

超大質量ブラックホール連星合体による 背景重力波の高次統計量とその発散

久松姫南乃

指導教員：久徳浩太郎

目次

1. イントロダクション

2. 先行研究の紹介

3. 卒業研究の目的

4. 平均

5. 分散

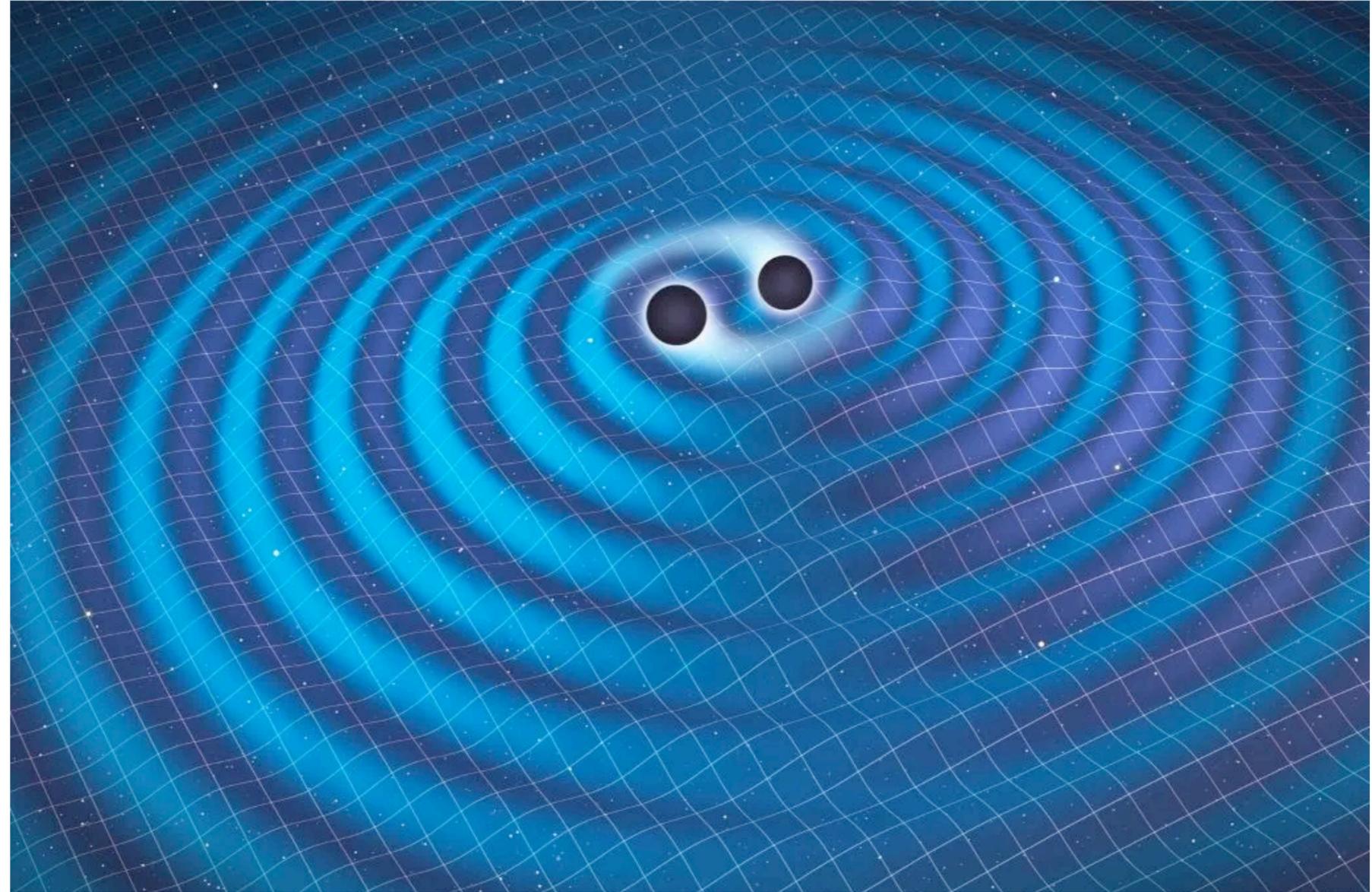
6. まとめ

1. イントロダクション

背景重力波=個別の波源に分解できていない重力波

重力波

- 空間の歪みが波として伝播する現象
- 大質量の物質が速く動くときに放出される



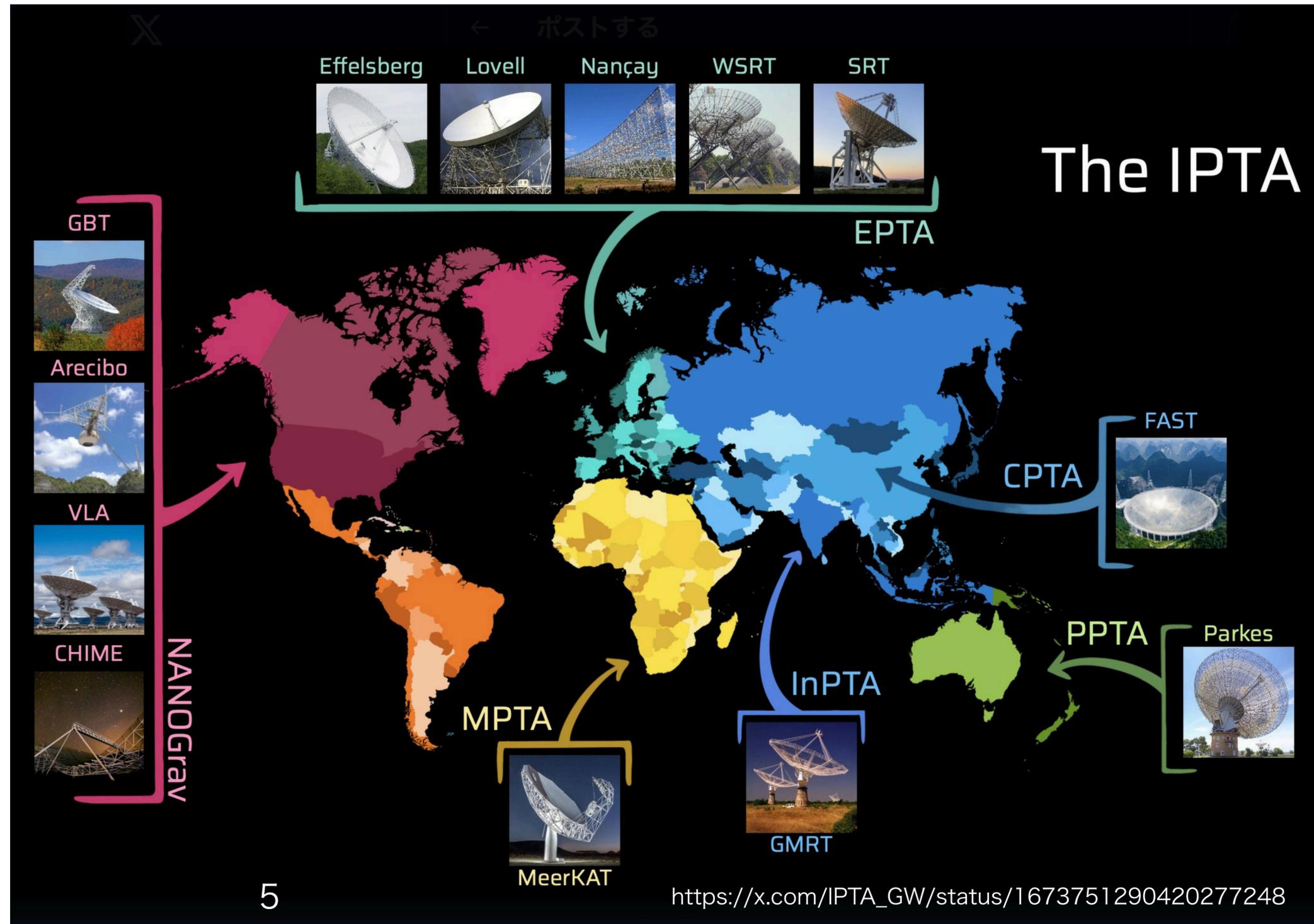
パルサータイミングアレイの最近の観測結果

・ NANOGrav

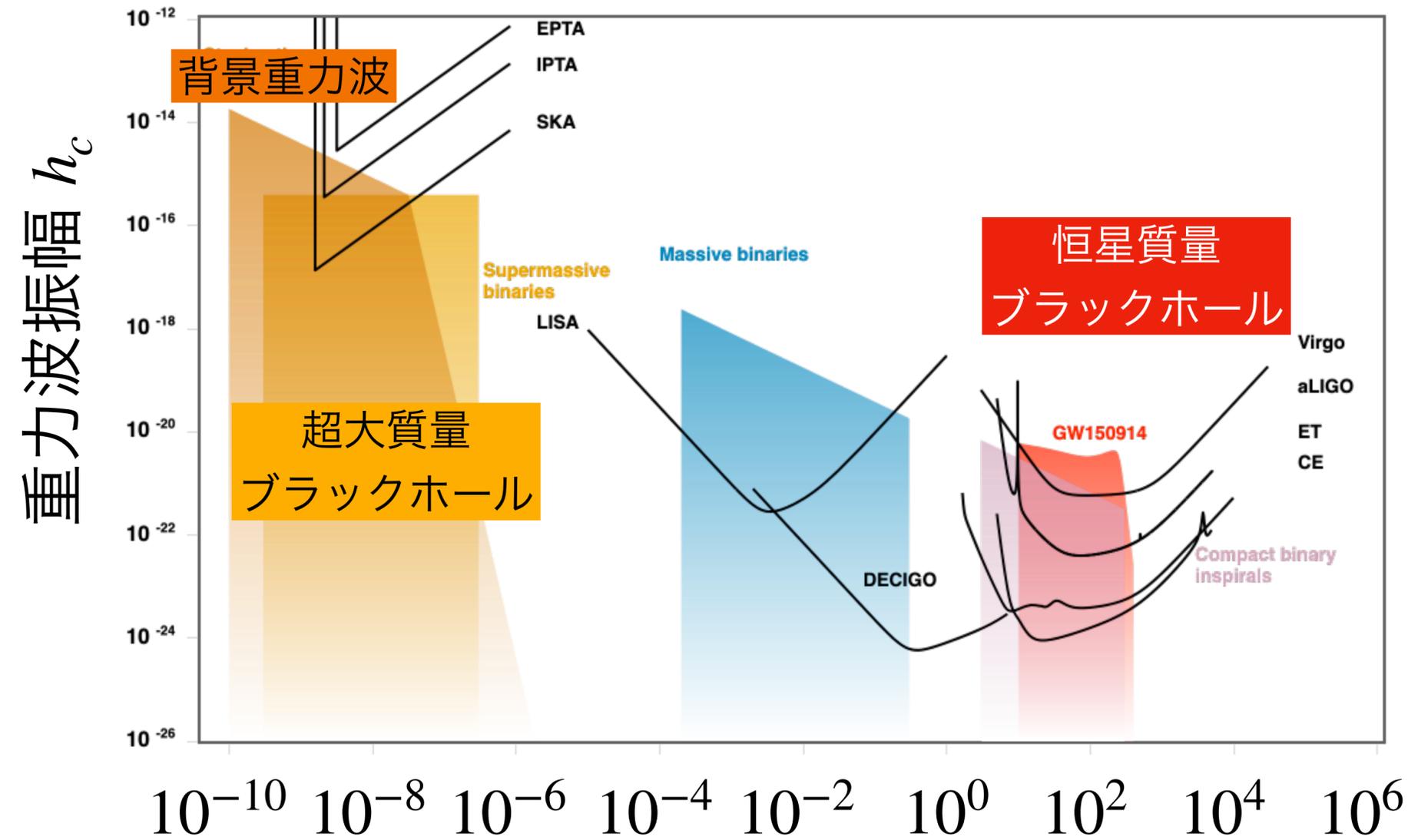
背景重力波の存在を示唆

他にも

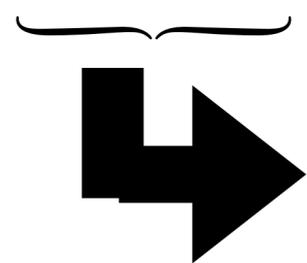
同様の報告がある



重力波検出器の感度スペクトル



背景重力波の最有力な波源は
超大質量ブラックホール
連星の軌道運動



重力波の周波数 [Hz]

