HLL法に基づく
相対論的MHDコードの開発

浅野栄治[1]

富高真[1]、松元亮治[2]
(1:千葉大自然科学、2:千葉大理)

イントロダクション

- 活動銀河核からの相対論的ジェット
- ブラックホール近傍の物理現象
- 中性子星からの相対論的アウトフロー

- 数値シミュレーションで扱うために、高ローレンツ因子でも安定に解くことができる相対論的コードが必要

高ローレンツ因子問題を解くために

1. 差分スキームの選択
   数値振動が少ない (圧力や密度が負にならない)

2. 基本量 (ρ, v, p) を求める方法 (反復解法)
   ・2変数Newton法
   ・3次方程式の解＋1変数Newton法

特殊相対論的理想MHD方程式
（保存形式での取り扱い）

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial D}{\partial t} + \nabla \cdot (D\boldsymbol{v}) = 0 \\
\dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[p\boldsymbol{I} + (e+p)\dfrac{\gamma^2}{c^2}\boldsymbol{v}\boldsymbol{v} - \dfrac{1}{4\pi}\left\{ \boldsymbol{E}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B} - \dfrac{1}{2}\boldsymbol{I}\left(E^2 + B^2\right) \right\} \right] = 0 \\
\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left\{ (e+p)\gamma^2 - Dc^2 \right\}\boldsymbol{v} + \dfrac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) \right] = 0 \\
\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \nabla \times (c\boldsymbol{E}) = 0
\end{cases}
$$

$$D = \rho\gamma$$

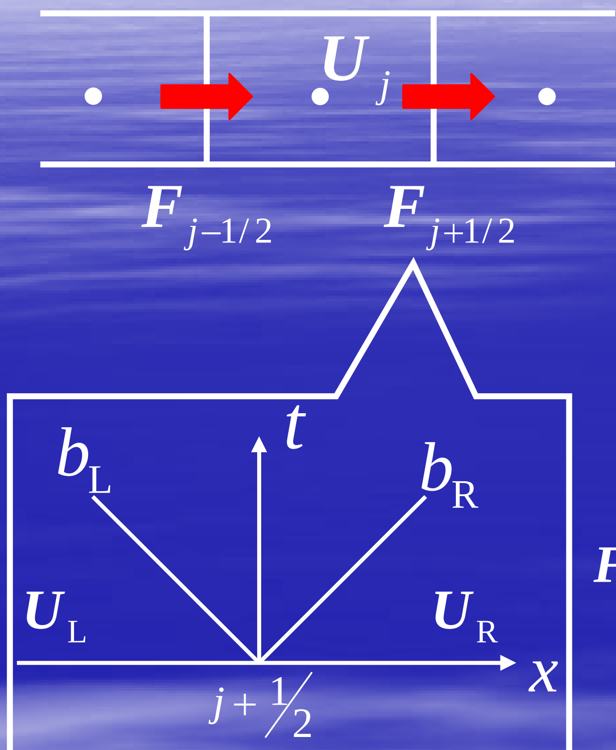
$$\boldsymbol{P} = (e+p)\frac{\gamma^2}{c^2}\boldsymbol{v} + \frac{1}{4\pi c}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})$$

$$\varepsilon = (e+p)\gamma^2 - Dc^2 - p + \frac{1}{8\pi}\left(E^2 + B^2\right)$$

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

$(\gamma : \mathrm{rorentz\ factor}, \mathrm{e} : \mathrm{thermal\ enegy\ density})$

差分スキーム (HLL法)



$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n\right)$$

$$F_{HLL} = \begin{cases} F_L & (\text{if } b_L > 0) \\ \dfrac{-b_L F_R + b_R F_L + b_R b_L (U_R - U_L)}{b_R - b_L} & (\text{if } b_L \le 0 \le b_R) \\ F_R & (\text{if } b_R < 0) \end{cases}$$

- b_R, b_L はそれぞれ特性速度の最大値、最小値
- MUSCL法で高次精度化する

特性速度

$$v_{\mathrm{fms}}^{\pm} = \frac{v_x(1-\omega^2)}{1-v^2\omega^2-R} \pm \frac{\sqrt{\left\{\left(v^2-1\right)\omega^2+R\right\}\left\{\left(v^2-v_x^2\right)\omega^2+v_x^2-1+R\right\}}}{1-v^2\omega^2-R}$$

$$\omega^2 = C_S^2 + C_a^2 - C_S^2 C_a^2 \quad , \quad R = \frac{C_S^2(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B})^2}{\gamma^2\left\{\rho + \frac{\Gamma}{\Gamma-1}p + \frac{B^2}{\gamma^2} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B})^2\right\}}$$

$$C_S^2 = \frac{\Gamma p}{\rho h} \quad , \quad C_a^2 = \frac{\frac{B^2}{\gamma^2} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B})^2}{\rho + \frac{\Gamma}{\Gamma-1}p + \frac{B^2}{\gamma^2} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B})^2}$$

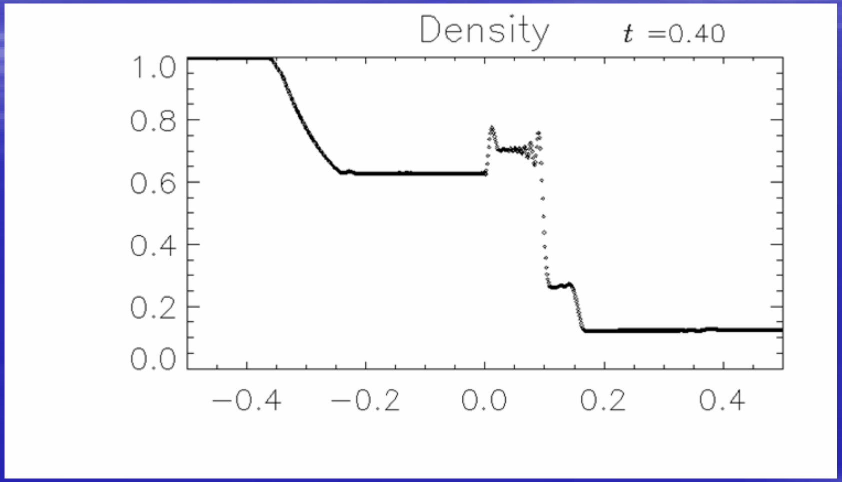
$(h:\text{specific enthalpy})$

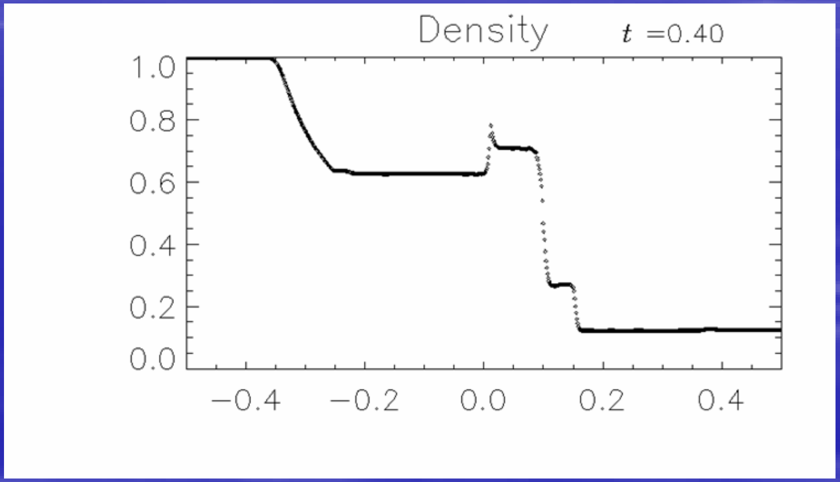
$$b_{\mathrm{R}} = \max(0, v_{\mathrm{fms,L}}^{+}, v_{\mathrm{fms,R}}^{+})$$

$$b_{\mathrm{L}} = \min(0, v_{\mathrm{fms,L}}^{-}, v_{\mathrm{fms,R}}^{-})$$

1次元テスト計算

- Lax-Wendroff法とHLL法の比較 (衝撃波管問題)



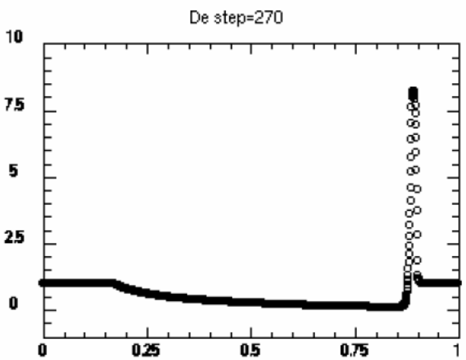


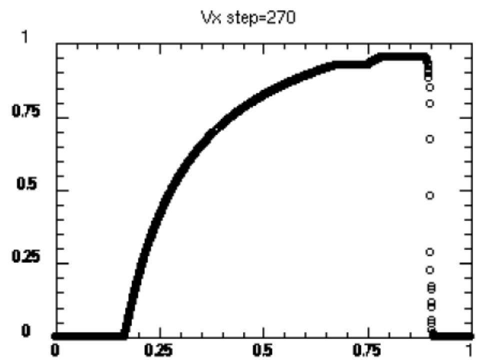
HLL法の利点

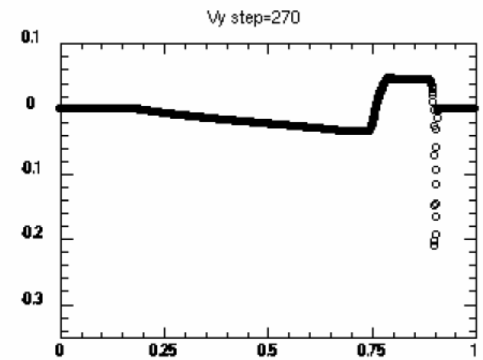
プログラミングが容易 (Roe法では固有ベクトルが必要)

