

相対論的PICコード

永田 健太郎

東京大学(大阪大学) D 1

もくじ

- PICの全体像
- 1次元・静電コード
- 1次元・電磁コード
- 相対論的無衝突衝撃波のシミュレーション

PIC (Particle in Cell)とは？

- 粒子のもつ物理量 (座標・速度) は、個々の粒子について運動方程式で解く。
- 電磁場は空間をメッシュで分割したグリッド上で定義され、Maxwell方程式で解く。
- 粒子の持つ物理量をグリッドに分配し、グリッド上の物理量を粒子へ分配する。

PICの特徴

利点

- 非熱的な現象や波と粒子の相互作用を見れる。
- 粒子間の相互作用を直接解くよりも、計算量のはるかに少ない。

欠点

- 粒子の運動についての固有なスケールを持つため、長時間・広範囲の計算は無理。

基礎方程式

相對論的運動方程式 $m_0 \frac{du}{dt} = q \left(E + \frac{u}{c\gamma} \times B \right)$

Maxwell方程式 $\nabla \cdot E = 4\pi\rho$

$$\nabla \times E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times B = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} J$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

計算の流れ

運動方程式の積分

$$F_k \rightarrow V_k \rightarrow X_k$$

粒子に働く力の計算

$$(E, B)_i \rightarrow F_k$$

電荷密度・電流密度の計算

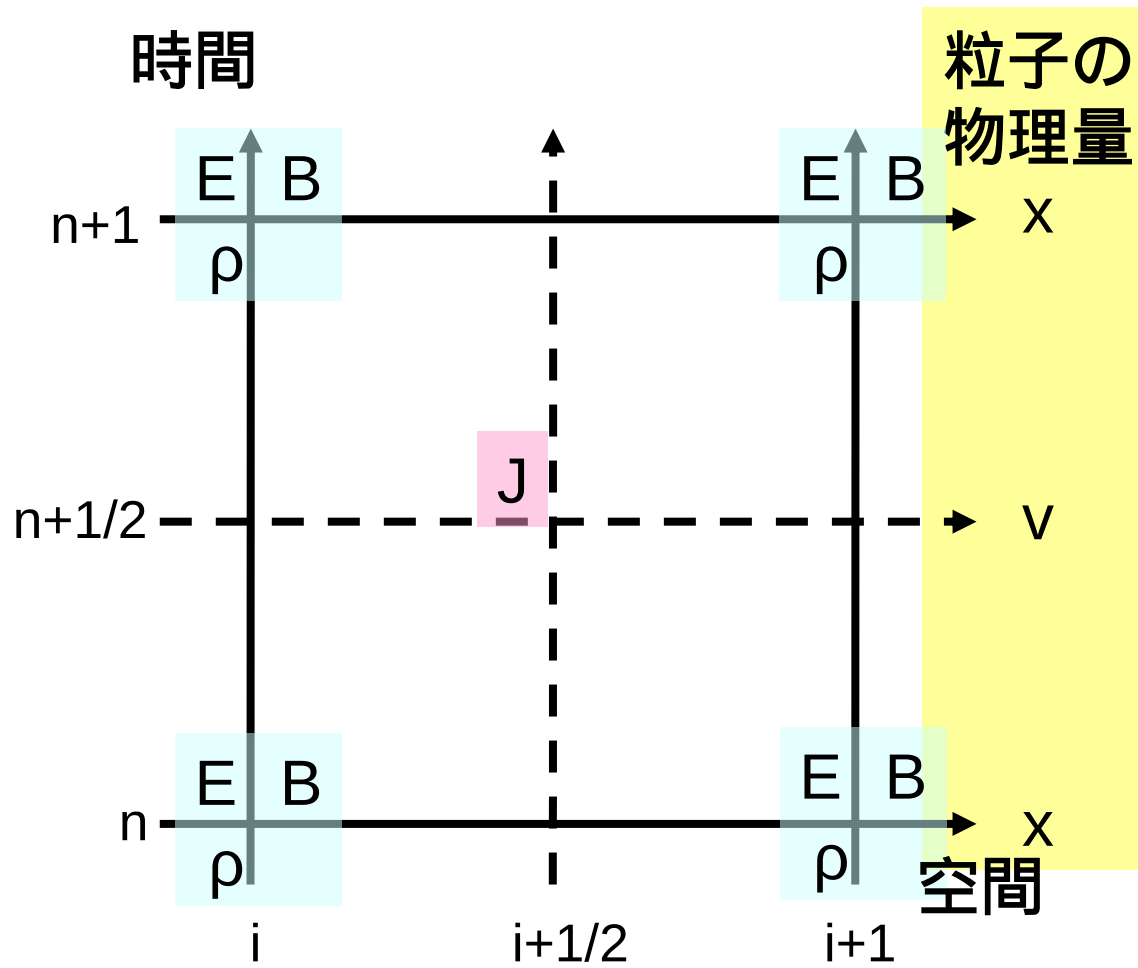
$$(X, V)_k \rightarrow (\rho, J)_i$$

Maxwell方程式の積分

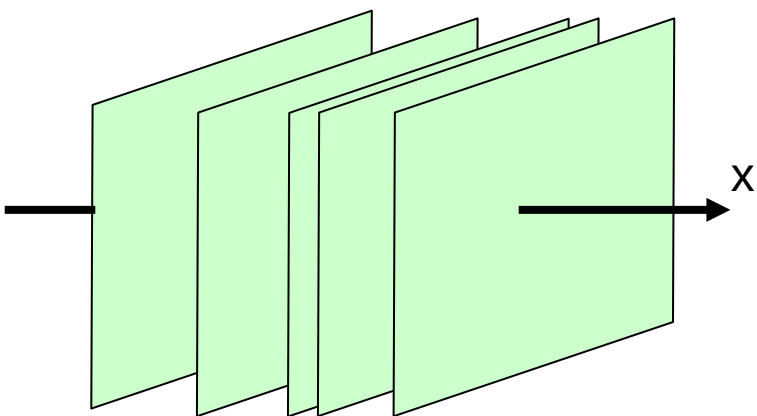
$$(\rho, J)_i \rightarrow (E, B)_i$$

k: 粒子番号
i: グリッド番号

物理量の配置

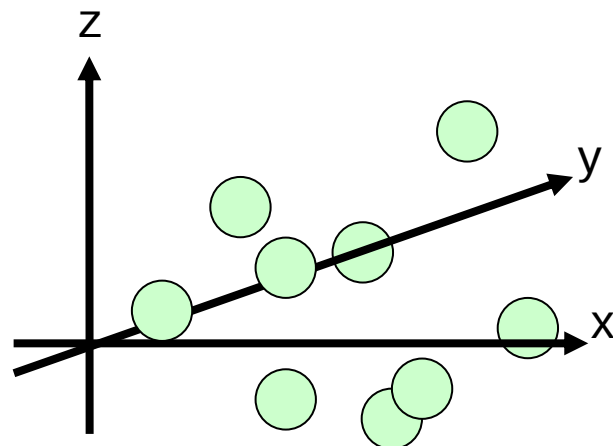
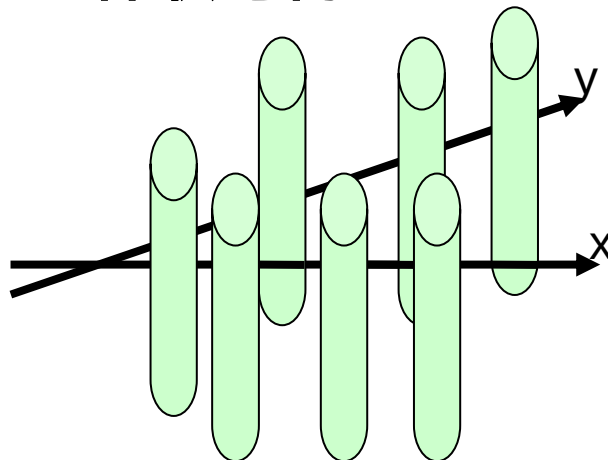


次元によって異なる電荷の形状



1次元
y-z方向に伸びた
板状電荷

2次元
z方向に伸びた
棒状電荷



3次元
球状電荷

1次元・静電コード

1次元・静電コード

- 空間1次元(x) 磁場なしの場合。

$$x=(x,0,0), \quad v=(v_x,0,0), \quad E=(E_x,0,0), \quad B=(0,0,0)$$

- 解くべき方程式

$$\text{相対論的運動方程式} \quad m_0 \frac{du}{dt} = q \left(E + \frac{u}{c\gamma} \times B \right) \Rightarrow m_0 \frac{du_x}{dt} = qE_x$$

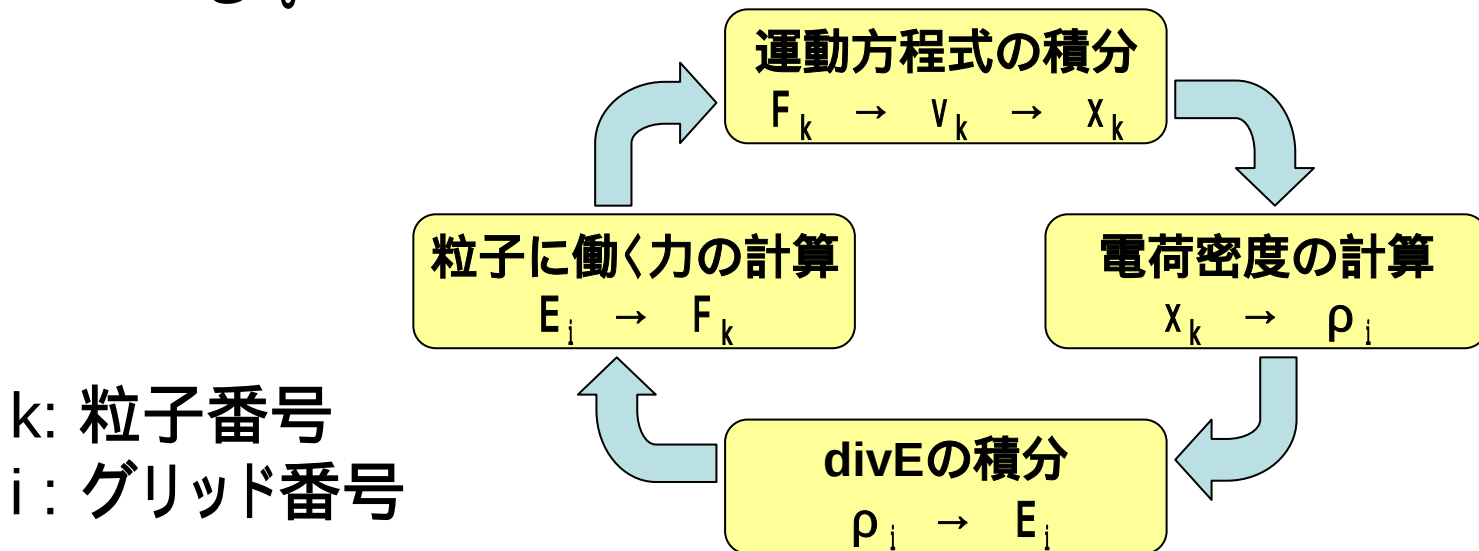
$$\text{Maxwell方程式} \quad \nabla \cdot E = 4\pi\rho \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = 4\pi\rho$$

$$\left[\nabla \times B = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} J \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} J_x \right]$$

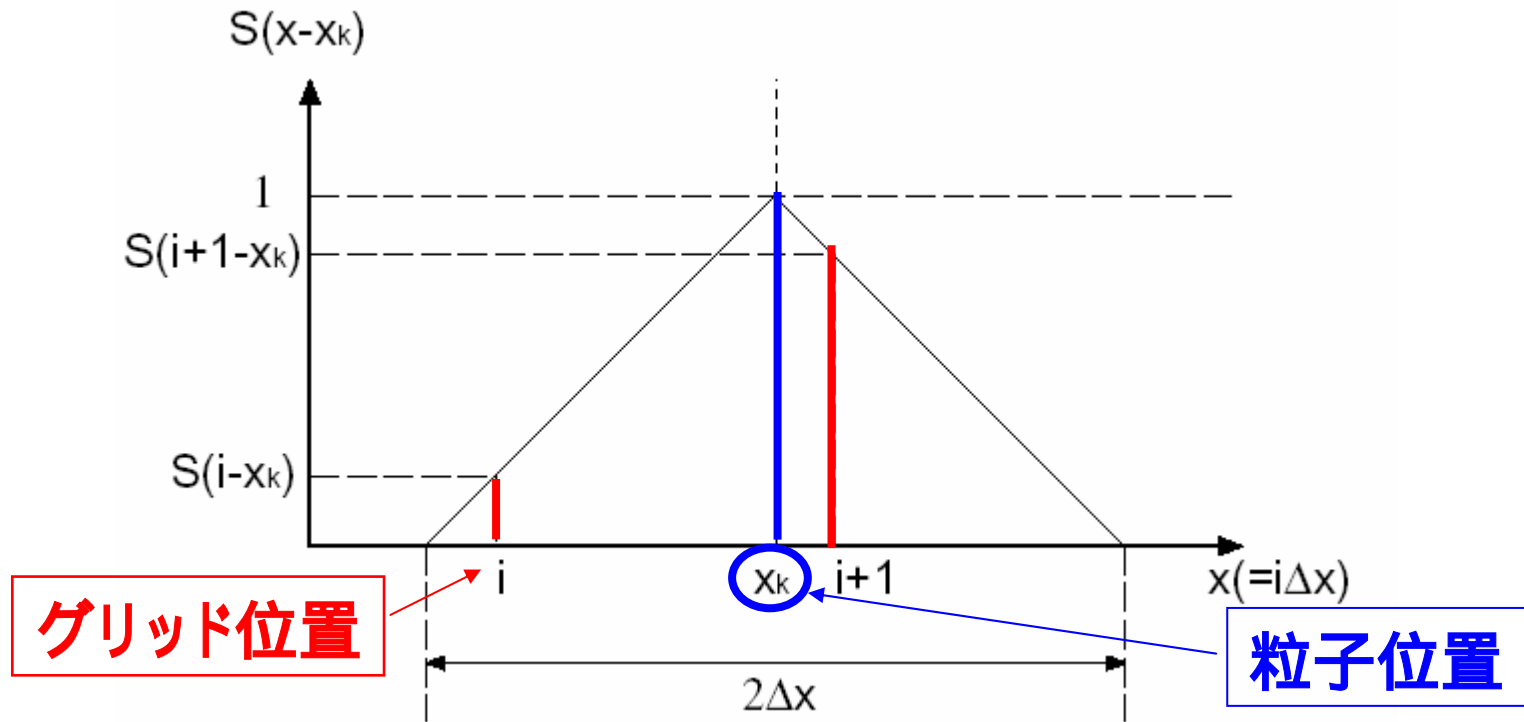
m_0 静止質量, u 4元速度, γ ローレンツ因子, q 電荷, ρ 電荷密度

手順

1. 粒子の座標 x と速度 v_x が既知であるとする。
2. x からグリッド上の電荷密度 ρ を求める。
3. ρ からグリッド上の電場 E_x を求める。
4. 粒子が受ける E_x を求める。
5. 運動方程式を解き、 v_x を更新し、さらに x を更新する。