この領域をパルサータイミングアレイで観測する

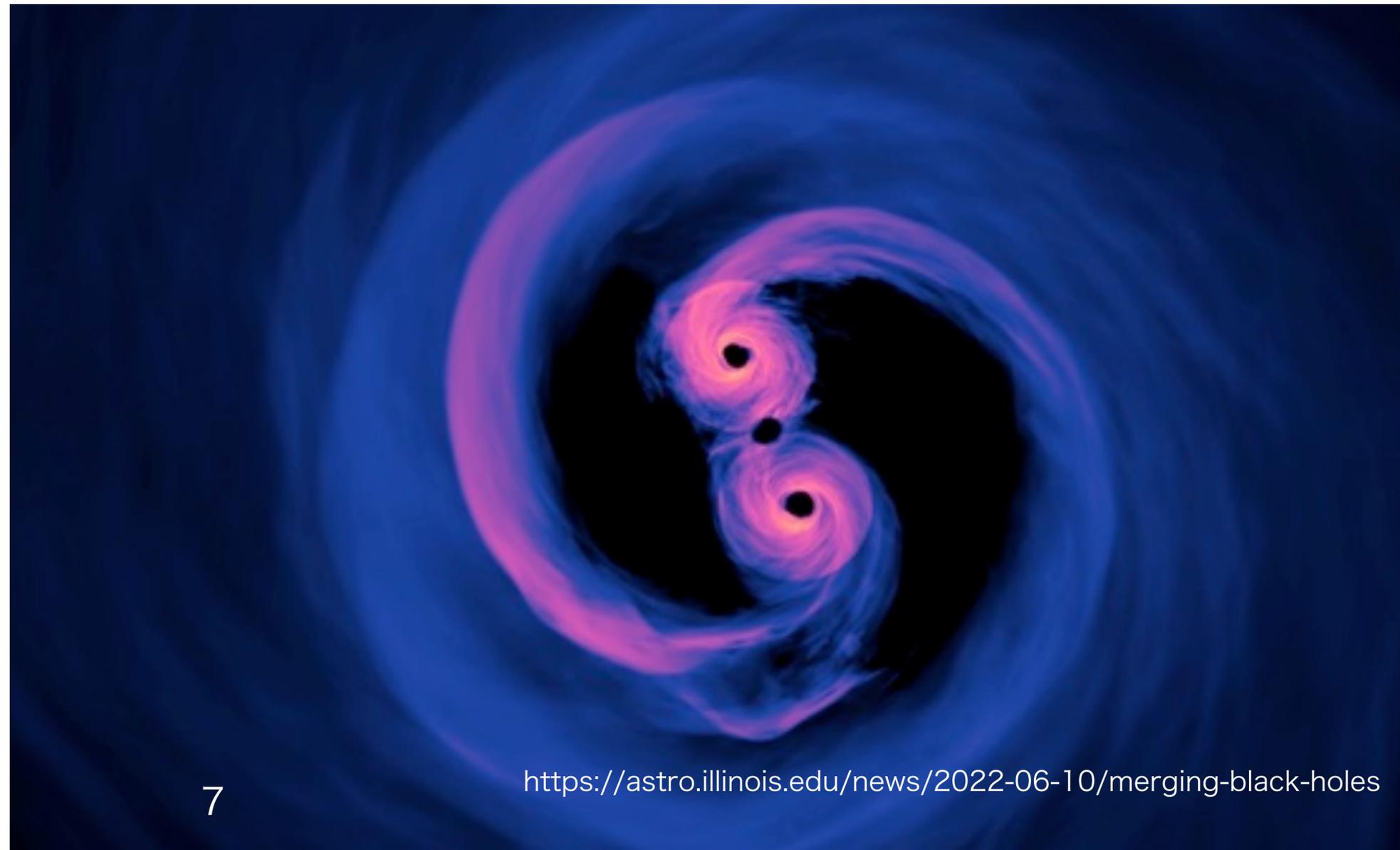
超大質量ブラックホール

太陽質量 M_{\odot} の $10^6 - 10^{10}$ 倍の質量を持つブラックホール

未解決問題

- ・どのようにして超大質量に
進化したのか
- ・連星は(どのように)
合体するのか

重力波でブラックホールの質量
を探ることで手がかりを得たい



2. 先行研究

の紹介

背景重力波エネルギースペクトル

$\mathcal{M} [M_{\odot}] = (M_1 M_2)^{3/5} / (M_1 + M_2)^{1/5}$: チャープ質量 z : 赤方偏移

$n [\text{Mpc}^{-3}]$: 合体の共動体積密度 E_{GW} : 重力波によるエネルギー

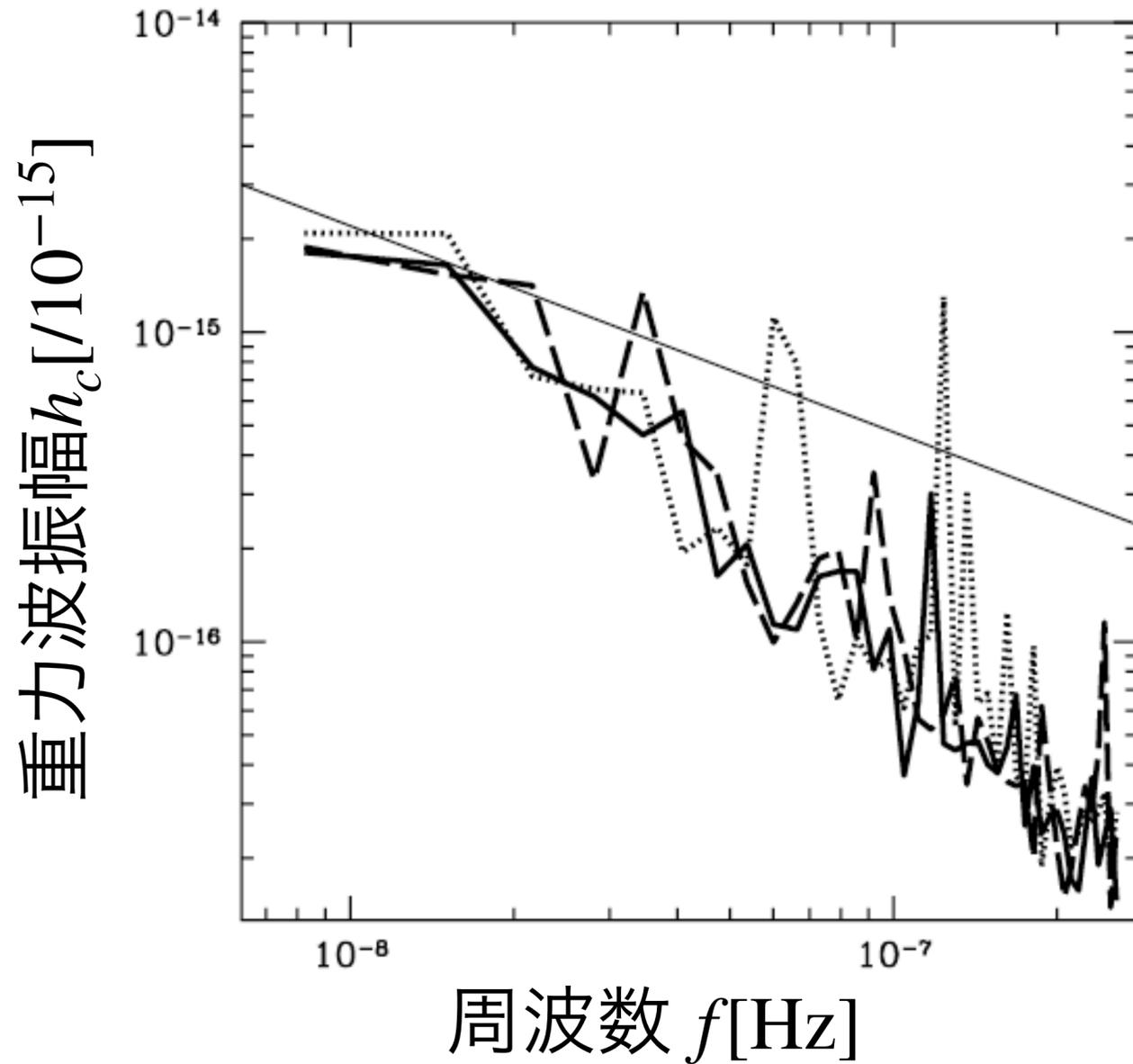
重力波のエネルギースペクトル $\Omega_{\text{GW}}(f)$:

$$\Omega_{\text{GW}}(f) = \frac{1}{\rho_c} \frac{d\rho_{\text{GW}}(f)}{d \ln f}$$

$$= \frac{1}{\rho_c} \int d \log_{10} \mathcal{M} \int \frac{dz}{1+z} \times \frac{d^2 n}{dz d \log_{10} \mathcal{M}} \left(\frac{dE_{\text{GW}}}{d \ln f_r} \right) \Bigg|_{f_r=(1+z)f} \quad (\text{Phinney 2001})$$