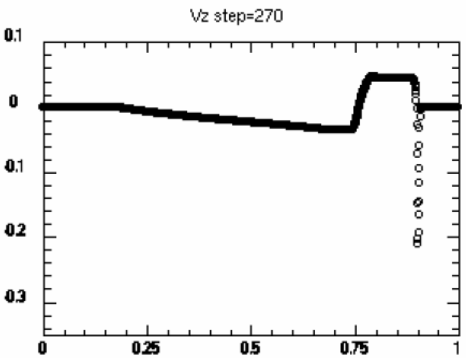
数値振動が少ない

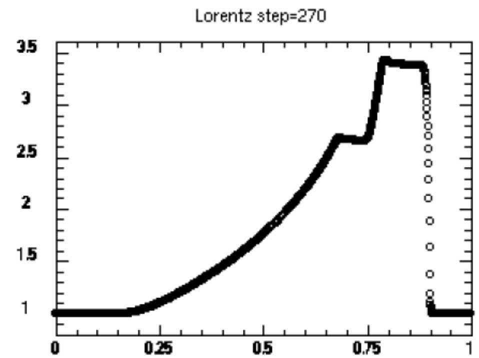
1次元テスト計算 (HLL法) (Balsara, 2001)

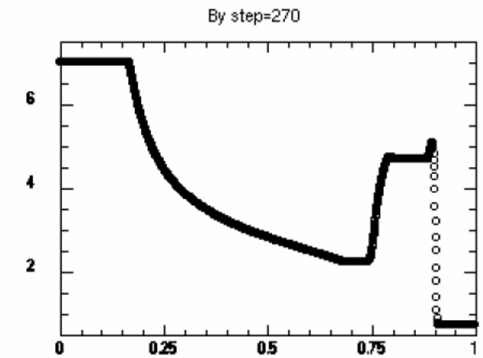


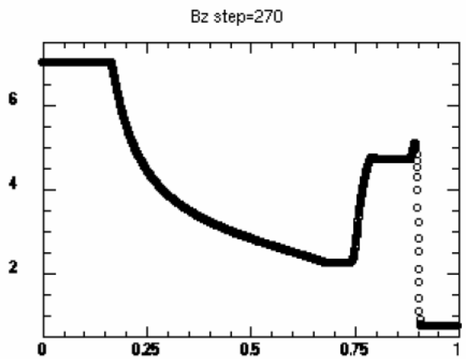


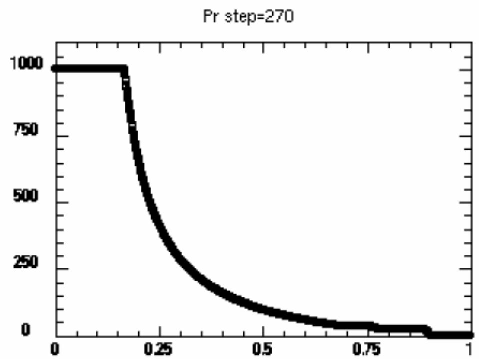








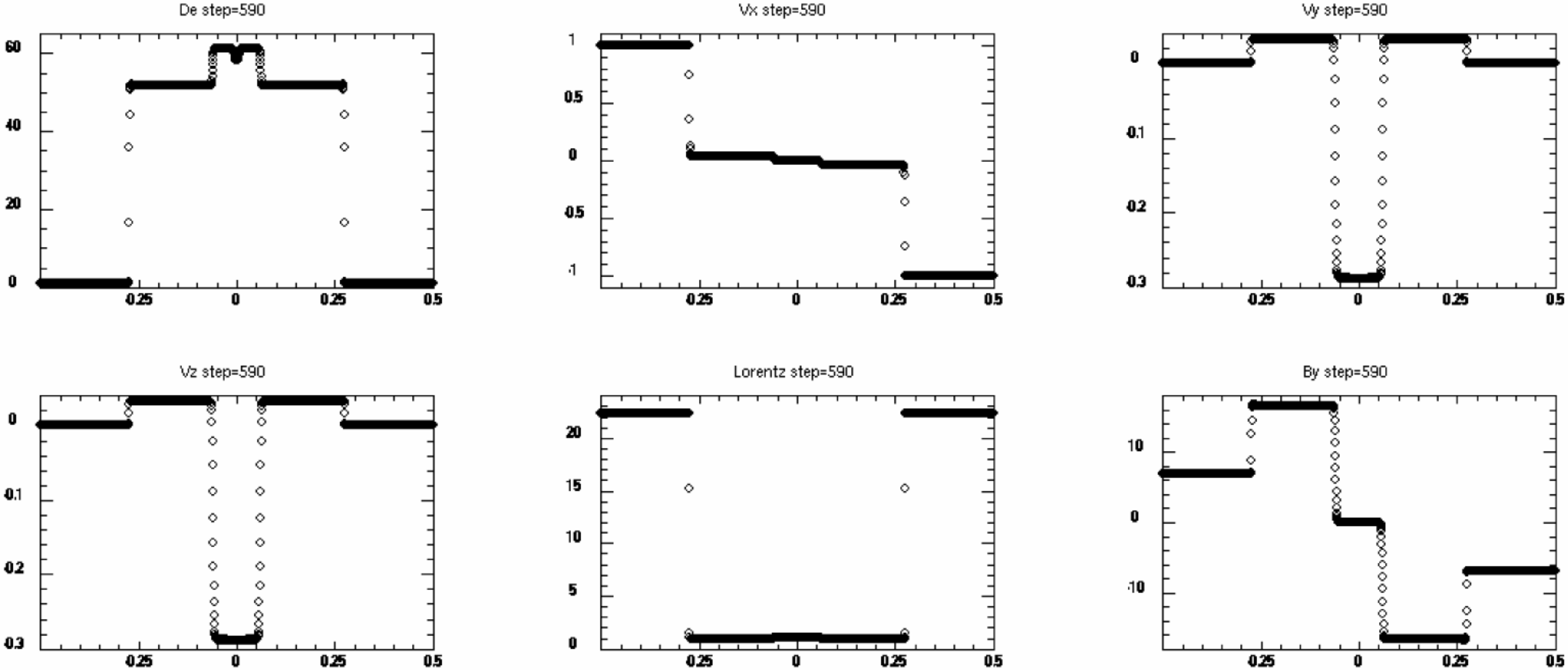


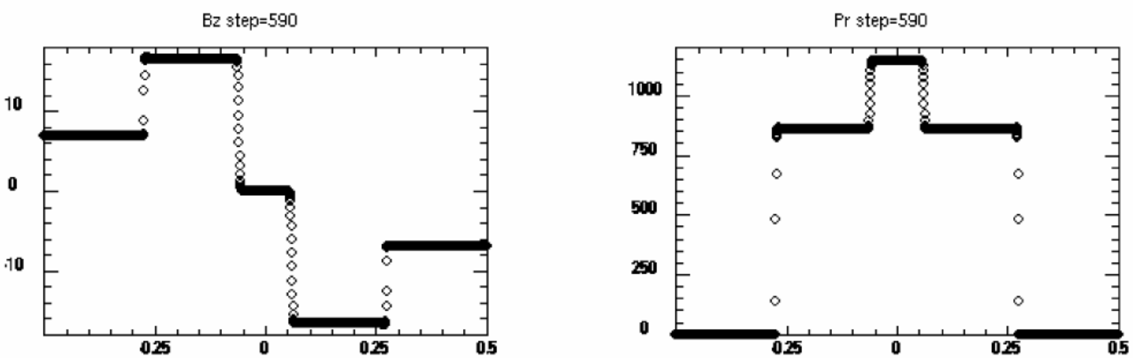


Balst wave test problem
(a very strong initial pressure difference)
dfe1d (SRMHD code), Double precision
second(space,1.2) & second(time) accuracy
CFL=0.4, 1600grid, t=0.4, γ=5/3, Bx=10.0

	Left	Right
ρ :	1.0	1.0
pr :	1000	0.1
v :	0.0	0.0
By:	7.0	0.7
Bz:	7.0	0.7

1次元テスト計算 (HLL法) (Balsara, 2001)





Noh (1987) test problem
dfe1d (SRMHD code), Double precision
second (space,1.5) & second(time) accuracy
CFL=0.4, 1600grid, t=0.4, γ=5/3, Bx=10.0

	Left	Right
ρ :	1.0	1.0
pr :	0.1	0.1
vx:	0.999	-0.999
vy,vz :	0.0	0.0
By:	7.0	-7.0
Bz:	7.0	-7.0