粒子からグリッドへの物理量の受け渡し



電荷密度 $\rho(i, n) = \sum_{k=1}^m q_k S(i - x_k(t)) / \Delta x$

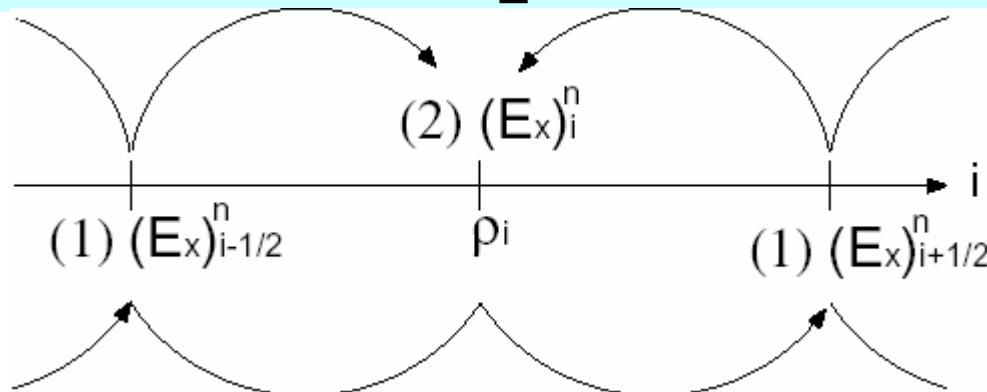
Maxwell方程式 (divE)

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 4\pi\rho \Rightarrow \frac{E_{x,i+1/2} - E_{x,i-1/2}}{\Delta x} = 4\pi\rho_i$$

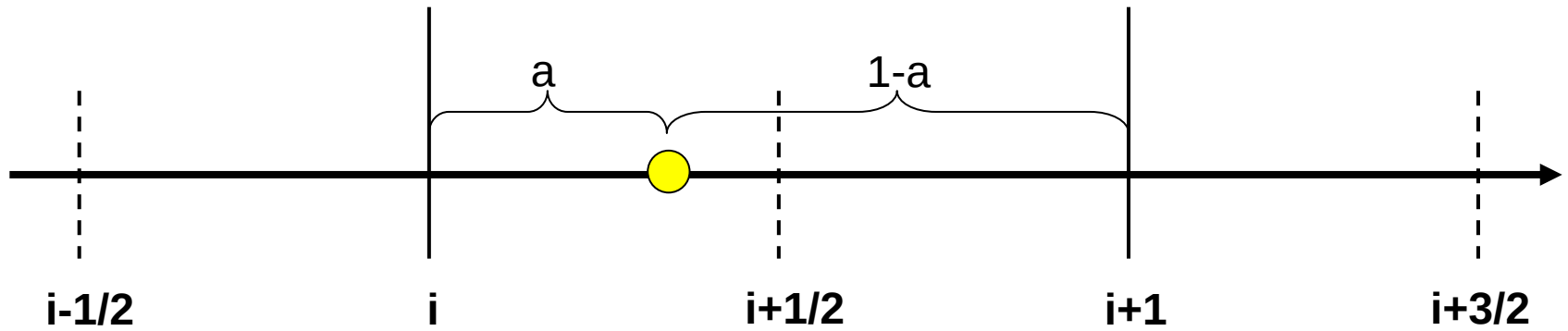
$$E_{x,i+1/2} = E_{x,i-1/2} + 4\pi\rho_i\Delta x \quad \dots\dots\dots (1)$$

セルフフォース(自分自身の電場によって受ける力)を回避するため、補完によって電場を電荷密度 ρ が定義されたグリッドに定義しなおす。

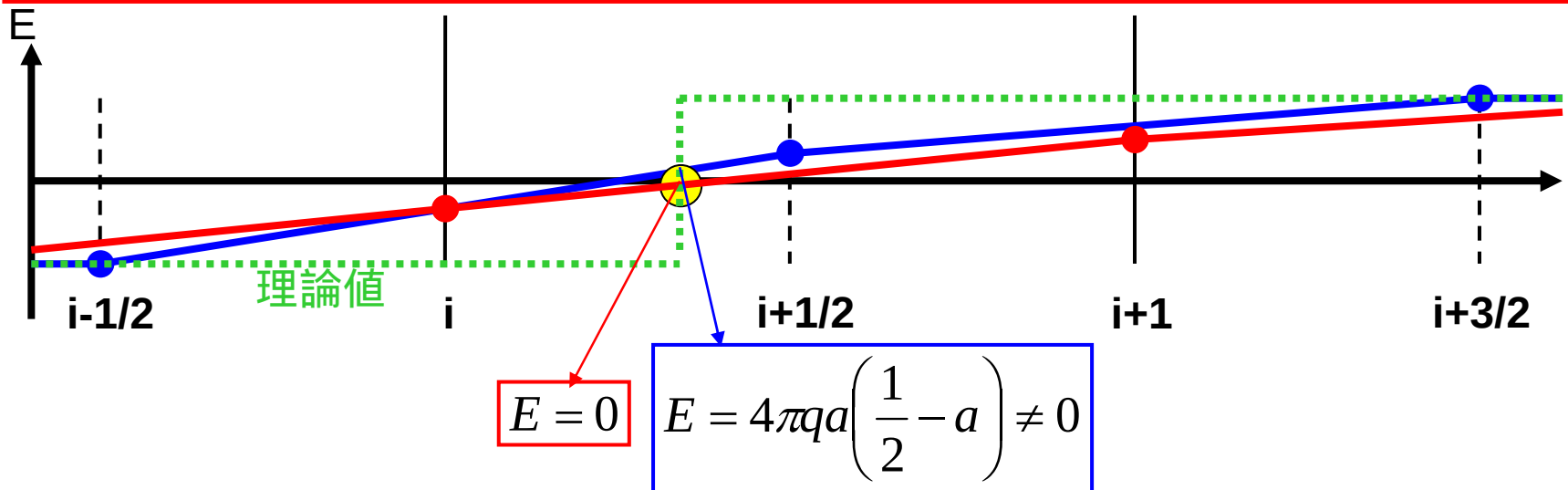
$$E_{x,i} = \frac{E_{x,i+1/2} + E_{x,i-1/2}}{2} \quad \dots\dots\dots (2)$$



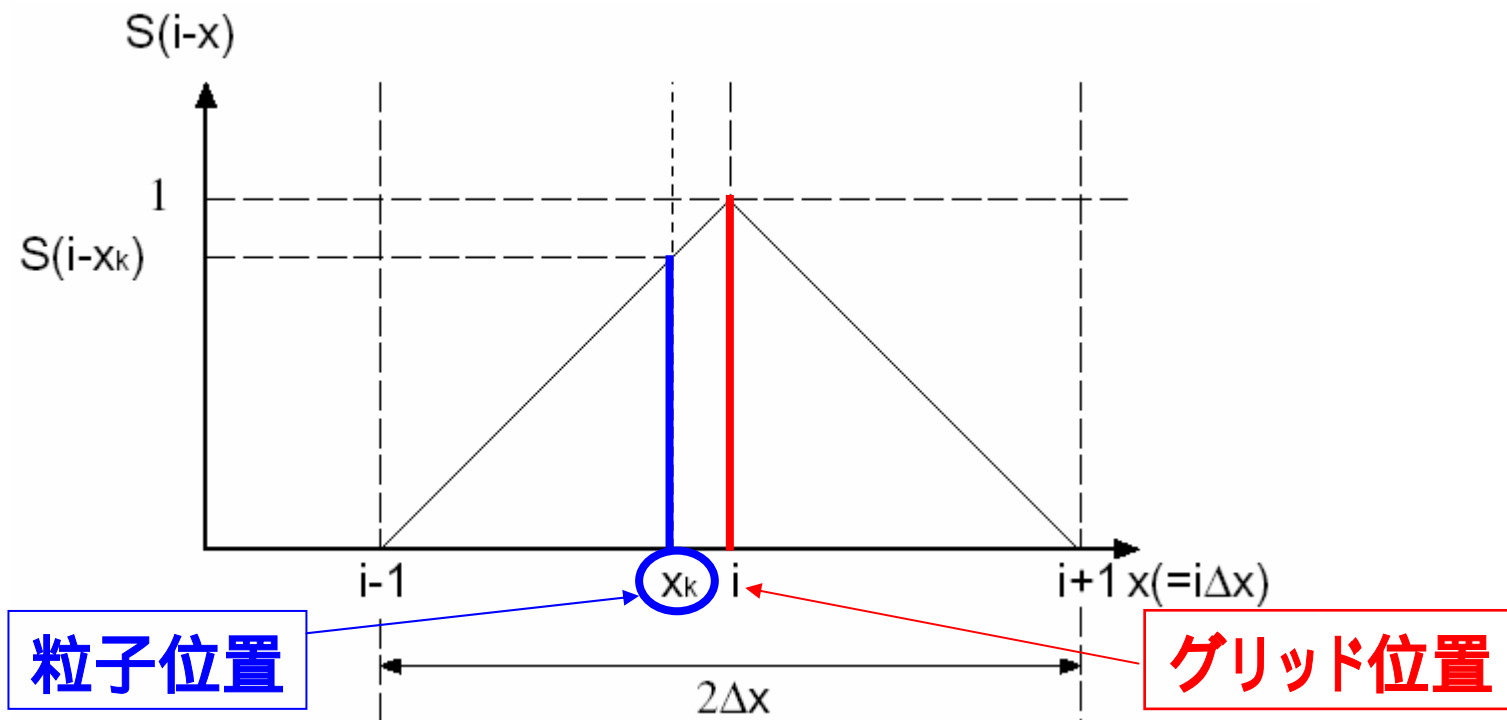
セルフフォース



	$\rho_i = q(1-a)$		$\rho_{i+1} = qa$	
$E_{i-1/2} = -2\pi q$		$E_{i+1/2} = 2\pi q(1-2a)$		$E_{i+3/2} = 2\pi q$
	$E_i = -2\pi qa$		$E_i = 2\pi q(1-a)$	



グリッドから粒子への物理量の受け渡し



電場
$$E_k = \sum_{i=1}^m E_i S(i - x_k)$$

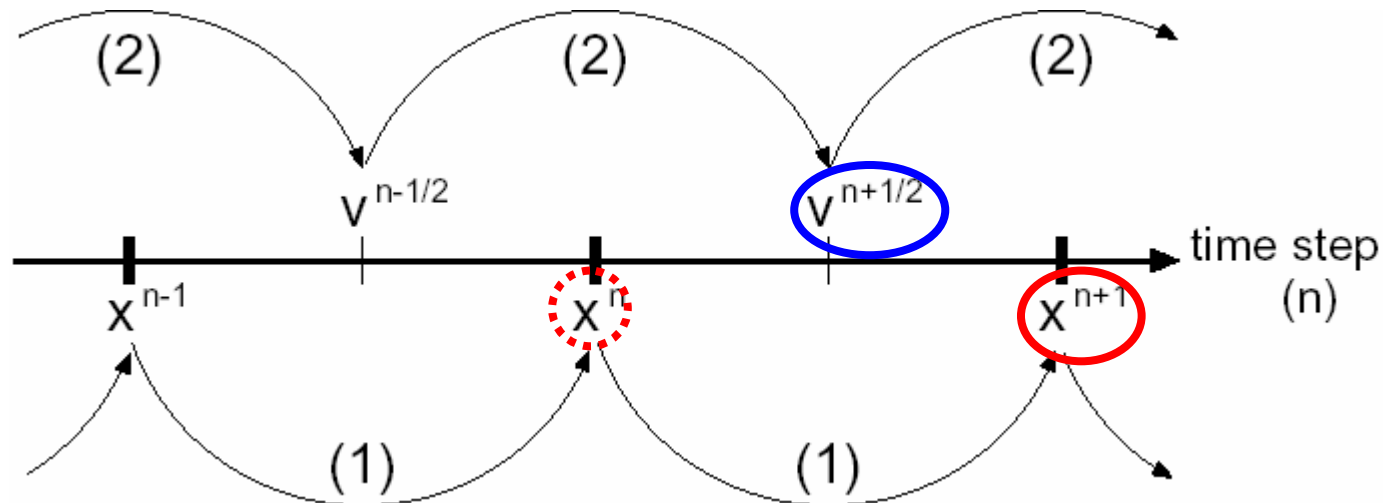
運動方程式

$$m_0 \frac{du_x}{dt} = qE_x \Rightarrow \frac{u_x^{n+1/2} - u_x^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{q}{m_0} E_x^n$$

$$u_x^{n+1/2} = u_x^{n-1/2} + \frac{q}{m_0} E_x^n \Delta t \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\left[\textcircled{v_x^{n+1/2}} = \frac{u_x^{n+1/2}}{\gamma^{n+1/2}} = \frac{u_x^{n+1/2}}{\sqrt{1 + (u_x^{n+1/2}/c)^2}} \right] \quad (4\text{元速度から3元速度へ変換})$$

$$\textcircled{x^{n+1}} = \textcircled{x^n} + \textcircled{v_x^{n+1/2}} \Delta t \quad \dots\dots\dots (1)$$



1次元・静電コードのまとめ

- 物理変数 $x=(x,0,0)$, $v=(v_x,0,0)$, $E=(E_x,0,0)$

$$\text{Maxwell方程式} \quad \nabla \cdot E = 4\pi\rho \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = 4\pi\rho$$