さまざまな宇宙で考える

$$\Omega(f) = \frac{2\pi^2}{3H_0^2} f^2 h_c^2(f)$$



一つの宇宙に存在する

ブラックホールの分布はランダム

→それぞれの宇宙で

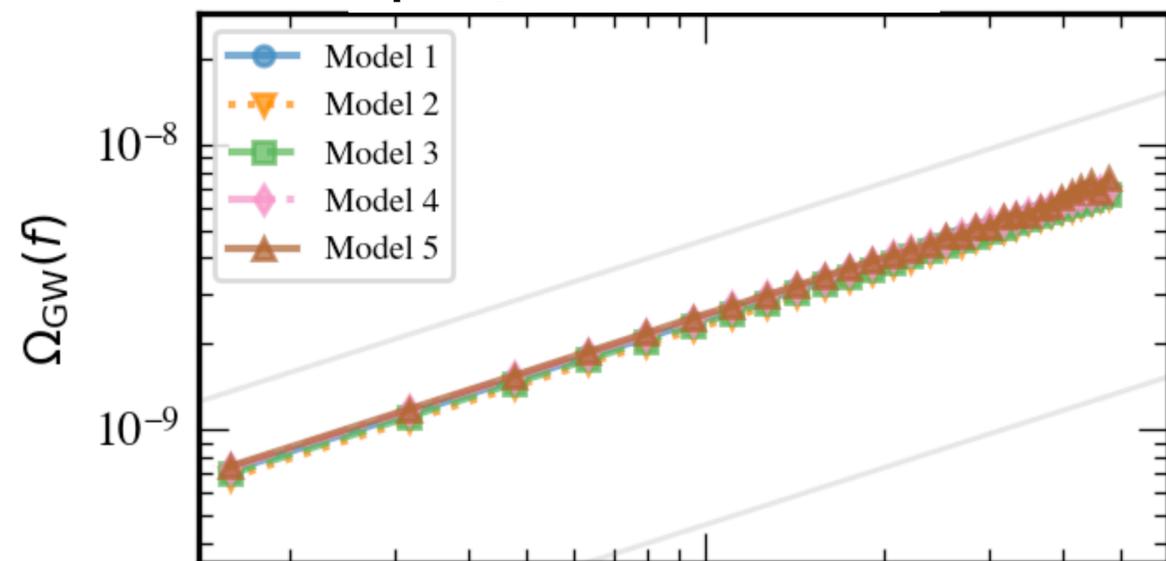
ブラックホール連星の位置は異なる

➔ 重力波スペクトルもばらつきがある

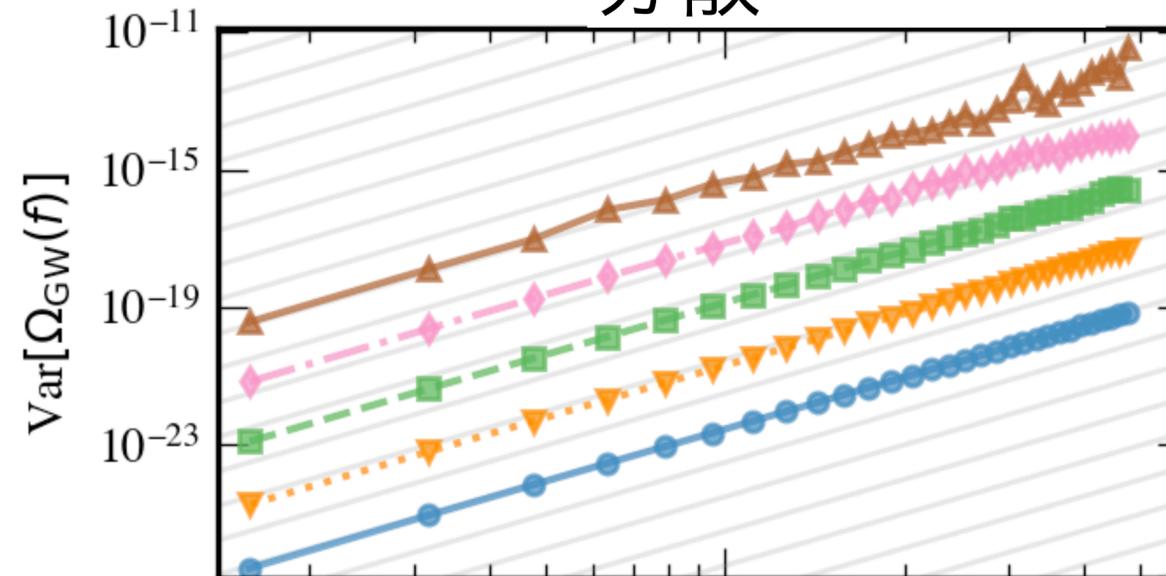
