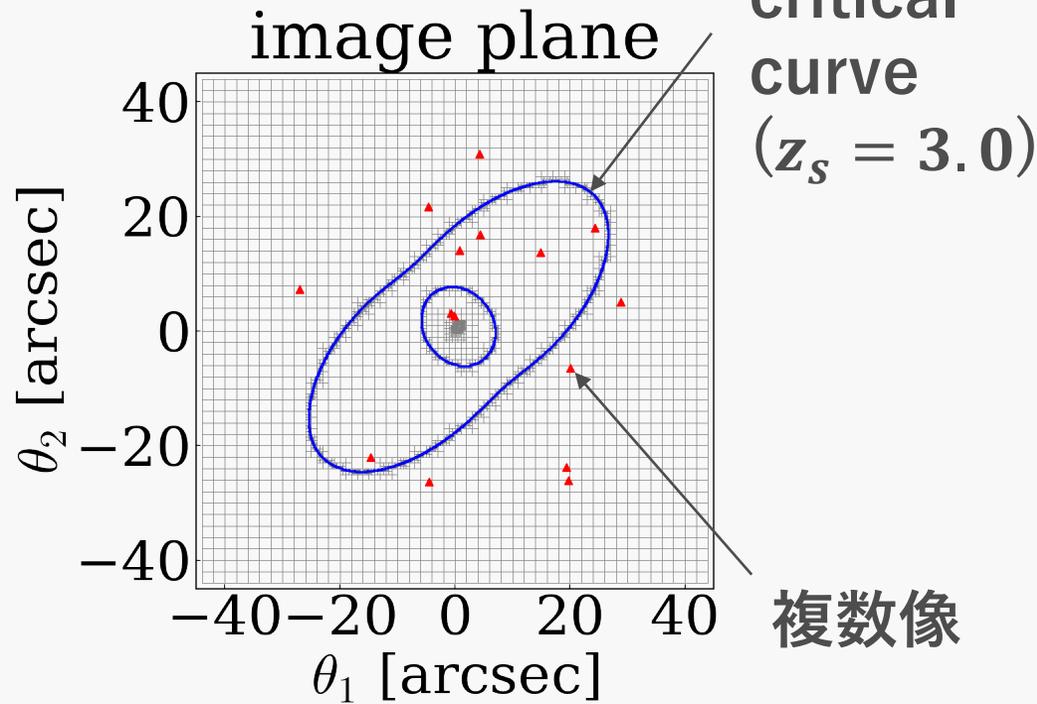


摂動を足している

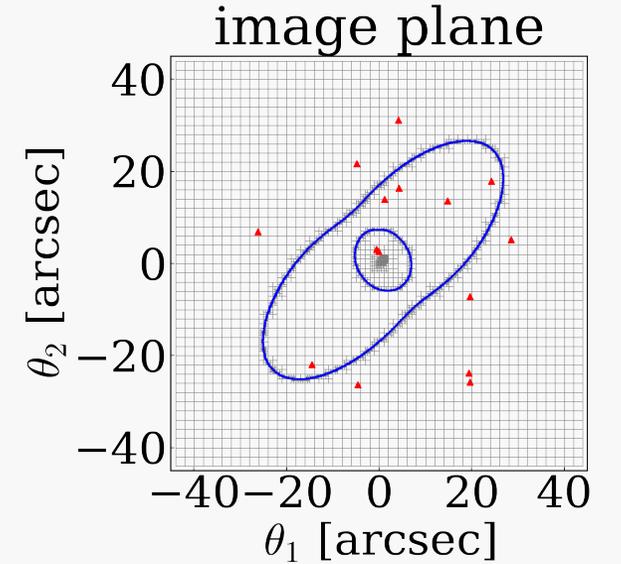
$\chi^2/\nu \approx 1$  となるような  $\sigma' (\neq \sigma_{eff})$  を仮定して最適化

- モデルAは  $\sigma_{eff}$  を仮定して最適化
- モデルBは、過剰な摂動を足し、 $\chi^2/\nu \approx 1$  となるような  $\sigma'$  を仮定して最適化
- モデルA、BについてJackknifeの解析で違いが見られるかどうか検証

