



2012年8月6日(月)-10日(金) 千葉大学アカデミックリンクセンター
宇宙磁気流体・プラズマシミュレーションサマースクール

HLLD法に基づく 磁気流体方程式の差分解法

三好 隆博

広島大学大学院理学研究科



安心してHLLD法をお使いいただくために. . .



内容

□ はじめに

- 双曲型保存則
- MHD方程式

□ 近似リーマン解法

- HLL近似リーマン解法
- HLLD近似リーマン解法

□ 近似リーマン解法の多次元化

- 磁場発散の数値処理

□ HLLD近似リーマン解法の展開



はじめに

□ 宇宙プラズマにおける流体现象の特徴

- 保存性、非線形性、圧縮性、多次元性

□ 流れの支配方程式

- 線形移流方程式
- Burgers方程式
- Euler方程式
- MHD方程式
-

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(au) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{U} = 0 \Leftrightarrow \dots$$



双曲型保存則

□ 1次元システム方程式の保存則

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0$$

\mathbf{U} : 保存変数ベクトル
 \mathbf{F} : 流束ベクトル

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0, \quad A \equiv \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}$$

$$\mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{A} \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{A}$$

\mathbf{W} : 特性変数ベクトル

\mathbf{A} : ヤコビ行列

\mathbf{A} : 固有値行列 \Rightarrow 独立の実固有値

\mathbf{R} : 右固有ベクトル

双曲型方程式

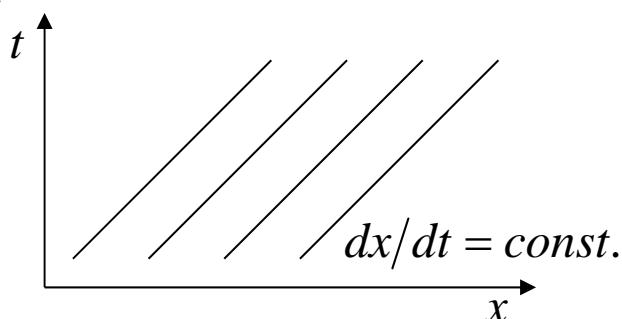
双曲型保存則

□ 連立移流方程式

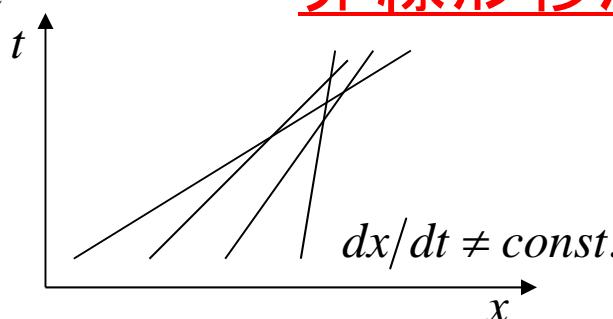
$$\frac{\partial W}{\partial t} + A \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad dW \equiv R^{-1} dU$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda_k = \text{const.}$$



$$\lambda_k \neq \text{const.} \quad \text{非線形移流方程式}$$





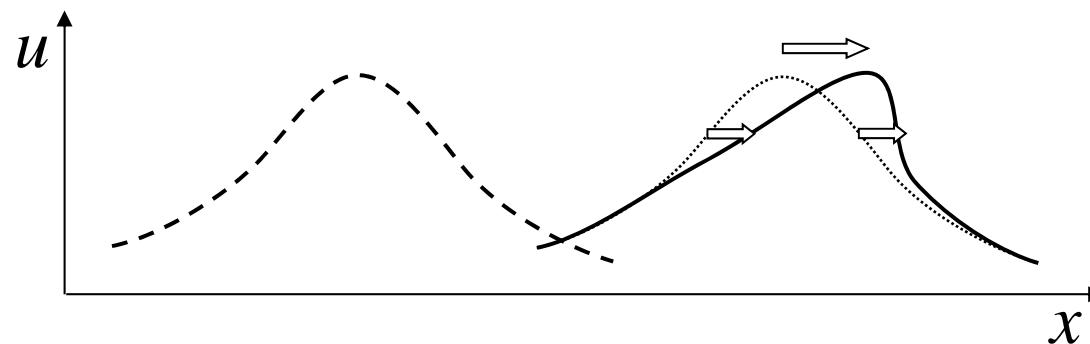
双曲型保存則

□ 非線形移流方程式

■ Burgers方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad f = \frac{u^2}{2}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = u(x - u(x,0)t, 0)$$



- 非線形双曲型保存則
- 非線形結合で高次モード生成
- 有限時間で**不連續解**を形成



双曲型保存則

□ 弱解(weak solution)

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, t) \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt \\ &= - \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(U \frac{\partial \phi}{\partial t} + F \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, 0) U(x, 0) dx = 0 \end{aligned}$$

$\phi(x, t)$: 無限回微分可能かつ無限遠で0の任意関数

- 不連續解を含むより一般的な解
- 解の一意性消失
- 物理的な解はエントロピー条件を満足



双曲型保存則

□ 双曲型保存則の数値解法

■ 保存型解法

□ Lax-Wendroffの定理[1960]

- 数値解が収束すれば、その解は保存則の弱解に収束

□ Hartenのエントロピー条件[1980]

- 数値解がエントロピー条件を満足し、収束すれば、その解は保存則の物理解に収束

■ 非保存型解法

□ Hou-LeFlochの定理[1994]

- 数値解が収束したとしても、衝撃波を含むその解は非物理的解に収束

$$U_t + \nabla \cdot F = 0$$

$$U_t + (A \cdot \nabla) U = 0$$

双曲型保存則

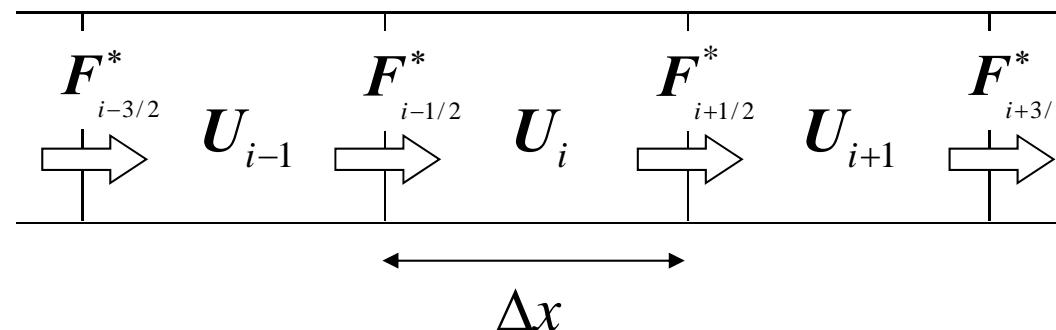
□ 保存型解法

- 有限差分法
- 有限要素法
- 有限体積法

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U} dx + \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_{i+1/2}, t)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_{i-1/2}, t)) = 0$$

$$\Delta x \frac{\Delta \mathbf{U}_i}{\Delta t} + \mathbf{F}_{i+1/2}^* - \mathbf{F}_{i-1/2}^* = 0$$

$\mathbf{F}_{i+1/2}^*$: 数值流束





MHD方程式

□ MHD方程式(保存形式)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \\ \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \left(p + \frac{B^2}{2} \right) \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B} \right] = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0, \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{\gamma p}{\gamma - 1} \right) \mathbf{v} + \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right] = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (\text{ideal}), \\ p = (\gamma - 1) \left(e - \frac{\rho v^2}{2} - \frac{B^2}{2} \right), \end{array} \right.$$



MHD方程式

□ 1次元MHD方程式

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad B_x = \text{const.},$$

$$\mathbf{U} = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, B_y, B_z, e]^T,$$

$$\mathbf{F} = [\rho u, \rho uu + p_T, \rho vu - B_x B_y, \rho wu - B_x B_z,$$

$$B_y u - B_x v, B_z u - B_x w, (e + p_T)u - B_x(vB_y + wB_z)]^T,$$

$$p = (\gamma - 1)(e - \rho(u^2 + v^2 + w^2)/2 + (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)/2),$$

$$p_T = p + (B_y^2 + B_z^2 - B_x^2)/2,$$

$$\lambda_1 = u - c_f, \lambda_2 = u - c_a, \lambda_3 = u - c_s, \lambda_4 = u,$$

$$\lambda_5 = u + c_s, \lambda_6 = u + c_a, \lambda_7 = u + c_f$$



MHD方程式

□ MHD方程式の波の性質

■ 特性波

$$c_a^2 \equiv B_x^2/\rho, c_{f,s}^2 \equiv \left(\gamma p + B^2 \pm \sqrt{(\gamma p + B^2)^2 - 4\gamma p B_x^2} \right) / 2\rho$$

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \lambda_5 \leq \lambda_6 \leq \lambda_7$$

■ Rankine-Hugoniotの関係式

$$[F] = 0, [u] \neq 0 \quad (\text{速進衝擊波、遅進衝擊波})$$

$$[\rho] = [p] = [B_y^2 + B_z^2] = 0, \pm \sqrt{\rho} [v] = [B_y], \pm \sqrt{\rho} [w] = [B_z]$$