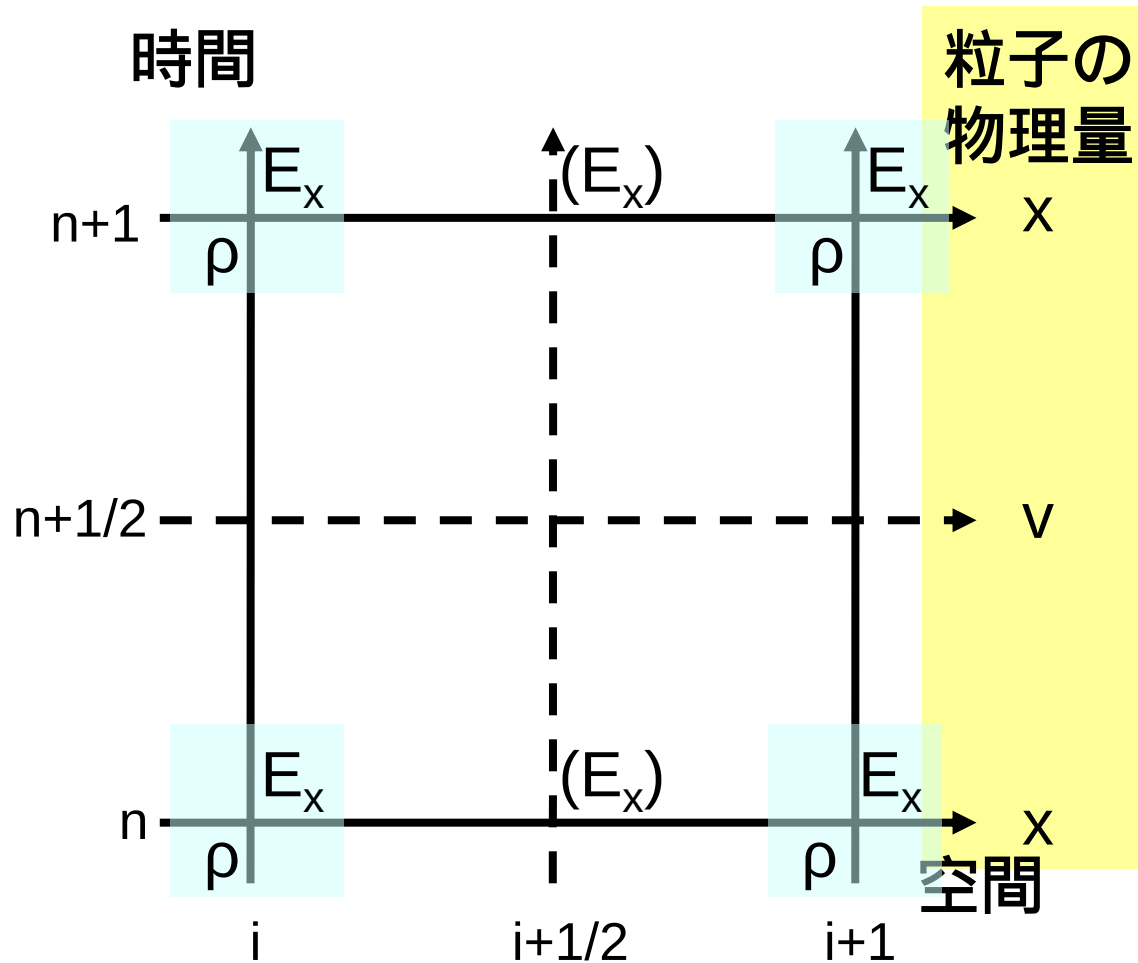
$$E_{x,i+1/2} = E_{x,i-1/2} + 4\pi\rho_i\Delta x \qquad E_{x,i} = \frac{E_{x,i+1/2} + E_{x,i-1/2}}{2}$$

$$\text{相対論的運動方程式} \quad m_0 \frac{du}{dt} = q \left(E + \frac{u}{c\gamma} \times B \right) \quad \Rightarrow \quad m_0 \frac{du_x}{dt} = qE_x$$

$$u_x^{n+1/2} = u_x^{n-1/2} + \frac{q}{m_0} E_x^n \Delta t, \quad \left[v_x^{n+1/2} = \frac{u_x^{n+1/2}}{\gamma^{n+1/2}} = \frac{u_x^{n+1/2}}{\sqrt{1 + (u_x^{n+1/2}/c)^2}} \right]$$

$$x^{n+1} = x^n + v_x^{n+1/2} \Delta t$$

1次元・静電コードのまとめ



グリッド及び時間ステップ幅の拘束条件

- $\Delta x \sim$ デバイ長 ($\lambda_D = v_{th} / \omega_p$)
 $\Delta x > \lambda_D$ となると粒子は数値的な熱化を起こす
(運動エネルギーが増加し、エネルギーが保存しない)
- 特徴的な現象を十分に分解できる大きさにとる
例) プラズマ振動 $\omega_p \Delta t \ll 1$
ジャイロ運動 $\Delta t \ll$ ジャイロ周期
($\Delta x \ll$ ジャイロ半径)

計算例：プラズマ振動

- 計算空間に熱速度が小さい同数の電子-陽電子を一様に分配し、静電場による振動を見る。
- 運動方程式・連続の式・divE

$$mn_{\pm} \left\{ \frac{\partial v_{\pm}}{\partial t} + (v_{\pm} \cdot \nabla) v_{\pm} \right\} = \pm en_{\pm} E$$

$$m \frac{\partial n_{\pm}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{\pm} v_{\pm}) = 0$$

$$\nabla \cdot E = 4\pi\rho$$

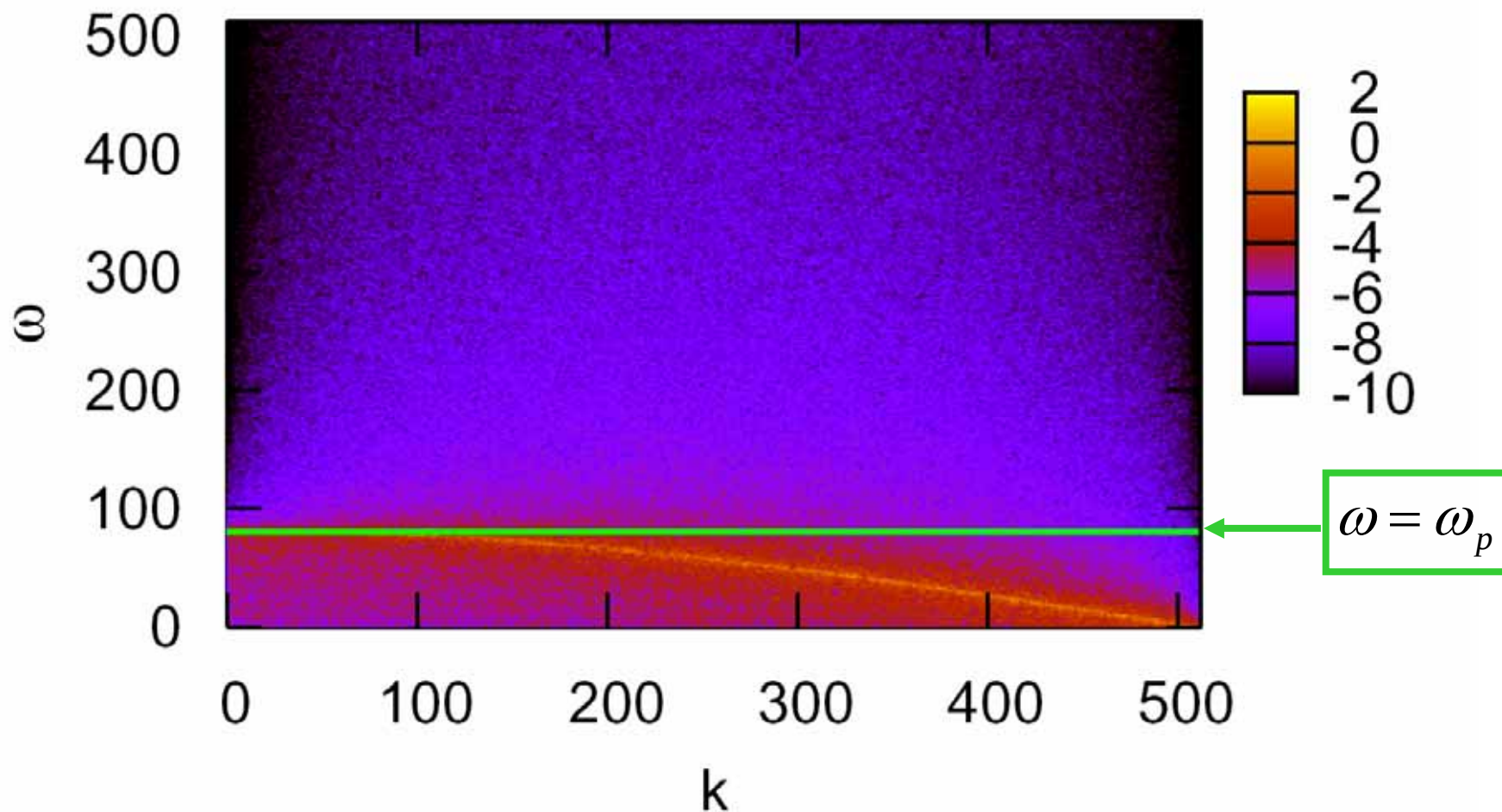
を速度 v ・電場 E は1次の量、密度 n は0次+1次の量として線形化し分散関係式を得る。

$$\omega = \omega_p$$

計算条件

- グリッド数 1024
- 時間ステップ 1024
- 粒子数 $51,200 \times 2$ 個
(50×2 個/グリッド)
- グリッド幅 $50 \times$ デバイ長
(数値的な熱化が起こる)
- 時間ステップ幅 プラズマ振動周期/13
- 境界条件 周期境界

プラズマ振動(静電場のk- ω 図)



1次元・電磁コード(垂直磁場)

1次元・電磁コード(垂直磁場)

- 空間1次元(x) 垂直磁場(B_z)の場合。

$$x=(x,0,0), \quad v=(v_x, v_y, 0), \quad E=(E_x, E_y, 0), \quad B=(0,0,B_z)$$

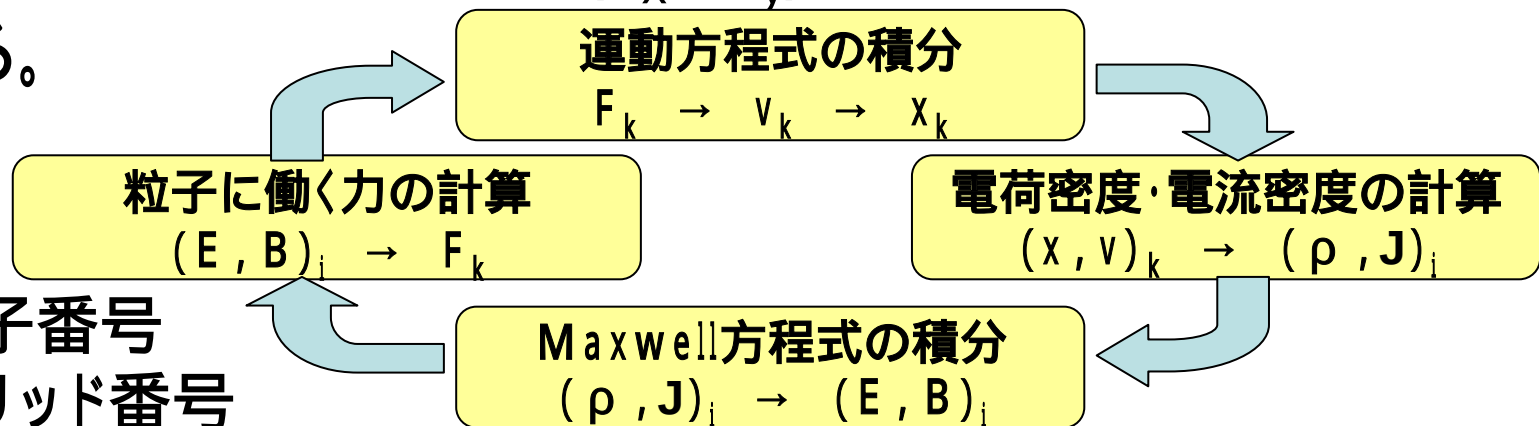
- 解くべき方程式

相対論的運動方程式
$$m_0 \frac{du}{dt} = q \left(E + \frac{u}{c\gamma} \times B \right)$$
$$u = (u_x, u_y, 0), \quad E = (E_x, E_y, 0), \quad B = (0, 0, B_z)$$

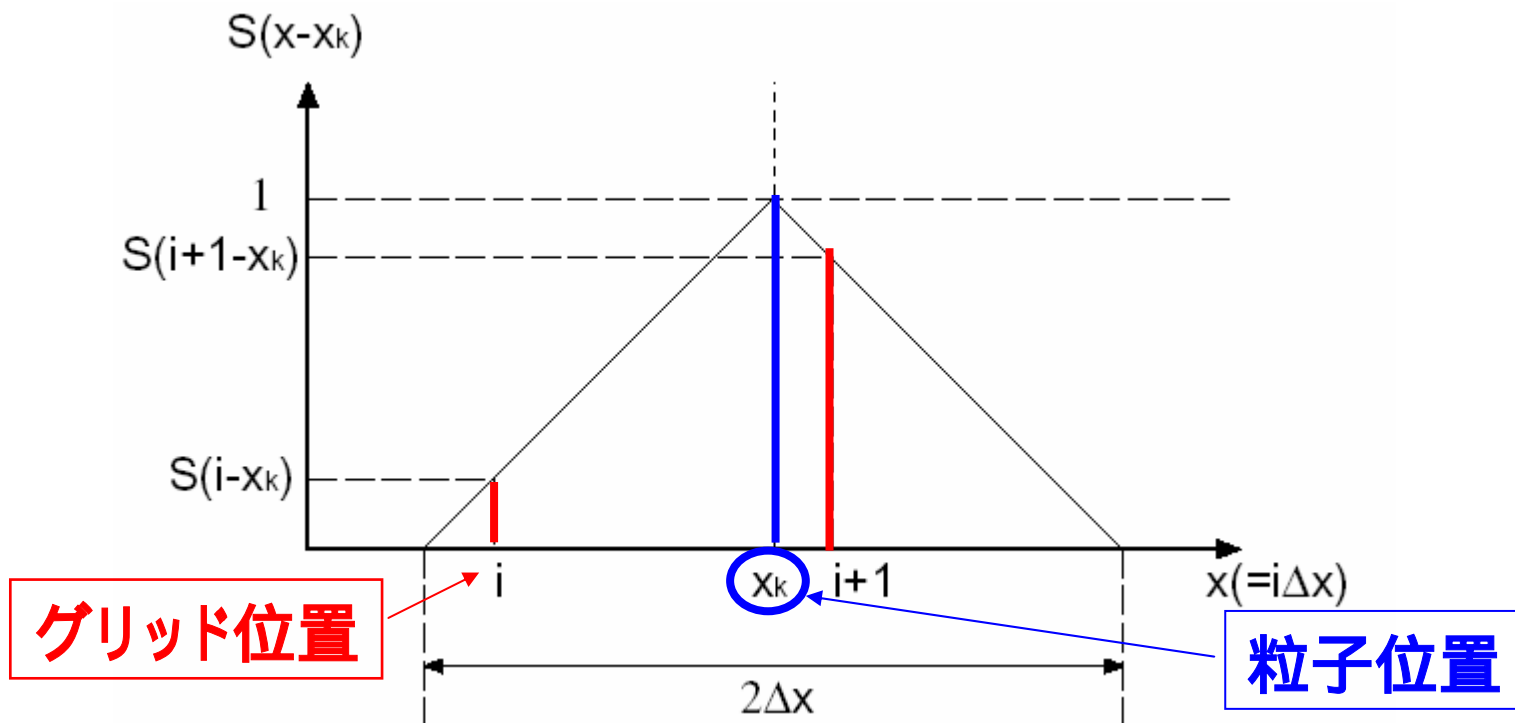
Maxwell方程式
$$\begin{aligned} \nabla \cdot E &= 4\pi\rho & \Rightarrow & \frac{\partial E_x}{\partial x} = 4\pi\rho \\ \nabla \times E &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} & \Rightarrow & \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} \\ \nabla \times B &= \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} J & \Rightarrow & -\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} J_y \end{aligned}$$

手順

1. 粒子の座標 x , 速度 (v_x, v_y) , 電磁場 (E_y, B_z) が既知であるとする。
2. x からグリッド上の電荷密度 ρ を、 x, v_y からグリッド上の電流密度 J_y を求める。
3. ρ からグリッド上の電場 E_x を求める。 J_y を使ってグリッド上の電磁場 (E_y, B_z) を時間更新する。
4. 粒子が受ける (E_x, E_y, B_z) を求める。
5. 運動方程式を解き、 (v_x, v_y) を更新し、さらに x を更新する。



粒子からグリッドへの物理量の受け渡し



電荷密度 $\rho(i, n) = \sum_{k=1}^m q_k S(i - x_k(t)) / \Delta x$

電流密度 $J(i, n + 1/2) = \sum_{k=1}^m q_k v_k(t + \Delta t/2) S(i - x_k(t + \Delta t/2)) / \Delta x$