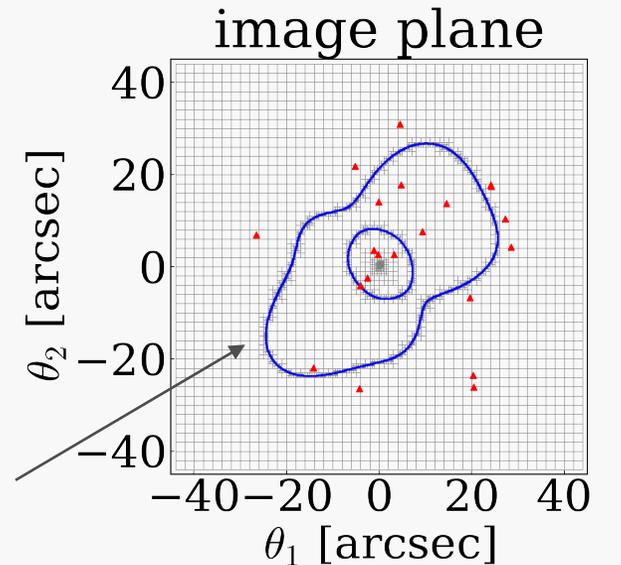
自分で設定した状況



「正しい」  
モデルA

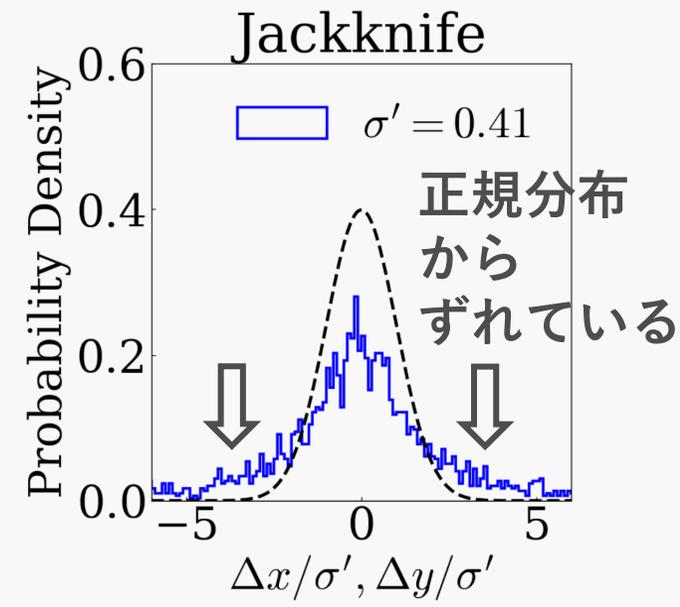
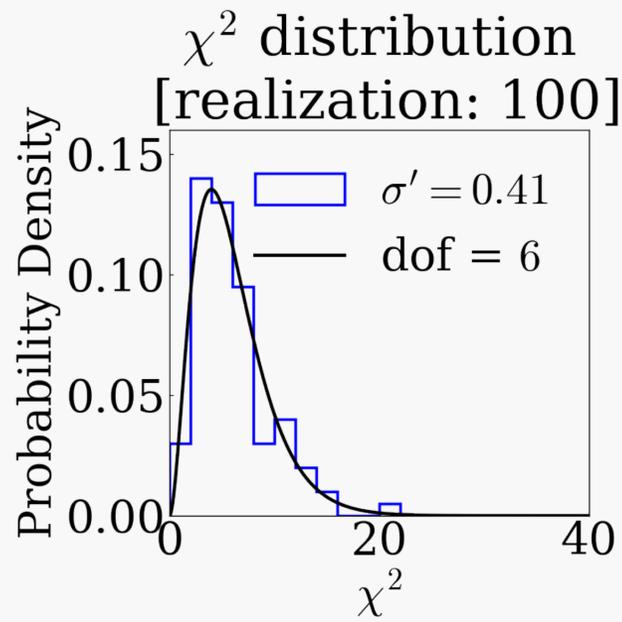
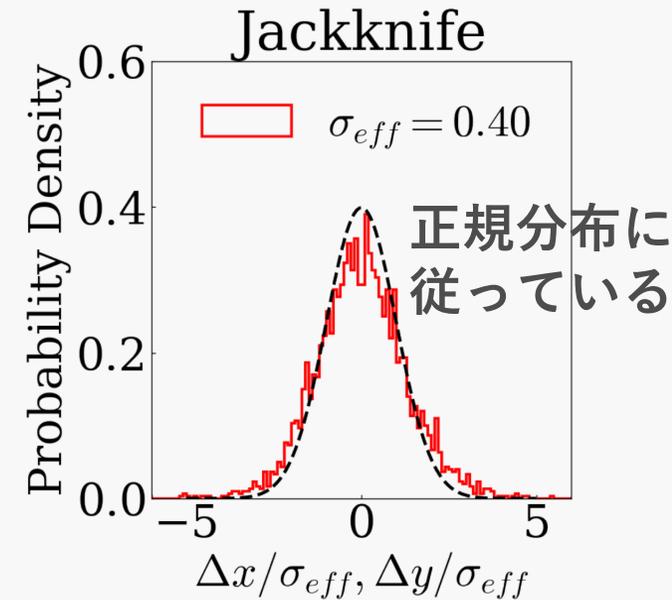