背景重力波の統計量

Lamb & Taylor 2024

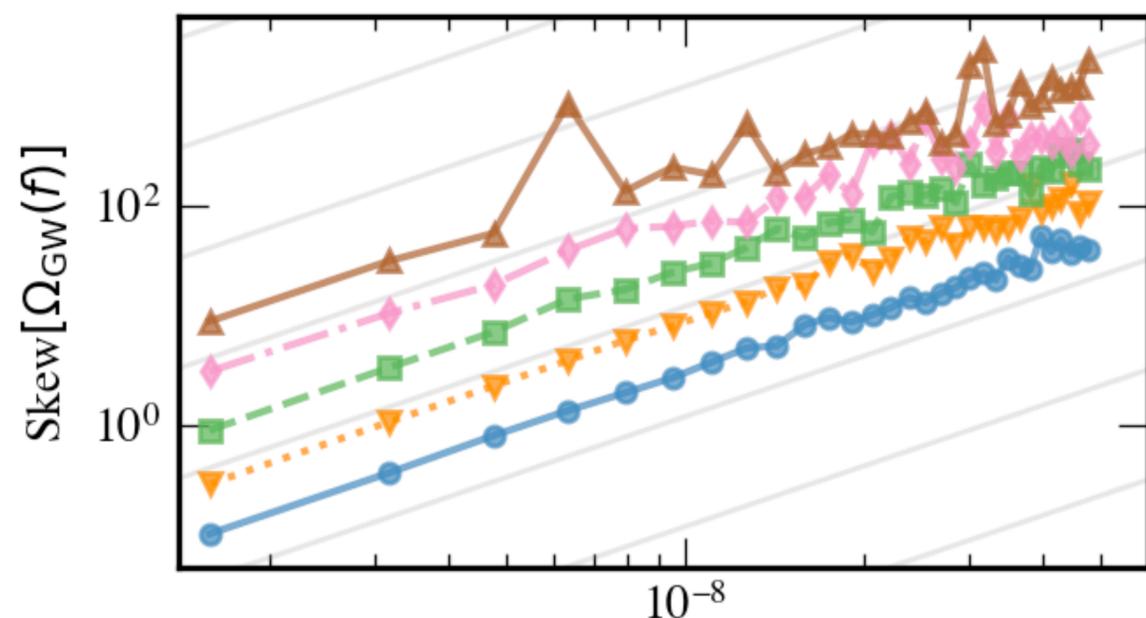
平均スペクトル



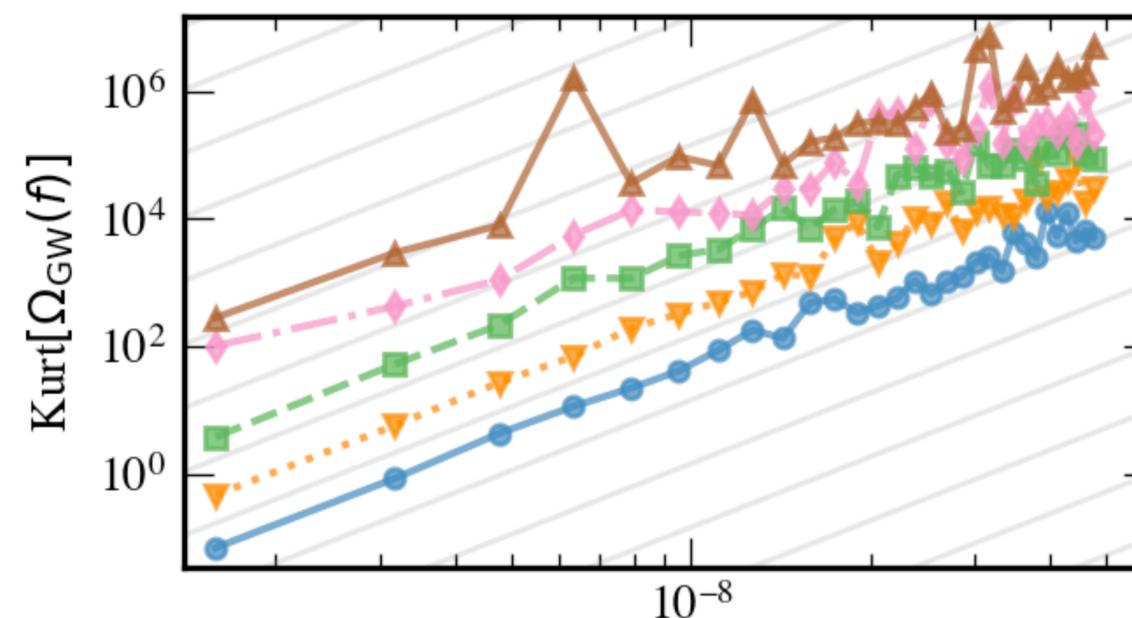
分散



歪度



尖度



重力波の周波数 f [Hz]

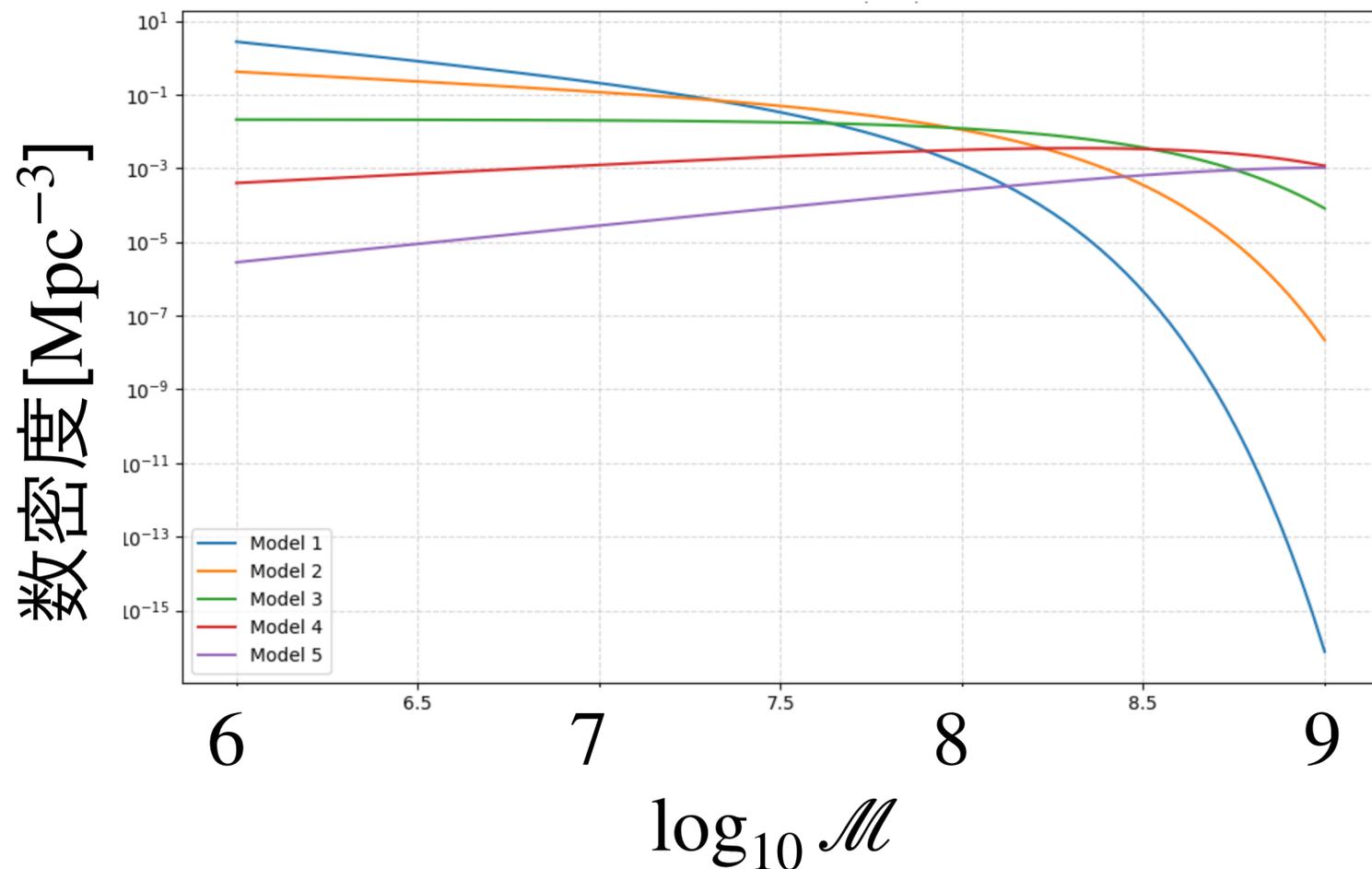
重力波の周波数 f [Hz]