代数方程式

- 保存量から基本量を求めるための代数方程式が陰関数であるため反復解法で解く必要がある

$$
\begin{cases}
D = \rho\gamma \\
\boldsymbol{P} = \left\{ D + \dfrac{\varepsilon + p}{c^2} - \dfrac{1}{2c^2}\left(E^2 + B^2\right) \right\} \boldsymbol{v} + \dfrac{1}{c}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \\
\varepsilon = (e + p)\gamma^2 - Dc^2 - p + \dfrac{1}{2}\left(E^2 + B^2\right)
\end{cases}
$$

- 2変数Newton法は高ローレンツ因子や強磁場中では解けない

↓

Del Zanna et al. (2003)による、
「3次方程式の解＋1変数Newton法」
では高ローレンツ因子でも解くことができる

↓

LW法やHLL法に実装することにより高ローレンツ因子や
強磁場中でも安定に解くことができるのでは？

Del Zanna et al. (2003)の方法

$$\begin{cases} D = \rho\gamma \\ \boldsymbol{P} = \left\{ D + \dfrac{\varepsilon + p}{c^2} - \dfrac{1}{2c^2}\left(E^2 + B^2\right) \right\} \boldsymbol{v} + \dfrac{1}{c}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} \\ \varepsilon = \left(e + p\right)\gamma^2 - Dc^2 - p + \dfrac{1}{2}\left(E^2 + B^2\right) \end{cases}$$

$$\left[\left(1 - \frac{1 - v^2/c^2}{\Gamma_1}\right)\mathrm{W} - \varepsilon - \left(1 - \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{\Gamma_1}\right)Dc^2 + \frac{B^2}{2}\right]\left(\mathrm{W} + cB^2\right)^2 + \frac{1}{2}c^4\mathrm{T} = 0$$

$$\left(\Gamma_1 \equiv \frac{\Gamma}{\Gamma - 1},\ \mathrm{W} \equiv \gamma^2\left(\rho c^2 + \frac{\Gamma}{\Gamma - 1}P_r\right),\ \mathrm{T} \equiv B^2P^2 - \left(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{B}\right)^2\right)$$

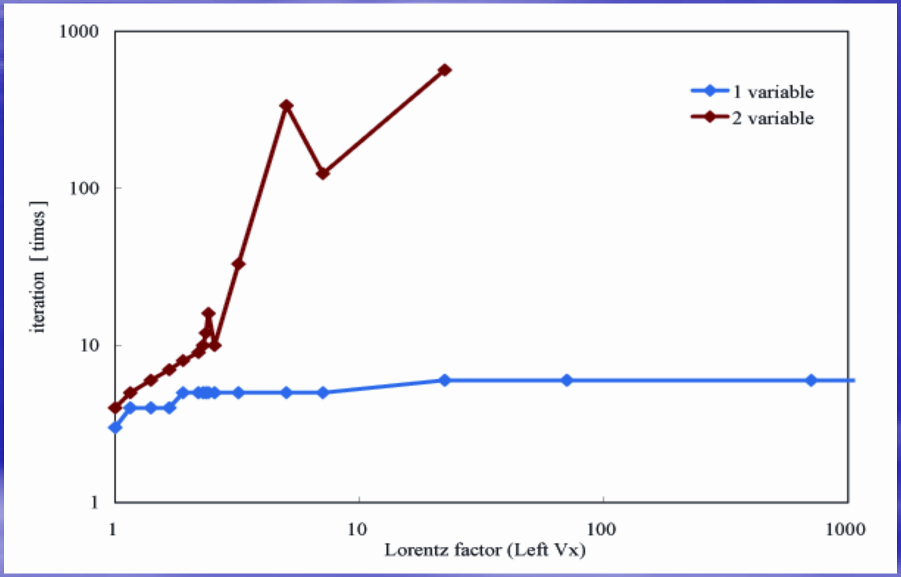
⇒ Wの3次方程式

$$F\left(v^2\right) = \frac{\mathrm{W}^2}{c^4}v^2 + \left(2\mathrm{W} + cB^2\right)\frac{c\mathrm{T}^2}{\left(\mathrm{W} + cB^2\right)^2} - P^2$$

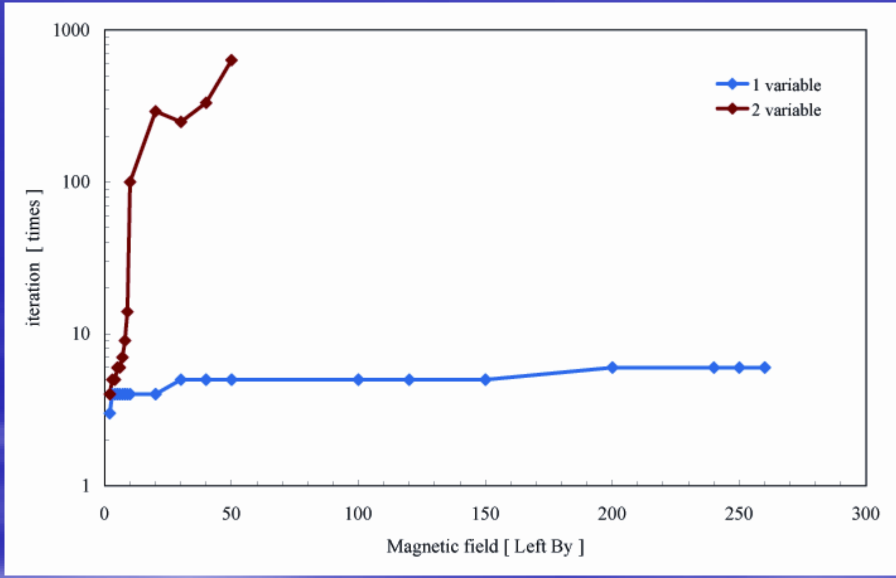
⇒ Newton法で v^2について解く

衝撃波管問題によるテスト結果
(反復解法における解への収束回数について)