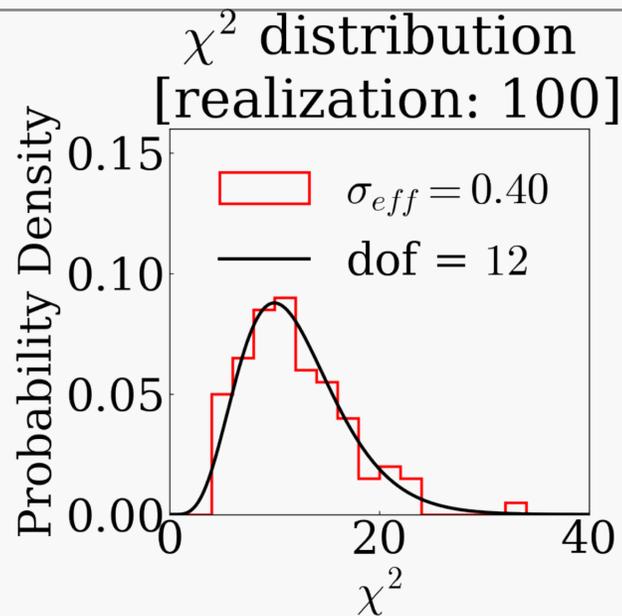
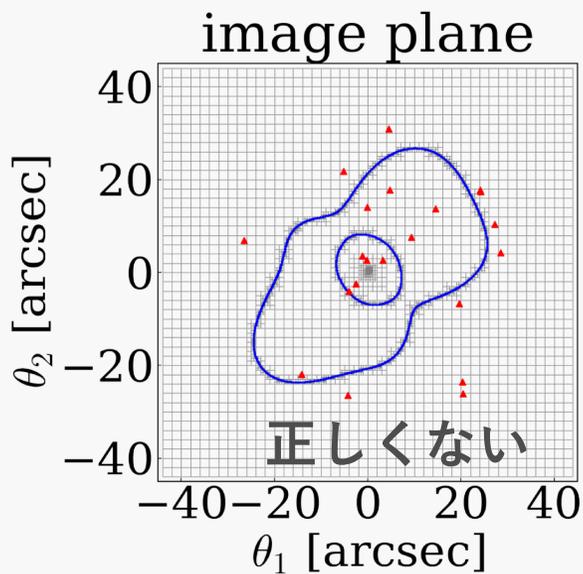
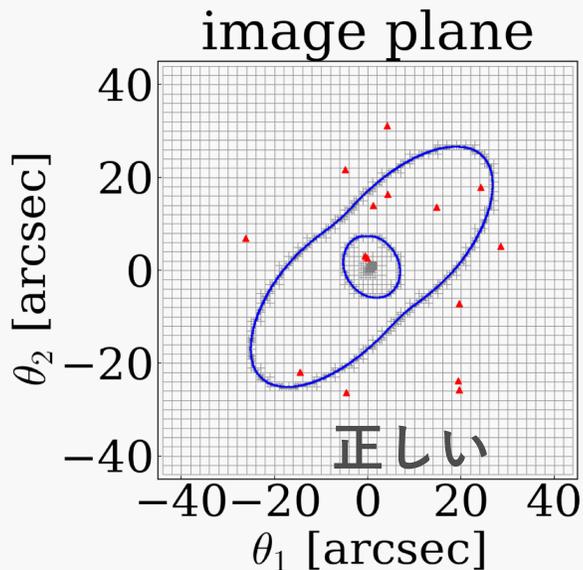
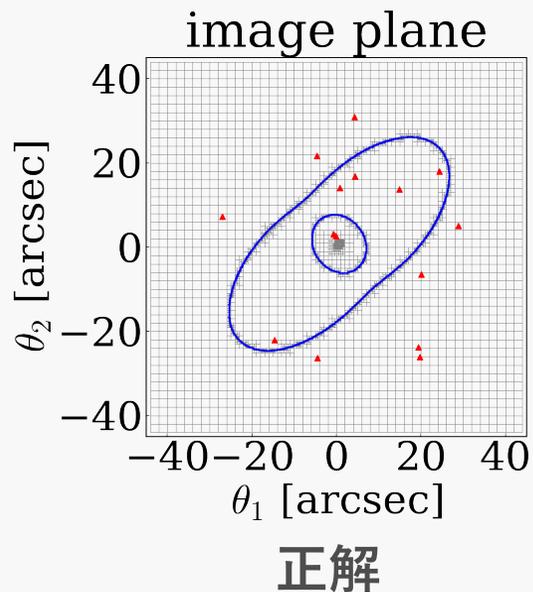


