

2-D Relativistic Resistive MHD Code

渡邊 直之、横山 央明
(東大・理)

目次

- 序章
- 相対論Resistiveコードについて
- テスト計算
- 相対論磁気リコネクションのシミュレーション

はじめに

- 磁気リコネクションは高エネルギーの荷電粒子を加速する素過程として重要だと認識されている。
- 近年、高エネルギー天体現象においても磁気リコネクションの重要性が高まってきている。
- パルサーでは高エネルギー源や σ 問題の解決策として提案されており、観測されている AGN の急激な変化の要因としても磁気リコネクションが提唱されている。



相対論磁気リコネクション研究の現状（理論）

Blackman & Field (1994)

相対論的なSweet-Parker型、及びPetchek型の定常リコネクションモデルを提唱。ローレンツ収縮によるリコネクションレートの増大とフロー速度の光速への接近を主張

Lyutikov & Uzdensky (2003)

相対論的なSweet-Parker型についてBlackman & Fieldの主張を実証

Lyubarsky (2005)

Blackman & Fieldの主張であるリコネクションレートの増大はなされないと結論付けている

相対論磁気リコネクション研究の現状（計算）

- 相対論的磁気リコネクションを調べる上で数値シミュレーションは有用な手法である。
- PIC法によるシミュレーションは Zenitani & Hoshino (2001) や Jaroschek, et al. (2004) が挙げられる。
- 相対論的MHDシミュレーションを行うためには磁気拡散の効果を検討する必要がある。
- 過去のRMHDシミュレーションの研究では磁気拡散の効果は含まれていない (e.g., Koide et al.)。
- 本研究では電気抵抗の効果を含んだ相対論的MHD (R^2 MHD) コードを新たに開発した。

基本方程式

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \nabla \cdot (D\mathbf{v}) = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(P + \frac{B^2 + E^2}{8\pi} \right) \mathbf{I} + \gamma^2 (e + P) \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}}{c^2} - \frac{\mathbf{B}\mathbf{B} + \mathbf{E}\mathbf{E}}{4\pi} \right] = 0$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\{ \gamma^2 (e + P) - Dc^2 \} \mathbf{v} + \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right] = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + c \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - c \nabla \times \mathbf{B} = -4\pi \mathbf{j}$$

$$D = \gamma \rho,$$

$$\mathbf{R} = \gamma^2 (e + P) \frac{\mathbf{v}}{c^2} + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi c},$$

$$\epsilon = \gamma^2 (e + P) - P - Dc^2 + \frac{B^2 + E^2}{8\pi}$$

ρ : 密度

P : ガス圧

$\mathbf{v}$: 速度, c : 光速

γ : ローレンツ因子

$$e \equiv \rho c^2 + \frac{P}{\Gamma - 1}$$

Γ : 比熱比

$\mathbf{B}$: 磁場

$\mathbf{E}$: 電場

$\mathbf{j}$: 電流密度

オームの法則

相対論的な電子陽電子プラズマに対するオームの法則は次のように表される (e.g., Blackman & Field (1993), Lyutikov & Uzdensky (2003))

$$\gamma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) = \eta \mathbf{j} + \frac{\gamma^2}{c^2} (\mathbf{j} \cdot \mathbf{v} - \rho c^2) \mathbf{v}$$

右辺第2項はconvection currentを表すが、縦磁場(磁場のz成分)が無く、初期の速度が0であればこの項は無視できる。

理想RMHDコードとの違い

これまでの理想RMHDシミュレーションでは電場の時間発展は追わず、他の変数の時間ステップの計算を行ってから求めていたが、今回の計算では電場にも時間ステップの計算を適応した。

MHDシミュレーションでは時間ステップの計算後に他の物理量を求めることになるが、相対論的な場合では解析的に求めることができないため iteration が必要となる。

理想RMHDではKoide et al. (1999) による2変数のNewton-Raphson methodやDel Zanna et al. (2002) による3次方程式を用いて1変数にしたNewton-Raphson method などがあるが、本研究には適応できないため、新たな方法の開発が必要である。

計算方法

1. 基本方程式の時間発展を修正Lax-Wendroff法を用いて解き、 D, R, ε, B, E の値を得る。
2. ローレンツ因子 γ は以下の方程式を解いて求める：

$$\left[\frac{c\{\Gamma(\gamma^2 - 1) + 1\}}{\Gamma(Dc^2 + \epsilon - P_m)\gamma^2 - (\Gamma - 1)\gamma Dc^2} \right]^2 |R - S|^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2}$$
$$S = E \times B / (4\pi c) \quad P_m = (B^2 + E^2) / (8\pi)$$