3. 卒業研究

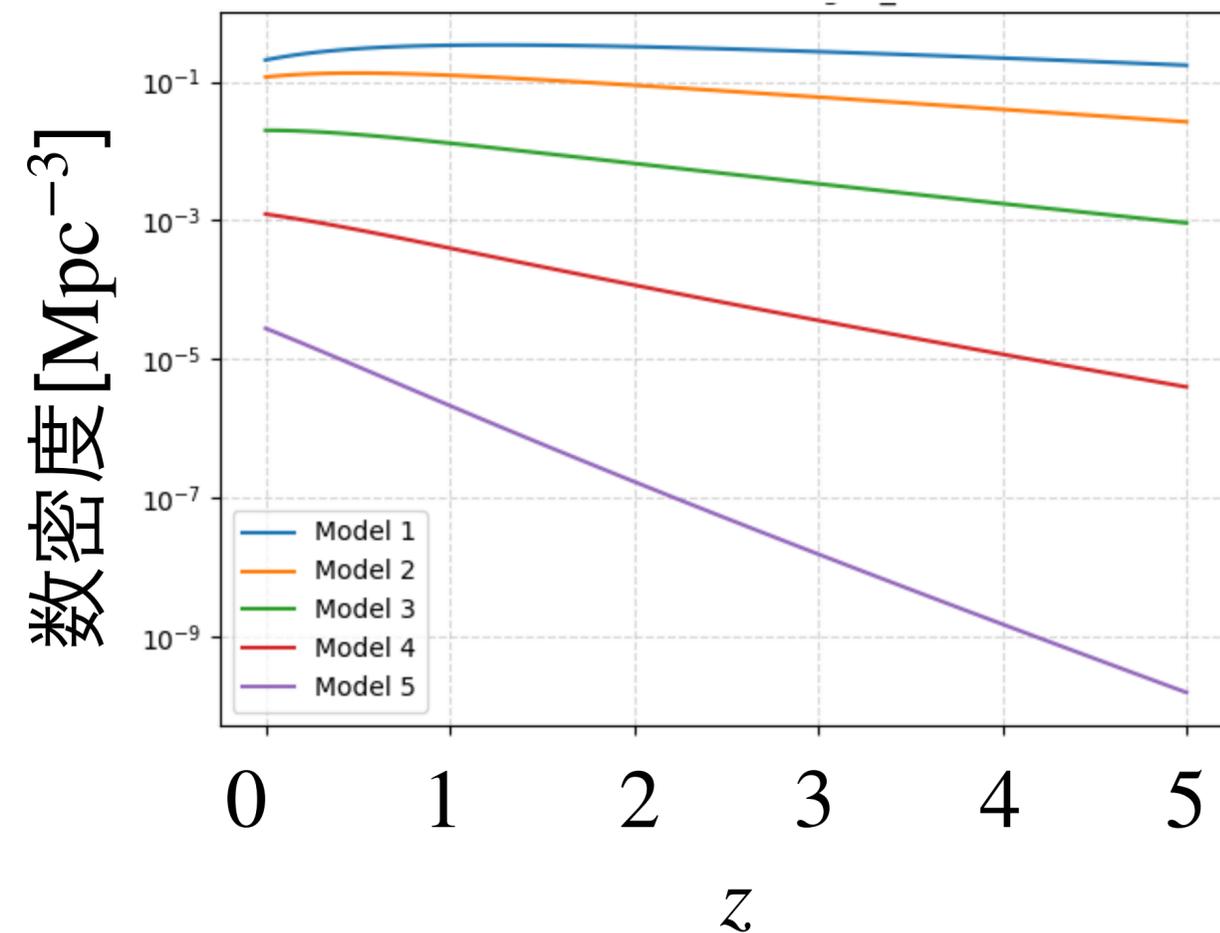
の目的

超大質量ブラックホールの数密度： $\frac{d^2n}{dzd\log_{10}\mathcal{M}}$

数密度($z = 0$)



数密度($\log_{10}\mathcal{M} = 7$)



Model 1：低質量連星が多く、広い赤方偏移に分布する



Model 5：少数の高質量連星が主で、連星は近傍に多い

卒業研究の目的

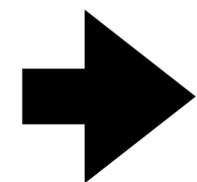
$$\frac{d^2 n}{dz d \log_{10} \mathcal{M}} = \dot{n}_0 \left[\left(\frac{\mathcal{M}}{10^7 M_\odot} \right)^{-\alpha} e^{-\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_*}} \right] \times \left[(1+z)^\beta e^{-\frac{z}{z_0}} \right] \frac{dt_r}{dz}$$

\dot{n}_0 [Mpc⁻³Gyr⁻¹] : 典型的な合体率

$$\Omega_{\text{GW}}(f) = A f^{\frac{2}{3}} \dot{n}_0 \int_{z=0}^5 \left(\int_{\log_{10} \mathcal{M}=6}^{11} \mathcal{M}^{\frac{5}{3}} \left(\frac{\mathcal{M}}{10^7 M_\odot} \right)^{-\alpha} e^{-\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_*}} \frac{(1+z)^\beta}{(1+z)^{\frac{1}{3}}} e^{-\frac{z}{z_0}} \frac{dt_r}{dz} d \log_{10} \mathcal{M} \right) dz$$

(A = const.)

超大質量ブラックホール連星合体からの



背景重力波の平均や分散などの高次統計量が

分布のどのような性質で決まるか知りたい！

4. 平均

質量と赤方偏移との依存性の分解

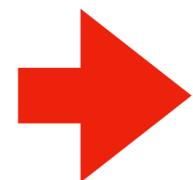
$$\Omega_{\text{GW}}(f) = A f^{\frac{2}{3}} \dot{n}_0 \int_{z=0}^5 \left(\int_{\log_{10} \mathcal{M}=6}^{11} \mathcal{M}^{\frac{5}{3}} \left(\frac{\mathcal{M}}{10^7 M_{\odot}} \right)^{-\alpha} e^{-\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_*}} \frac{(1+z)^{\beta}}{(1+z)^{\frac{1}{3}}} e^{-\frac{z}{z_0}} \frac{dt_r}{dz} d\log_{10} \mathcal{M} \right) dz$$

- $n \equiv \int_z \int_{\log_{10} \mathcal{M}} \frac{d^2 n}{dz d\log_{10} \mathcal{M}} dz d\log_{10} \mathcal{M}$

$$= \dot{n}_0 \left(\int \left(\frac{\mathcal{M}}{10^7 M_{\odot}} \right)^{-\alpha} e^{-\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_*}} d\log_{10} \mathcal{M} \right) \times \left(\int (1+z)^{\beta} e^{-\frac{z}{z_0}} \frac{dt_r}{dz} dz \right)$$

- $\langle \mathcal{M}^{5/3} \rangle \equiv \frac{\int \mathcal{M}^{5/3} \left(\frac{\mathcal{M}}{10^7 M_{\odot}} \right)^{-\alpha} e^{-\mathcal{M}/\mathcal{M}_*} d\log_{10} \mathcal{M}}{\int \left(\frac{\mathcal{M}}{10^7 M_{\odot}} \right)^{-\alpha} e^{-\mathcal{M}/\mathcal{M}_*} d\log_{10} \mathcal{M}}$

- $\langle (1+z)^{-1/3} \rangle \equiv \frac{\int [(1+z)^{\beta} / (1+z)^{1/3}] e^{-\frac{z}{z_0}} \frac{dt_r}{dz} dz}{\int (1+z)^{\beta} e^{-\frac{z}{z_0}} \frac{dt_r}{dz} dz}$