電磁場の解法

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t}, \quad -\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} J_y$$

$$\begin{pmatrix} F^+ \\ F^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_y + B_z \\ E_y - B_z \end{pmatrix} \text{と定義して2式の和と差をとると}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) F^+ = -4\pi J_y$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) F^- = -4\pi J_y$$

$$\frac{(F^+)_i^{n+1} - (F^+)_i^n}{\Delta t} + c \frac{(F^+)_i^n - (F^+)_{i-1}^n}{\Delta x} = -4\pi (J_y)_{i-1/2}^{n+1/2}$$

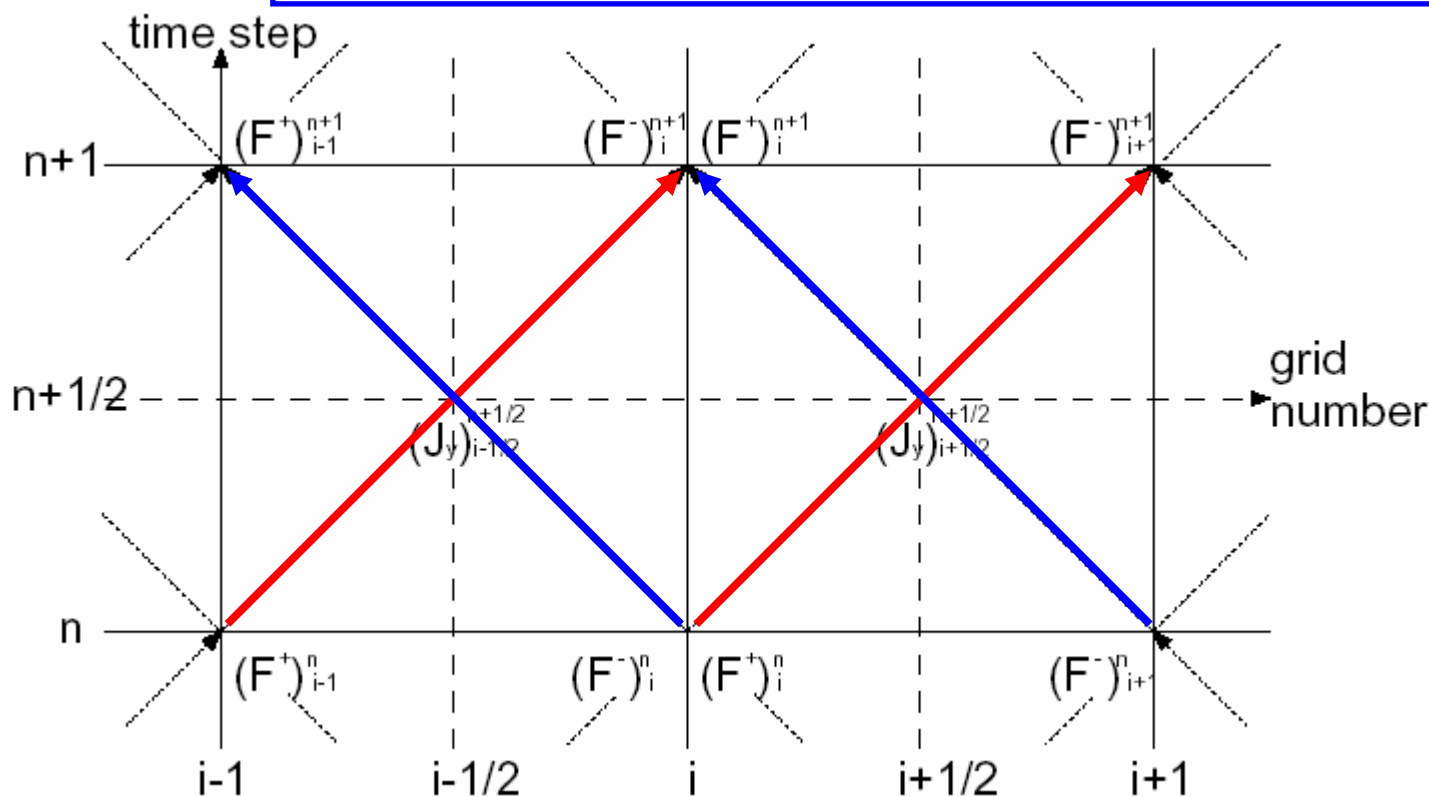
$$\frac{(F^-)_i^{n+1} - (F^-)_i^n}{\Delta t} - c \frac{(F^-)_{i+1}^n - (F^-)_i^n}{\Delta x} = -4\pi (J_y)_{i+1/2}^{n+1/2}, \quad (J_y)_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{(J_y)_{i+1}^{n+1/2} + (J_y)_i^{n+1/2}}{2}$$

電磁場の解法

$\Delta x = c \Delta t$ として

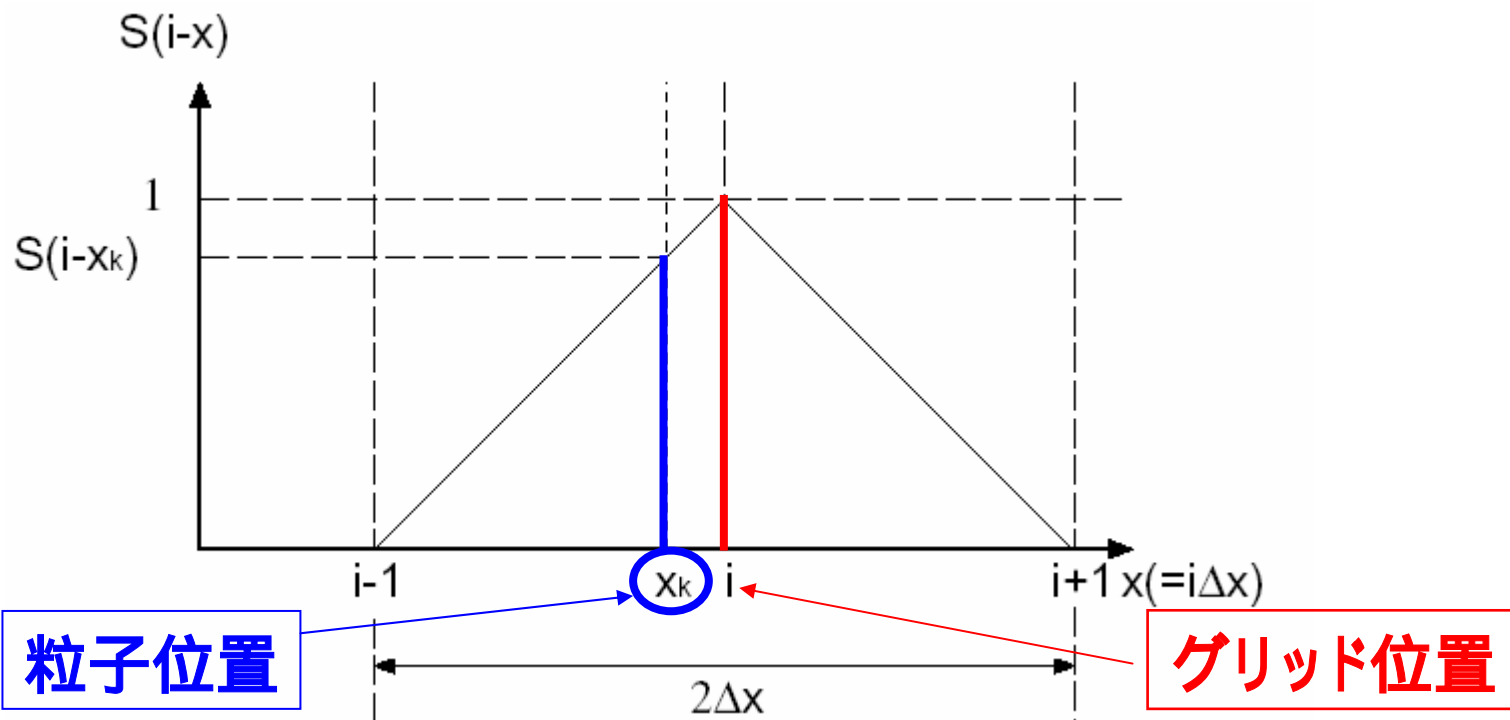
$$(F^+)_{i-1}^{n+1} = (F^+)_{i-1}^n - 4\pi (J_y)_{i-1/2}^{n+1/2} \Delta t \quad : +x \text{方向へ伝播}$$

$$(F^-)_{i+1}^{n+1} = (F^-)_{i+1}^n - 4\pi (J_y)_{i+1/2}^{n+1/2} \Delta t \quad : -x \text{方向へ伝播}$$



$$E_y = \frac{1}{2} (F^+ + F^-) \quad B_z = \frac{1}{2} (F^+ - F^-)$$

グリッドから粒子への物理量の受け渡し



電場
$$E_k = \sum_{i=1}^m E_i S(i - x_k)$$

磁場
$$B_k = \sum_{i=1}^m B_i S(i - x_k)$$

運動方程式

$$m_0 \frac{du}{dt} = q \left(E + \frac{u}{c\gamma} \times B \right) \Rightarrow \frac{u^{n+1/2} - u^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{q}{m_0} \left(E^n + \frac{u^{n+1/2} + u^{n-1/2}}{2\gamma^n c} \times B^n \right)$$

- Buneman-Boris法

電場による加速と磁場による回転を別に扱うことにより、磁場が仕事をしないことを保障する。

1. $\Delta t/2$ だけ電場 $\mathbf{E}$ によって粒子を加速
2. Δt だけ磁場 $\mathbf{B}$ によって粒子速度の向きを変える
3. 再び $\Delta t/2$ だけ電場 $\mathbf{E}$ によって粒子を加速

Buneman-Boris法

$$\frac{u^{n+1/2} - u^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{q}{m_0} \left(E^n + \frac{u^{n+1/2} + u^{n-1/2}}{2\gamma^n c} \times B^n \right)$$

- 電場による加速

$$u^- \equiv u^{n-1/2} + \frac{q}{m_0} E^n \frac{\Delta t}{2}$$

$$u^{n+1/2} \equiv u^+ + \frac{q}{m_0} E^n \frac{\Delta t}{2}$$

- 磁場による回転

$$(|u^+| = |u^-|)$$

$$u^+ = u^- + \frac{q}{1+T^2} (u^- + u^- \times T) \times T$$

$$\left[T \equiv u^- + \frac{qB^n}{2m_0c\gamma^-} \Delta t, \quad \gamma^- = \sqrt{1 + (u^-/c)^2} \right]$$

$$u^{n-1/2} \text{ (E加速)} \rightarrow u^- \text{ (B回転)} \rightarrow u^+ \text{ (E加速)} \rightarrow u^{n+1/2}$$

1次元・電磁コード(垂直磁場)のまとめ

- **物理变数** $x=(x,0,0), v=(v_x, v_y, 0), E=(E_x, E_y, 0), B=(0,0,B_z)$

相對論的運動方程式

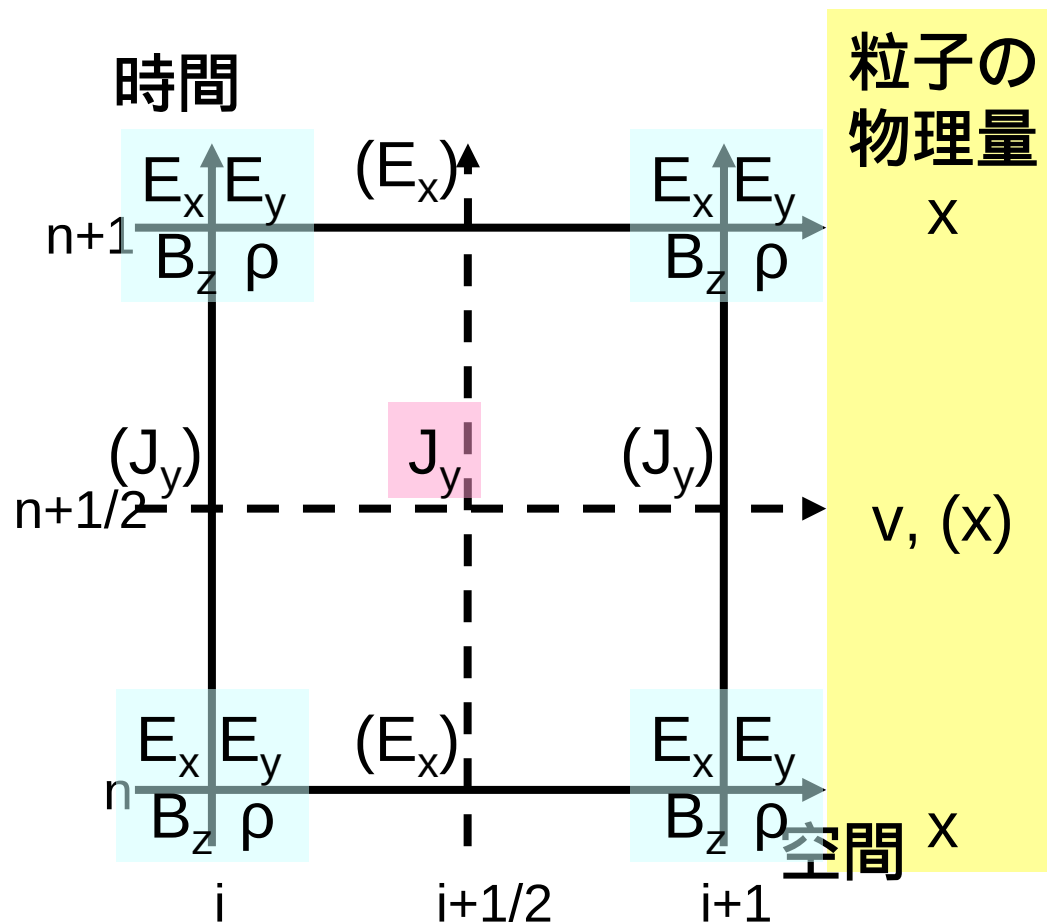
$$m_0 \frac{du}{dt} = q \left(E + \frac{u}{c\gamma} \times B \right)$$

Maxwell方程式

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 4\pi\rho$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} J_y$$



1次元・電磁コード(斜め磁場)

- B_x がある場合は、垂直磁場の場合の $(E_y, B_z, J_y, (v_y))$ に対して分離された $(E_z, B_y, J_z, (v_z))$ を加えて計算すればよい。

相対論的運動方程式

$$m_0 \frac{du}{dt} = q \left(E + \frac{u}{c\gamma} \times B \right)$$

Maxwell方程式

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 4\pi\rho$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t},$$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} J_y,$$

$$-\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} J_z$$

計算例：電磁波のカットオフ

- 電子-陽電子プラズマ中に電磁波を入射する。
- 電磁場が1次の量であるとして、Maxwell方程式

$$\begin{aligned}\nabla \times E &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} & \Rightarrow & \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} \\ \nabla \times B &= \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} J & \Rightarrow & -\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} J_y\end{aligned}$$