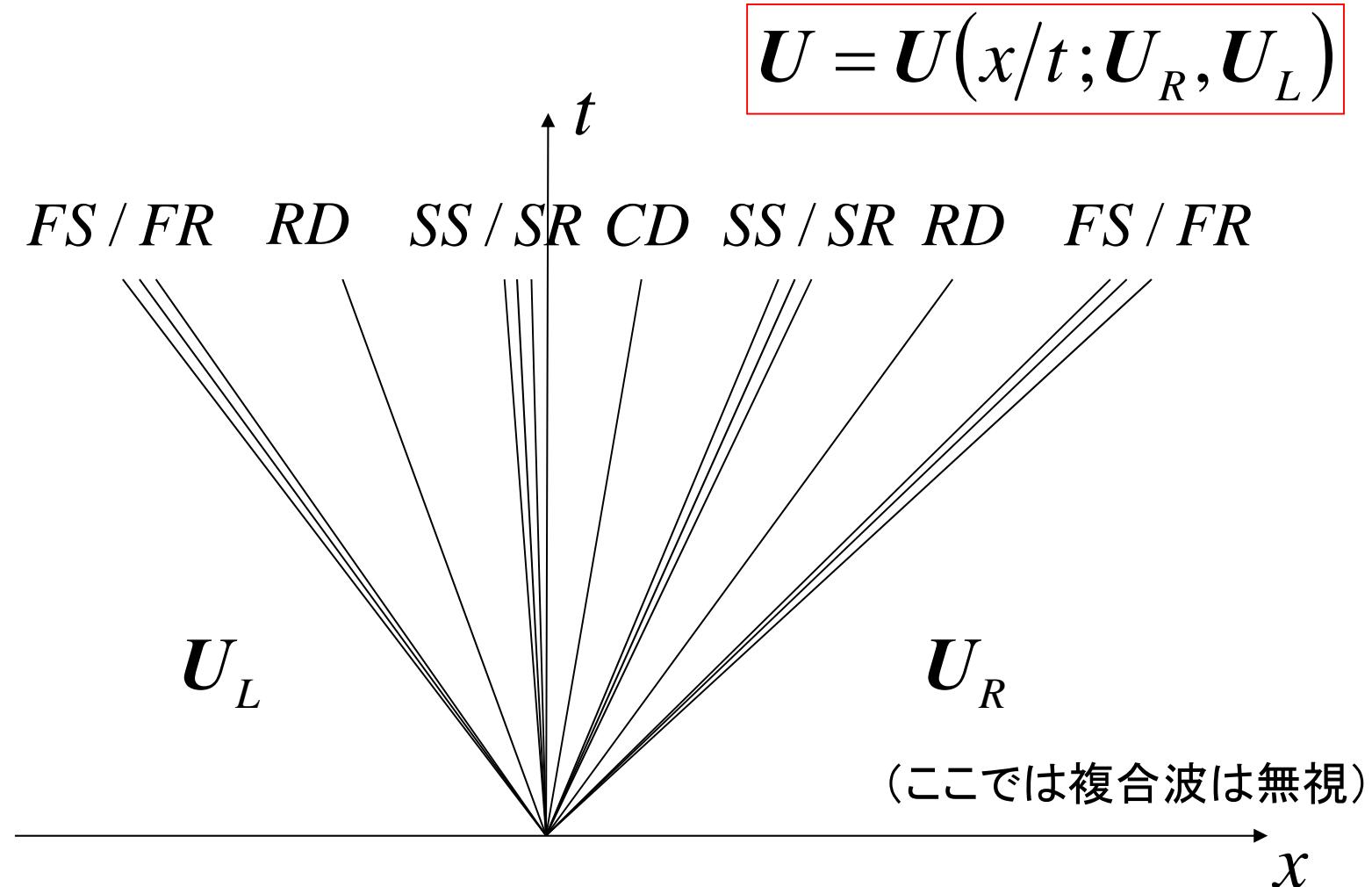
(回転不連続)

$$[v] = [w] = [B_y] = [B_z] = [p] = 0, B_x \neq 0 \quad (\text{接触不連続})$$

$$[p + (B_y^2 + B_z^2)/2] = 0, B_x = 0 \quad (\text{接線不連続})$$

はじめに

□ MHD衝撃波管問題(リーマン問題)

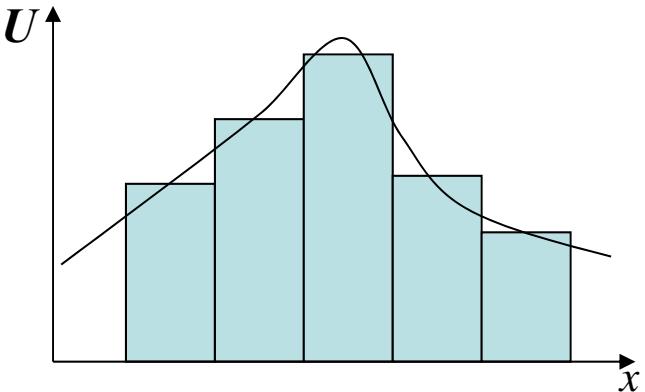


近似リーマン解法

□ 近似リーマン解法(Godunov型解法)

$$\int \int \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt = \oint (U dx - F dt) = 0$$

■ 物理量分布を一定と仮定

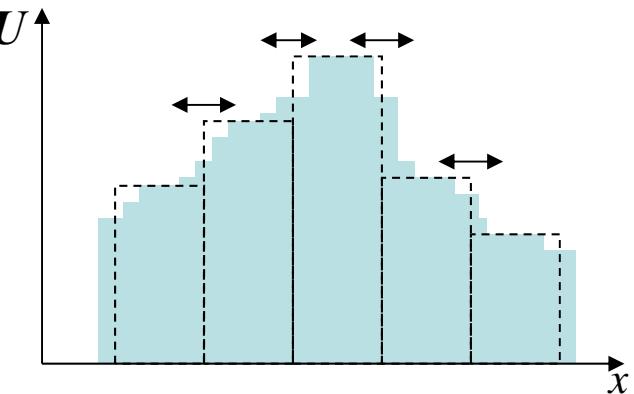


近似リーマン解法

□ 近似リーマン解法(Godunov型解法)

$$\int \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt = \oint (U dx - F dt) = 0$$

- 物理量分布を一定と仮定
- リーマン問題厳密解・近似解

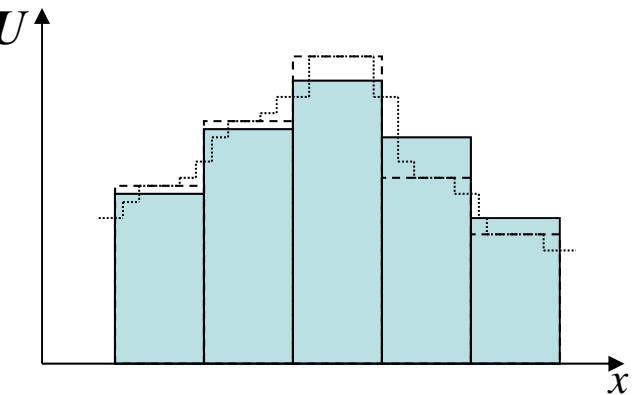


近似リーマン解法

□ 近似リーマン解法(Godunov型解法)

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt = \oint (U dx - F dt) = 0$$

- 物理量分布を一定と仮定
- リーマン問題厳密解・近似解
- 厳密解・近似解の空間積分

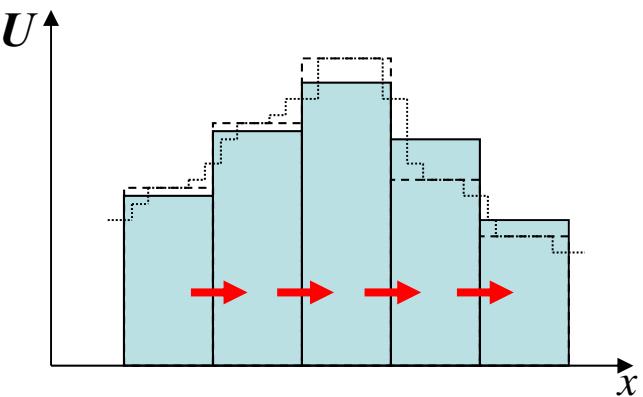


近似リーマン解法

□ 近似リーマン解法(Godunov型解法)

$$\int \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right) dx dt = \oint (\mathbf{U} dx - \mathbf{F} dt) = 0$$

- 物理量分布を一定と仮定
- リーマン問題厳密解・近似解
- 厳密解・近似解の空間積分
- 数値流束による形式(時空間保存則から評価)



$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}^{n+1} dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}^n dx + \underbrace{\int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}_{i+1/2} dt}_{\text{Red underline}} - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}_{i-1/2} dt = 0$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U} \left(\frac{x - x_{i+1/2}}{\Delta t}; \mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n \right) dx - (x_{i+1/2} - x_i) \mathbf{U}_i^n + \Delta t \left(\underbrace{\mathbf{F}_{i+1/2}}_{\text{Red underline}} - \mathbf{F}_i^n \right) = 0$$