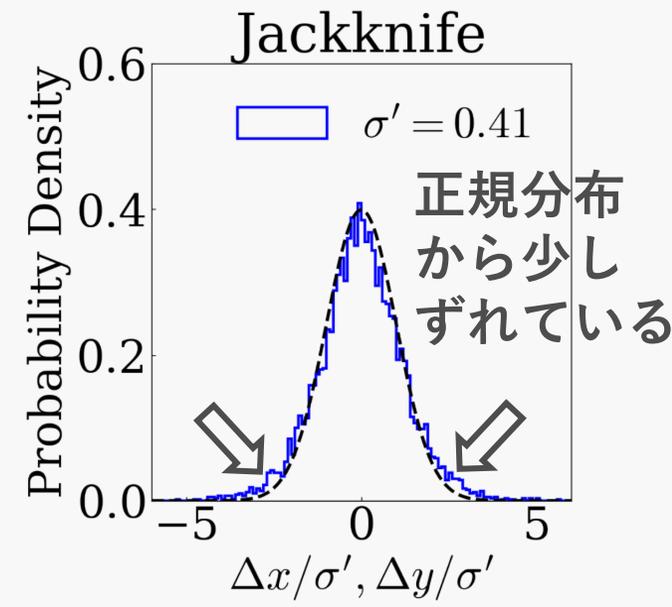
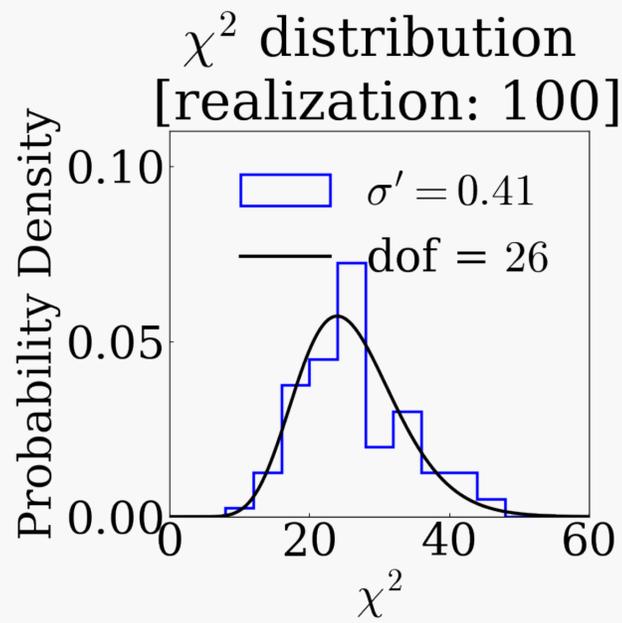
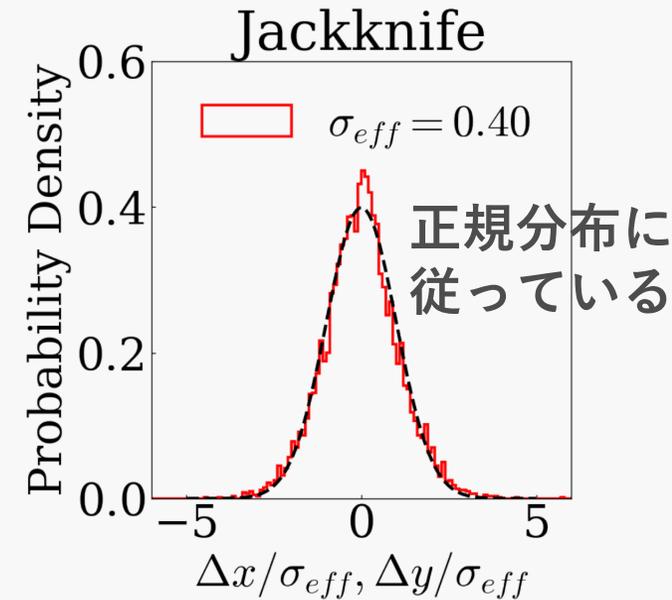
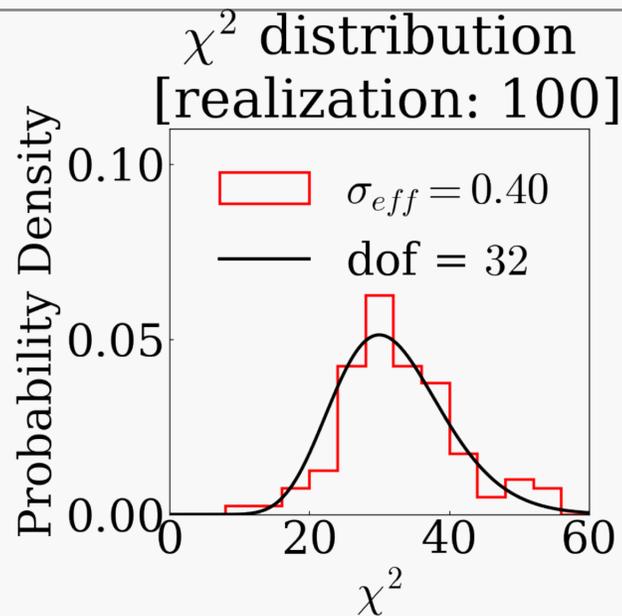