を解くことで分散関係式を得る。

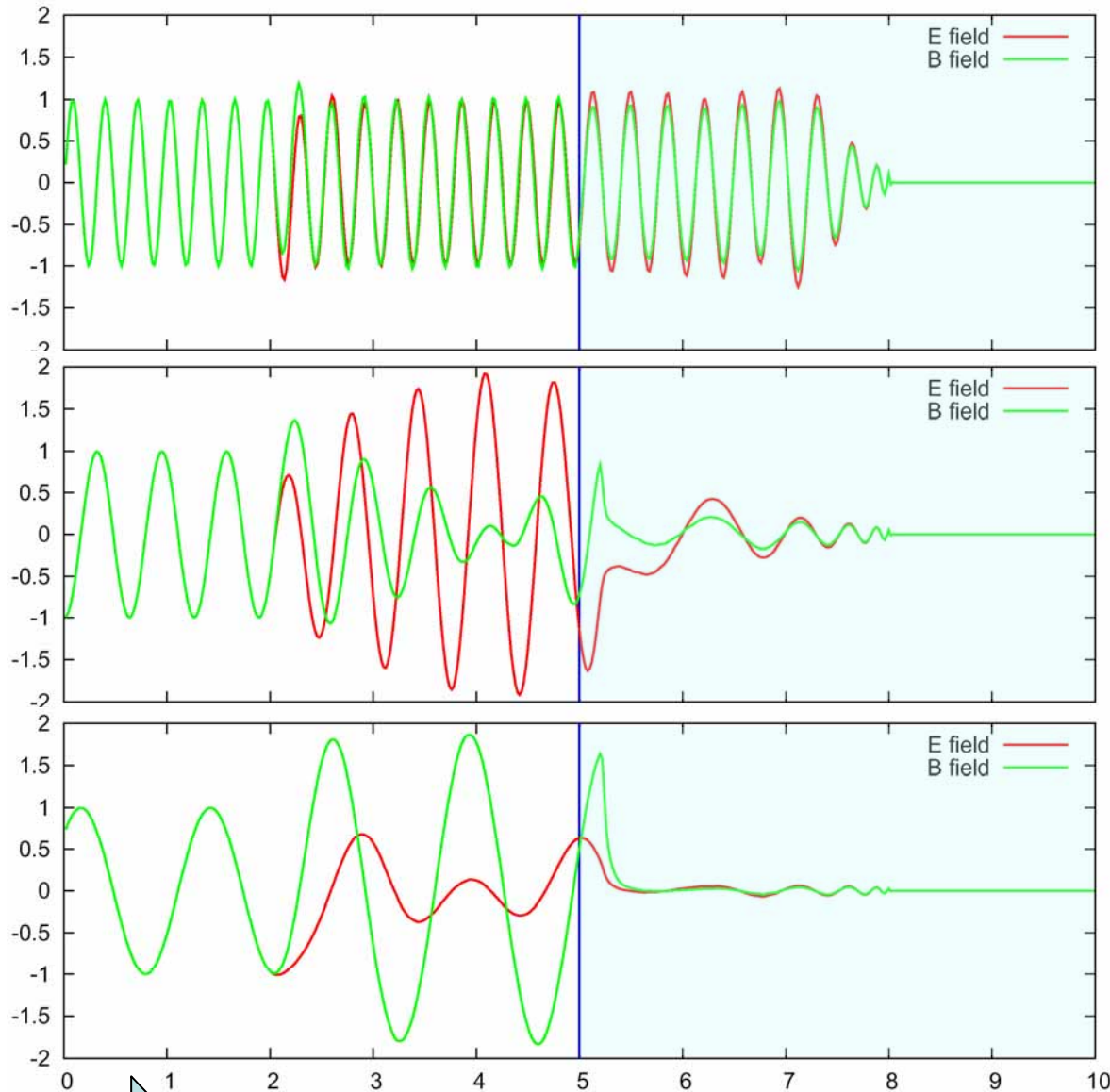
$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$$

$\omega < \omega_p$ では k が虚数になり、伝播方向に対して振幅は指数関数的に減衰する。

計算条件

- グリッド数 1 0 0 0
- 時間ステップ 8 0 0
- 粒子数 $25,000 \times 2$ 個
(50×2 個/グリッド)
- グリッド幅 $0.01 \times$ ジャイロ半径
($20 \times$ デバイ長)
- 時間ステップ幅 $0.016 \times$ プラズマ振動周期
- 境界条件 右端で反射境界

カットオフ



$$\omega > \omega_p \quad (\omega = 2\omega_p)$$

$$\omega = \omega_p$$

$$\omega < \omega_p \quad \left(\omega = \frac{1}{2} \omega_p \right)$$

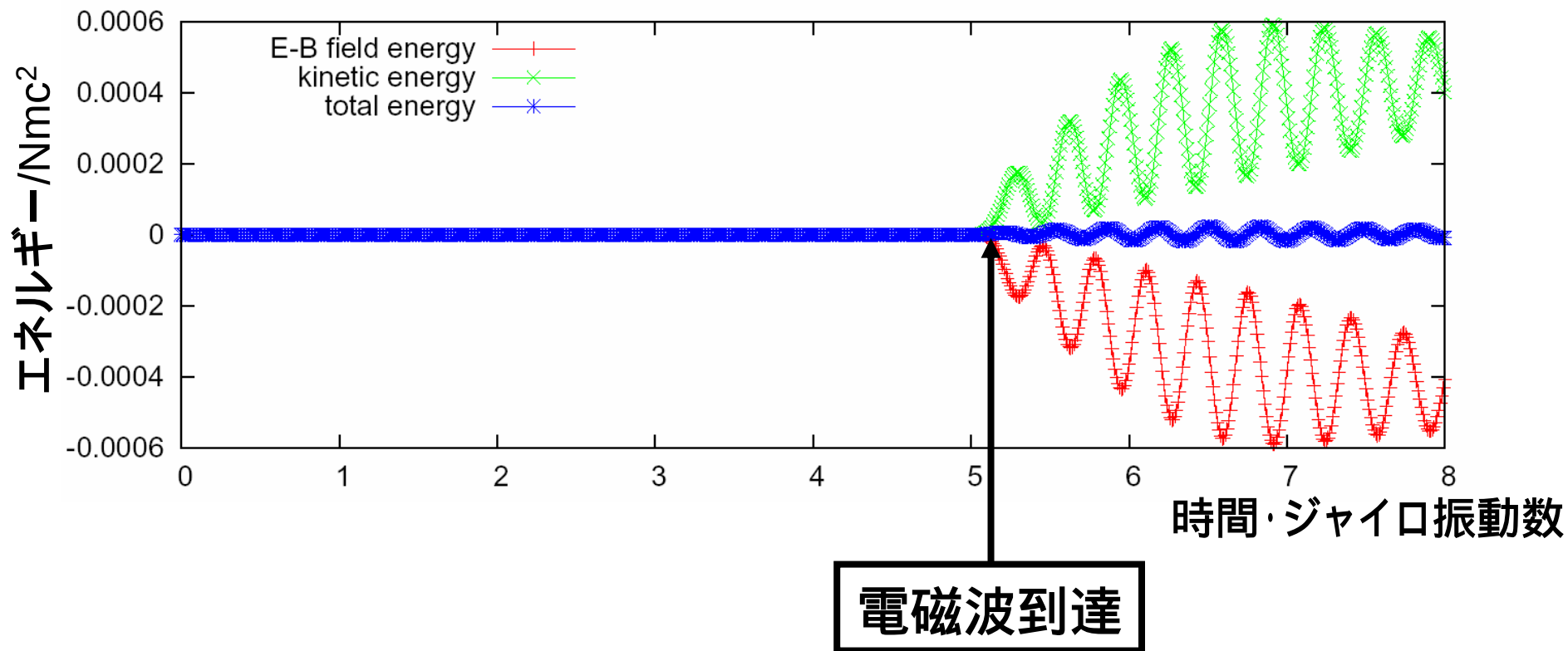
電磁波入射

真空

プラズマ

空間/ジャイロ半径

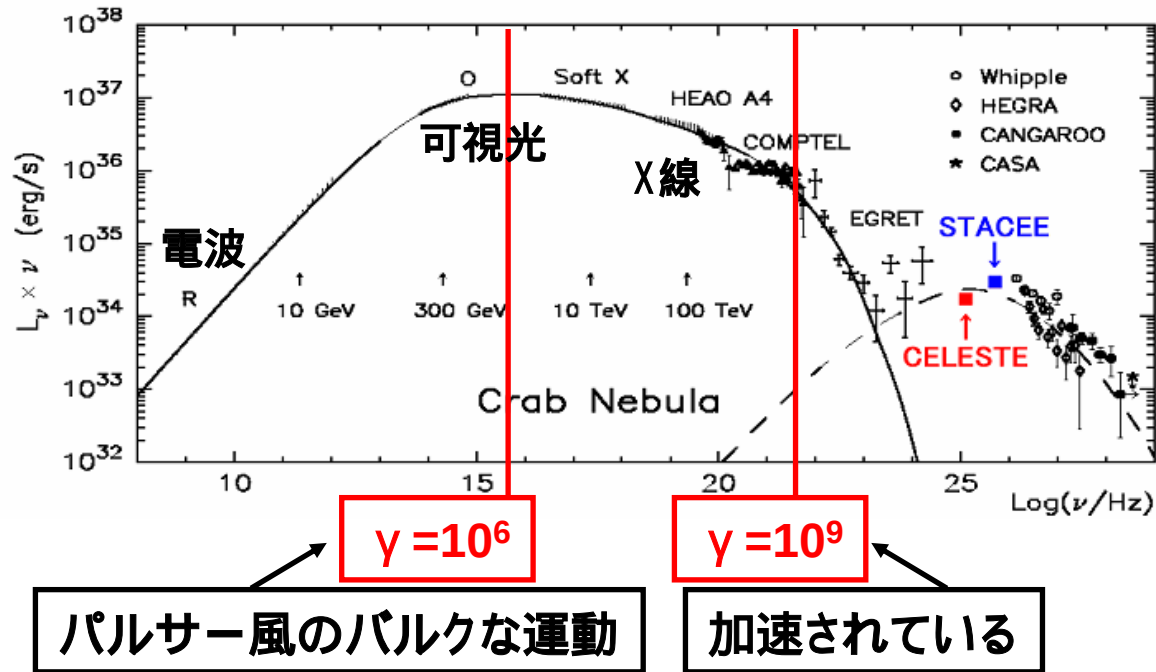
エネルギー保存



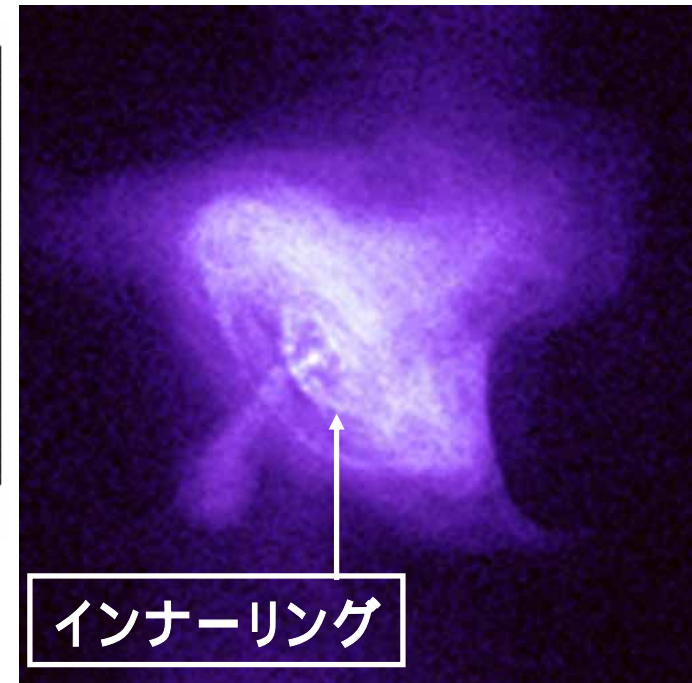
相對論的無衝突衝擊波

研究の動機

かに星雲のスペクトル(Aharonian et al 1998)



かに星雲の 線画像
(chandra)



これが衝撃波で、粒子の
加速が起こっている

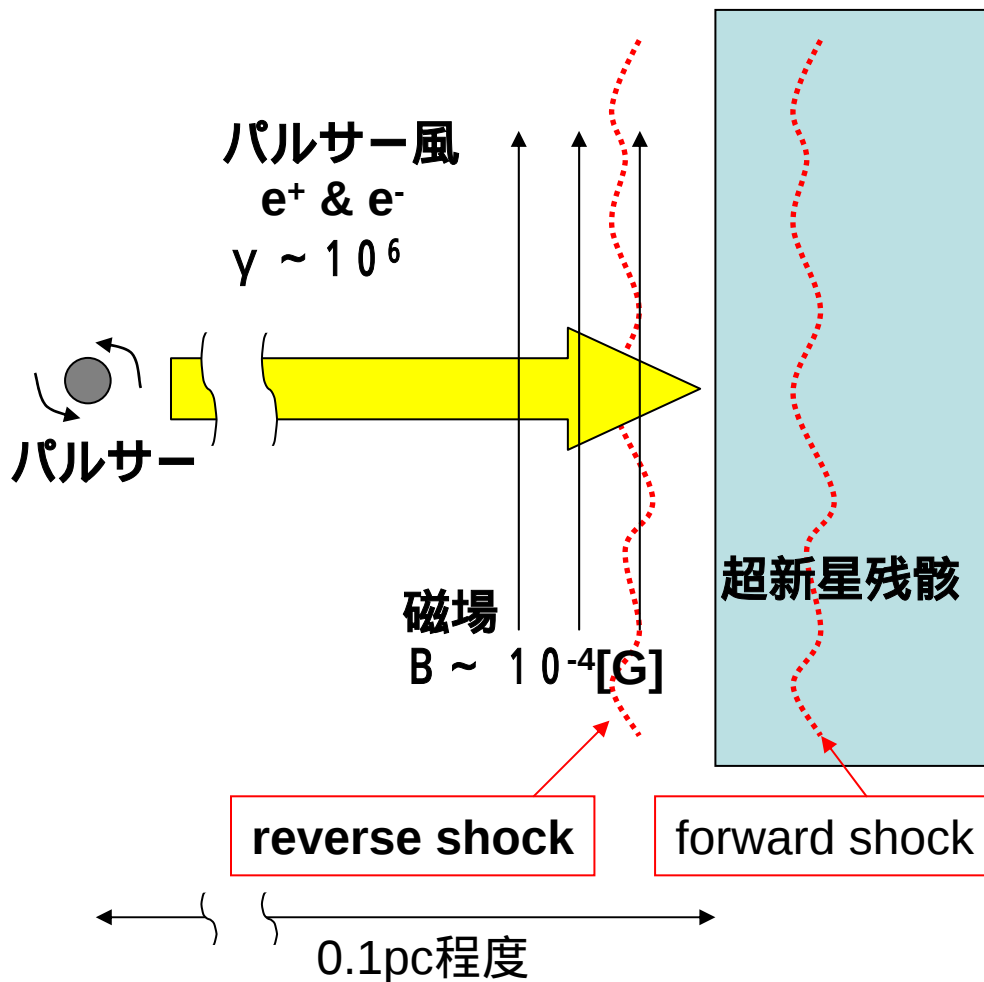
γ : 電子・陽電子のローレンツ因子

• 粒子の運動エネルギーは約1000倍まで増加

衝撃波によってどのように粒子の加速が起こっているのか

無衝突衝撃波の形成

衝撃波付近の模式図



- 磁場に凍結された e^+ & e^- は $\gamma \sim 10^6$ に達する。
- パルサー風と超新星残骸との相互作用により、衝撃波が発生。ただし、数密度は非常に低く、**無衝突系**である。
- パルサーは高速回転していて、磁場はスパイラル状に巻かれている。よって**粒子の流れに対して磁場は垂直**(垂直衝撃波)である。
- 流れが相対論的で、垂直衝撃波に近い場合は**Fermi加速が有効に働かない可能性がある。**
- **そのほかの加速メカニズムを考える必要がある。**