本研究ではNewton-Raphson法を用いてこの方程式を解いている。

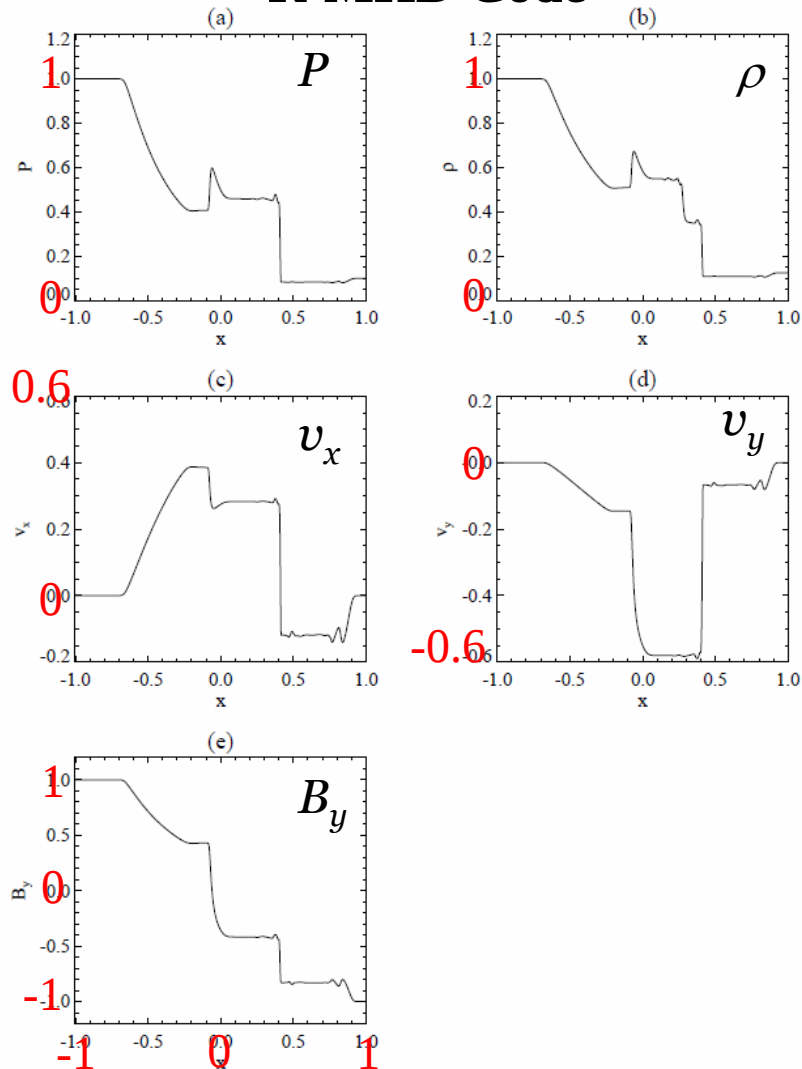
3. 求めた γ から ρ, P, v, j の値が得られる。

コードのテスト計算

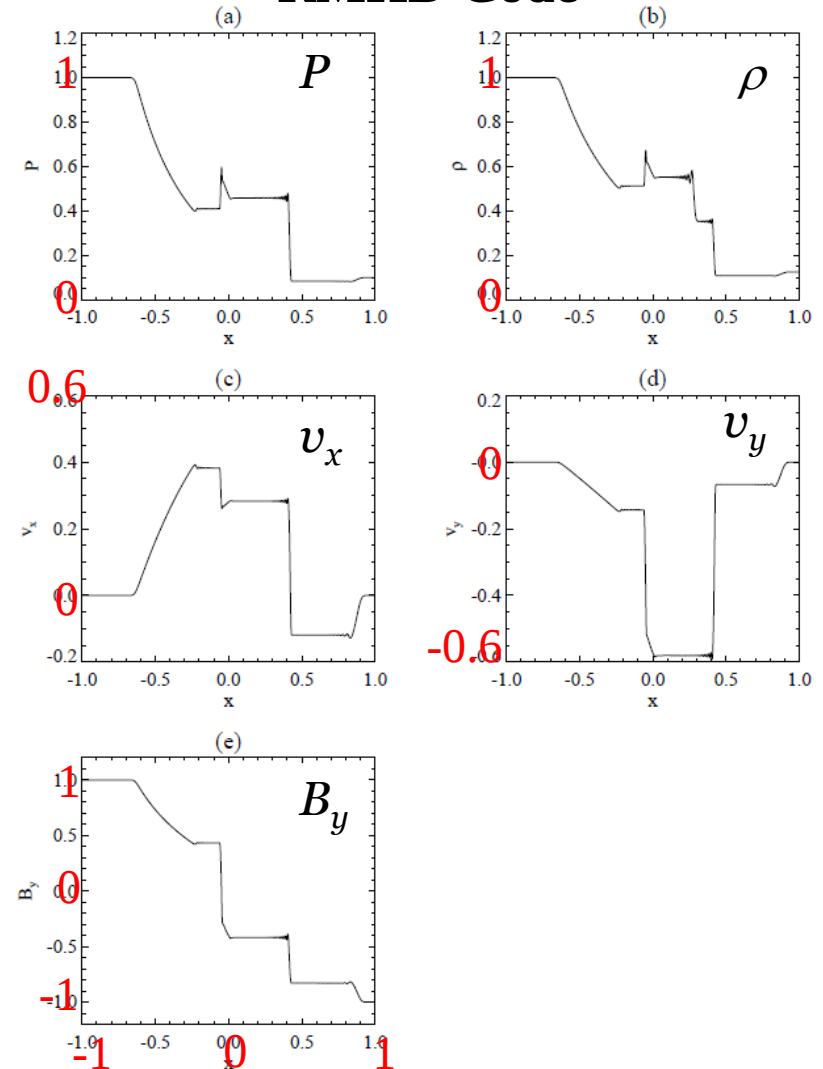
- 理想RMHDコードのテストである、Komissarov (1999)、De Villiers & Hawley (2003) に挙げられている問題のうち、convection current項を無視できるもの(衝撃波管問題)を計算し、理想RMHDコードの結果と比較。R²MHDでは η を0にできないため、計算領域全域に $\eta=10^{-3}$ という一様抵抗を与えてある。
- 非相対論的な条件を与え、非相対論Resistive MHDコードの計算結果と比較
- コードについて行ったテスト問題は1次元のものであるため、テスト自体は x, y 方向、及び斜め方向のそれぞれについて計算を行っている(今回の結果は x 方向のみ)

衝撃波管問題 (Brio & Wu '88 - rel.) (cf. De Villiers & Hawley '03)

R²MHD Code



RMHD Code



衝撃波管問題 (Komissarov '99 - shock tube II)

Left State

$$\mathbf{v} = (0.0, 0.0, 0.0)$$

$$\mathbf{B} = \sqrt{4\pi}(0.0, 20.0, 0.0)$$

$$P = 30.0, \rho = 1.0$$

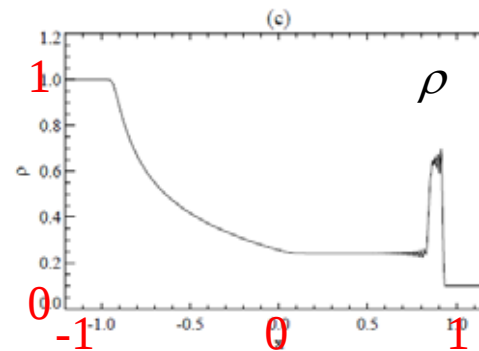
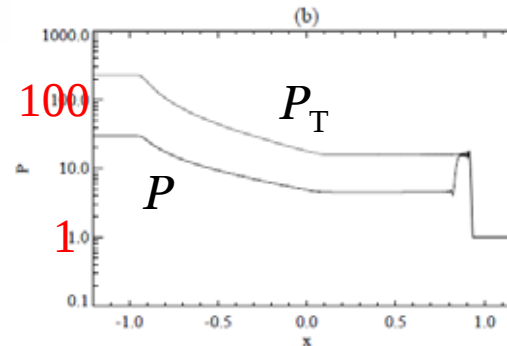
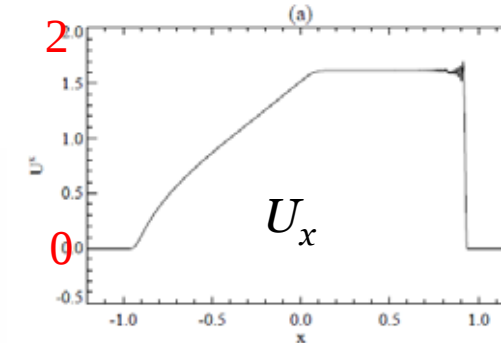
Right State