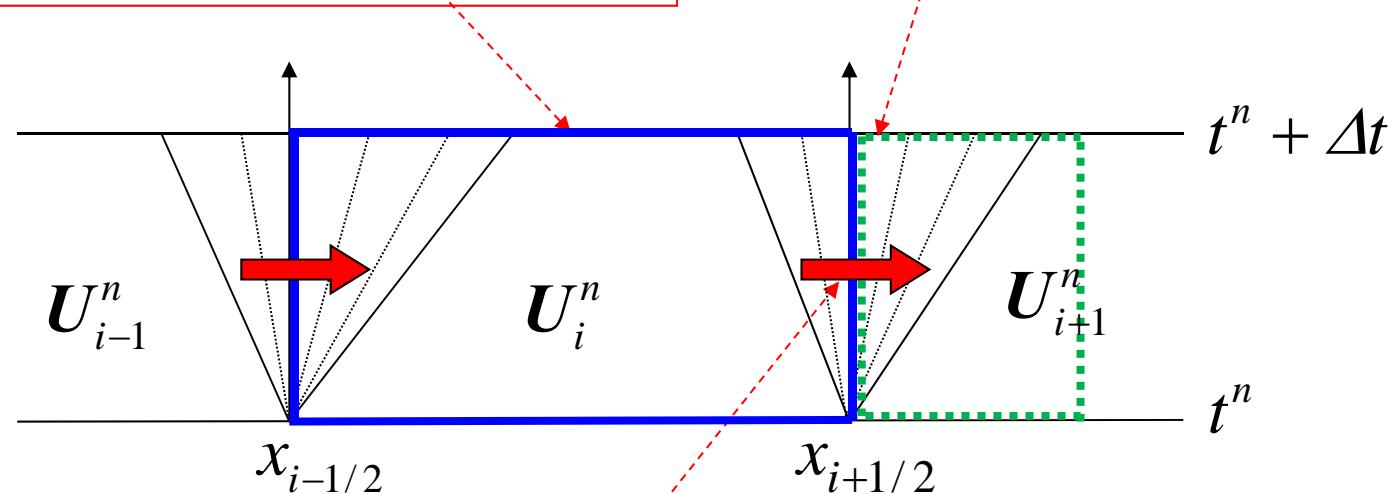
近似リーマン解法

□ 近似リーマン解法(Godunov型解法)

$$\int \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right) dx dt = \oint (\mathbf{U} dx - \mathbf{F} dt) = 0$$

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}(x, t^n + \Delta t) dx$$

$$\mathbf{U}\left(\frac{x - x_{i+1/2}}{\Delta t}; \mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n\right)$$



$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} \mathbf{F}(x_{i+1/2}, t) dt$$

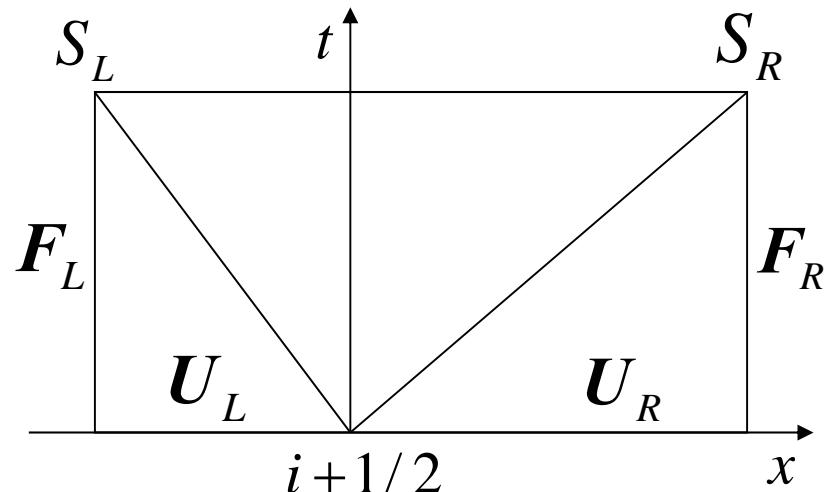


HLL近似リーマン解法

□ HLL近似リーマン解法 [Harten+, 1983]

- 衝撃波近似

- 2-wave近似



$S_{R,L}$:最大/最小情報伝播速度

$$S_R = \max(u_L + c_L, u_R + c_R, 0)$$
$$S_L = \min(u_L - c_L, u_R - c_R, 0)$$

$$\iint \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right) dx dt = \oint (\mathbf{U} dx - \mathbf{F} dt) = 0$$

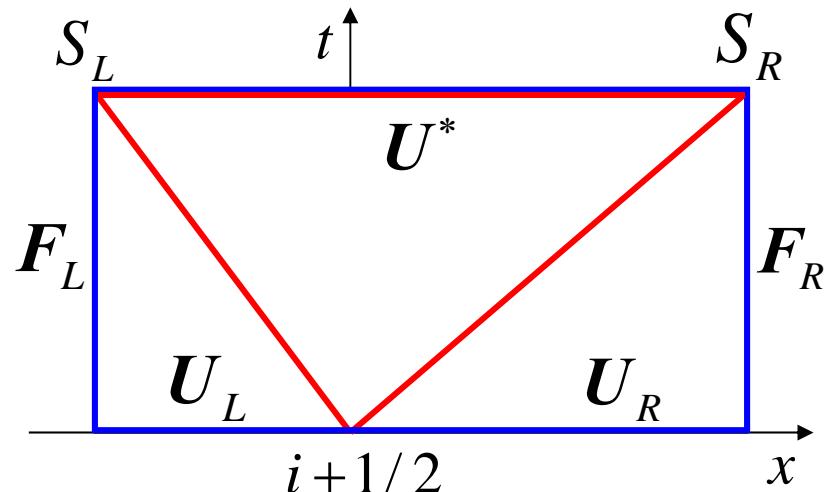


HLL近似リーマン解法

□ HLL近似リーマン解法 [Harten+, 1983]

■ 衝撃波近似

■ 2-wave近似



$S_{R,L}$:最大/最小情報伝播速度

$$S_R = \max(u_L + c_L, u_R + c_R, 0)$$
$$S_L = \min(u_L - c_L, u_R - c_R, 0)$$

$$\iint \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right) dx dt = \oint (\mathbf{U} dx - \mathbf{F} dt) = 0$$

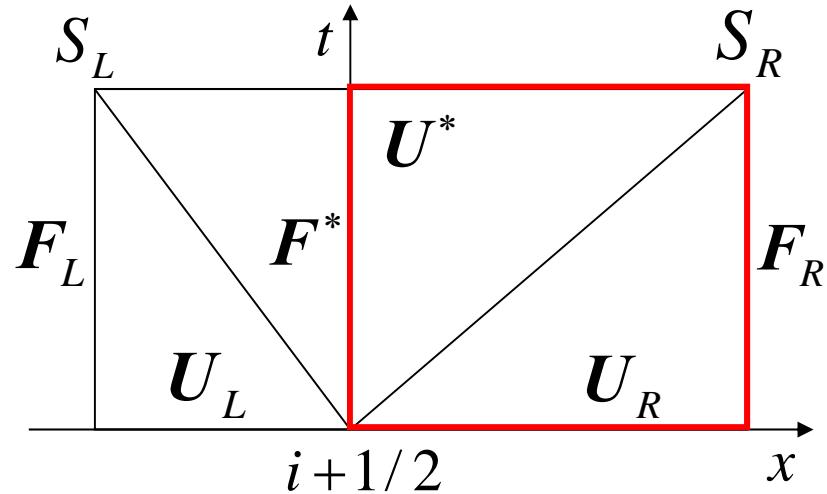
$$\Rightarrow (S_R - S_L)\mathbf{U}^* + S_R \mathbf{U}_R - S_L \mathbf{U}_L + \mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L = 0$$



HLL近似リーマン解法

□ HLL近似リーマン解法 [Harten+, 1983]

- 衝擊波近似
 - 2-wave近似



$S_{R,L}$:最大/最小情報伝播速度

$$S_R = \max(u_L + c_L, u_R + c_R, 0)$$

$$S_L = \min(u_L - c_L, u_R - c_R, 0)$$

$$\oint \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right) dx dt = \oint (\mathbf{U} dx - \mathbf{F} dt) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}^* = \mathbf{F}_{R,L} + \mathbf{S}_{R,L}(\mathbf{U}^* - \mathbf{U}_{R,L}) = \frac{\mathbf{S}_R \mathbf{F}_L - \mathbf{S}_L \mathbf{F}_R + \mathbf{S}_R \mathbf{S}_L (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)}{\mathbf{S}_R - \mathbf{S}_L}$$



HLL近似リーマン解法

- HLL近似リーマン解法 [Harten+, 1983]

- 衝撃波近似

- 2-wave近似

$$U^* = \frac{S_R \mathbf{U}_R - S_L \mathbf{U}_L + \mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L}{S_R - S_L}$$

$$\mathbf{F}^* = \frac{S_R \mathbf{F}_L - S_L \mathbf{F}_R + S_R S_L (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)}{S_R - S_L} \neq \mathbf{F}(U^*)$$

- 固有ベクトルの計算不要
- 正値性保存 [Einfeldt, et al., 1991]
 - MHDについては [Miyoshi, Kusano, 2005]
- 接触不連続の分解不可能



HLLD近似リーマン解法

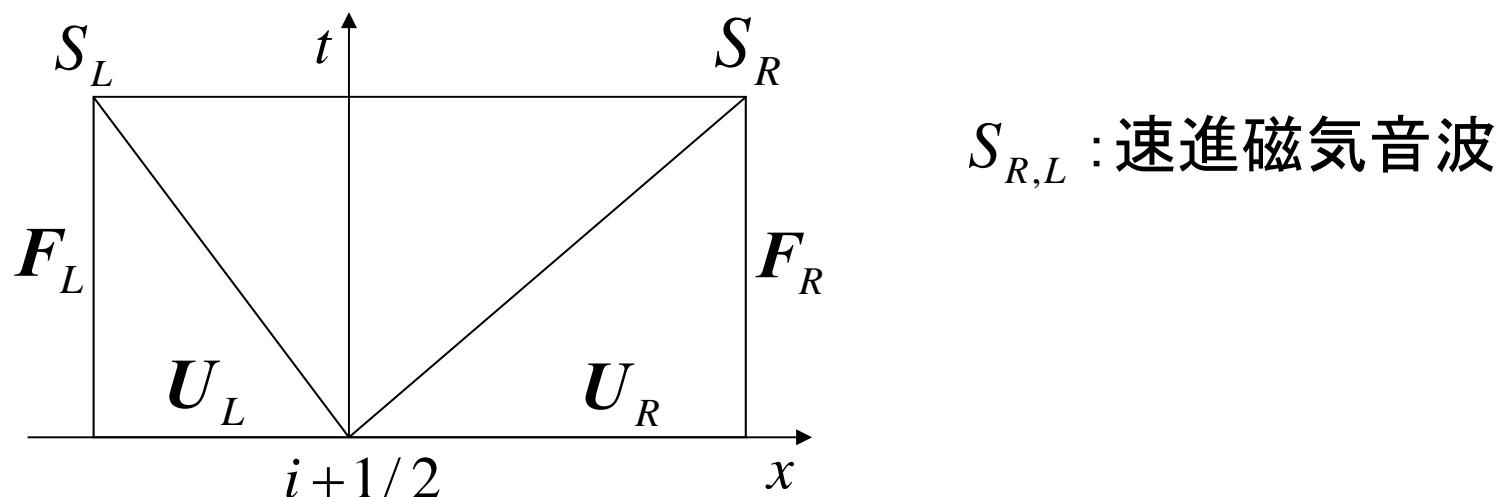
□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