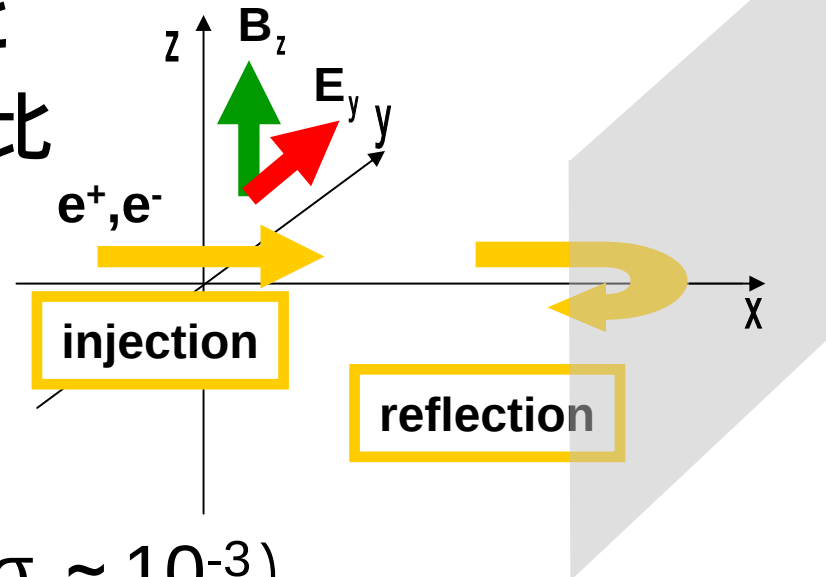
計算条件

- 一様でcold な電子-陽電子を左側(-x方向)から入射
- 電磁場(E_y, B_z)は、粒子のバルクな速度に対して働くローレンツ力が相殺するように与える $E_y = v_x B_z$
- 右側境界で粒子と電磁場は反射させる。
- 初期の磁場のエネルギー密度と粒子の運動エネルギー密度の比

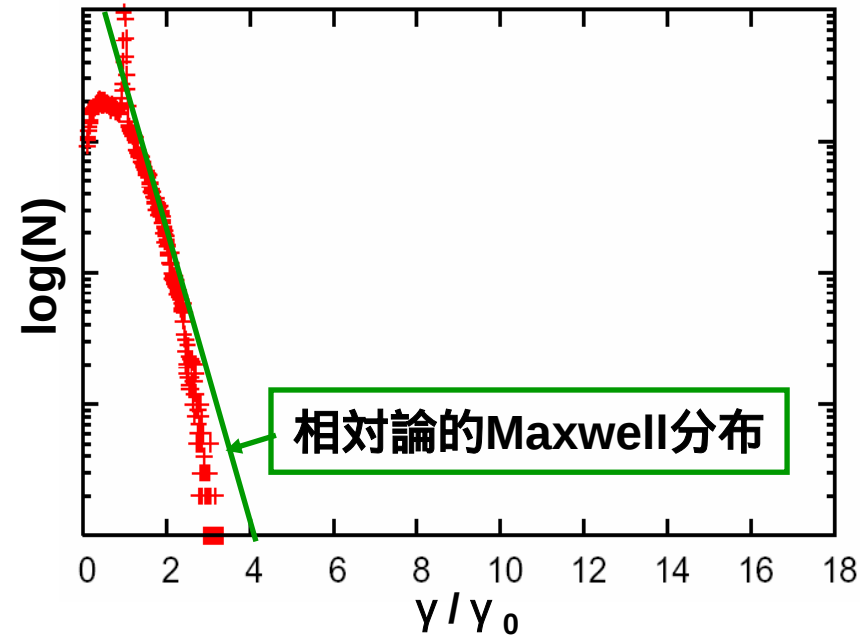
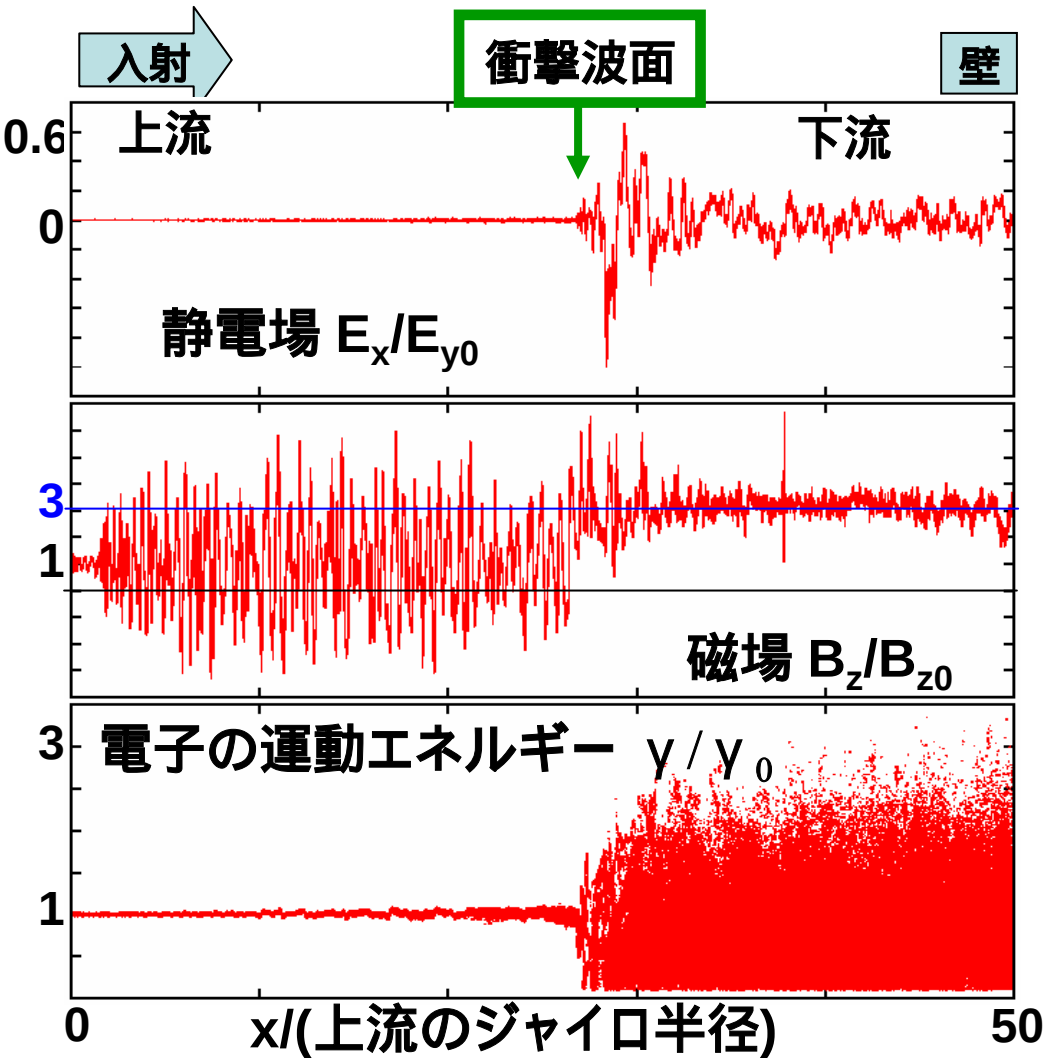
$$\sigma = \frac{B_{z0}^2 / 4\pi}{2N_0 m_e \gamma_0 c^2}$$

を変化させて現象を見る。

(かに星雲の衝撃波面付近では $\sigma \sim 10^{-3}$)

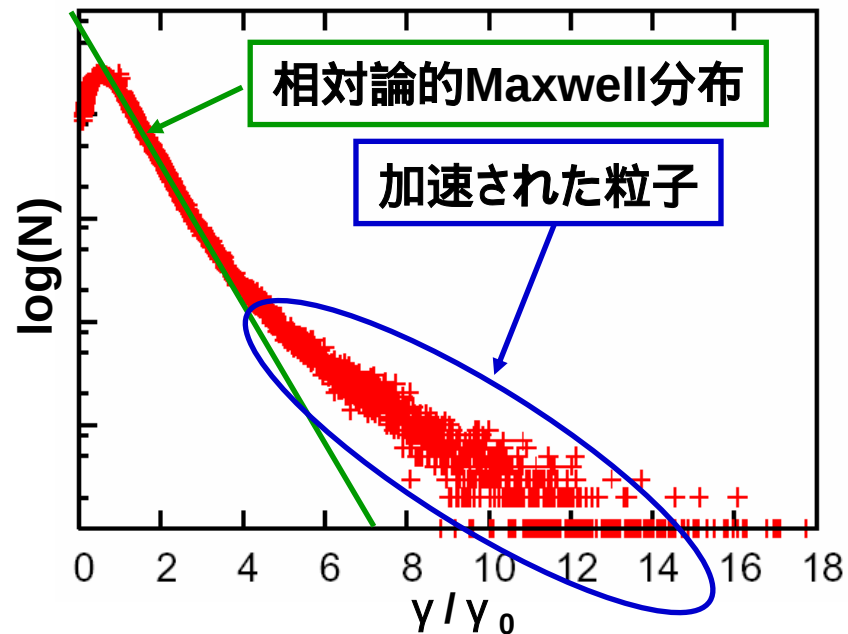
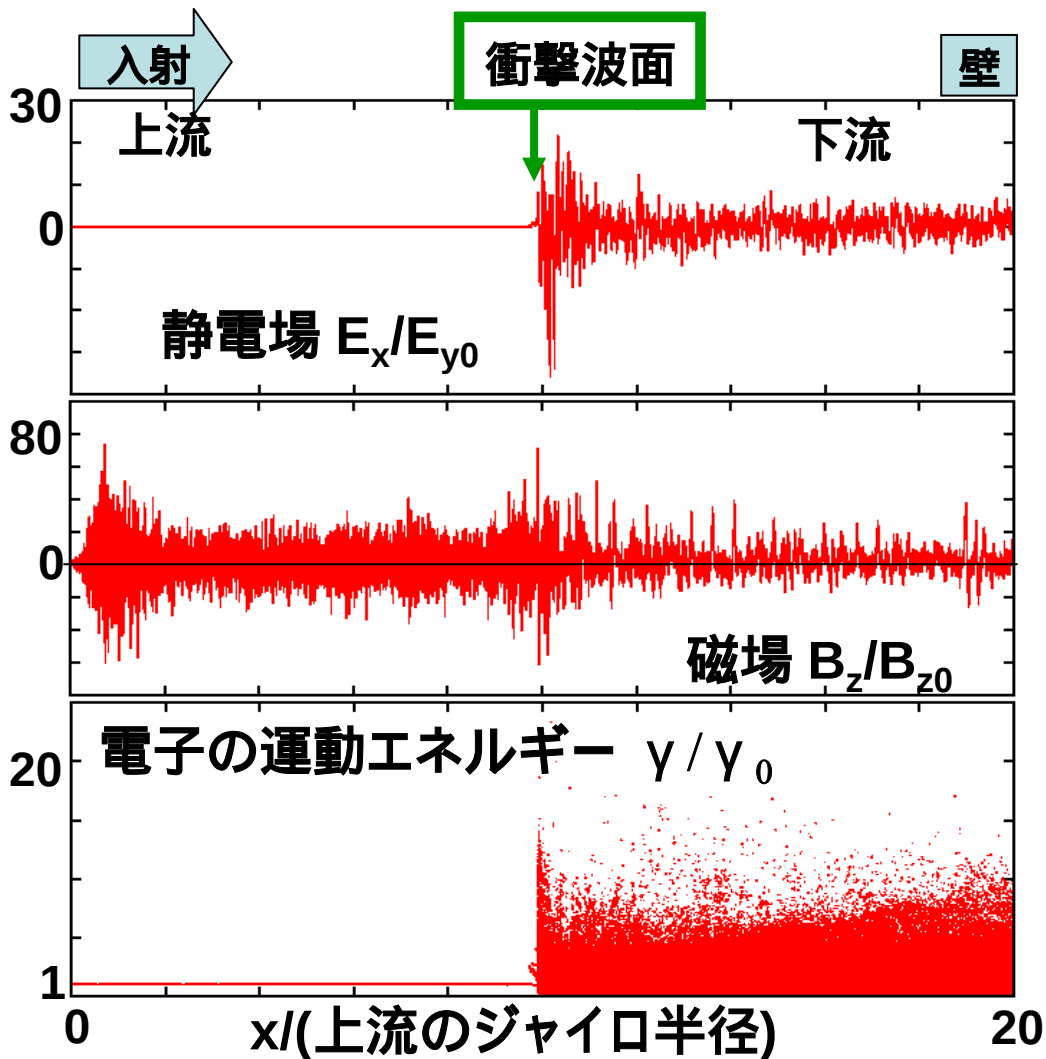


計算結果 ($\sigma=10^{-1}$)



- 衝撃波面が生成
(電磁場の平均値はジャンプ
コンディションを満たす。)
- スペクトルは相対論的
Maxwell分布に近くなってい
る。 熱化

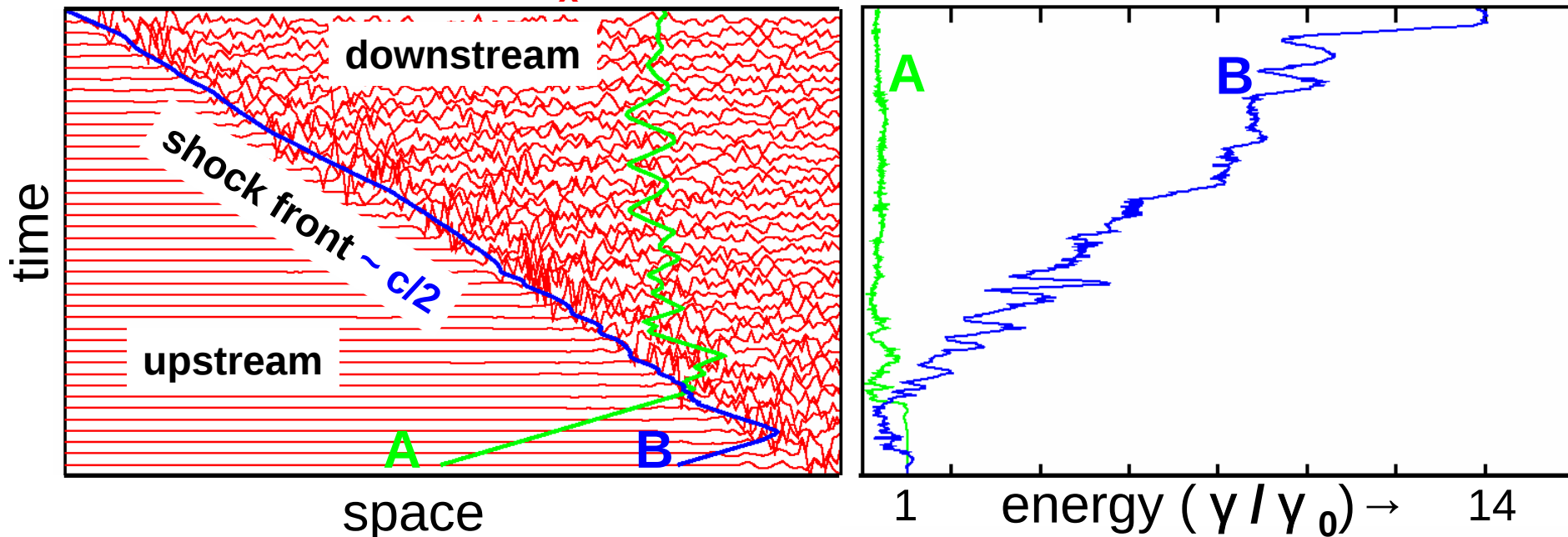
計算結果 ($\sigma=10^{-4}$)