$$\mathbf{v} = (0.0, 0.0, 0.0)$$

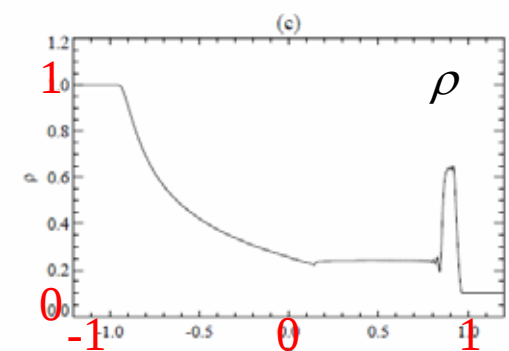
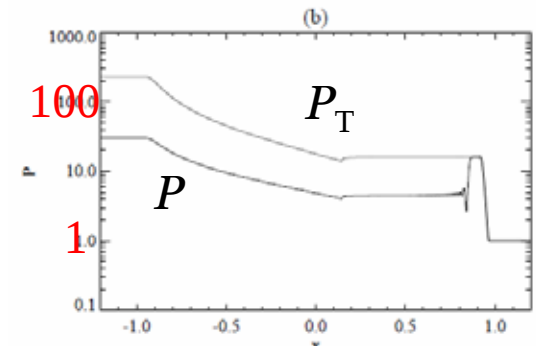
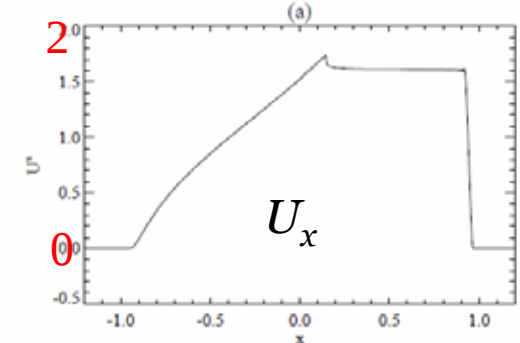
$$\mathbf{B} = \sqrt{4\pi}(0.0, 0.0, 0.0)$$

$$P = 1.0, \rho = 1.0$$

R²MHD Code



RMHD Code



磁気拡散テスト - 初期条件

$$B_x = 0$$

$$B_y = B_0 \tanh(2x)$$

$$P = P_0 \left[1 + \frac{\cosh^{-2}(2x)}{\beta} \right]$$

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \frac{\cosh^{-2}(2x)}{\beta} \right]$$