- 衝撃波近似

- 5-wave近似

- リーマンファンで移流速度一定

- リーマンファンで全圧力一定





HLLD近似リーマン解法

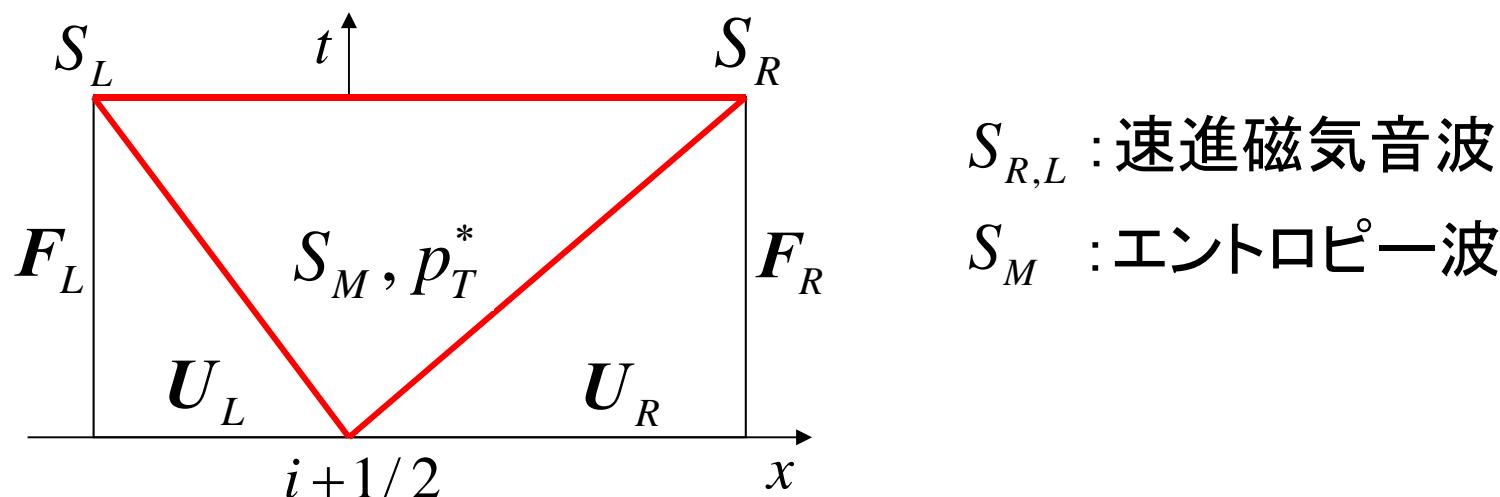
- HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

- 衝撃波近似

- 5-wave近似

- リーマンファンで移流速度一定

- リーマンファンで全圧力一定





HLLD近似リーマン解法

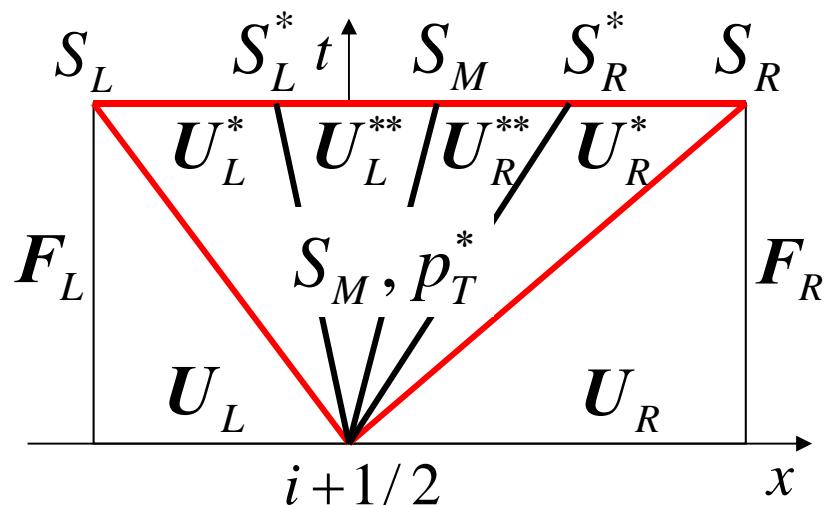
□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

- 衝撃波近似

- 5-wave近似

- リーマンファンで移流速度一定

- リーマンファンで全圧力一定



$S_{R,L}$: 速進磁気音波

S_M : エントロピー波

$S_{R,L}^*$: アルフェン波



HLLD近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ エントロピー波の評価 [Batten, et al., 1997]

$$S_M = \frac{(\rho u)^*}{\rho^*} = \frac{(S_R - u_R)\rho_R u_R - (S_L - u_L)\rho_L u_L - p_{TR} + p_{TL}}{(S_R - u_R)\rho_R - (S_L - u_L)\rho_L}$$

■ 全圧力の評価



HLLD近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ 速進磁気音波に対するジャンプ条件

$$S_\alpha \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* \\ B_{y\alpha}^* \\ B_{z\alpha}^* \\ e_\alpha^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* S_M^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* S_M - B_x B_{y\alpha}^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* S_M - B_x B_{z\alpha}^* \\ B_{y\alpha}^* S_M - B_x v_\alpha^* \\ B_{z\alpha}^* S_M - B_x w_\alpha^* \\ (e_\alpha^* + p_T^*) S_M - B_x (\mathbf{v}_\alpha^* \cdot \mathbf{B}_\alpha^*) \end{pmatrix} = S_\alpha \begin{pmatrix} \rho_\alpha \\ \rho_\alpha u_\alpha \\ \rho_\alpha v_\alpha \\ \rho_\alpha w_\alpha \\ B_{y\alpha} \\ B_{z\alpha} \\ e_\alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha u_\alpha \\ \rho_\alpha u_\alpha + p_{T\alpha} - B_x^2 \\ \rho_\alpha v_\alpha u_\alpha - B_x B_{y\alpha} \\ \rho_\alpha w_\alpha u_\alpha - B_x B_{z\alpha} \\ B_{y\alpha} u_\alpha - B_x v_\alpha \\ B_{z\alpha} u_\alpha - B_x w_\alpha \\ (e_\alpha + p_{T\alpha}) u_\alpha - B_x (\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{B}_\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_\alpha^* = (S_M, v_\alpha^*, w_\alpha^*), \mathbf{B}_\alpha^* = (B_x, B_{y\alpha}^*, B_{z\alpha}^*), \alpha = R, L$$



HLLD近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ エントロピー波の評価 [Batten, et al., 1997]

$$S_M = \frac{(\rho u)^*}{\rho^*} = \frac{(S_R - u_R)\rho_R u_R - (S_L - u_L)\rho_L u_L - p_{TR} + p_{TL}}{(S_R - u_R)\rho_R - (S_L - u_L)\rho_L}$$

■ 全圧力の評価

$$\begin{aligned} p_T^* &= p_{TL} + \rho_L (S_L - u_L) (S_M - u_L) \\ &= p_{TR} + \rho_R (S_R - u_R) (S_M - u_R) \\ &= \frac{(S_R - u_R)\rho_R p_{TL} - (S_L - u_L)\rho_L p_{TR} + \rho_L \rho_R (S_R - u_R)(u_R - u_L)}{(S_R - u_R)\rho_R - (S_L - u_L)\rho_L} \end{aligned}$$



HLLD近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ 速進磁気音波に対するジャンプ条件

$$S_\alpha \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* \\ B_{y\alpha}^* \\ B_{z\alpha}^* \\ e_\alpha^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* S_M^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* S_M - B_x B_{y\alpha}^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* S_M - B_x B_{z\alpha}^* \\ B_{y\alpha}^* S_M - B_x v_\alpha^* \\ B_{z\alpha}^* S_M - B_x w_\alpha^* \\ (e_\alpha^* + p_T^*) S_M - B_x (\mathbf{v}_\alpha^* \cdot \mathbf{B}_\alpha^*) \end{pmatrix} = S_\alpha \begin{pmatrix} \rho_\alpha \\ \rho_\alpha u_\alpha \\ \rho_\alpha v_\alpha \\ \rho_\alpha w_\alpha \\ B_{y\alpha} \\ B_{z\alpha} \\ e_\alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha u_\alpha \\ \rho_\alpha u_\alpha + p_{T\alpha} - B_x^2 \\ \rho_\alpha v_\alpha u_\alpha - B_x B_{y\alpha} \\ \rho_\alpha w_\alpha u_\alpha - B_x B_{z\alpha} \\ B_{y\alpha} u_\alpha - B_x v_\alpha \\ B_{z\alpha} u_\alpha - B_x w_\alpha \\ (e_\alpha + p_{T\alpha}) u_\alpha - B_x (\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{B}_\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_\alpha^* = (S_M, v_\alpha^*, w_\alpha^*), \mathbf{B}_\alpha^* = (B_x, B_{y\alpha}^*, B_{z\alpha}^*), \alpha = R, L$$