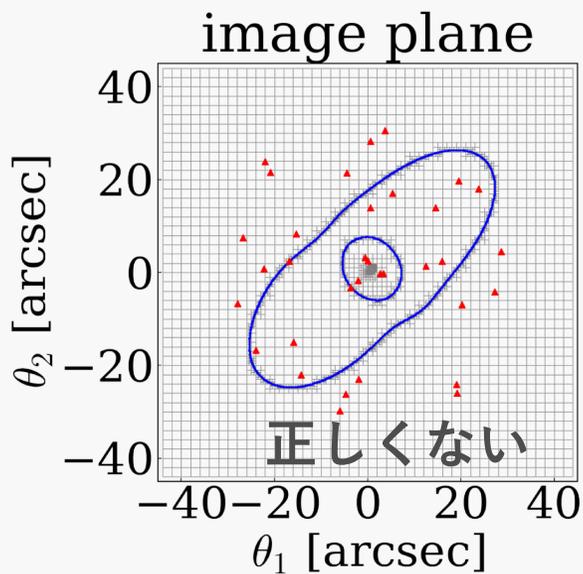
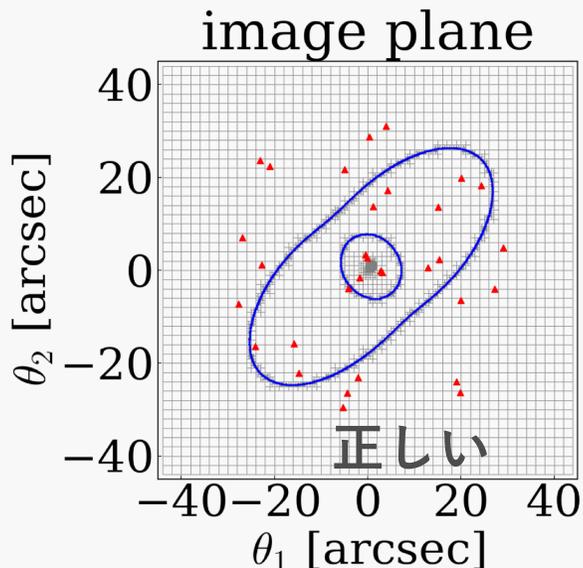
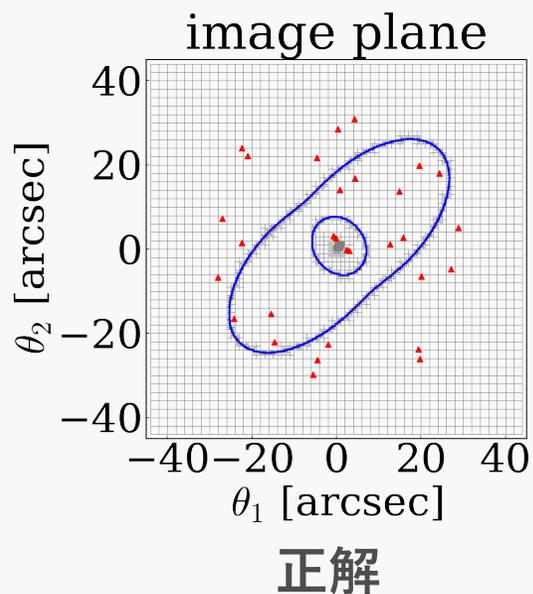
「正しくない」  
モデルB