ローレンツ因子と収束回数の関係

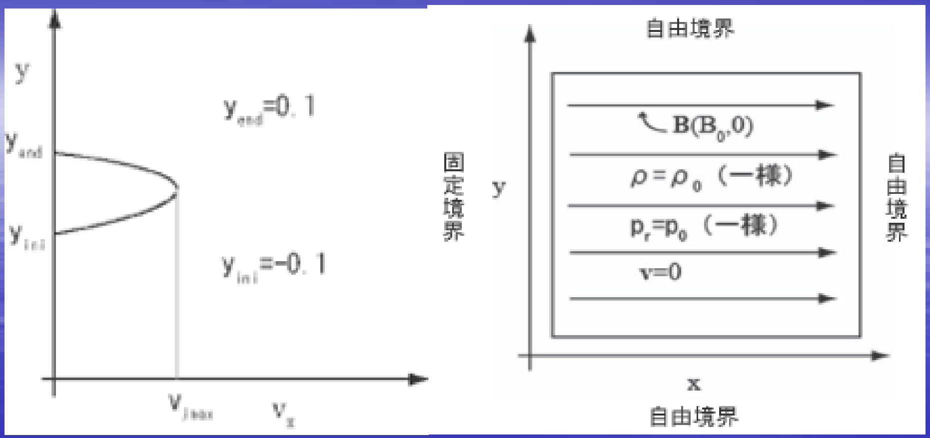


磁場の大きさと収束回数の関係

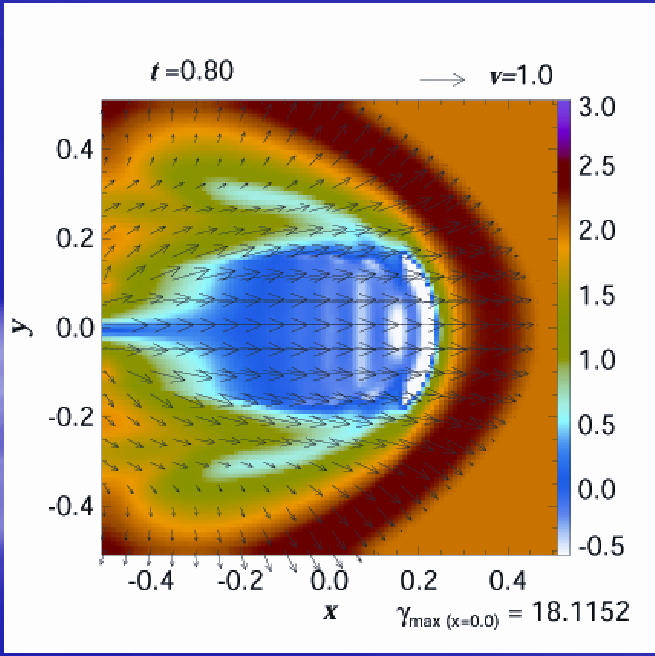


3次方程式の解＋1変数Newton法が高ローレンツ因子や強磁場でも安定して反復解法による解を見つけている

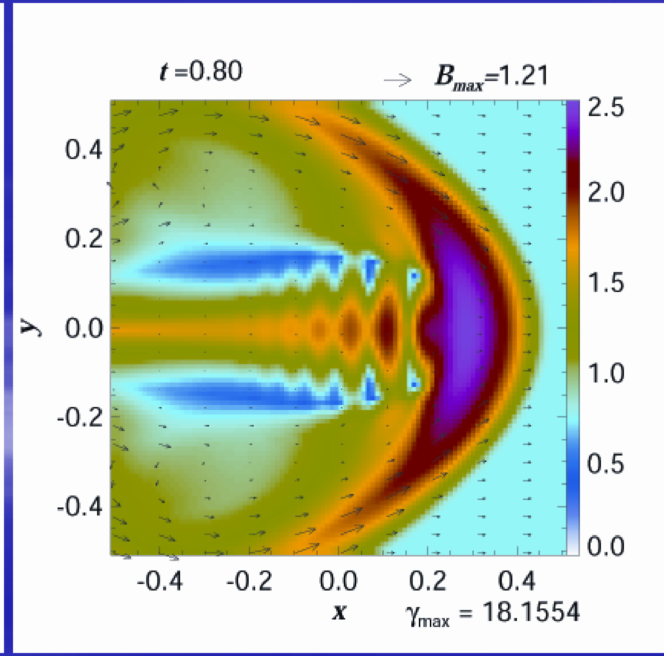
テスト計算
特殊相対論的MHD



密度、速度場



圧力、磁場



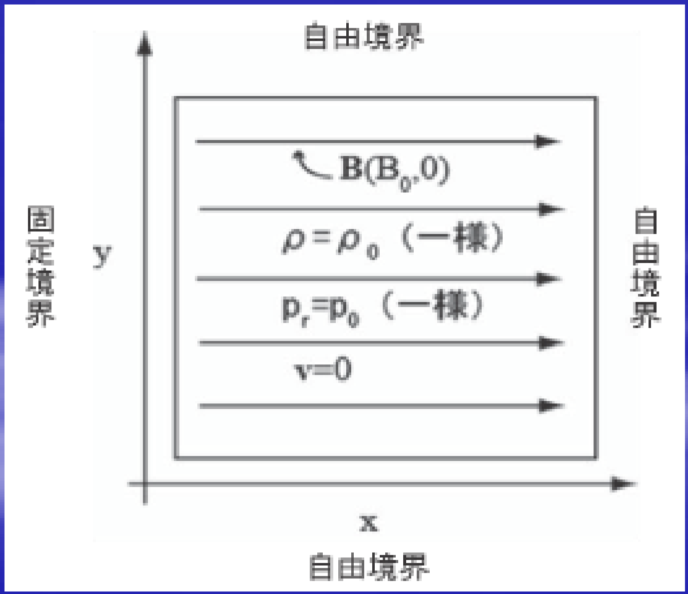
- カルテシアン座標
- 0.995cのジェット注入
- プラズマベータβ=100
- 3次方程式の解
  ＋1変数Newton法
- Lax-Wendroff法

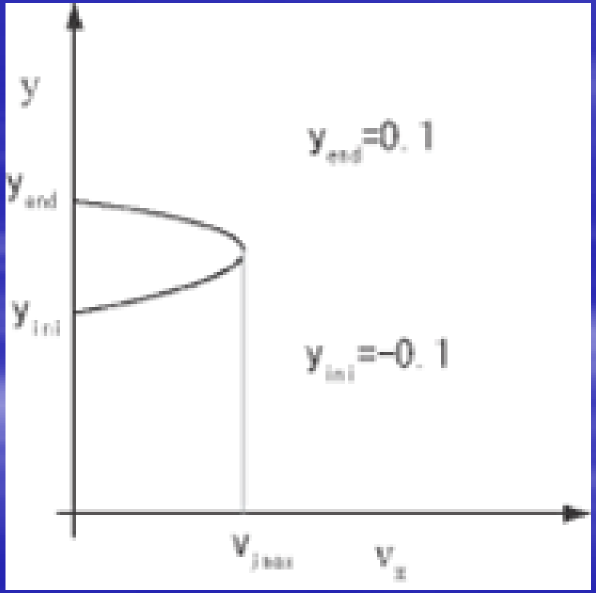
$\gamma_{max} \sim 20$

テスト計算 (HLL法)

初期条件･境界条件

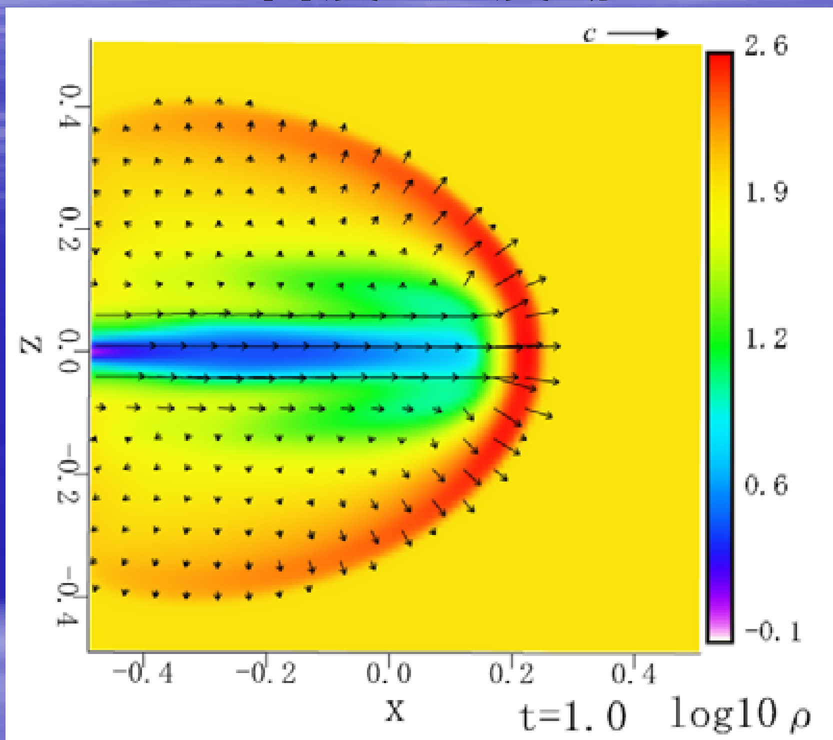
- カルテシアン座標 (2.5D)
- HLL法＋MUSCLによる2次精度化 (空間･時間)
- $(x,z)=(100\mathrm{grid}\times 100\mathrm{grid})$



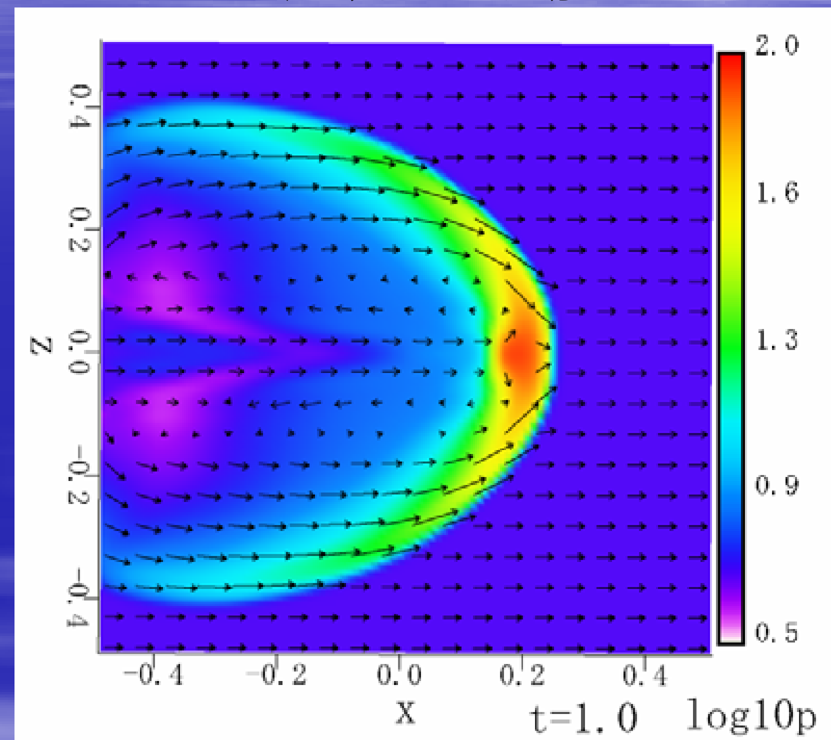


テスト計算 (HLL法)