$$v_x = v_y = 0$$

$$E_z = \frac{\eta}{4\pi} \frac{\partial B_y}{\partial x}$$

但し、

$$B_0 = \sqrt{\frac{8\pi P_0}{\beta}}$$

$$\rho_0 = 10^4$$

$$P_0 = 1/\Gamma$$

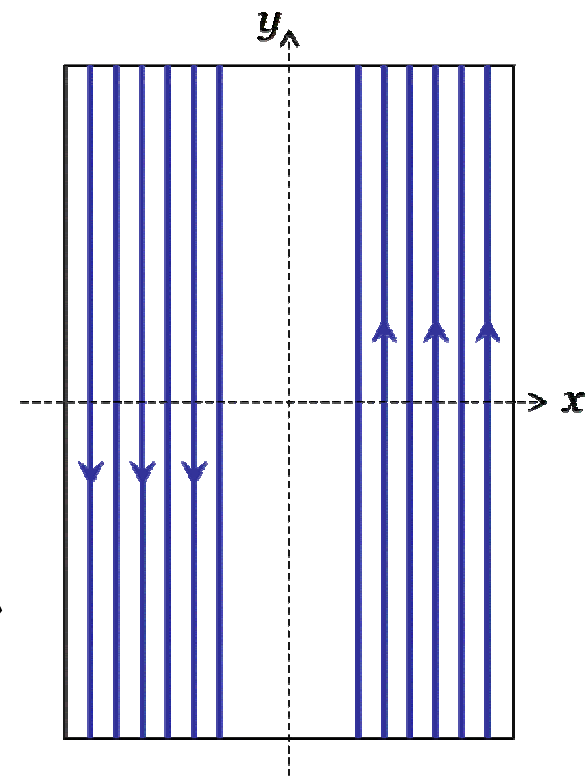
$$\eta = 5 \times 10^{-3}$$

$$t_{\text{final}} = 50.0$$

であり、温度 T を、

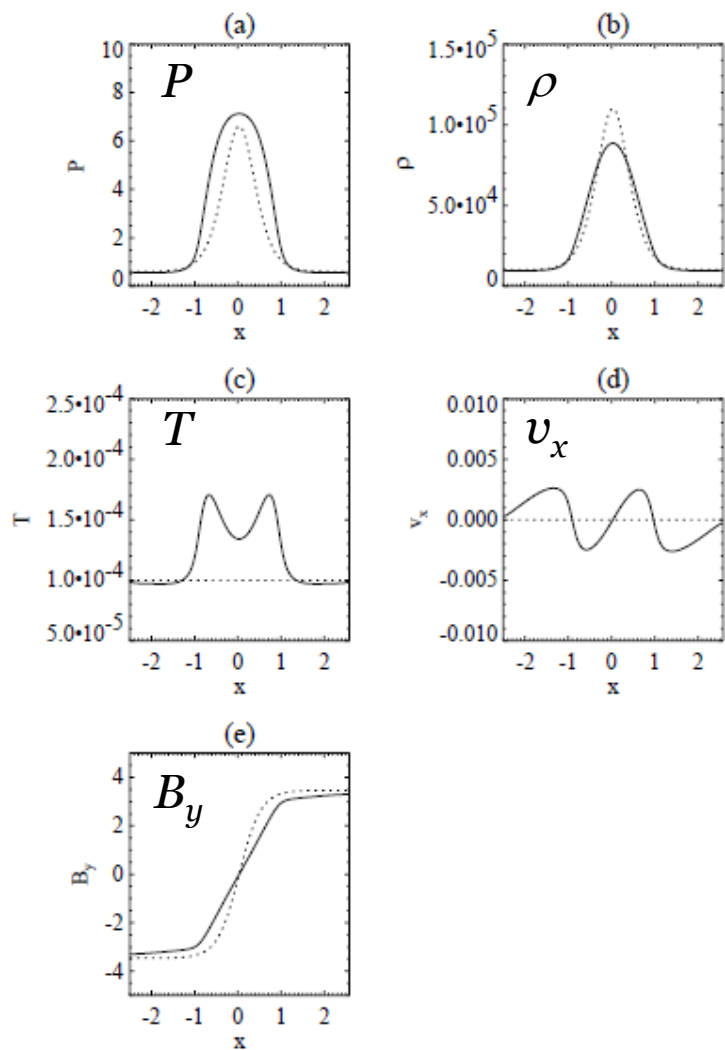
$$T = \Gamma P / \rho$$

と定義している。

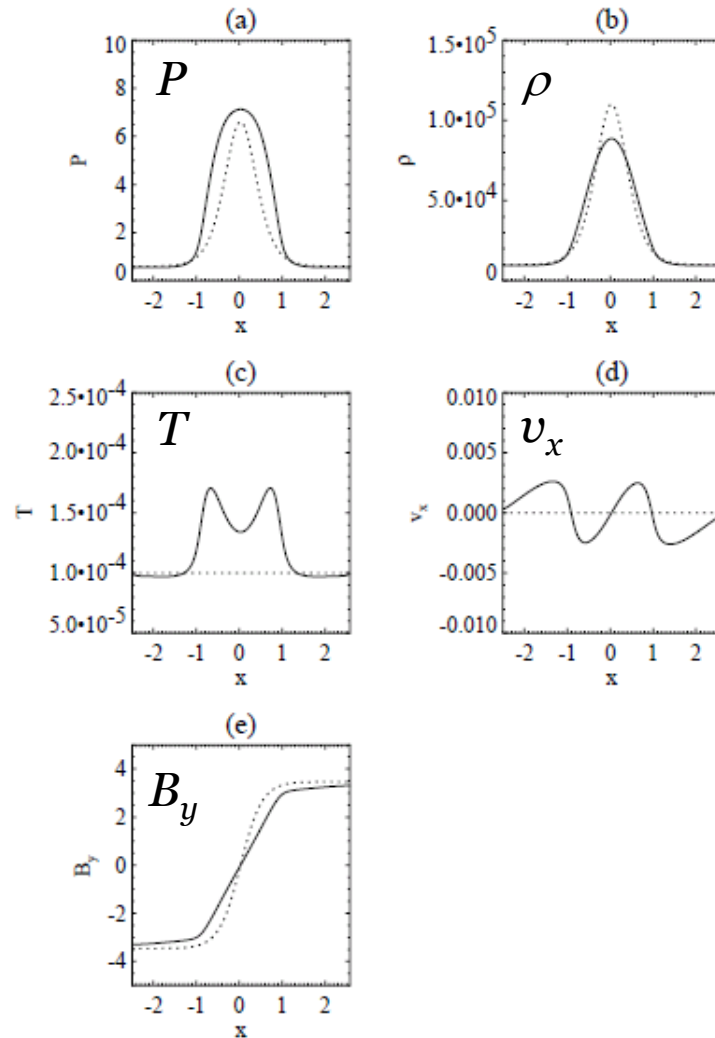


磁気拡散問題 - 結果

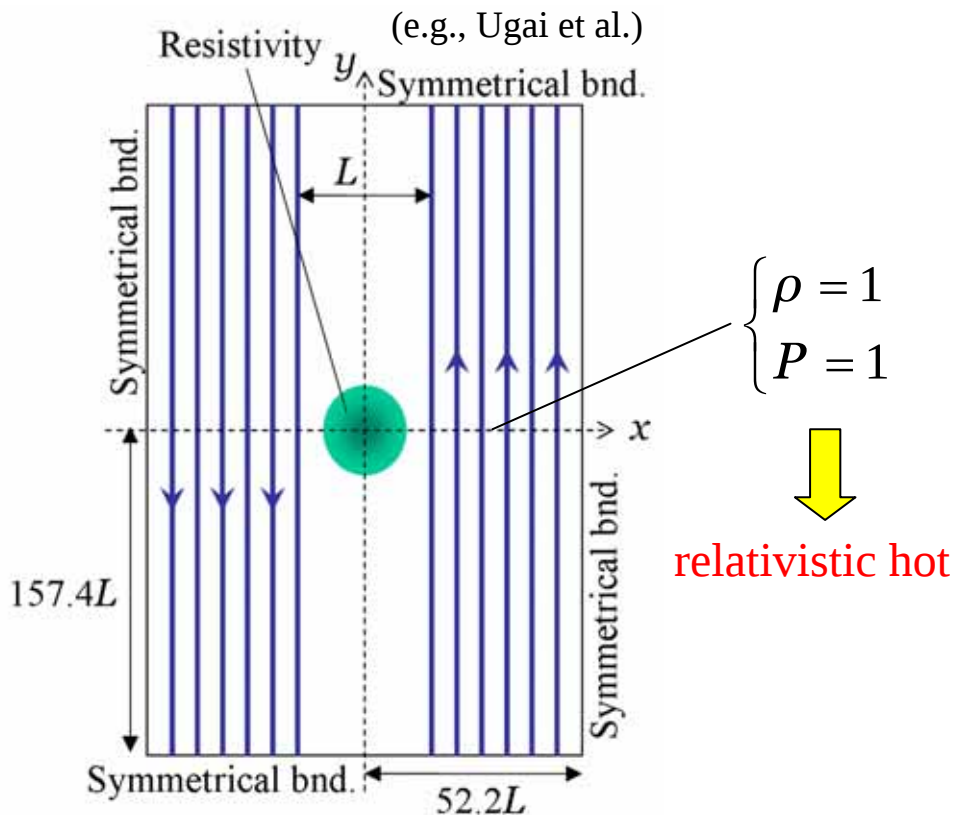
Relativistic Code



Non-Relativistic Code



計算モデル



矢印付きの青い直線は磁力線

$$\begin{cases} \Delta x_{\min} = 0.02 \\ \Delta y_{\min} = 0.05 \end{cases}$$

変数	物理量	単位
x, y, z	長さ	L
v	速度	c
t	時間	L/c
ρ	密度	ρ_0
P	圧力	$\rho_0 c^2$
B	磁場	$(\rho_0 c^2)^{1/2}$
E	電場	$(\rho_0 c^2)^{1/2}$
η	抵抗	Lc