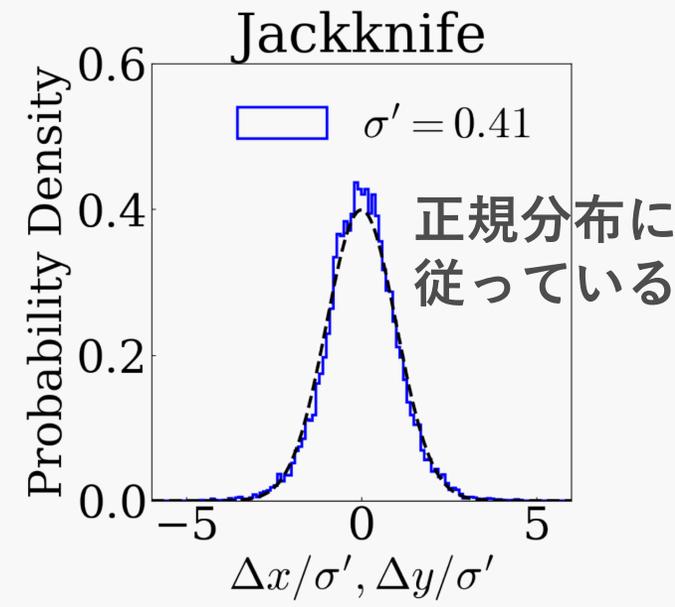
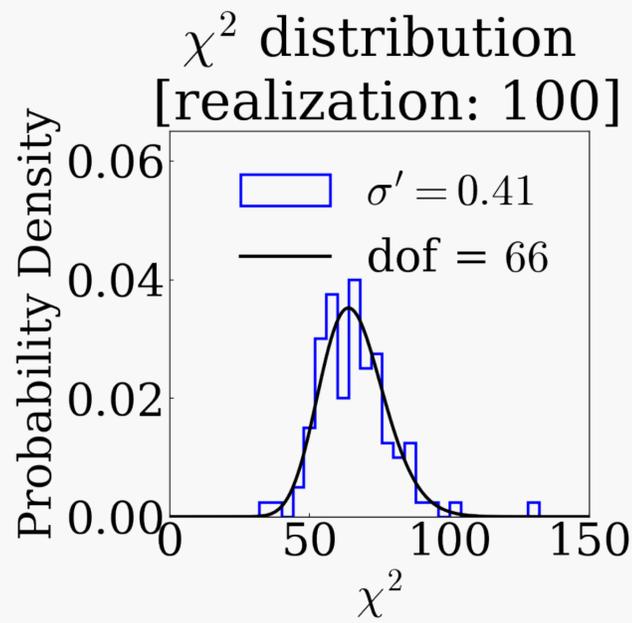
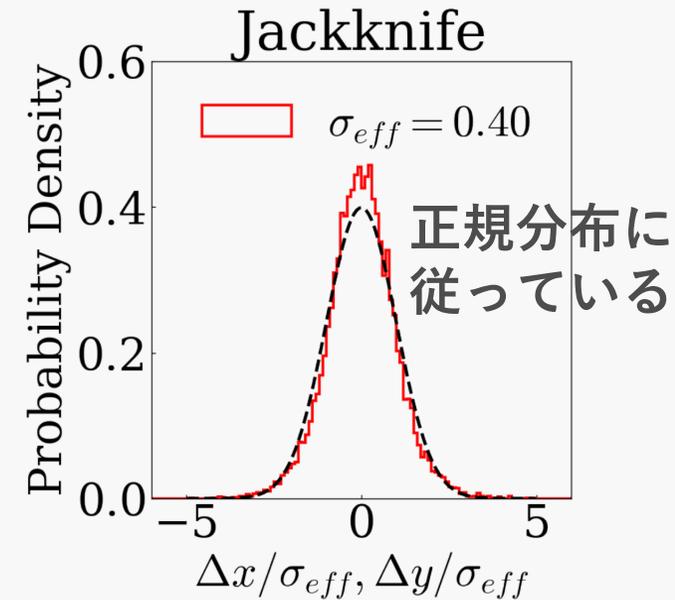
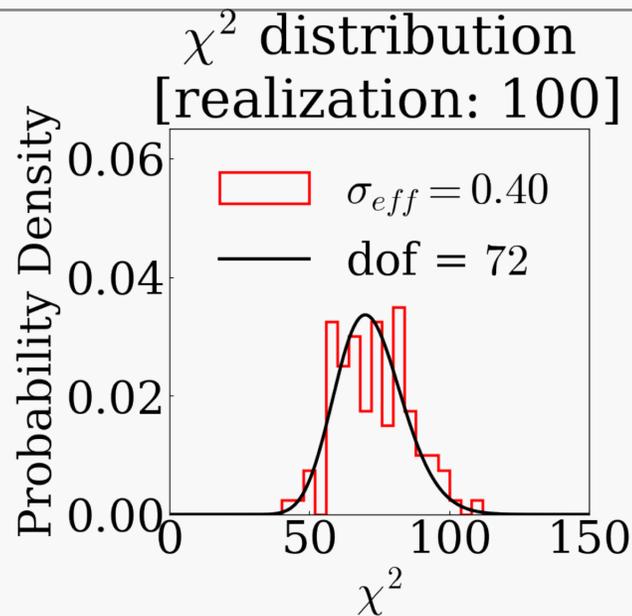