密度、速度場



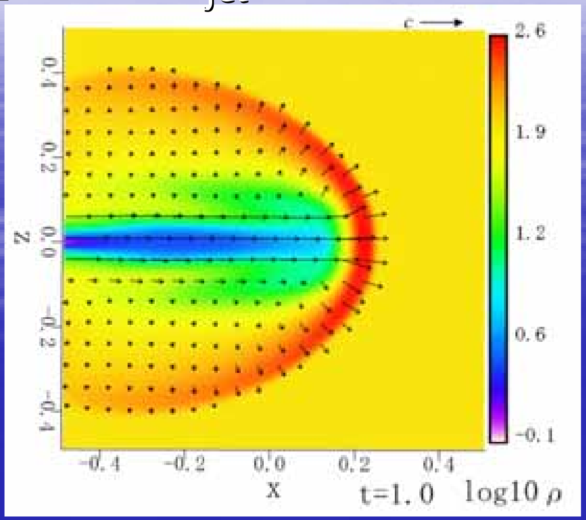
圧力、磁場

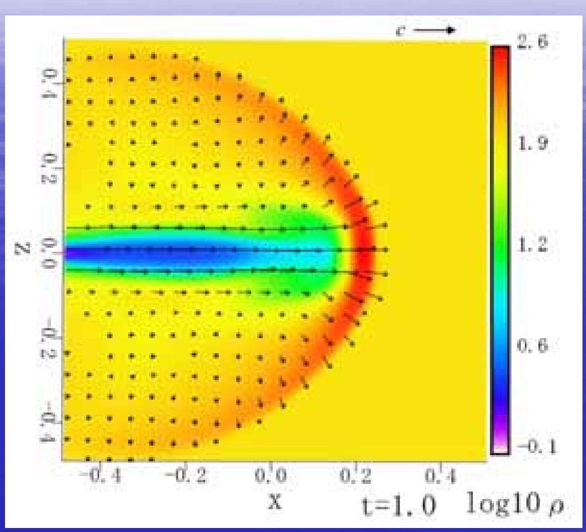


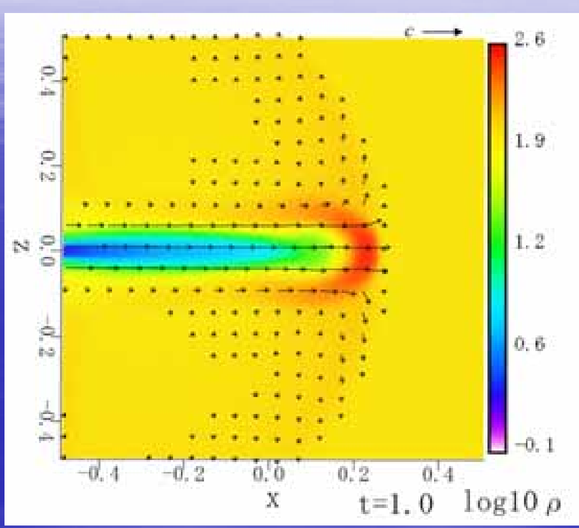
0.995cのジェット、β=100

テスト計算 (HLL法)

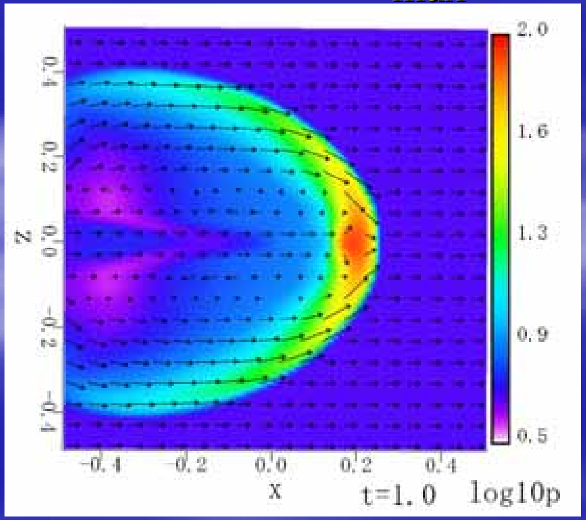
ρ, v $\quad v_{jet}=0.995c$

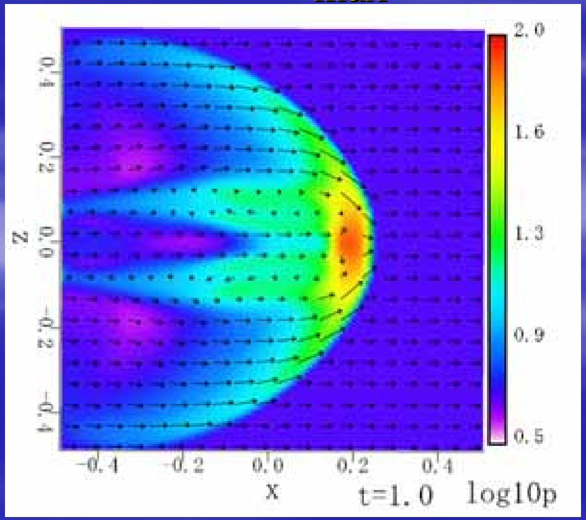


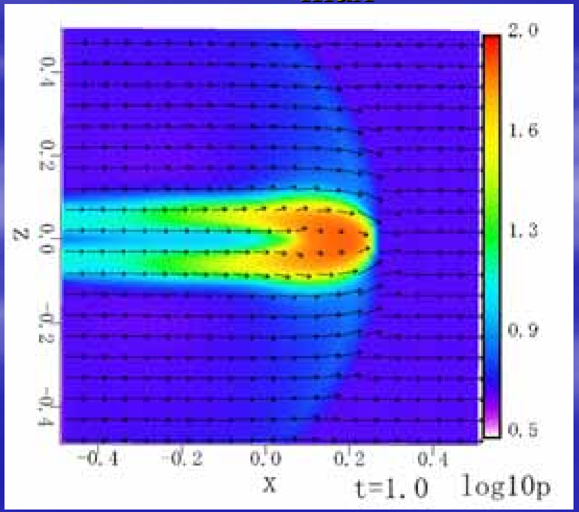




p, B $\quad \beta=100, \gamma_{max}=9.3$ $\quad \beta=1, \gamma_{max}=9.07$ $\quad \beta=0.1, \gamma_{max}=7.59$

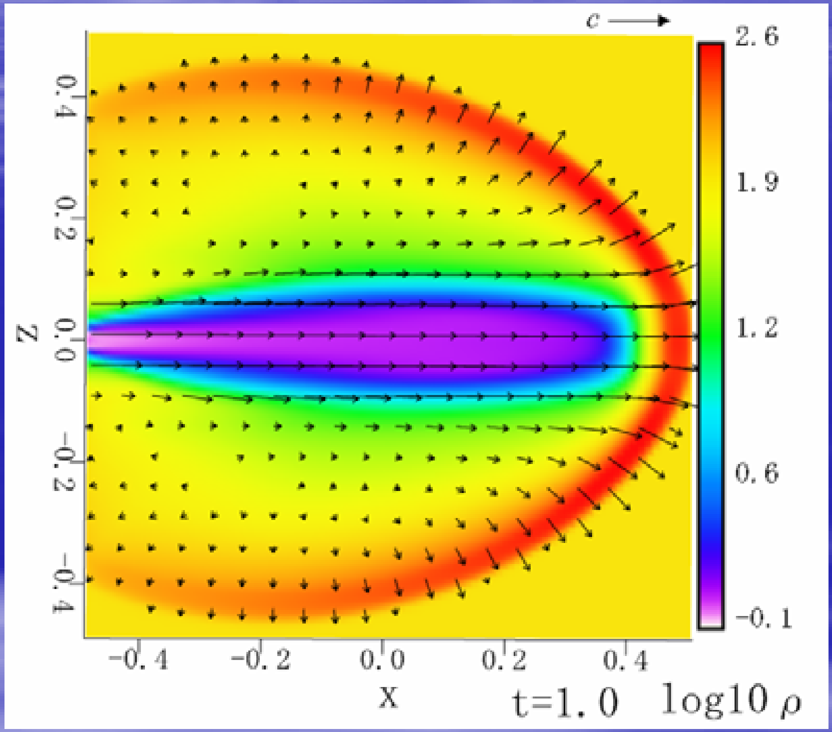




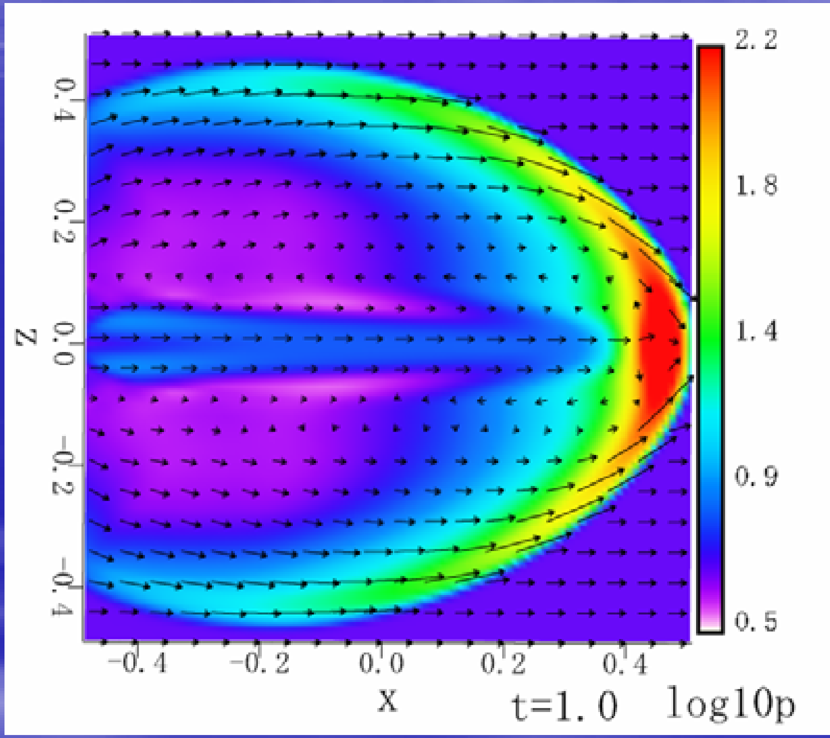


テスト計算 (HLL法)