初期条件と異常抵抗モデル

$$B_x = 0$$

$$B_y = B_0 \tanh(2x), B_0 = \sqrt{\frac{8\pi}{\beta}}$$

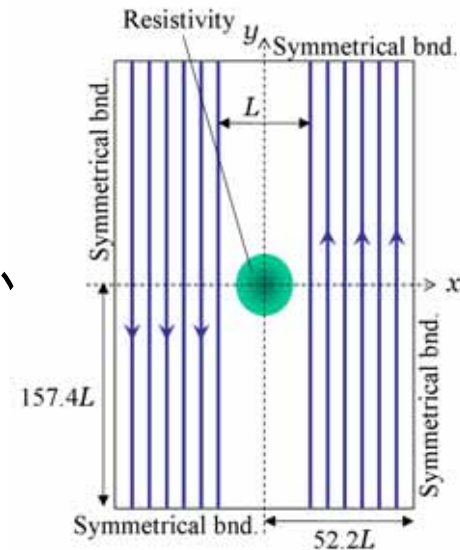
$$P = 1 + \frac{\cosh^{-2}(2x)}{\beta}$$

$$\rho = 1 + \frac{\cosh^{-2}(2x)}{\beta}$$

$$v_x = v_y = 0$$

$$E_z = \frac{\eta}{4\pi} \frac{\partial B_y}{\partial x}$$

β をパラメータとして
数例の計算を行う。
代表的な計算例では、
 $\beta = 0.1$
としてある。

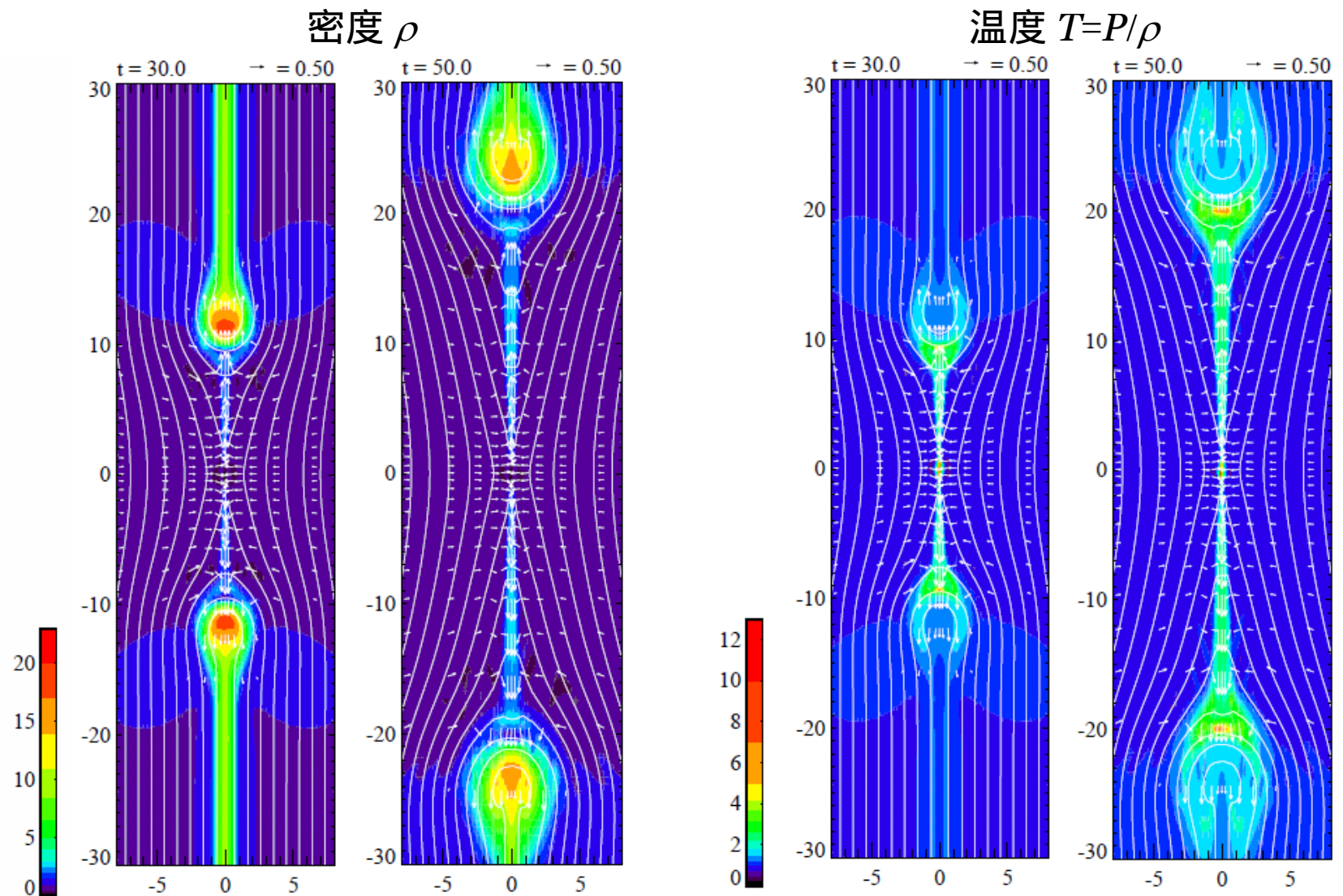


$$\eta = \begin{cases} \eta_b + \eta_{i0} \left[2 \left(\frac{r}{r_\eta} \right)^3 - 3 \left(\frac{r}{r_\eta} \right)^2 + 1 \right] & \text{for } r < r_\eta \\ \eta_b & \text{for } r > r_\eta \end{cases}$$