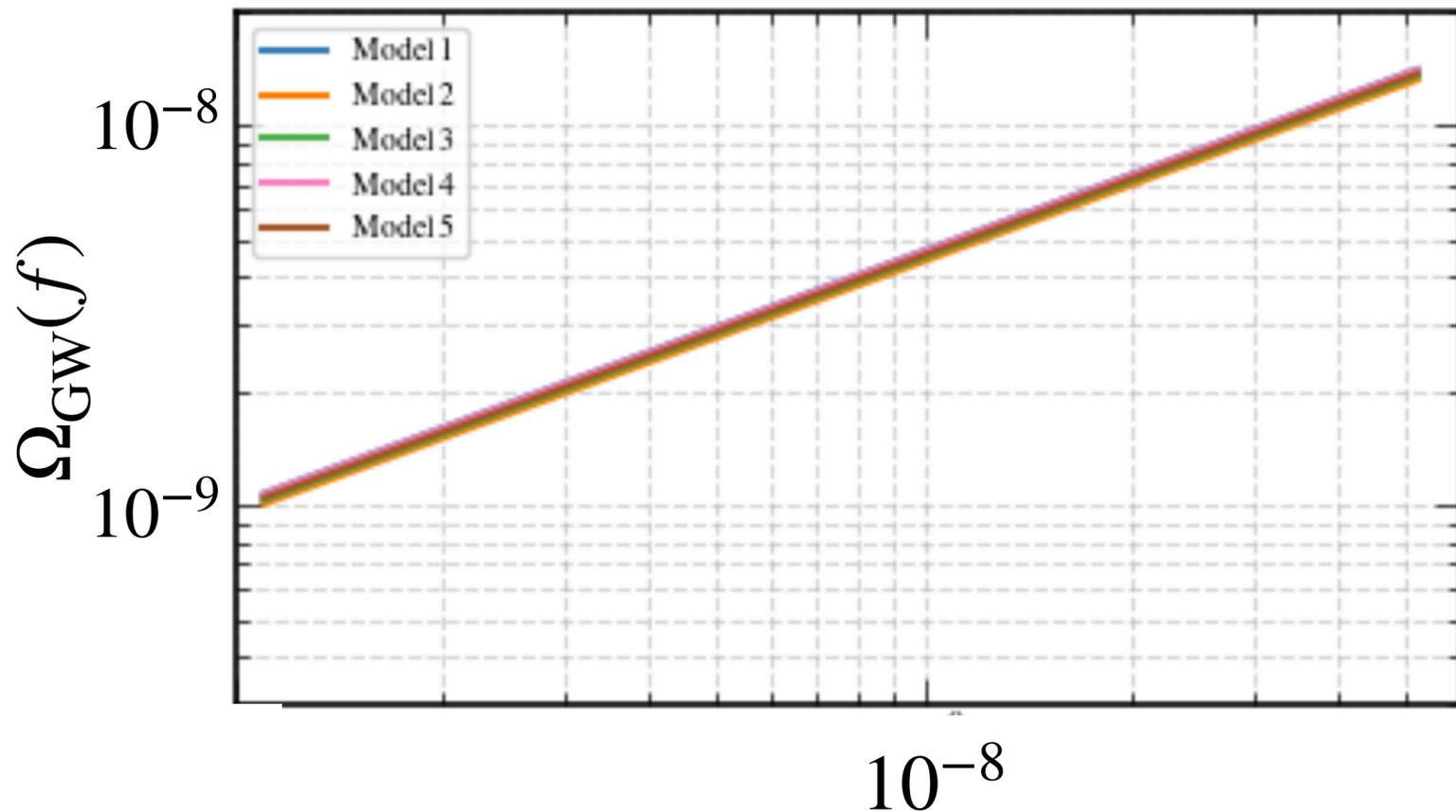


$$\Omega_{\text{GW}}(f) = A f^{\frac{2}{3}} n \langle \mathcal{M}^{\frac{5}{3}} \rangle \langle (1+z)^{-\frac{1}{3}} \rangle \quad (A = \frac{8(\pi G)^{5/3}}{9c^2 H_0^2} = \text{const.})$$

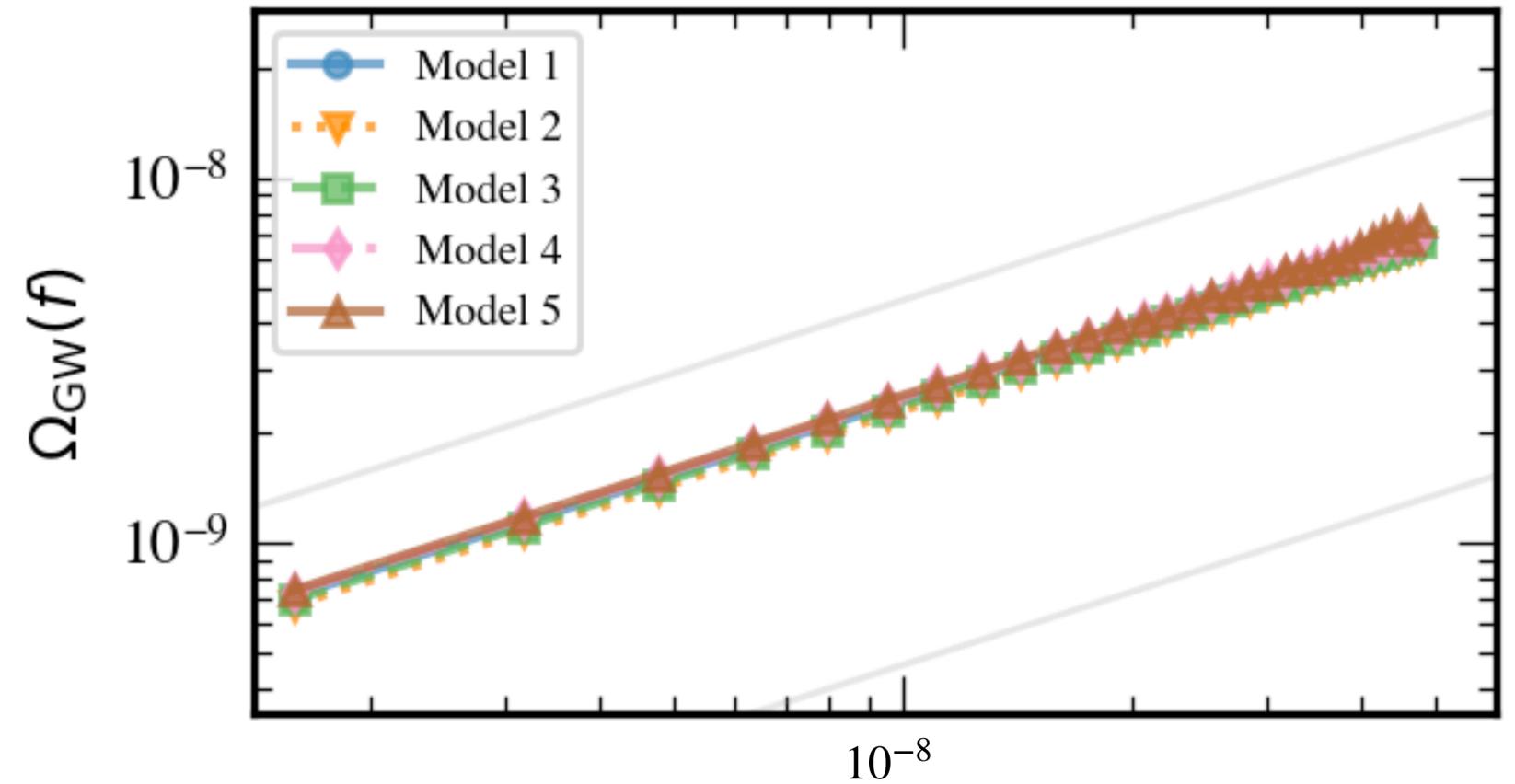
全数密度 \mathcal{M} の重みづけ平均 z の重みづけ平均

結果の一致の確認

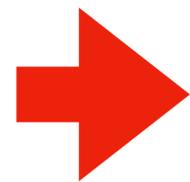
今回の数値積分



Lamb and Taylor fig2



何の寄与が主か明確な式で傾きが一致し、値は倍ほどのずれ



ずれの原因：先行研究のGitHubのコードにバグがあった

各量の重みづけ平均

	<u>$n [\text{Mpc}^{-3}]$</u>	<u>$\langle \mathcal{M}^{\frac{5}{3}} \rangle^{\frac{3}{5}} [M_{\odot}]$</u>	<u>$\langle (1+z)^{-\frac{1}{3}} \rangle$</u>
<u>Model1</u>	7.04	4.85×10^6	0.702
<u>Model2</u>	9.87×10^{-1}	1.47×10^7	0.741
<u>Model3</u>	7.41×10^{-2}	6.75×10^7	0.787
<u>Model4</u>	5.23×10^{-3}	3.23×10^8	0.846
<u>Model5</u>	4.78×10^{-4}	1.28×10^9	0.908

新たにわかったこと

エネルギースペクトルの平均において、
合体の数密度 n , チャープ質量 \mathcal{M} の
分布が大きく寄与し、
赤方偏移 z の分布にはあまりよらない

5. 分散

分散

平均と同様にして、 \mathcal{M} と z の重みづけ平均で表したい。

$$\text{Var}[\Omega_{\text{GW}}(f)] = \frac{B f^4}{\Delta \ln f} \dot{n}_0 \left(\int_6^{11} \left(\frac{\mathcal{M}}{10^7 M_\odot} \right)^{-\alpha} e^{-\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_*}} \mathcal{M}^5 d \log_{10} \mathcal{M} \right) \\ \times \left(\int_0^5 (1+z)^\beta e^{-\frac{z}{z_0}} \frac{1}{H(z) d_L^2(z)} dz \right)$$