密度、速度場



圧力、磁場



0.9999cのジェット、β=100、γ_{max}=61.6

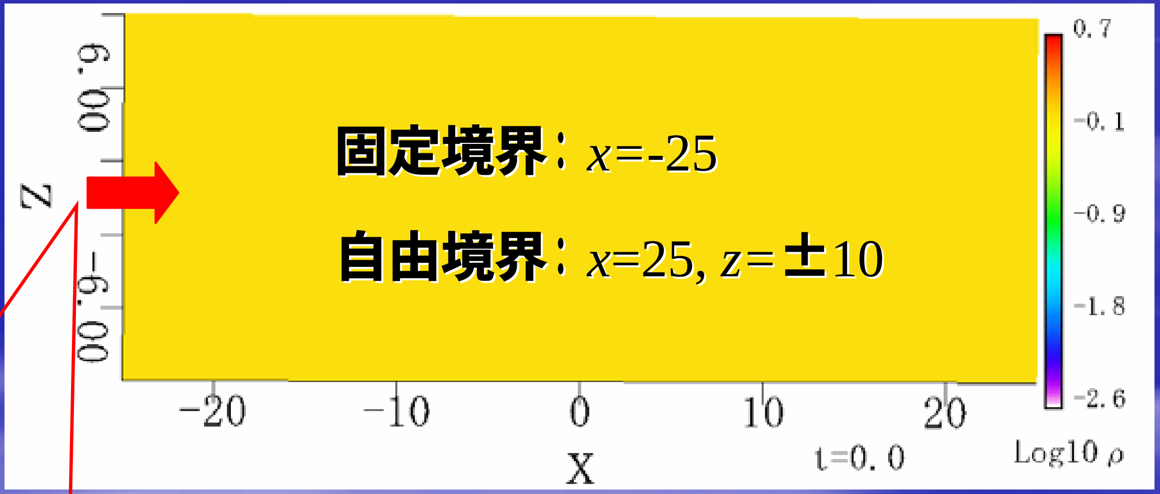
ジェットの計算（初期条件・境界条件）

カルテシアン座標（2.5D）

HLL法＋MUSCLによる2次精度化（空間・時間）

(x,z)=(1000grid×400grid)

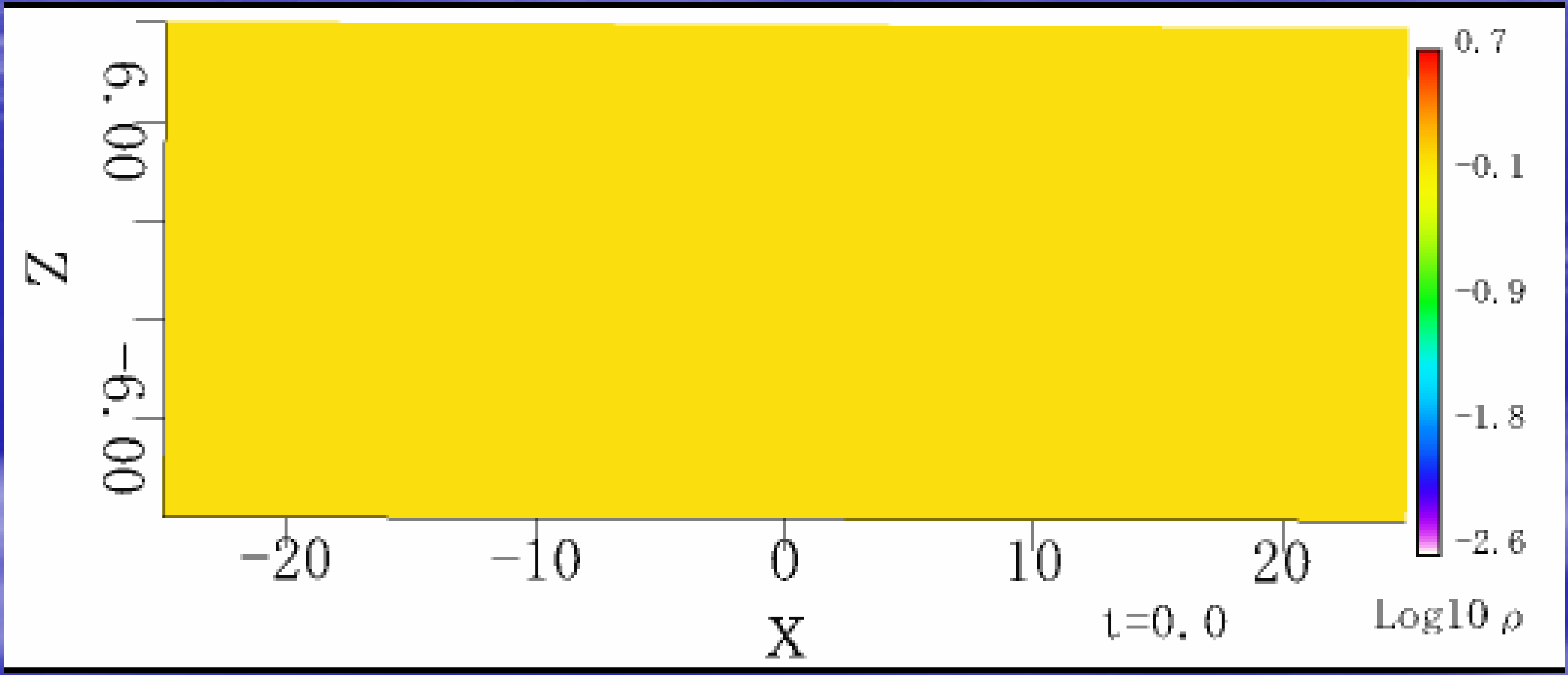
一様密度、一様圧力（ジェットと同じ）、磁場なし、Γ=5/3、クーラン数=0.8



0.99cのジェット、マッハ数=6
密度（1/100）、周りと同じ圧力、磁場なし
-1<z<1 の範囲で一様に注入

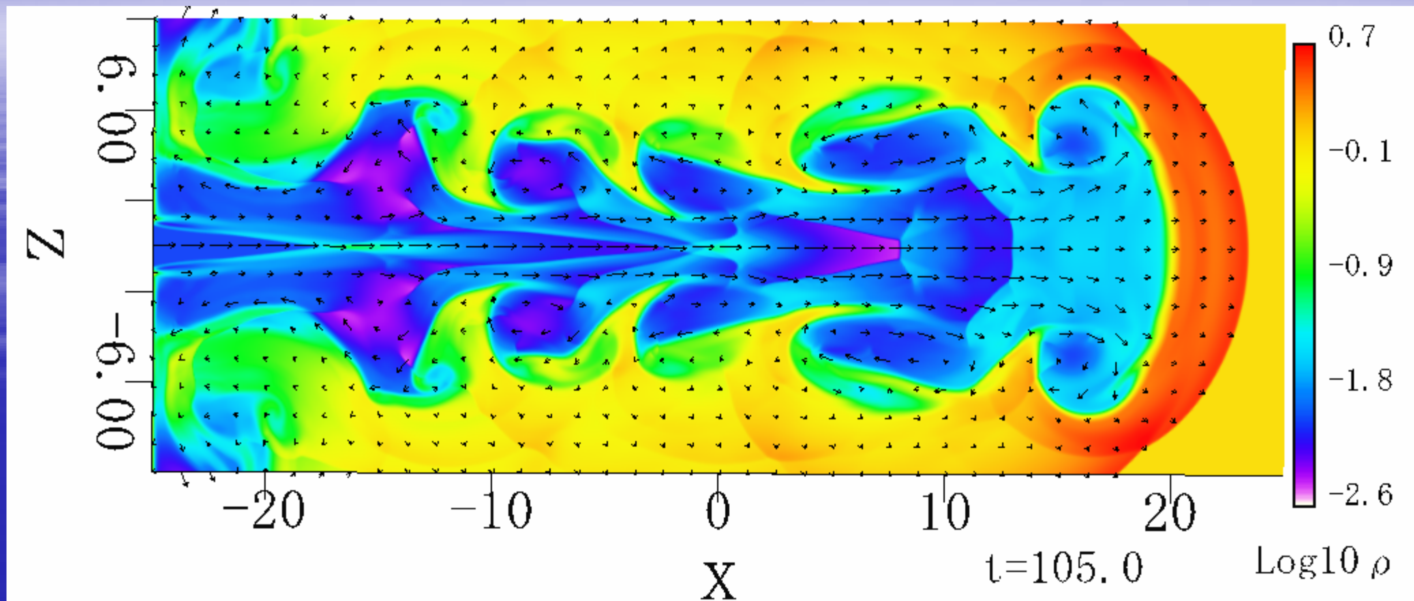
ジェットの計算 (結果)

密度 (カラー)、速度場 (矢印)