$\eta_b = 0.005$: 系全体の電気抵抗, $\eta_{i0} = 0.3$: 振幅

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r_\eta = 0.8$: 異常抵抗領域

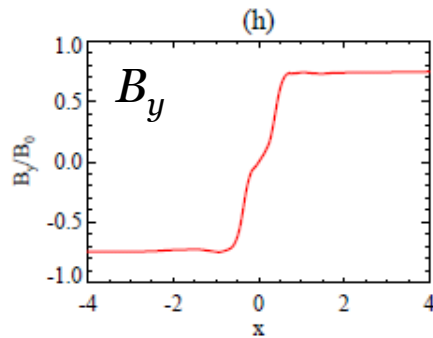
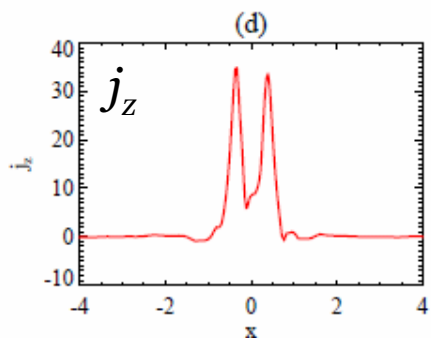
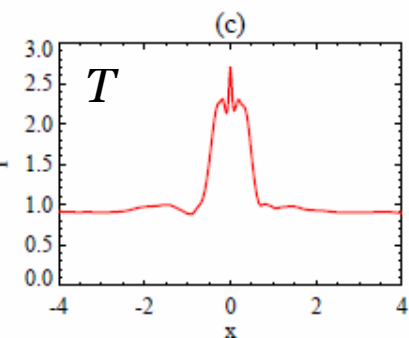
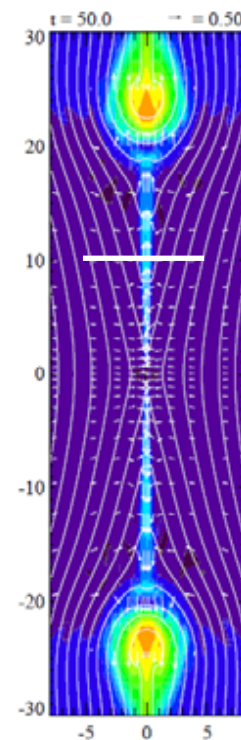
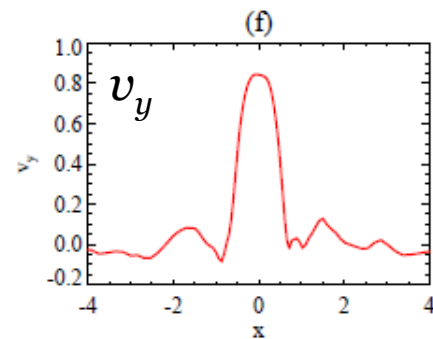
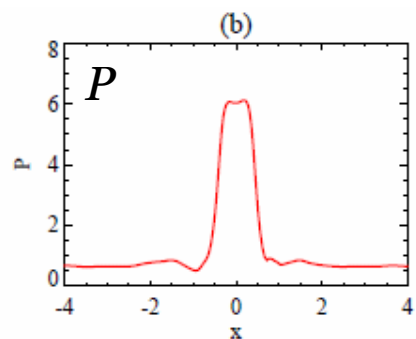
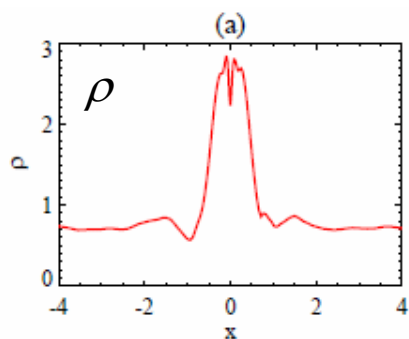
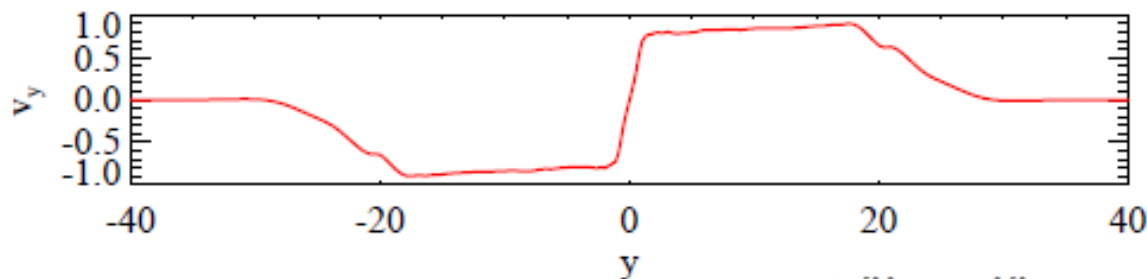
代表的な計算例 ($\beta = 0.1$) (1)