- 電磁場の振幅が(初期の値に対して)非常に大きい。
- 衝撃波面で高エネルギー粒子が生成されている。

Particle trajectory and time variation of energy

(electrostatic field E_x)



- particle **A**: not trapped by the shock front and not accelerated
- particle **B**: trapped by the shock front and accelerated

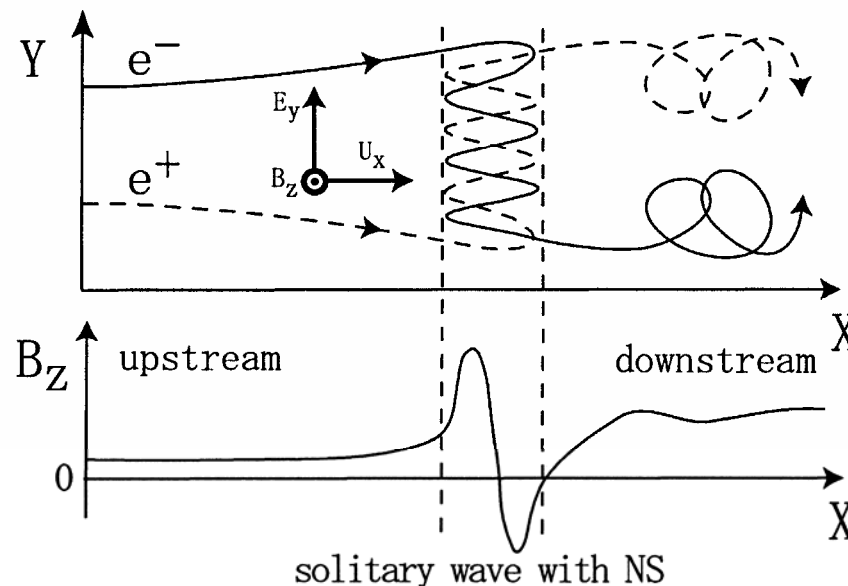
The particles are accelerated at the shock front

The average of accelerating electric field $E_y/E_{y0} \sim 1.7 > 0$

Past studies for the shock surfing acceleration in electron-positron plasma

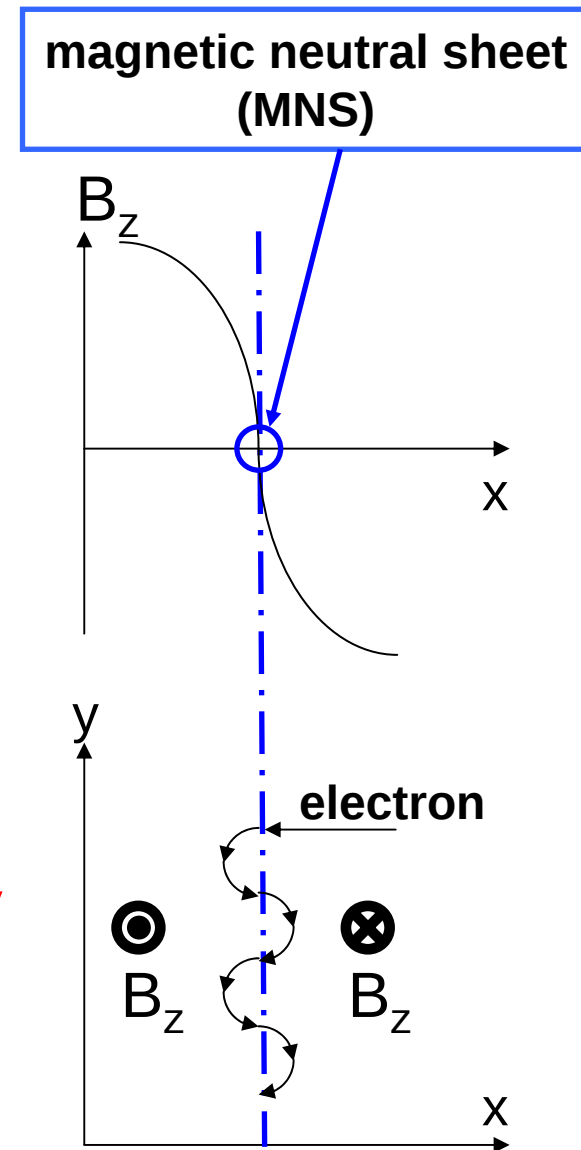
M.Hoshino (2001) showed that

- this phenomenon is characterized by σ ,
- when $\sigma \ll 1$ particle energy spectrum is nonthermal,
- accelerated particles are trapped at the shock surface, where a **magnetic neutral sheet (MNS)** exists.



Trapping by a magnetic neutral sheet

- Particles are trapped because their gyro motions change its direction through the MNS.
- All that time, motional electric field E_y accelerates the particles along the MNS.
- In the shock transition region, E_y has a finite value. On the other hand, in the down stream E_y is almost zero. This is the reason why the particle acceleration occurs only at the shock front.



Relation between σ and MNS

- The reflected particles begin to gyrate and induce an additional magnetic field.
- By definition of $\sigma = B_{z0}^2 / 8\pi N_0 m_e \gamma_0 c^2$, when σ is small, the initial magnetic field is small and the particle kinetic energy is large. Then

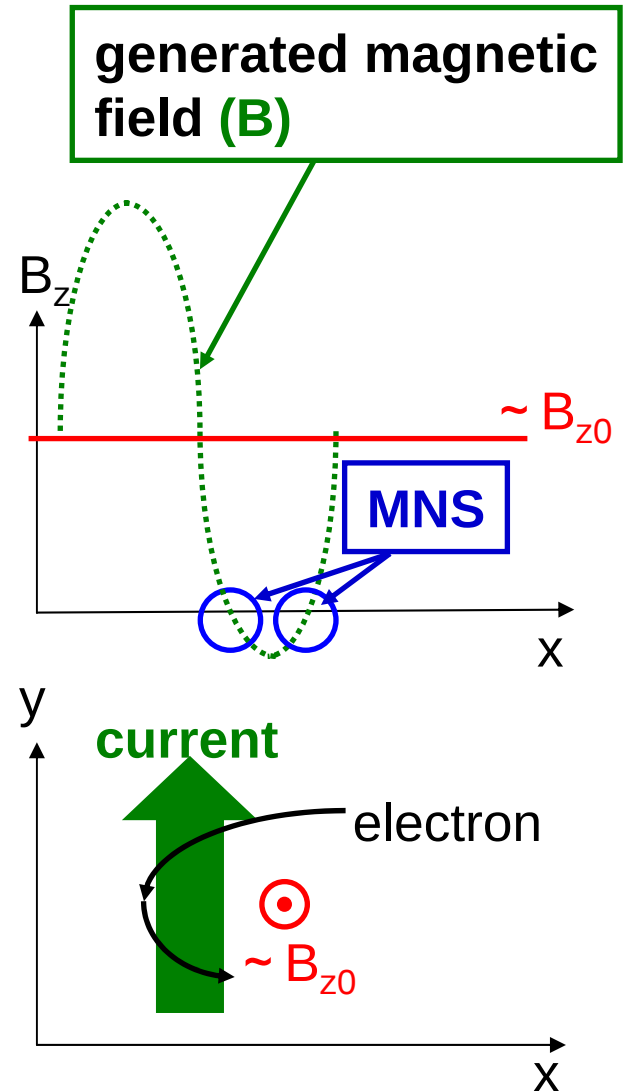
initial magnetic field

<

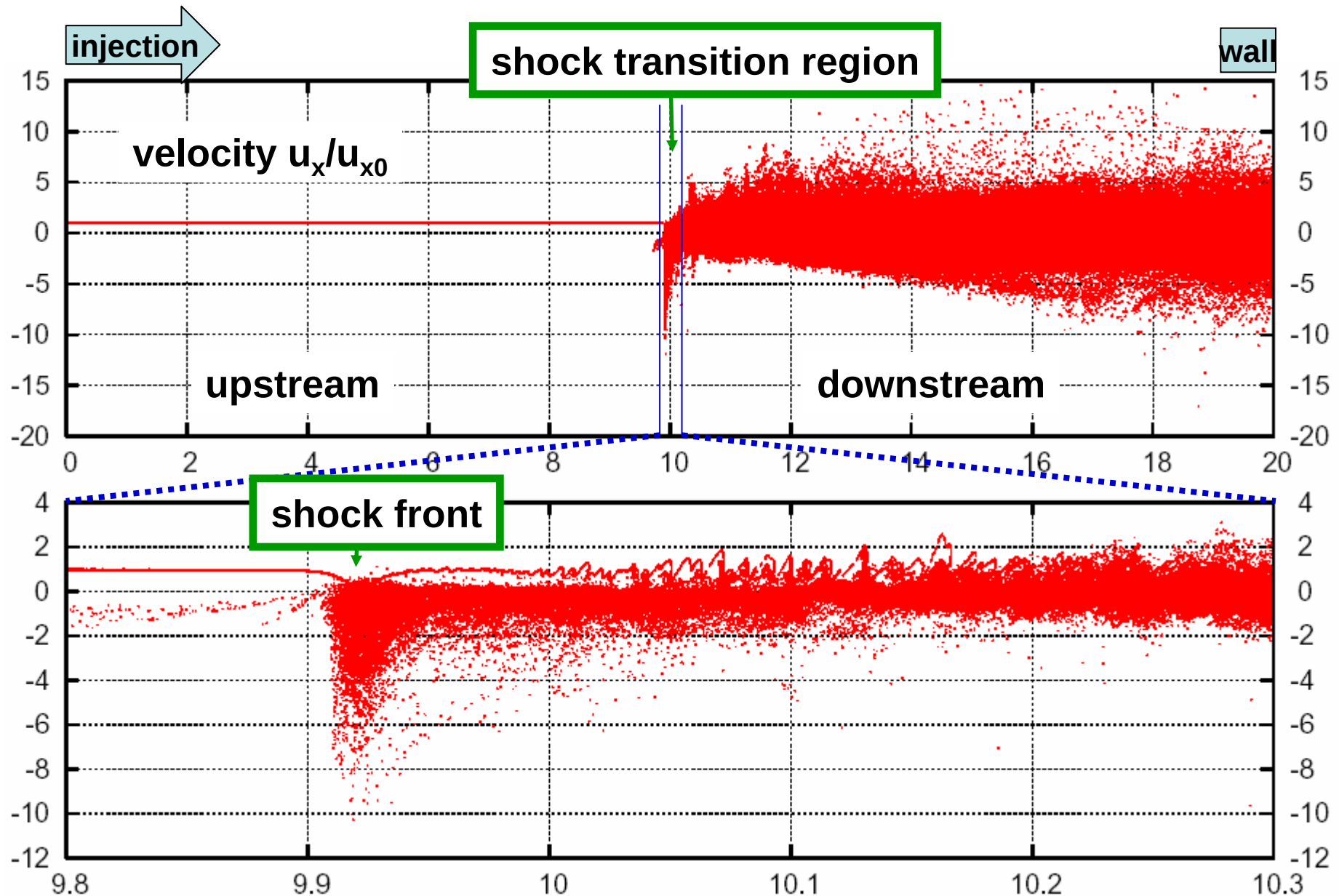
generated magnetic field,

and a **MNS** is generated.

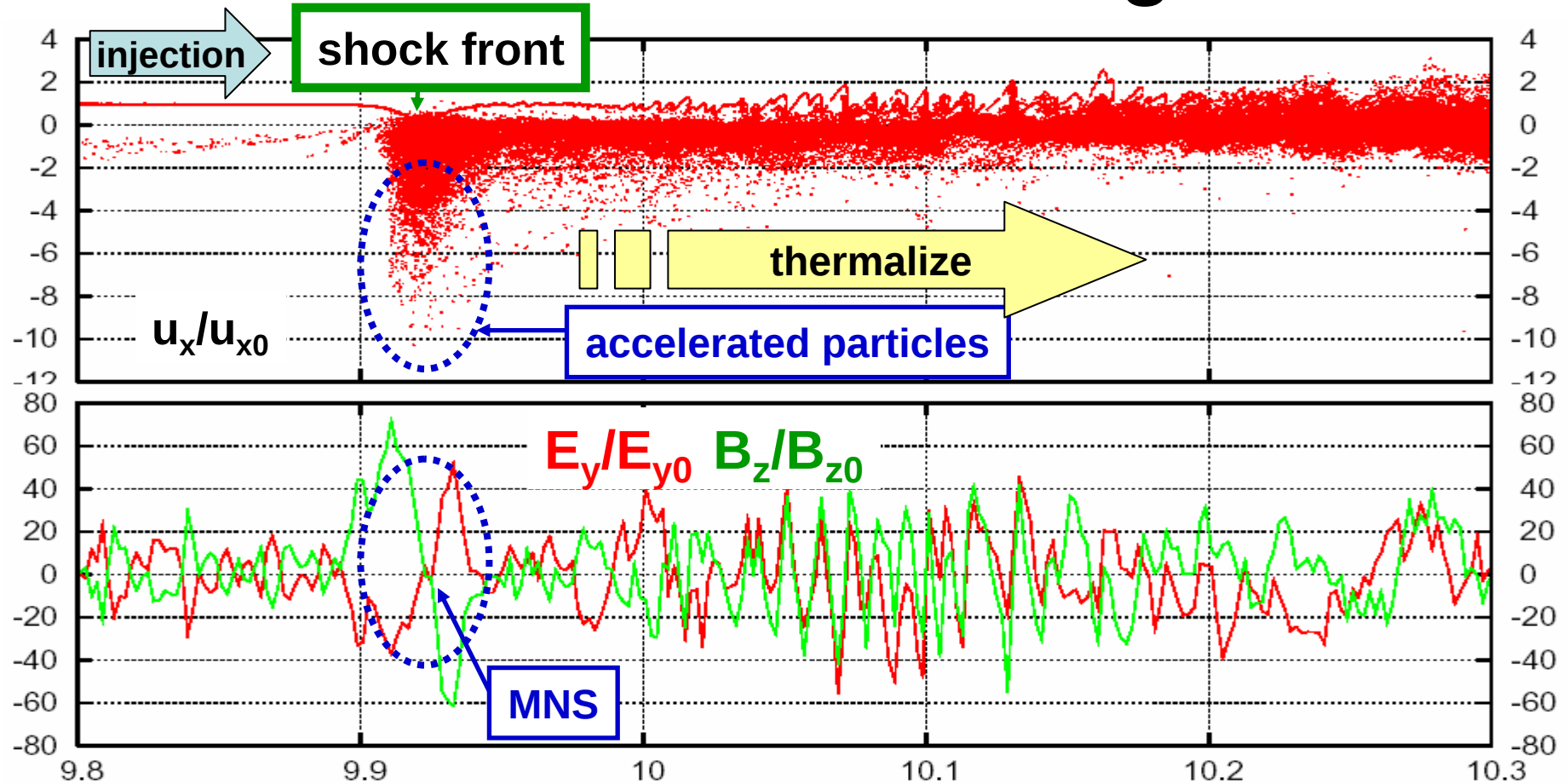
- We focus on the shock transition region in case $\sigma = 10^{-4} \ll 1$.