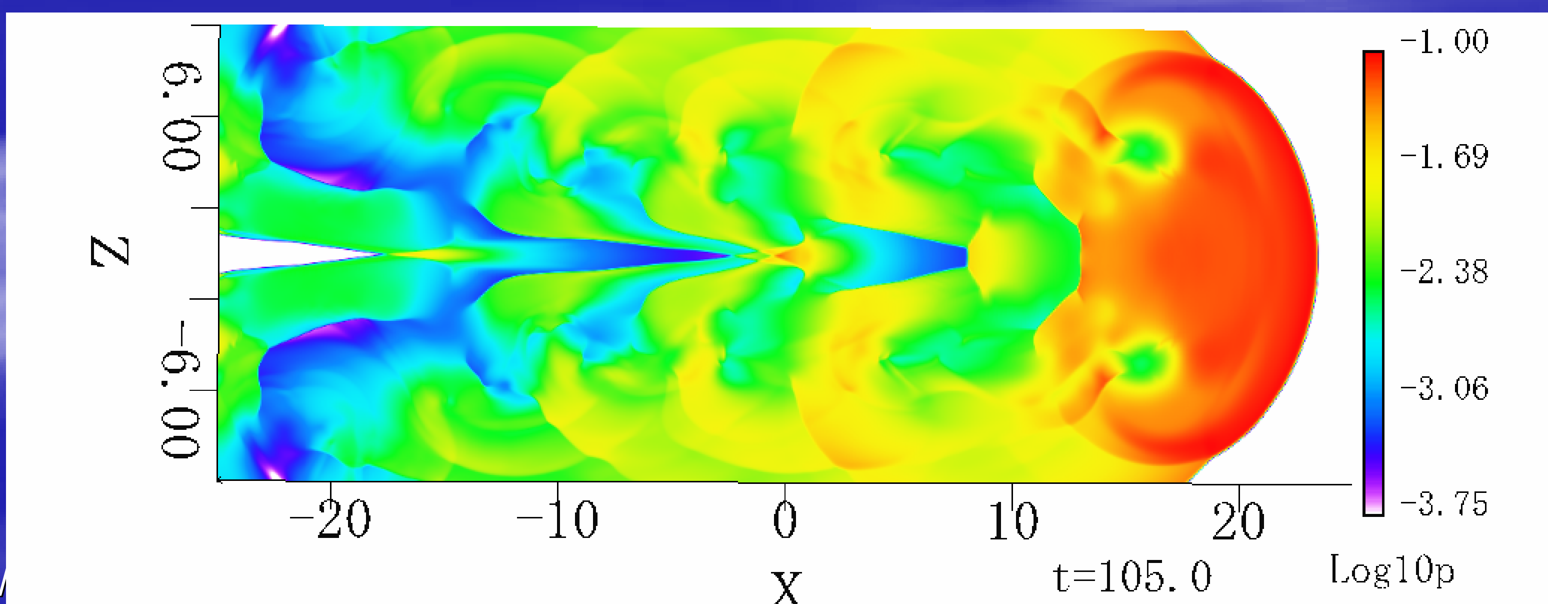


ジェットの計算 (結果)

ρ ,v



p



まとめ

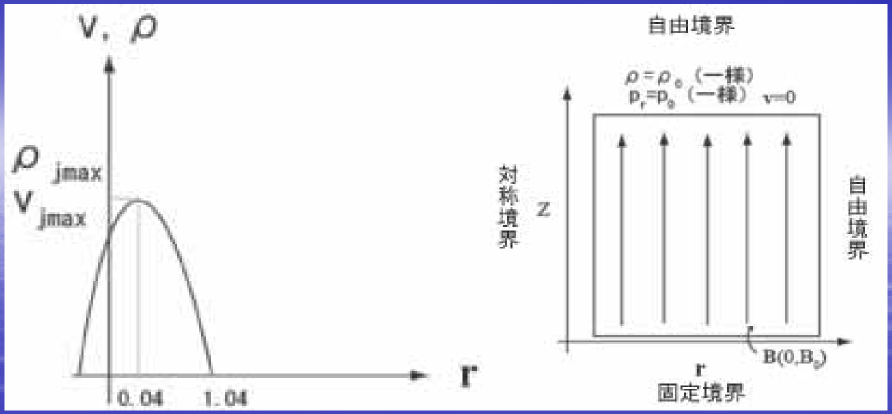
- Del Zannaの方法をHLL法に実装することで、Lax-Wendroff法に実装した場合より、更に高いローレンツ因子問題や強い磁場中で適用可能な相対論的MHDコードを作成した
- CANS (天体統合シミュレーションソフトウェア) に組み込みが可能

課題

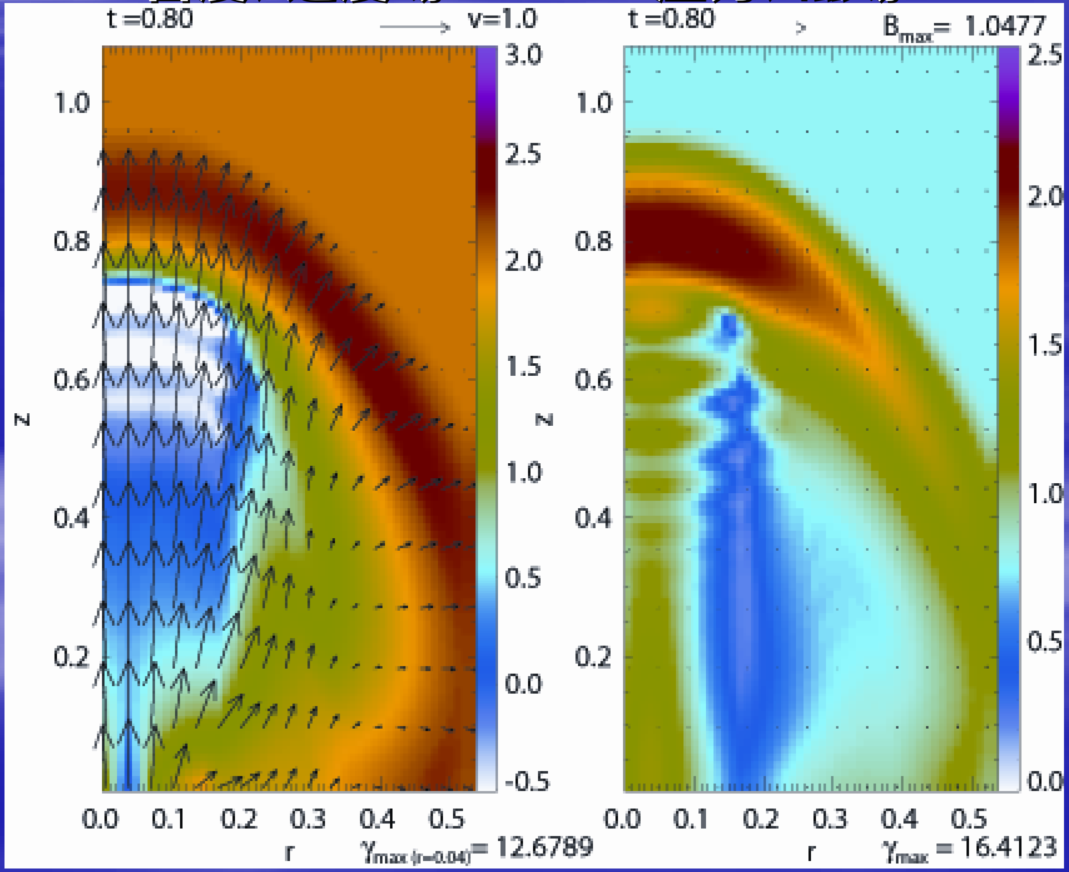
- AGNジェット、BH近傍の物理現象、中性子星からの相対論的アウトフローなどに適用
- 繰り返し法のプログラムを改良することでベクトル化率をアップ
- HLLC法 (Batten et al., 1997; Li, 2005) 、HLLD法 (Miyoshi & Kusano, 2005) 組み込むことで更に精度の高い計算が可能？
- 一般化座標系で記述した一般相対論的MHDコードへのHLL法の実装 (Lax-Wendroff法は実装済)

Appendix

一般相対論的MHD
(一般化座標)