HLLD近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ HLLD解: U_{α}^*

$$\rho_{\alpha}^* = \rho_{\alpha} \frac{S_{\alpha} - u_{\alpha}}{S_{\alpha} - S_M}$$



HLLD近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ 速進磁気音波に対するジャンプ条件

$$S_\alpha \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* \\ B_{y\alpha}^* \\ B_{z\alpha}^* \\ e_\alpha^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* S_M^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* S_M - B_x B_{y\alpha}^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* S_M - B_x B_{z\alpha}^* \\ B_{y\alpha}^* S_M - B_x v_\alpha^* \\ B_{z\alpha}^* S_M - B_x w_\alpha^* \\ (e_\alpha^* + p_T^*) S_M - B_x (\mathbf{v}_\alpha^* \cdot \mathbf{B}_\alpha^*) \end{pmatrix} = S_\alpha \begin{pmatrix} \rho_\alpha \\ \rho_\alpha u_\alpha \\ \rho_\alpha v_\alpha \\ \rho_\alpha w_\alpha \\ B_{y\alpha} \\ B_{z\alpha} \\ e_\alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha u_\alpha \\ \rho_\alpha u_\alpha + p_{T\alpha} - B_x^2 \\ \rho_\alpha v_\alpha u_\alpha - B_x B_{y\alpha} \\ \rho_\alpha w_\alpha u_\alpha - B_x B_{z\alpha} \\ B_{y\alpha} u_\alpha - B_x v_\alpha \\ B_{z\alpha} u_\alpha - B_x w_\alpha \\ (e_\alpha + p_{T\alpha}) u_\alpha - B_x (\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{B}_\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_\alpha^* = (S_M, v_\alpha^*, w_\alpha^*), \mathbf{B}_\alpha^* = (B_x, B_{y\alpha}^*, B_{z\alpha}^*), \alpha = R, L$$



HLLD近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ HLLD解: U_{α}^*

$$\rho_{\alpha}^* = \rho_{\alpha} \frac{S_{\alpha} - u_{\alpha}}{S_{\alpha} - S_M}$$

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{t\alpha}^* = \mathbf{v}_{t\alpha} - B_x \mathbf{B}_{t\alpha} \frac{S_M - u_{\alpha}}{\rho_{\alpha} (S_{\alpha} - u_{\alpha})(S_{\alpha} - S_M) - B_x^2} \\ \mathbf{B}_{t\alpha}^* = \mathbf{B}_{t\alpha} \frac{\rho_{\alpha} (S_{\alpha} - u_{\alpha})^2 - B_x^2}{\rho_{\alpha} (S_{\alpha} - u_{\alpha})(S_{\alpha} - S_M) - B_x^2} \end{cases} \quad \mathbf{v}_t = (0, v, w), \mathbf{B}_t = (0, B_y, B_z)$$



HLLD近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ 速進磁気音波に対するジャンプ条件

$$\begin{pmatrix} \rho_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* S_M^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_\alpha^{*\ast} v_\alpha^* \\ \rho_\alpha^{*\ast} w_\alpha^* \\ B_{y\alpha}^* \\ B_{z\alpha}^* \\ e_\alpha^* \end{pmatrix} \left(\begin{matrix} \rho_\alpha^* S_M & \\ \rho_\alpha^* S_M^2 + p_T^* - B_x^2 & \\ \rho_\alpha^{*\ast} v_\alpha^* S_M - B_x B_{y\alpha}^* & \\ \rho_\alpha^{*\ast} w_\alpha^* S_M - B_x B_{z\alpha}^* & \\ B_{y\alpha}^* S_M - B_x v_\alpha^* & \\ B_{z\alpha}^* S_M - B_x w_\alpha^* & \\ (e_\alpha^* + p_T^*) S_M - B_x (\mathbf{v}_\alpha^* \cdot \mathbf{B}_\alpha^*) & \end{matrix} \right) = \begin{pmatrix} \rho_\alpha \\ \rho_\alpha u_\alpha \\ \rho_\alpha u_\alpha \\ \rho_\alpha v_\alpha \\ \rho_\alpha w_\alpha \\ B_{y\alpha} \\ B_{z\alpha} \\ e_\alpha \end{pmatrix} \left(\begin{matrix} \rho_\alpha u_\alpha & \\ \rho_\alpha u_\alpha + p_{T\alpha} - B_x^2 & \\ \rho_\alpha v_\alpha u_\alpha - B_x B_{y\alpha} & \\ \rho_\alpha w_\alpha u_\alpha - B_x B_{z\alpha} & \\ B_{y\alpha} u_\alpha - B_x v_\alpha & \\ B_{z\alpha} u_\alpha - B_x w_\alpha & \\ (e_\alpha + p_{T\alpha}) u_\alpha - B_x (\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{B}_\alpha) & \end{matrix} \right)$$

$$\mathbf{v}_\alpha^* = (S_M, v_\alpha^*, w_\alpha^*), \mathbf{B}_\alpha^* = (B_x, B_{y\alpha}^*, B_{z\alpha}^*), \alpha = R, L$$



HLLD近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ HLLD解: U_{α}^*

$$\rho_{\alpha}^* = \rho_{\alpha} \frac{S_{\alpha} - u_{\alpha}}{S_{\alpha} - S_M}$$

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{t\alpha}^* = \mathbf{v}_{t\alpha} - B_x \mathbf{B}_{t\alpha} \frac{S_M - u_{\alpha}}{\rho_{\alpha} (S_{\alpha} - u_{\alpha})(S_{\alpha} - S_M) - B_x^2} \\ \mathbf{B}_{t\alpha}^* = \mathbf{B}_{t\alpha} \frac{\rho_{\alpha} (S_{\alpha} - u_{\alpha})^2 - B_x^2}{\rho_{\alpha} (S_{\alpha} - u_{\alpha})(S_{\alpha} - S_M) - B_x^2} \end{cases} \quad \mathbf{v}_t = (0, v, w), \mathbf{B}_t = (0, B_y, B_z)$$

$$e_{\alpha}^* = \frac{(S_{\alpha} - u_{\alpha}) e_{\alpha} - p_{T\alpha} + p_T^* + B_x (\mathbf{v}_{\alpha} \cdot \mathbf{B}_{\alpha} - \mathbf{v}_{\alpha}^* \cdot \mathbf{B}_{\alpha}^*)}{S_{\alpha} - S_M}$$



HLLD近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ アルフェン波に対するジャンプ条件

$$\begin{pmatrix} \rho_{\alpha}^{**} \\ \rho_{\alpha}^{**} S_M \\ \rho_{\alpha}^{**} v_{\alpha}^{**} \\ S_{\alpha}^* \\ \rho_{\alpha}^{**} w_{\alpha}^{**} \\ B_{y\alpha}^{**} \\ B_{z\alpha}^{**} \\ e_{\alpha}^{**} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_{\alpha}^{**} S_M \\ \rho_{\alpha}^{**} S_M^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_{\alpha}^{**} v_{\alpha}^{**} S_M - B_x B_{y\alpha}^{**} \\ \rho_{\alpha}^{**} w_{\alpha}^{**} S_M - B_x B_{z\alpha}^{**} \\ B_{y\alpha}^{**} S_M - B_x v_{\alpha}^{**} \\ B_{z\alpha}^{**} S_M - B_x w_{\alpha}^{**} \\ (e_{\alpha}^{**} + p_T^*) S_M - B_x (\mathbf{v}_{\alpha}^{**} \cdot \mathbf{B}_{\alpha}^{**}) \end{pmatrix} = S_{\alpha}^* \begin{pmatrix} \rho_{\alpha}^* \\ \rho_{\alpha}^* S_M \\ \rho_{\alpha}^* v_{\alpha}^* \\ \rho_{\alpha}^* w_{\alpha}^* \\ B_{y\alpha}^* \\ B_{z\alpha}^* \\ e_{\alpha}^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_{\alpha}^* S_M \\ \rho_{\alpha}^* S_M^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_{\alpha}^* v_{\alpha}^* S_M - B_x B_{y\alpha}^* \\ \rho_{\alpha}^* w_{\alpha}^* S_M - B_x B_{z\alpha}^* \\ B_{y\alpha}^* S_M - B_x v_{\alpha}^* \\ B_{z\alpha}^* S_M - B_x w_{\alpha}^* \\ (e_{\alpha}^* + p_T^*) S_M - B_x (\mathbf{v}_{\alpha}^* \cdot \mathbf{B}_{\alpha}^*) \end{pmatrix}$$