光度距離： $d_L(z)$

ハッブルパラメータ： $H(z)$

$$(H(z) = H_0(\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\Lambda)^{\frac{1}{2}})$$

$(B = \text{const.})$

\mathcal{M} は重みづけ平均の形 $\langle \mathcal{M}^5 \rangle$ で表すことができる。

しかし、 z の方は $z=0$ まで積分すると発散してしまう。 ($\because H_0 d_L = cz$)

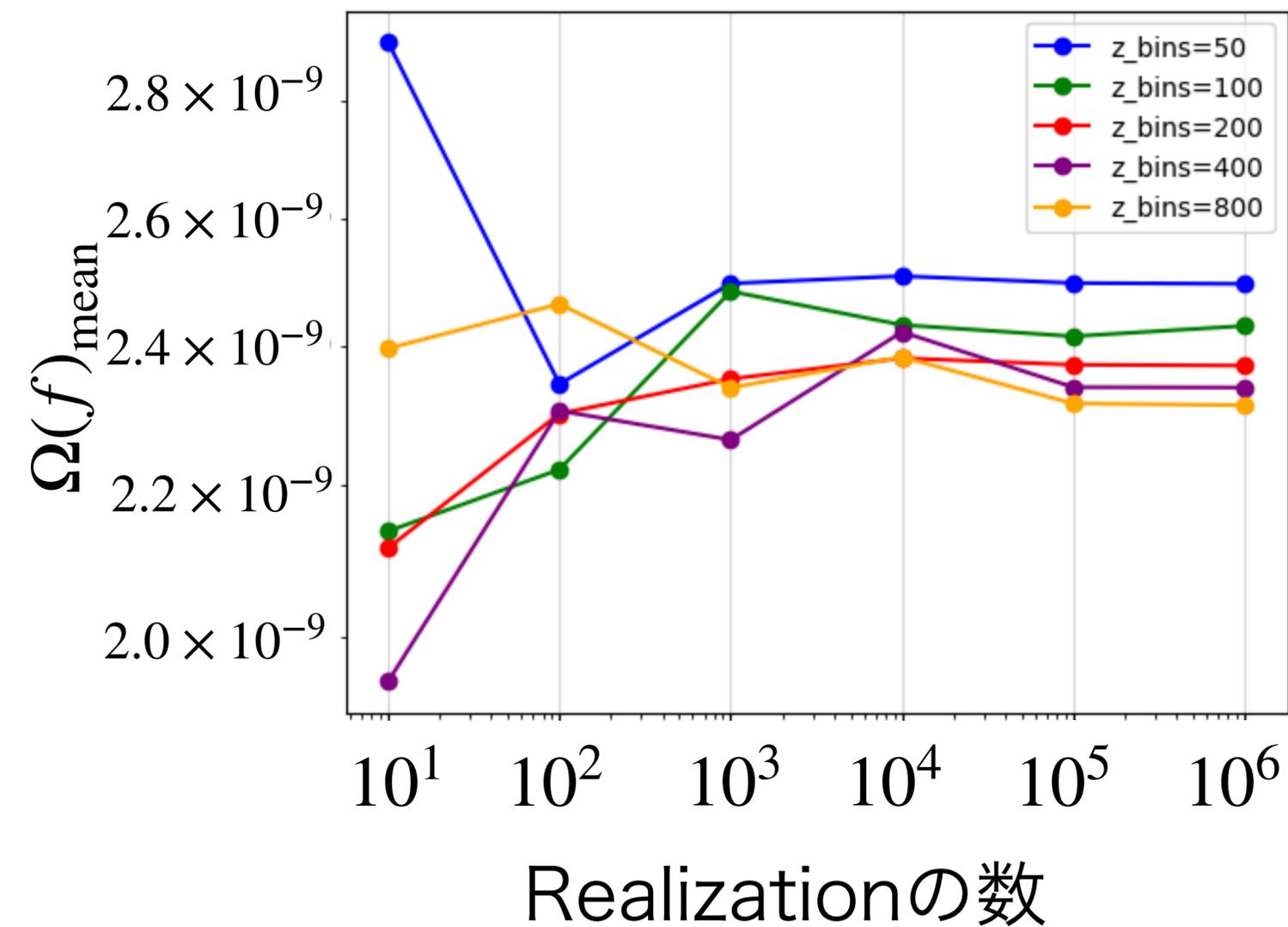
→ 先行研究の計算結果の意味は明確でない

平均

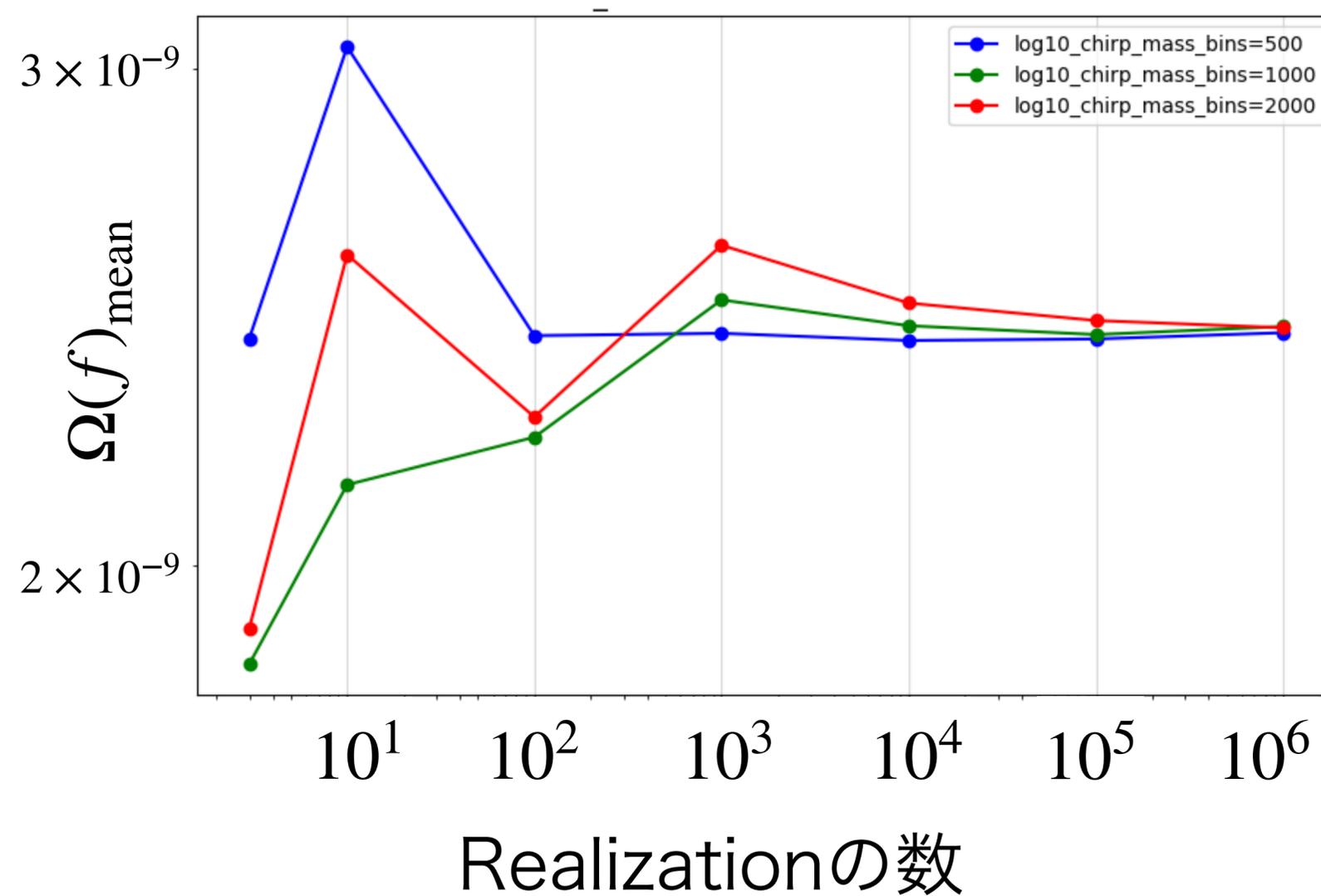
$f \sim 10^{-8}$ Hz とし、 z, \mathcal{M} の分割数を変更し、