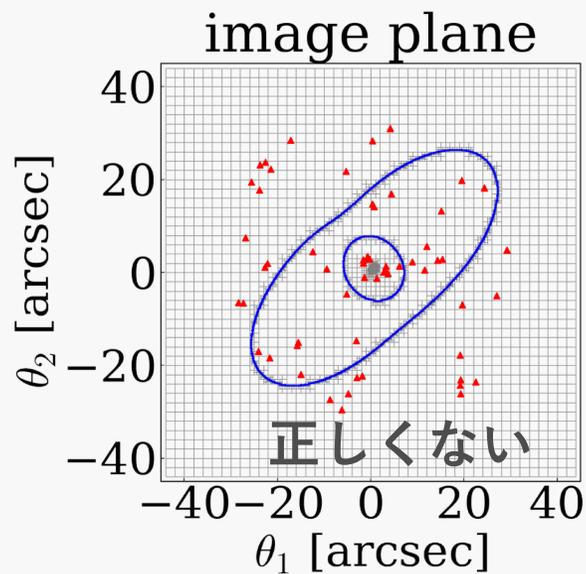
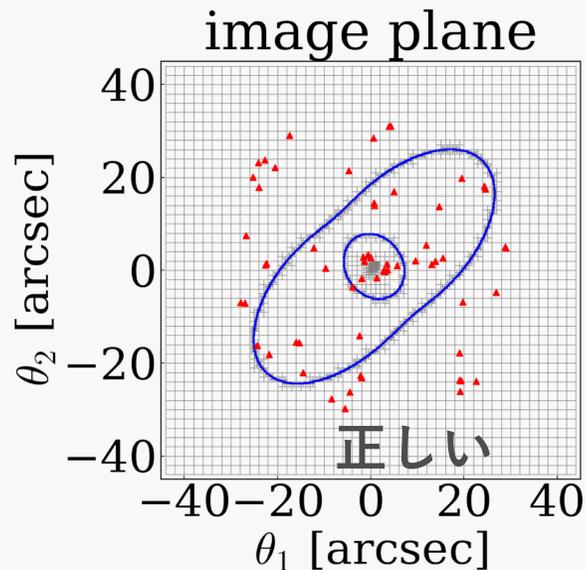
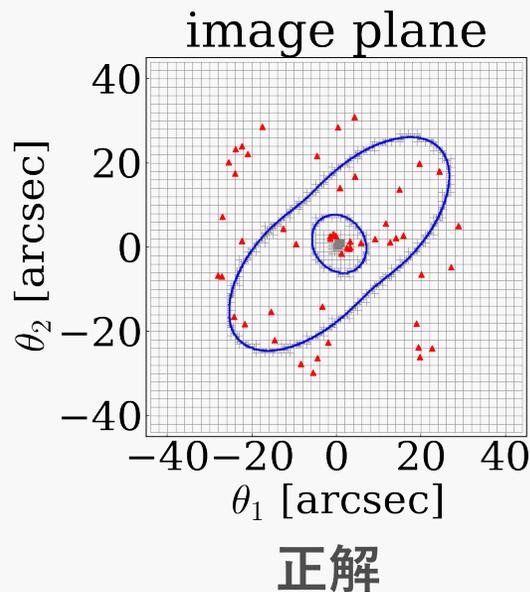