Enlargement of the shock transition region

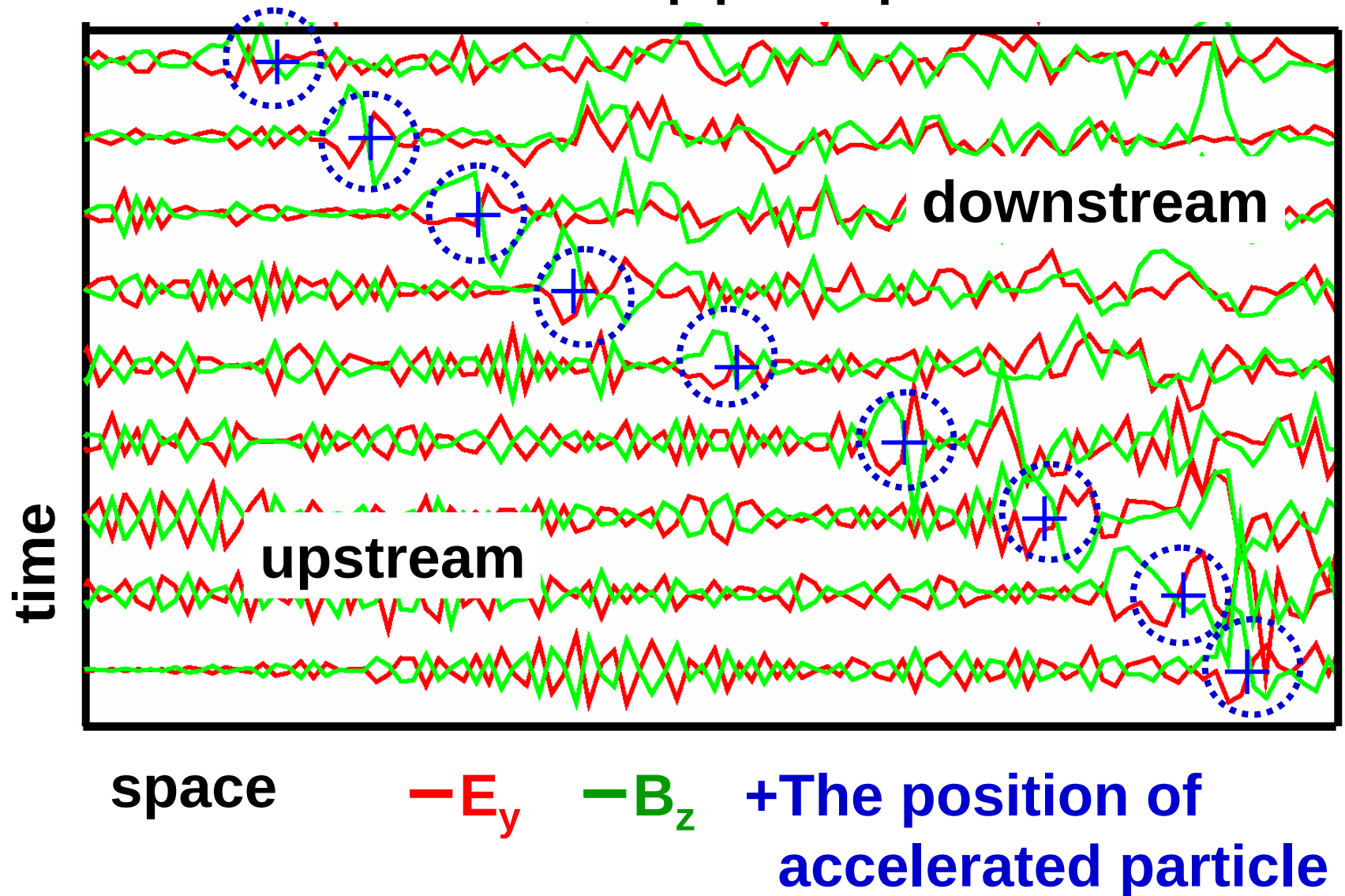


Shock transition region

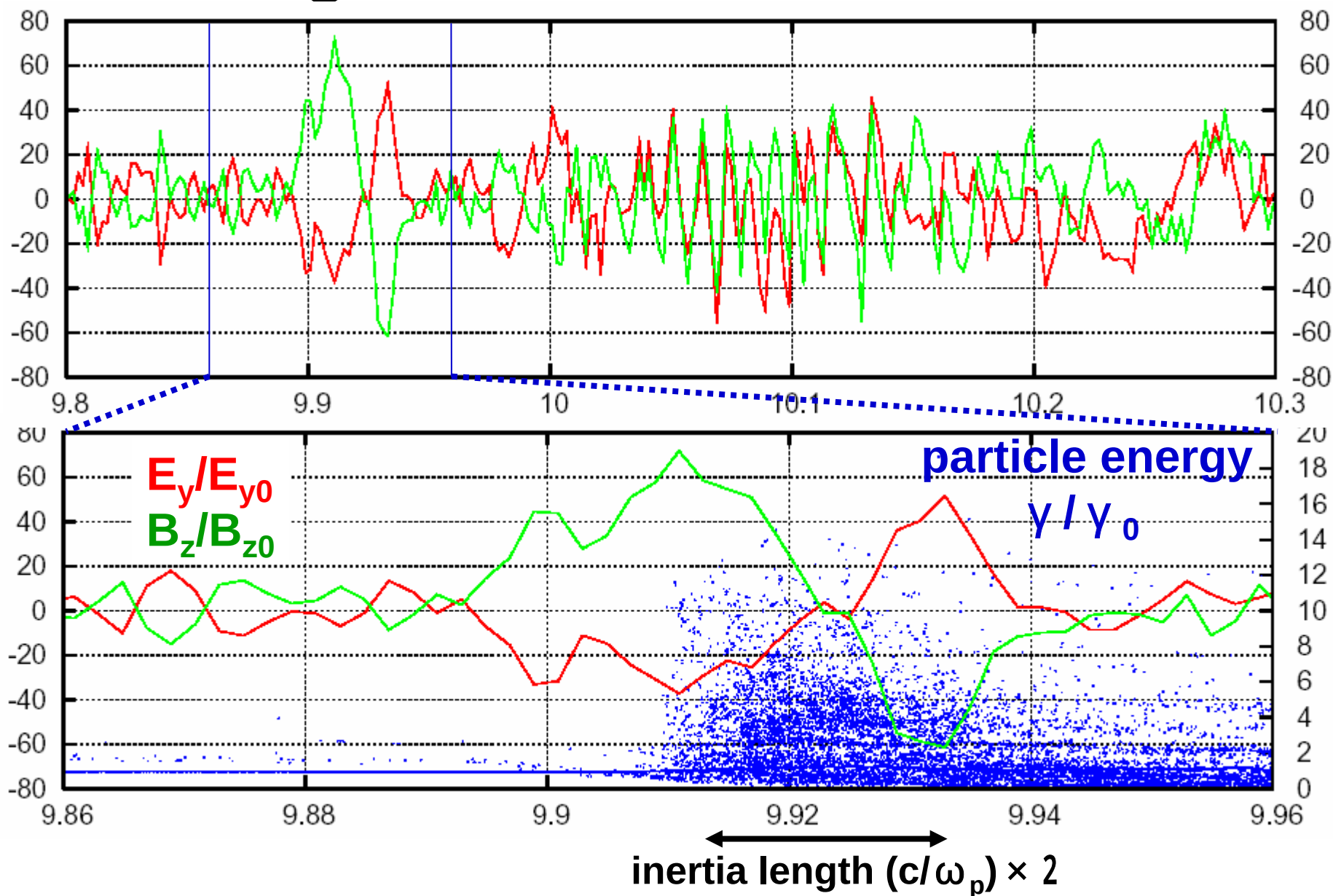


- The injected particles go through the shock front and some of them return to the front.
- Trapping and acceleration occur at the shock front, not the whole shock transition region.

Electromagnetic fields around the trapped particle



Enlargement of the shock front



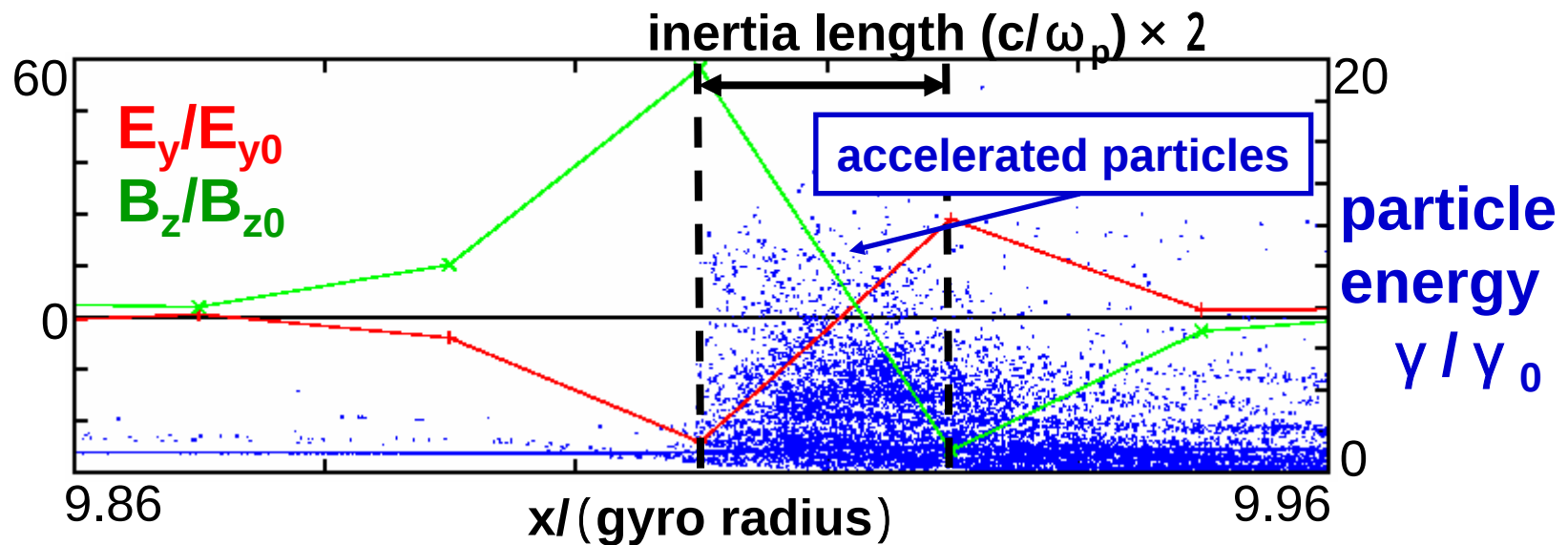
The structure of the shock front (in downstream frame)

- The acceleration by E_y is unclear, because E_y has a large positive and negative amplitude around the MNS.
- The MNS propagate upstream with velocity $\sim c/2$, so we should discuss in the MNS frame (= shock frame).

steady state
Maxwell eqs

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{4\pi}{c} J_y, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0$$

evaluate E_y

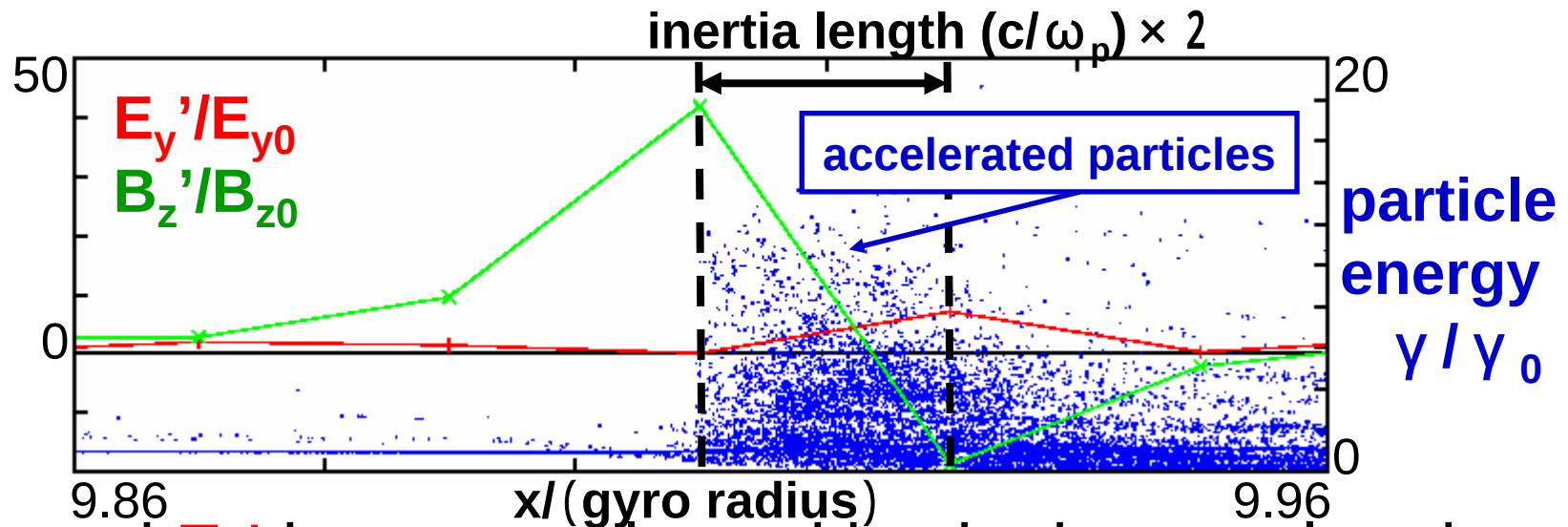


The structure of shock front (in shock frame)

the Lorentz transformation of the shock frame

$$E'_y = \gamma_s (E_y - \beta_s B_z), \quad B'_z = \gamma_s (B_z - \beta_s E_y)$$

shock velocity $\beta_s = -1/2$, $\gamma_s = (1 - \beta_s^2)^{-1/2} \approx 1.15$



- Averaged E'_y is constantly positive in the acceleration region, $E'_y/E_{y0} \sim 0 - 7$.
- The averaged E'_y which accelerate particles in this frame $E'_y/E_{y0} \sim 2$ consistent with the above estimate.

Summary

- The acceleration phenomenon is characterized by σ which is defined as the ratio of the magnetic field energy density and the particle kinetic energy density.
- The additional magnetic field induced by gyrating particles overcome the initial magnetic field when σ is small, and then a magnetic neutral sheet is generated. Therefore this acceleration process works effectively in the Crab nebula, $\sigma \sim 10^{-3}$.
- Some particles are accelerated by motional electric field E_y while the magnetic neutral sheet traps them.
- The magnetic neutral sheet is kept stationary at the shock front. We confirmed that the averaged E_y is positive in the shock frame and that the particle acceleration occurs at the shock frame.

To go further

- The condition of trapping and detrapping for accelerated particles
 - Spectrum form (maximum energy, power-law or thermal)
- 2-D simulation
 - Weibel instability
- Magnetic field consisting of opposing two regions (sector structure)
 - coupling with reconnection, etc.