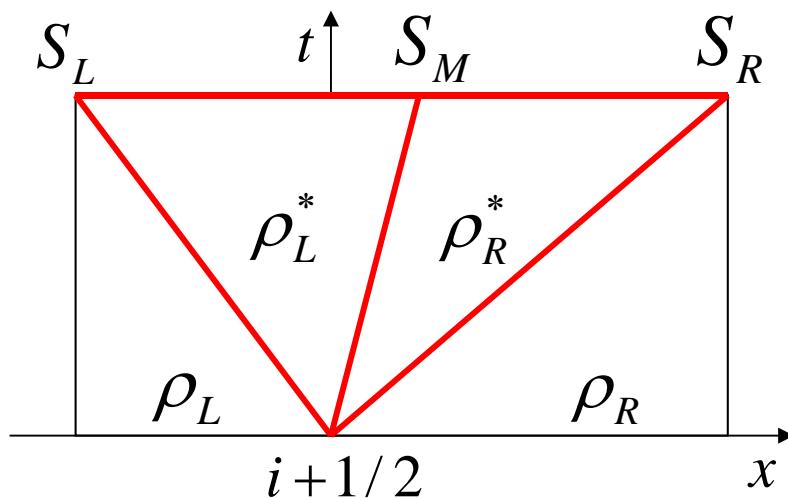
HLLD近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ HLLD解: U_{α}^{**}

$$\rho_{\alpha}^{**} = \rho_{\alpha}^*$$

$$S_R^* = S_M + \frac{|B_x|}{\sqrt{\rho_R^*}}, S_L^* = S_M - \frac{|B_x|}{\sqrt{\rho_L^*}}$$





HLLD近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ アルフェン波に対するジャンプ条件

$$\begin{pmatrix} \rho_\alpha^{**} \\ \rho_\alpha^{**} S_M \\ \rho_\alpha^{**} v_\alpha^{**} \\ S_\alpha^* \\ \rho_\alpha^{**} w_\alpha^{**} \\ B_{y\alpha}^{**} \\ B_{z\alpha}^{**} \\ e_\alpha^{**} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha^{**} S_M \\ \rho_\alpha^{**} S_M^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_\alpha^{**} v_\alpha^{**} S_M - B_x B_{y\alpha}^{**} \\ \rho_\alpha^{**} w_\alpha^{**} S_M - B_x B_{z\alpha}^{**} \\ B_{y\alpha}^{**} S_M - B_x v_\alpha^{**} \\ B_{z\alpha}^{**} S_M - B_x w_\alpha^{**} \\ (e_\alpha^{**} + p_T^*) S_M - B_x (\mathbf{v}_\alpha^{**} \cdot \mathbf{B}_\alpha^{**}) \end{pmatrix} = S_\alpha^* \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* \\ B_{y\alpha}^* \\ B_{z\alpha}^* \\ e_\alpha^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* S_M^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* S_M - B_x B_{y\alpha}^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* S_M - B_x B_{z\alpha}^* \\ B_{y\alpha}^* S_M - B_x v_\alpha^* \\ B_{z\alpha}^* S_M - B_x w_\alpha^* \\ (e_\alpha^* + p_T^*) S_M - B_x (\mathbf{v}_\alpha^* \cdot \mathbf{B}_\alpha^*) \end{pmatrix}$$



HLLD近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ アルフェン波に対するジャンプ条件

$$\det \left(M \left(\mathbf{v}_{t\alpha}^{**}, \mathbf{B}_{t\alpha}^{**} \right) \right) = 0$$

■ エントロピー波に対するジャンプ条件

$$S_M \begin{pmatrix} \rho_L^* \mathbf{v}_{tL}^{**} \\ \mathbf{B}_{tL}^{**} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_L^* \mathbf{v}_{tL}^{**} S_M - B_x \mathbf{B}_{tL}^{**} \\ \mathbf{B}_{tL}^{**} S_M - B_x \mathbf{v}_{tL}^{**} \end{pmatrix} = S_M \begin{pmatrix} \rho_R^* \mathbf{v}_{tR}^{**} \\ \mathbf{B}_{tR}^{**} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_R^* \mathbf{v}_{tR}^{**} S_M - B_x \mathbf{B}_{tR}^{**} \\ \mathbf{B}_{tR}^{**} S_M - B_x \mathbf{v}_{tR}^{**} \end{pmatrix}$$

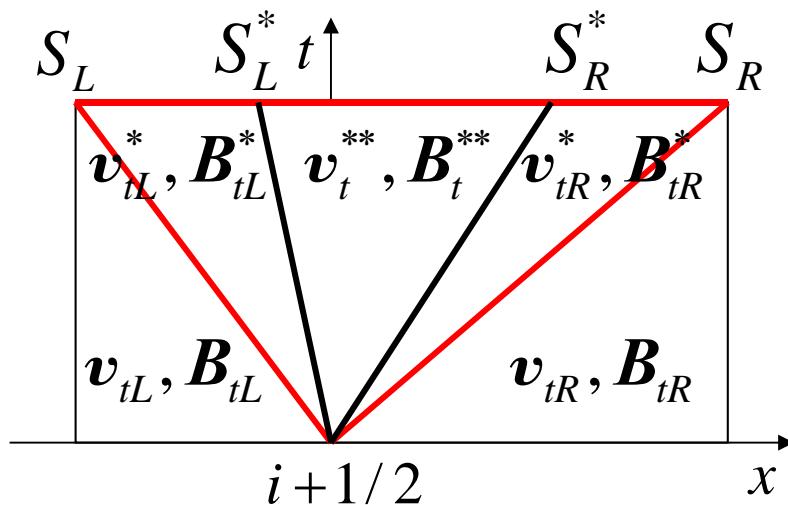
$$\mathbf{v}_{tL}^{**} = \mathbf{v}_{tR}^{**} = \mathbf{v}_t^{**}, \mathbf{B}_{tL}^{**} = \mathbf{B}_{tR}^{**} = \mathbf{B}_t^{**} \quad \text{for } B_x \neq 0$$



HLLD近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

$$\begin{aligned} & \left(S_R - S_R^* \right) \begin{pmatrix} \rho_R^* \mathbf{v}_{tR}^* \\ \mathbf{B}_{tR}^* \end{pmatrix} + \left(S_R^* - S_M \right) \begin{pmatrix} \rho_R^* \mathbf{v}_t^{**} \\ \mathbf{B}_t^{**} \end{pmatrix} + \left(S_M - S_L^* \right) \begin{pmatrix} \rho_L^* \mathbf{v}_t^{**} \\ \mathbf{B}_t^{**} \end{pmatrix} + \left(S_L^* - S_{RL} \right) \begin{pmatrix} \rho_L^* \mathbf{v}_{tL}^* \\ \mathbf{B}_{tL}^* \end{pmatrix} \\ & + S_R \begin{pmatrix} \rho_R \mathbf{v}_{tR} \\ \mathbf{B}_{tR} \end{pmatrix} - S_L \begin{pmatrix} \rho_L \mathbf{v}_{tL} \\ \mathbf{B}_{tL} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_R \mathbf{v}_{tR} u_R - B_x \mathbf{B}_{tR} \\ \mathbf{B}_{tR} u_R - B_x \mathbf{v}_{tR} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_L \mathbf{v}_{tL} u_L - B_x \mathbf{B}_{tL} \\ \mathbf{B}_{tL} u_L - B_x \mathbf{v}_{tL} \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$





HLLD近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ HLLD解: U_{α}^{**}

$$\rho_{\alpha}^{**} = \rho_{\alpha}^*$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{v}_t^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} \boldsymbol{v}_{tL}^* + \sqrt{\rho_R^*} \boldsymbol{v}_{tR}^* + (\boldsymbol{B}_{tR}^* - \boldsymbol{B}_{tL}^*) \text{sgn}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}} \\ \boldsymbol{B}_t^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} \boldsymbol{B}_{tR}^* + \sqrt{\rho_R^*} \boldsymbol{B}_{tL}^* + \sqrt{\rho_L^* \rho_R^*} (\boldsymbol{v}_{tR}^* - \boldsymbol{v}_{tL}^*) \text{sgn}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}} \end{array} \right.$$



HLLD近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ アルフェン波に対するジャンプ条件

$$\begin{pmatrix} \rho_{\alpha}^{**} \\ \rho_{\alpha}^{**} S_M \\ \rho_{\alpha}^{**} S_M \\ \rho_{\alpha}^{**} v_{\alpha}^{**} \\ \rho_{\alpha}^{**} w_{\alpha}^{**} \\ B_{y\alpha}^{**} \\ B_{z\alpha}^{**} \\ e_{\alpha}^{**} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c} \rho_{\alpha}^{**} S_M \\ \rho_{\alpha}^{**} S_M^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_{\alpha}^{**} v_{\alpha}^{**} S_M - B_x B_{y\alpha}^{**} \\ \rho_{\alpha}^{**} w_{\alpha}^{**} S_M - B_x B_{z\alpha}^{**} \\ B_{y\alpha}^{**} S_M - B_x v_{\alpha}^{**} \\ B_{z\alpha}^{**} S_M - B_x w_{\alpha}^{**} \\ (e_{\alpha}^{**} + p_T^*) S_M - B_x (\mathbf{v}_{\alpha}^{**} \cdot \mathbf{B}_{\alpha}^{**}) \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \rho_{\alpha}^* \\ \rho_{\alpha}^* S_M \\ \rho_{\alpha}^* S_M \\ \rho_{\alpha}^* v_{\alpha}^* \\ \rho_{\alpha}^* w_{\alpha}^* \\ B_{y\alpha}^* \\ B_{z\alpha}^* \\ e_{\alpha}^* \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c} \rho_{\alpha}^* S_M \\ \rho_{\alpha}^* S_M^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_{\alpha}^* v_{\alpha}^* S_M - B_x B_{y\alpha}^* \\ \rho_{\alpha}^* w_{\alpha}^* S_M - B_x B_{z\alpha}^* \\ B_{y\alpha}^* S_M - B_x v_{\alpha}^* \\ B_{z\alpha}^* S_M - B_x w_{\alpha}^* \\ (e_{\alpha}^* + p_T^*) S_M - B_x (\mathbf{v}_{\alpha}^* \cdot \mathbf{B}_{\alpha}^*) \end{array} \right)$$