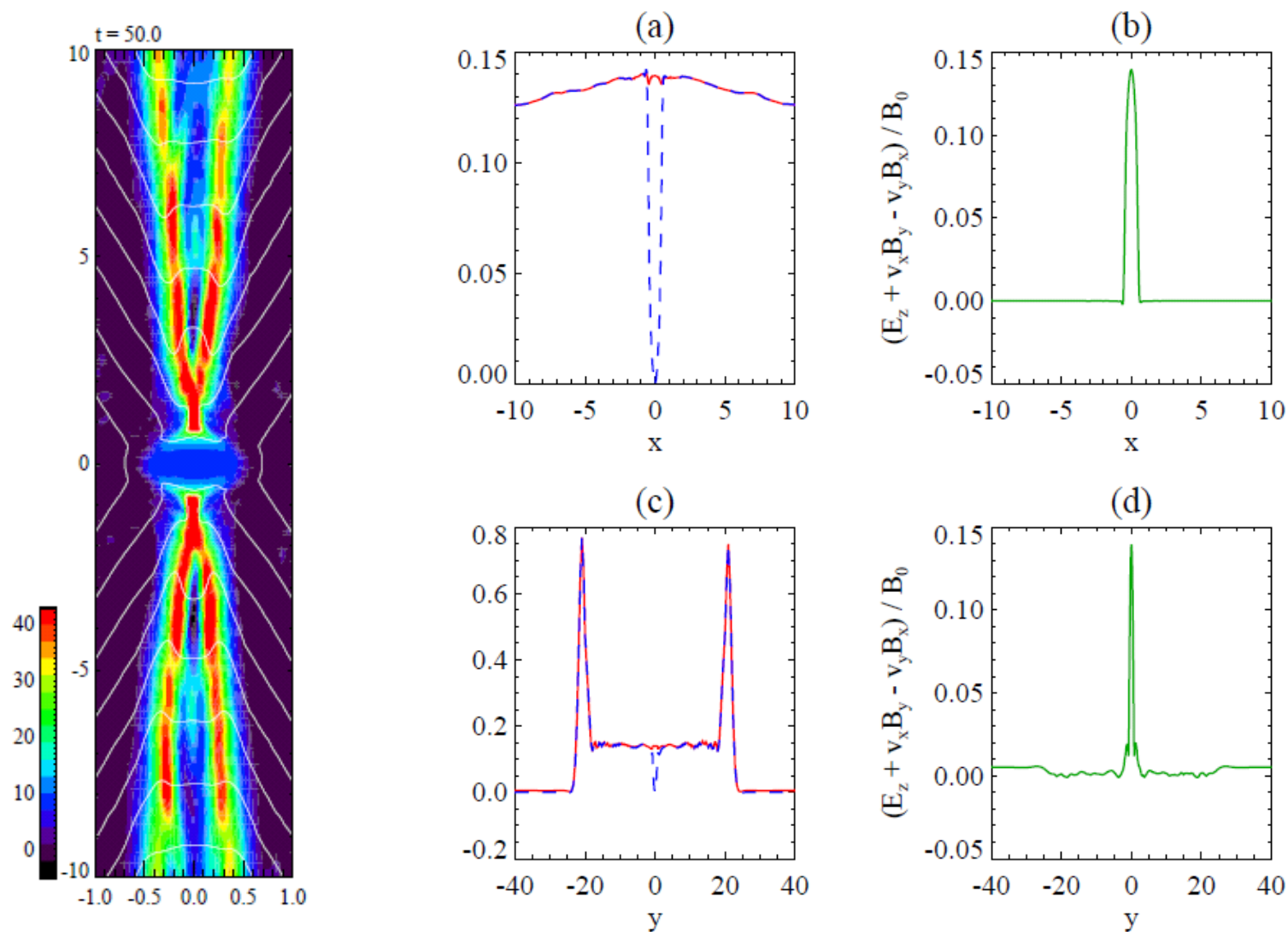
代表的な計算例 ($\beta = 0.1$) (2)

右図: $t = 50$ における y 軸上の v_y の1次元分布。

下図: $t = 50$, $y = 10$ における x 軸と水平な線上の種々の物理量の1次元分布。



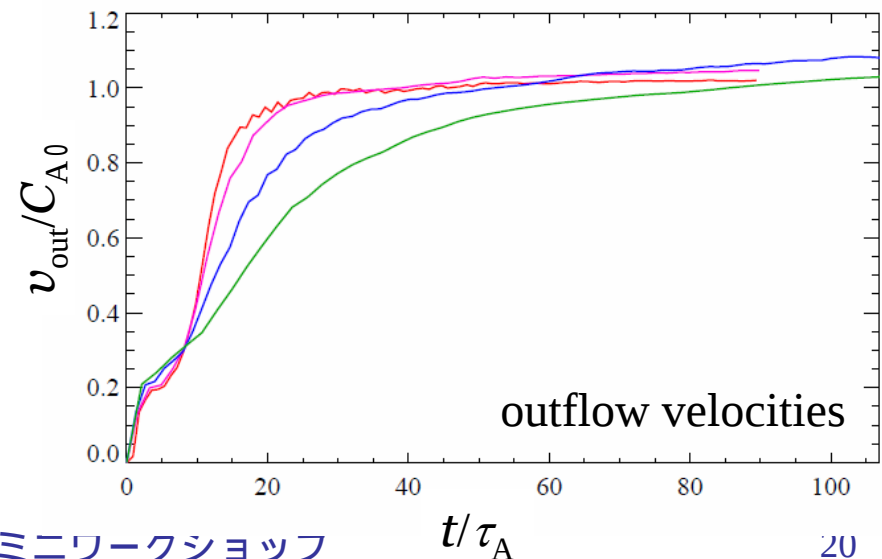
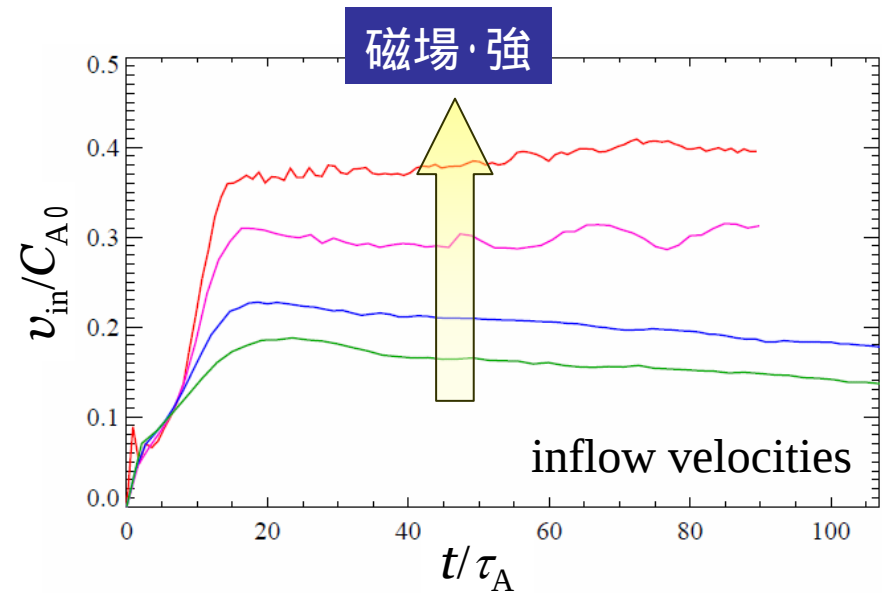
代表的な計算例 - 電流の2次元分布と 磁場凍結



プラズマ β に対する依存性

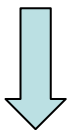
インフロー (上段)、及びアウトフロー (下段) 速度の時間発展。線の色は初期のプラズマ β を以下の値に設定したときの計算例を示している。

- $\beta = 0.1$
($C_{A0}=0.894$)
- $\beta = 0.2$
($C_{A0}=0.816$)
- $\beta = 0.5$
($C_{A0}=0.667$)
- $\beta = 1.0$
($C_{A0}=0.535$)