横軸をRealization数とした $\Omega(f)$ の平均を求めた

z の分割数ごとの $\Omega_{\text{mean}}(f)$



$\log_{10} \mathcal{M}$ の分割数ごとの $\Omega_{\text{mean}}(f)$

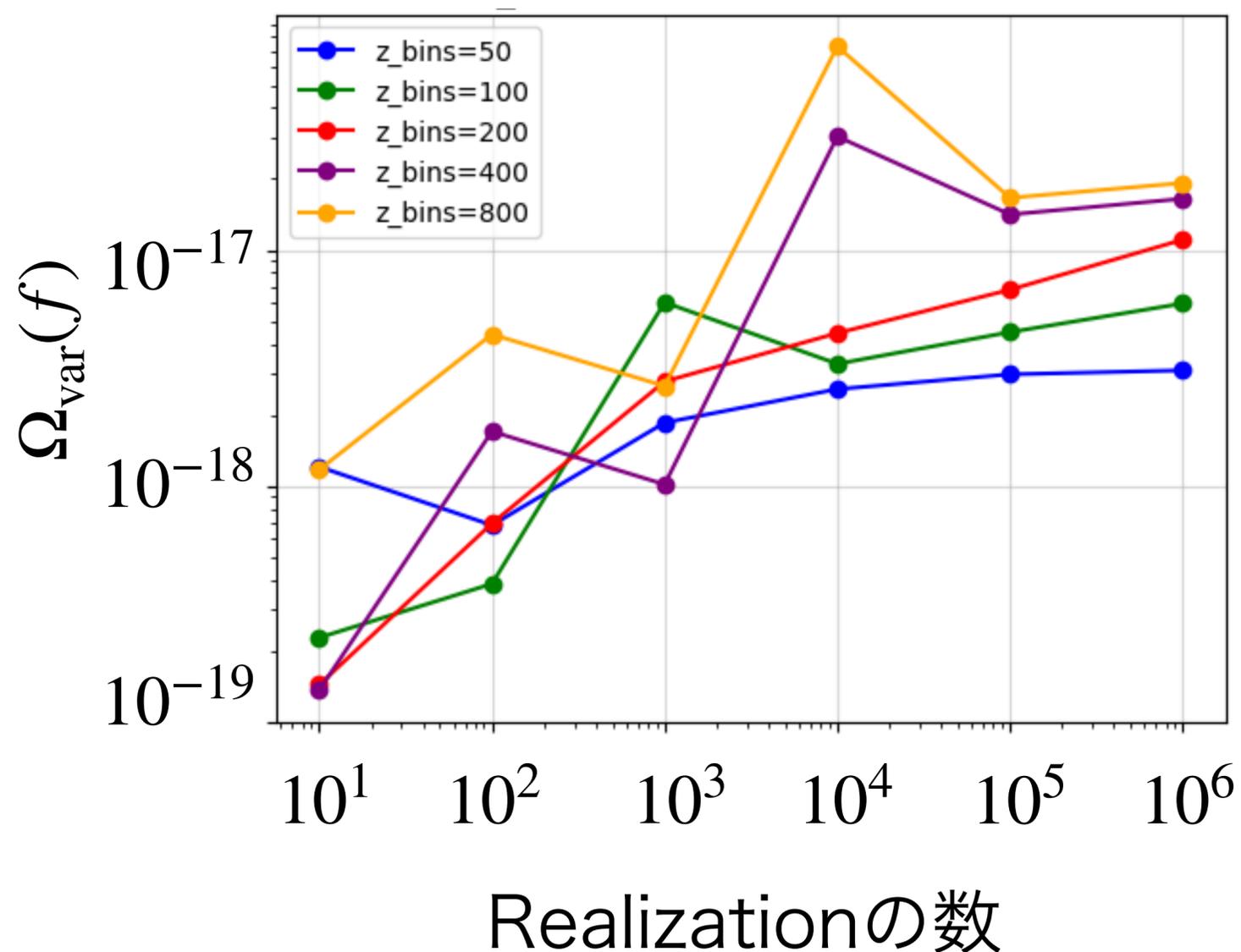


分散

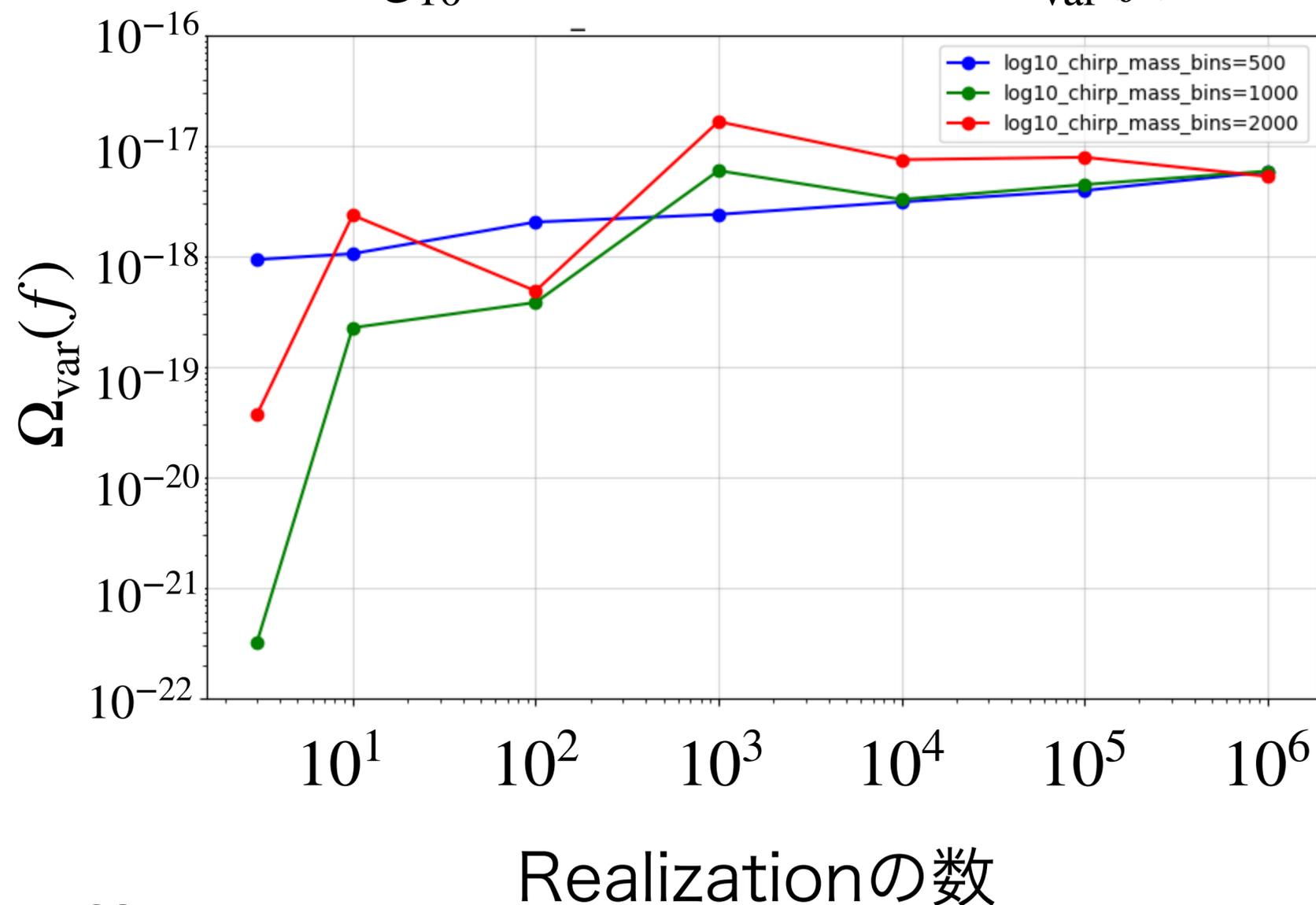
 $f \sim 10^{-8} \text{ Hz}$ とし、 z, \mathcal{M} の分割数を変更し、

横軸をRealization数とした $\Omega(f)$ の分散を求めた

z の分割数ごとの $\Omega_{\text{var}}(f)$



$\log_{10} \mathcal{M}$ の分割数ごとの $\Omega_{\text{var}}(f)$



新たにわかったこと

- Lamb & Taylorの高次統計量のグラフは傾きには意義があるかもしれないが、その値自体に意味はない
- 背景重力波の高次統計量を素直に計算しても発散しているので意味のある情報を得られない

6. しまとめ

卒業研究のまとめ

平均：

合体の数密度、チャープ質量 \mathcal{M} の分布が大事で
赤方偏移 z の分布にはあまりよらない

高次統計量：

赤方偏移 z に関する式が発散してしまうため、
高次統計量の値自体に意味はなかった

今後の展望

$z = 0$ 付近で発散するので、積分範囲の下限を決める

- ・ 質量、振動数によらず、 $z = 0.01$ などの下限を入れる？
- ・ 近傍の連星は個別に検出できるので、その範囲を下限とする？

パルサータイミングアレイによる背景重力波の観測において、

より物理的な情報を含んだ適切なモデルが提案できるのではないか