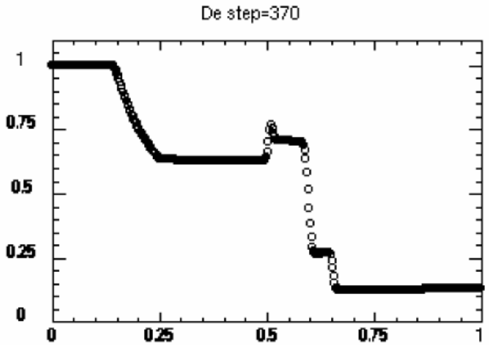


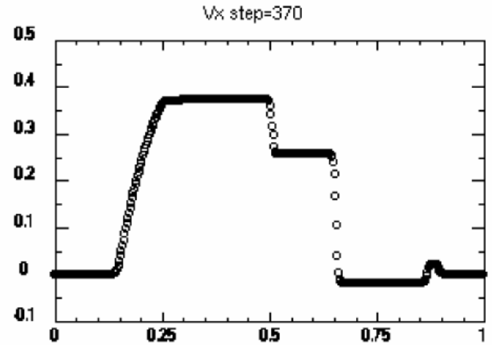
密度、速度場　　　　圧力、磁場

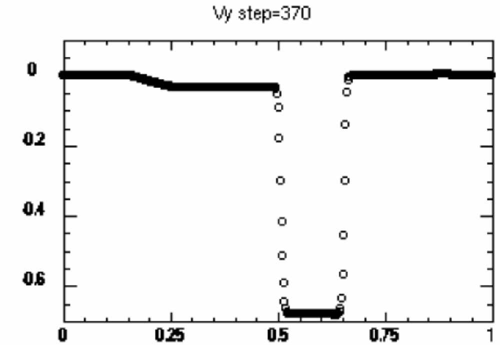


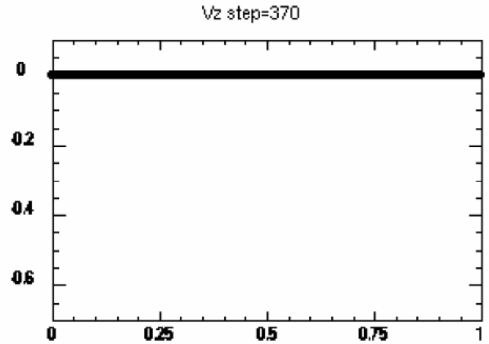
- **円柱座標**
- 0.995c**のジェット注入**
- **プラズマベータ：β** =100
- **3次方程式の解**
  ＋1変数 Newton**法**
- Lax-Wendroff**法**

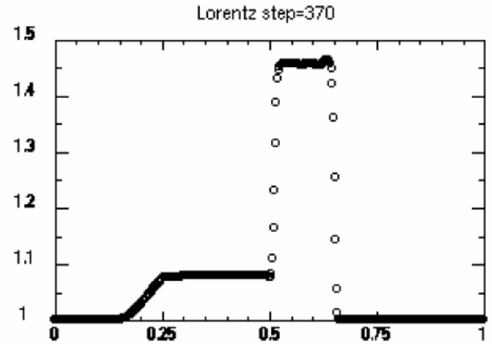
1次元テスト計算 (HLL法)

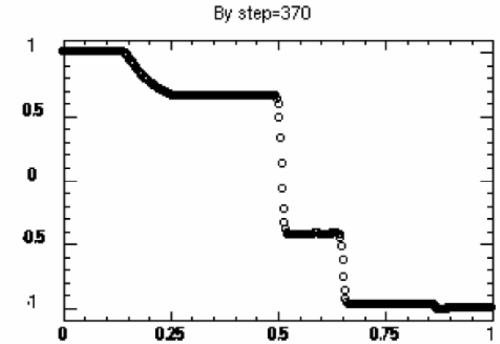


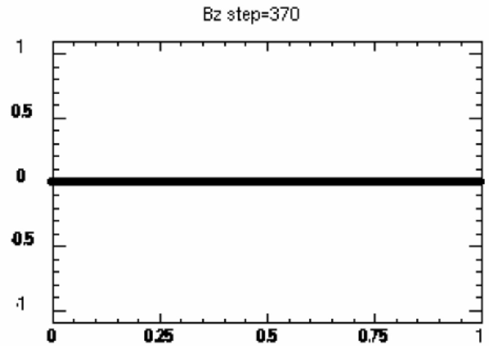


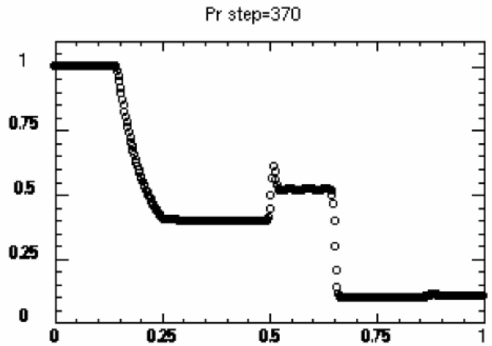








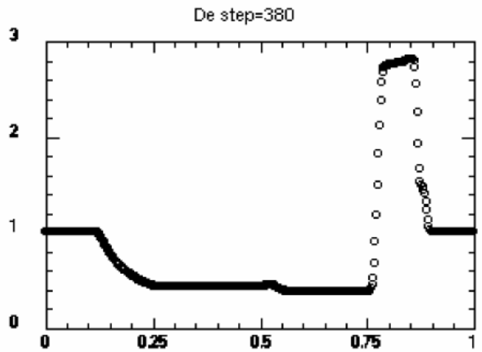


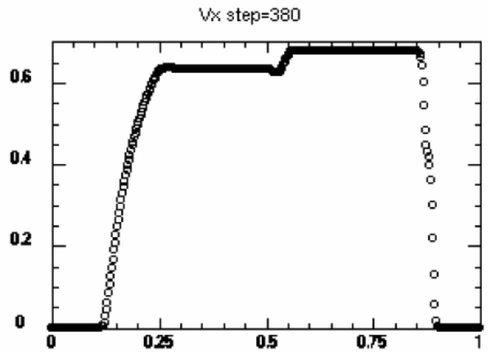


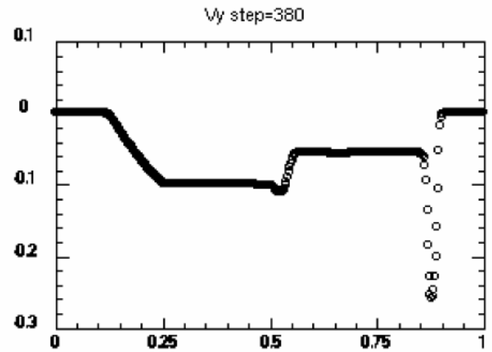
Brio & Wu test problem
dfe1d (SRMHD code), Double precision
third(space,2.0) & second(time) accuracy
CFL=0.4, 400grid, t=0.4, γ=2.0, Bx=0.5

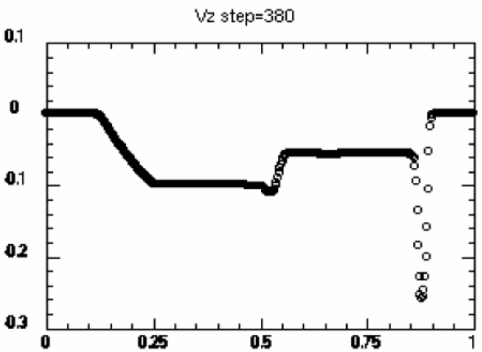
	Left	Right
ρ :	1.0	0.125
pr :	1.0	0.1
v :	0.0	0.0
By:	1.0	-1.0
Bz:	0.0	0.0

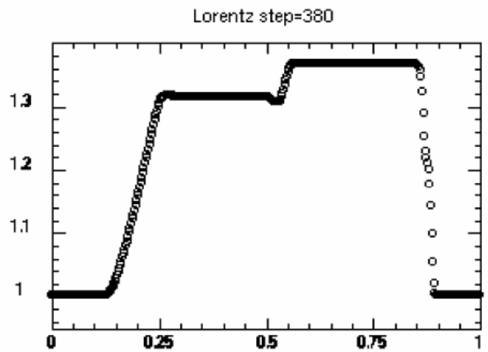
1次元テスト計算 (HLL法)

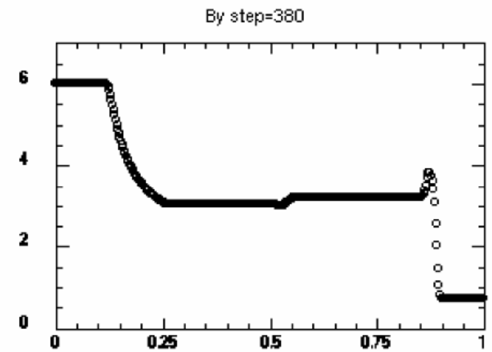


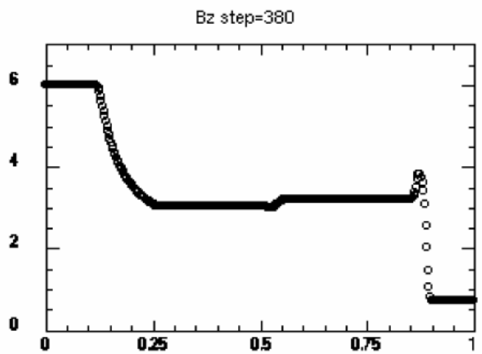


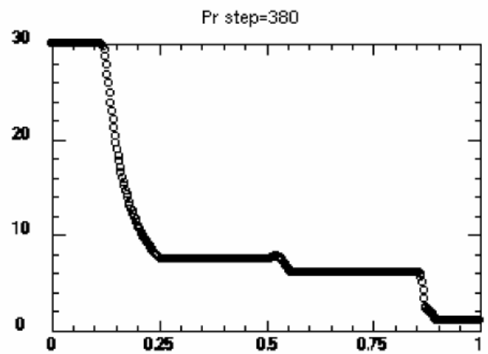












Balst wave test problem
(a moderate initial pressure difference)
dfe1d (SRMHD code), Double precision
third(space,2.0) & second(time) accuracy
CFL=0.4, 400grid, t=0.4, γ=5/3, Bx=5.0

	Left	Right
ρ :	1.0	1.0
pr :	30	1.0
v :	0.0	0.0
By:	6.0	0.7
Bz:	6.0	0.7