HLLD近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ HLLD解: U_{α}^{**}

$$\rho_{\alpha}^{**} = \rho_{\alpha}^*$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{v}_t^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} \boldsymbol{v}_{tL}^* + \sqrt{\rho_R^*} \boldsymbol{v}_{tR}^* + (\boldsymbol{B}_{tR}^* - \boldsymbol{B}_{tL}^*) \text{sgn}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}} \\ \boldsymbol{B}_t^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} \boldsymbol{B}_{tR}^* + \sqrt{\rho_R^*} \boldsymbol{B}_{tL}^* + \sqrt{\rho_L^* \rho_R^*} (\boldsymbol{v}_{tR}^* - \boldsymbol{v}_{tL}^*) \text{sgn}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}} \end{array} \right.$$

$$e_{\alpha}^{**} = e_{\alpha}^* \mp \sqrt{\rho_{\alpha}^*} (\boldsymbol{v}_{\alpha}^* \cdot \boldsymbol{B}_{\alpha}^* - \boldsymbol{v}^{**} \cdot \boldsymbol{B}^{**}) \text{sgn}(B_x) \quad (-: R, +: L)$$

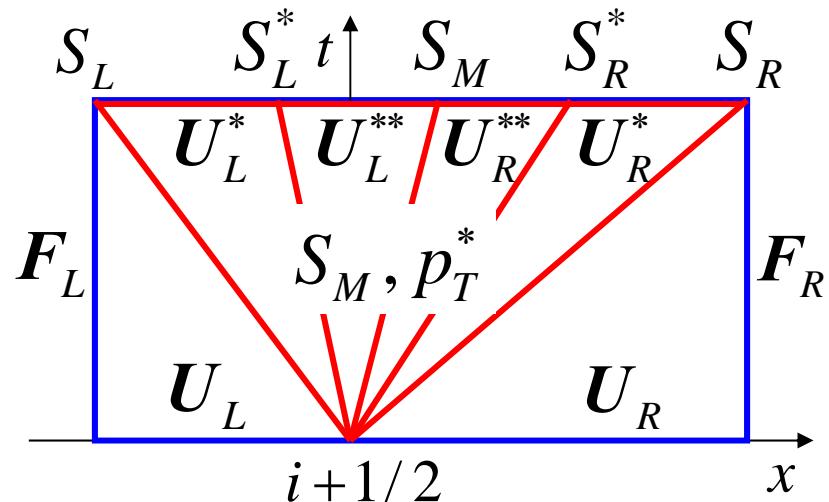


HLLD近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ 単純波近似

■ 5-wave近似



$S_{R,L}$: 速進磁気音波

S_M : エントロピー波

$S_{R,L}^*$: アルフェン波

$$S_{R,L}(\mathbf{U}_{R,L}^* - \mathbf{U}_{R,L}) = \mathbf{F}_{R,L}^* - \mathbf{F}_{R,L}, \quad S_{R,L}^*(\mathbf{U}_{R,L}^{**} - \mathbf{U}_{R,L}^*) = \mathbf{F}_{R,L}^{**} - \mathbf{F}_{R,L}^*,$$

$$S_M(\mathbf{U}_R^{**} - \mathbf{U}_L^{**}) = \mathbf{F}_R^{**} - \mathbf{F}_L^{**}, \quad \frac{1}{\Delta t} \int_{S_L \Delta t}^{S_R \Delta t} \mathbf{U}(x, t^{n+1}) dx + S_R \mathbf{U}_R - S_L \mathbf{U}_L + \mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L = 0$$



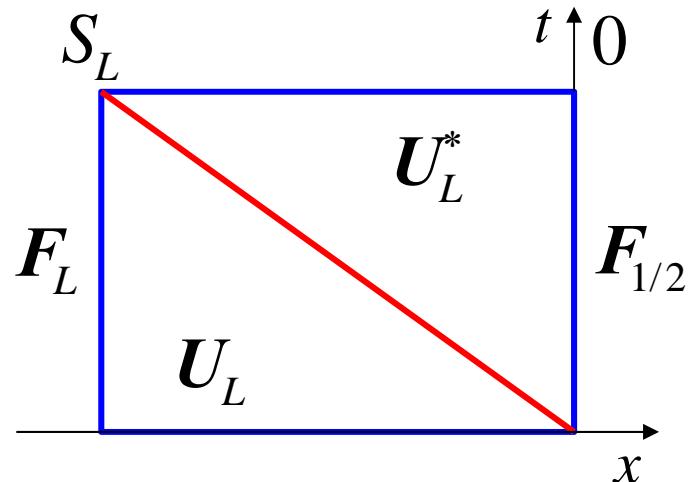
HLLD近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ 数値流束

$$F_{1/2} = F_L \text{ if } 0 \leq S_L$$

$$F_{1/2} = F_L + S_L U_L^* - S_L U_L = F_L^* \text{ if } S_L \leq 0 \leq S_L^*$$





HLLD近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

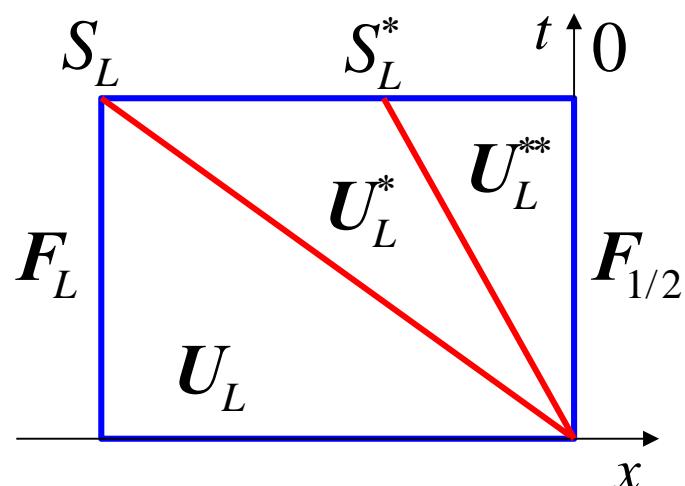
■ 数値流束

$$F_{1/2} = F_L \quad \text{if } 0 \leq S_L$$

$$F_{1/2} = F_L + S_L \mathbf{U}_L^* - S_L \mathbf{U}_L = F_L^* \quad \text{if } S_L \leq 0 \leq S_L^*$$

$$F_{1/2} = F_L + S_L^* \mathbf{U}_L^{**} - (S_L^* - S_L) \mathbf{U}_L^* - S_L \mathbf{U}_L$$

$$= F_L^* + S_L^* \mathbf{U}_L^{**} - S_L^* \mathbf{U}_L^* = F_L^* \quad \text{if } S_L^* \leq 0 \leq S_M$$





HLLD近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ 数値流束

$$F_{1/2} = \begin{cases} F_L & \text{if } 0 \leq S_L \\ F_L^* & \text{if } S_L \leq 0 \leq S_L^* \\ F_L^{**} & \text{if } S_L^* \leq 0 \leq S_M \\ F_R^{**} & \text{if } S_M \leq 0 \leq S_R^* \\ F_R^* & \text{if } S_R^* \leq 0 \leq S_R \\ F_R & \text{if } S_R \leq 0 \end{cases}$$

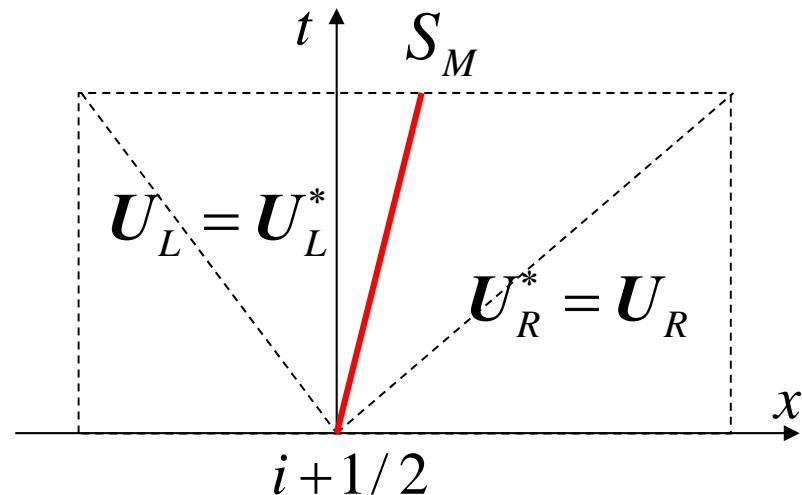
$$F_\alpha^{*/**} = F(\rho_\alpha^{*/**}, S_M, \mathbf{v}_{t\alpha}^{*/**}, B_x, \mathbf{B}_{t\alpha}^{*/**}, e_\alpha^{*/**}, p_T^*)$$