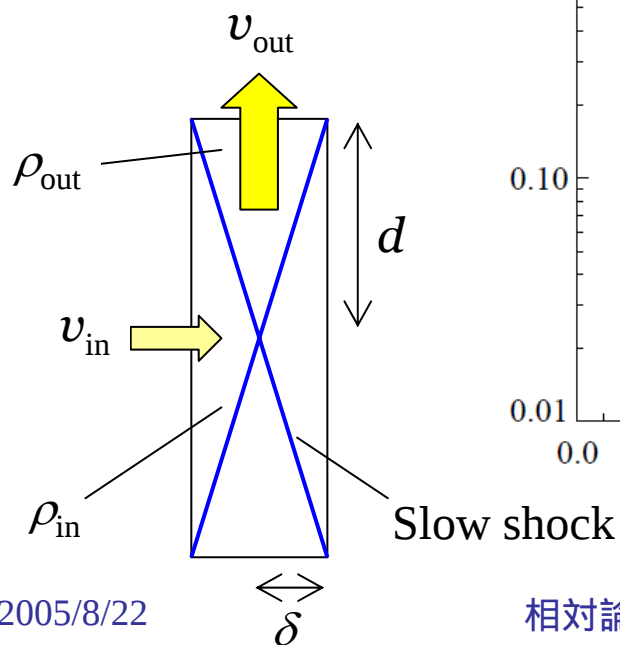


リコネクションレート

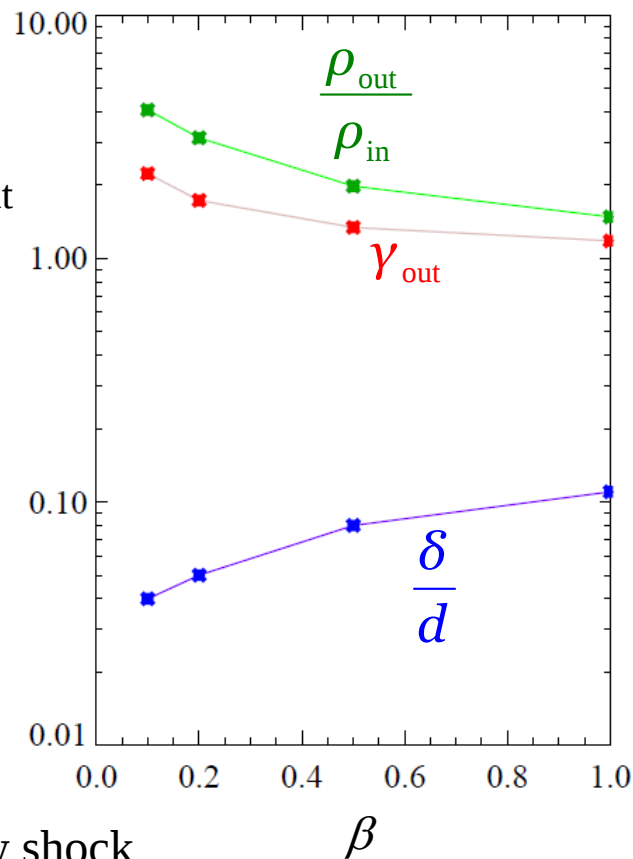
$$\nabla \cdot (D\mathbf{v}) = 0$$



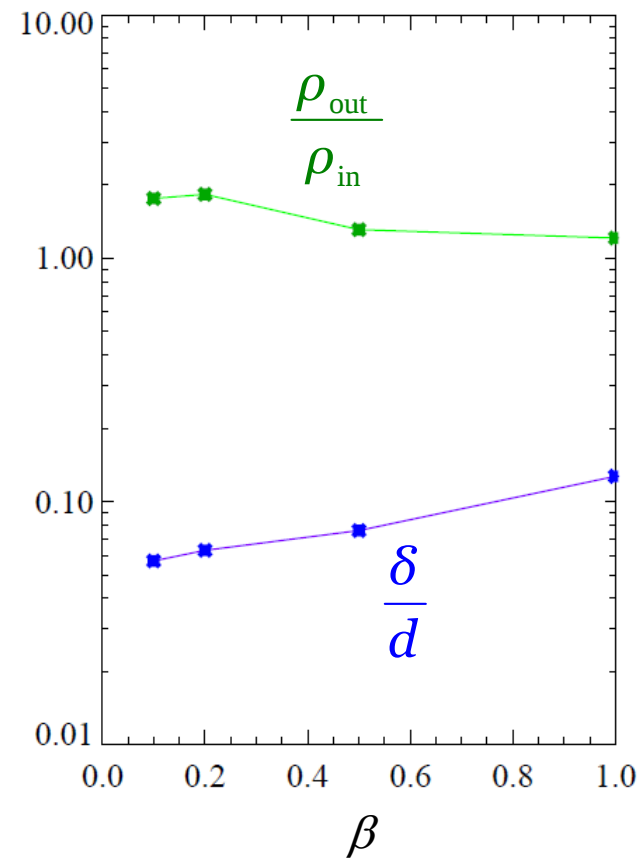
$$\frac{v_{\text{in}}}{v_{\text{out}}} \approx \frac{\delta}{d} \frac{\rho_{\text{out}}}{\rho_{\text{in}}} \gamma_{\text{out}}$$



relativistic



non-relativistic



まとめ

- 本研究では磁気拡散効果を含んだ相対論的MHD (R^2 MHD) コードを開発し、代表的な計算例とパラメータ依存性を調べた。
- 相対論的な効果によりインフロー速度が増大した ($\sim 0.4C_{A0}$)。
- インフローとアウトフロー領域の境界でslow shockを確認することができた。
- アウトフロー速度はインフロー領域のAlfvén速度 C_{A0} に近付いた。 C_{A0} が大きくなるとリコネクションレートも増加した。
- Blackman & Field (1994)が示唆していたように、ローレンツ収縮はリコネクションレートを強める上で効果的な役割を担っていると考えられる。

今後の課題

- 現時点で完成しているコードではローレンツ因子 γ が大きくなると計算ができなくため、ultra-relativisticな状況でも適応できるよう、コードを改良する必要がある。具体的には時間発展計算に使用しているLax-Wendroff法を例えばHLL法のような他のスキームに変更するという方法が考えられる。
- 今回開発したコードではconvection currentの効果を無視できる状況にしか対応できないため、convection current項を含んだコードの開発が望まれる。
- 今回のシミュレーションは単純な長方形内部でのシミュレーションであるため、完成したコードをさらに改良し、実際の天体現象に適応させる。