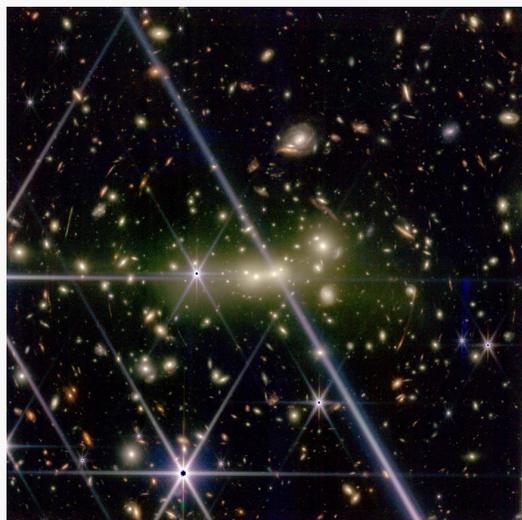
レンズ天体：1個のダークマターハロー  
ソース天体：5, 10, 20個の点光源

過剰な摂動を  
足している



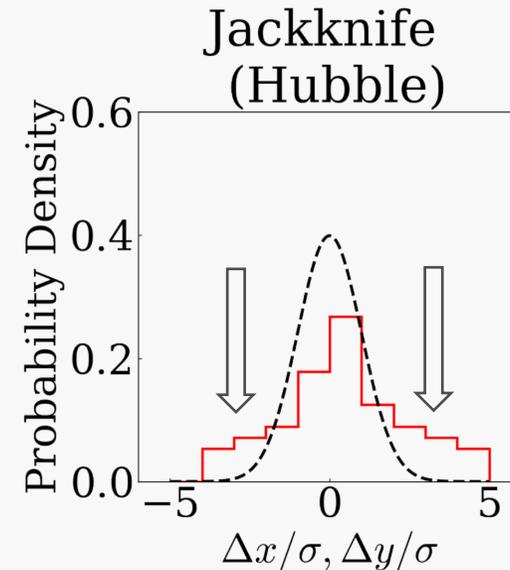
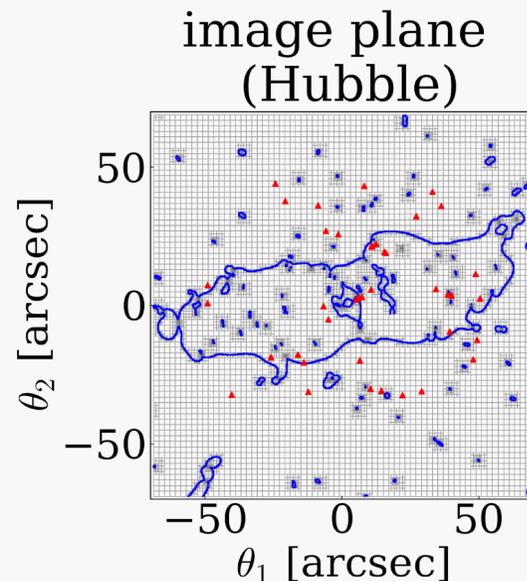




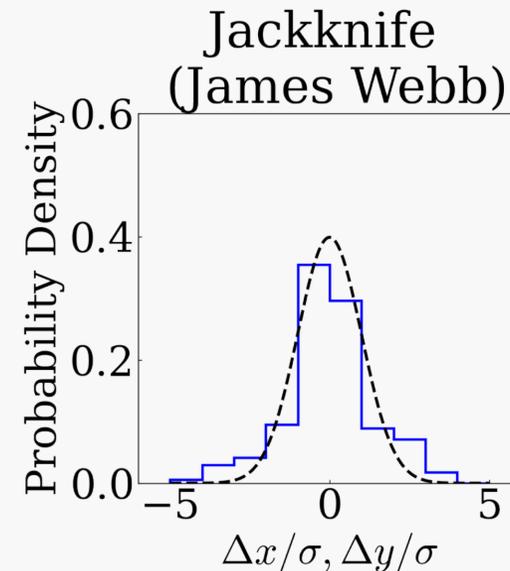
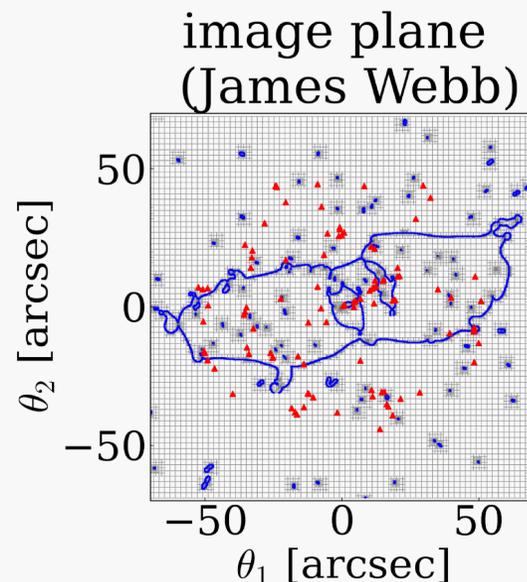


MACS0647 ( $z = 0.591$ )

Hubbleによる  
モデルはoverfit  
「正しくない」



James Webbに  
よるモデルは  
「正しい」



- 重力レンズ解析によるマスモデルの正しさをJackknife法で検証する新しい手法をシミュレーションを用いて確かめた
- シンプルなモデルに対してはJackknife法でうまくいく
  - ソース天体5個：overfitしているモデルに対してJackknifeで区別できた
  - ソース天体10個：少しoverfitしていたモデルに対してJackknifeで少しだけ違いがでた
  - ソース天体20個：Jackknifeの違いはでなかったが、そもそもoverfitしていなかった
- MACS0647の実際の観測結果に対してJackknifeの違いが見られた

## 今後の展望

- 設定する状況をより現実に近いモデルにしてシミュレーションをする
- 位置だけでなく、増光率やハッブル定数を正しく予言できるかを検証してみる