HLLD近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ 孤立した接線不連続(TD)の分解



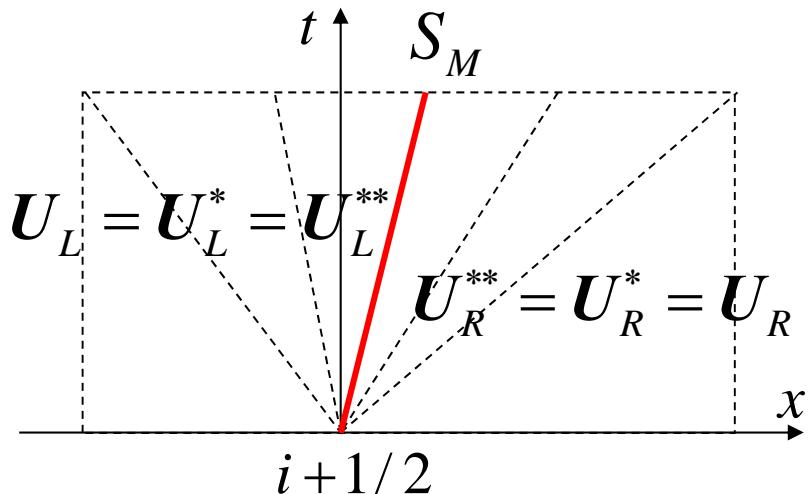
$$S_M = u, B_x = 0$$

$$S_M [\mathbf{U}] = [\mathbf{F}]$$

HLLD近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

- 孤立した接線不連続(TD)の分解
- 孤立した接触不連續(CD)の分解



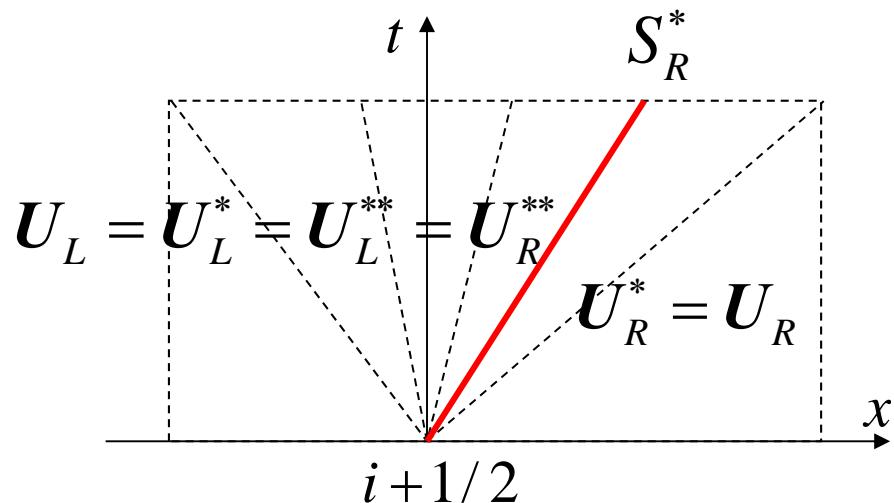
$$S_M = u, B_x \neq 0$$
$$S_M [\mathbf{U}] = [\mathbf{F}]$$



HLLD近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

- 孤立した接線不連続(TD)の分解
- 孤立した接触不連續(CD)の分解
- 孤立した回転不連續(RD)の分解



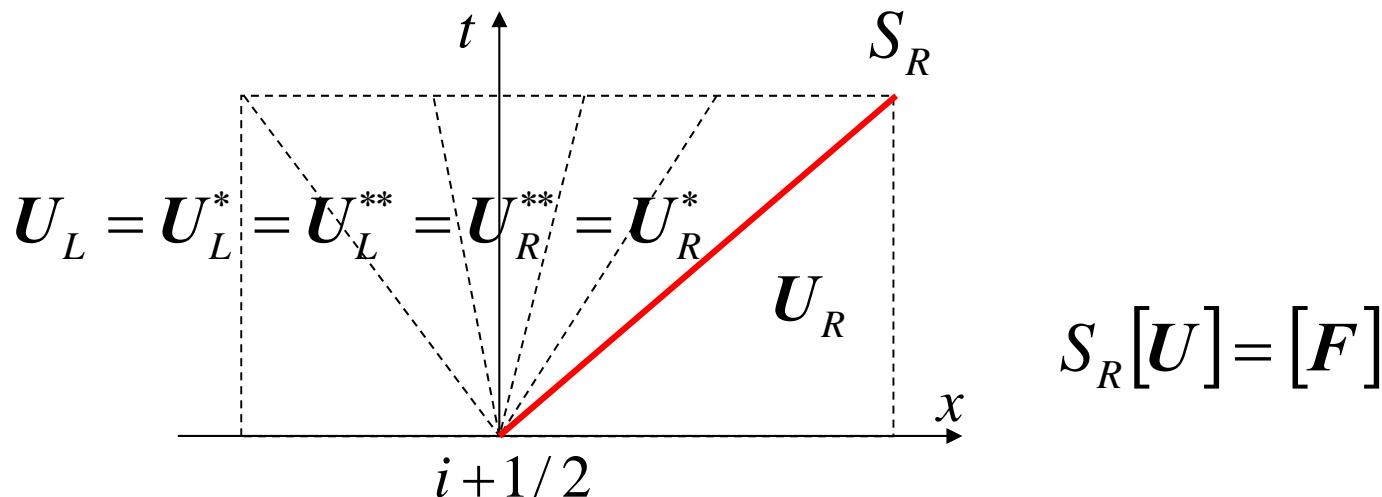
$$S_R^* = u + \frac{B_x}{\sqrt{\rho}}, B_x > 0$$
$$S_R^*[U] = [F]$$



HLLD近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

- 孤立した接線不連続(TD)の分解
- 孤立した接触不連続(CD)の分解
- 孤立した回転不連続(RD)の分解
- 孤立した速進衝撃波(FS)の分解





HLLD近似リーマン解法

□ MHDの正値性

■ 物理的な解の集合

$$G = \left\{ \mathbf{U} \mid \rho > 0, e - \rho|\mathbf{v}|^2/2 - |\mathbf{B}|^2/2 > 0 \right\}$$

■ 物理的な解の重み付き平均値

$$\mathbf{U}_{1,2} \in G \Rightarrow \boxed{\mathbf{U} = (1-\theta)\mathbf{U}_1 + \theta\mathbf{U}_2 \in G} \quad (0 \leq \theta \leq 1)$$

$$\rho = (1-\theta)\rho_1 + \theta\rho_2 > 0$$

$$p = (1-\theta)p_1 + \theta p_2$$

$$+ \theta(1-\theta)(\gamma-1) \left(\Delta \mathbf{v}^2 \rho_1 \rho_2 / \rho + |\Delta \mathbf{B}|^2 \right) / 2 > 0$$



HLLD近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ HLLD解の正値性

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_\alpha^* > 0 \\ \rho_\alpha^{**} > 0 \\ p_\alpha^* = (\gamma - 1) \left(e_\alpha^* - \rho_\alpha^* |\boldsymbol{v}_\alpha^*|^2 / 2 - |\boldsymbol{B}_\alpha^*|^2 / 2 \right) > 0 \\ p_\alpha^{**} = (\gamma - 1) \left(e_\alpha^{**} - \rho_\alpha^{**} |\boldsymbol{v}_\alpha^{**}|^2 / 2 - |\boldsymbol{B}_\alpha^{**}|^2 / 2 \right) > 0 \end{array} \right.$$



HLLD近似リーマン解法

- HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

$$\xi \equiv S_R - u_R > 0, \eta \equiv S_R - S_M > 0, \zeta \equiv S_M - u_R$$

- 密度の正値性

$$\rho_R^* = \rho_R^{**} = \frac{\xi}{\eta} \rho_R > 0$$



HLLD近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

$$\xi \equiv S_R - u_R > 0, \eta \equiv S_R - S_M > 0, \zeta \equiv S_M - u_R$$

■ 壓力の正値性

$$\begin{aligned}\varphi &\equiv \eta \left(e_R^* - \rho_R^* |\mathbf{v}_R^*|^2 / 2 - |\mathbf{B}_R^*|^2 / 2 \right) \\ &= \frac{\rho_R \xi}{2} \left(1 - \frac{|\mathbf{B}_{tR}|^2}{\rho_R \xi \eta - B_x^2} \right) \xi^2 + p_R \xi + \frac{p_R \xi}{\gamma - 1} \\ &\geq \frac{\rho_R \xi}{2} \left(1 - \frac{|\mathbf{B}_{tR}|^2}{\rho_R c_{fR}^2 - B_x^2} \right) \xi^2 + p_R \xi + \frac{p_R \xi}{\gamma - 1} \equiv \varphi'\end{aligned}$$

一生懸命テキストの方に書きました。



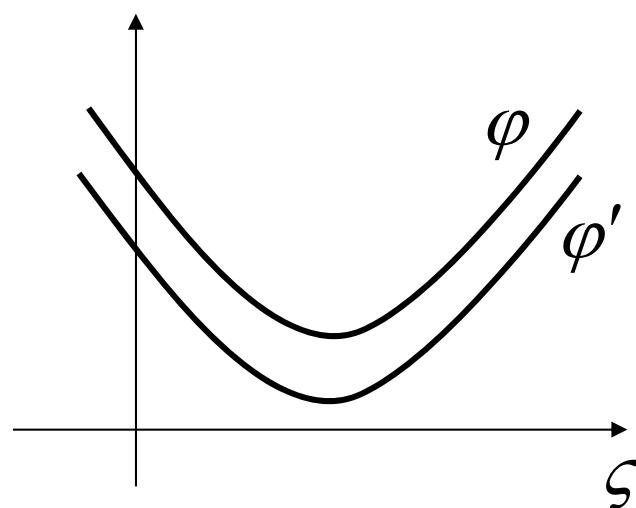
HLLD近似リーマン解法

- HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

$$\xi \equiv S_R - u_R > 0, \eta \equiv S_R - S_M > 0, \zeta \equiv S_M - u_R$$

- 壓力の正値性

$$D(\varphi') < 0 \Rightarrow \varphi' > 0$$





HLLD近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

$$\xi \equiv S_R - u_R > 0, \eta \equiv S_R - S_M > 0, \zeta \equiv S_M - u_R$$

■ 壓力の正値性

$$D(\phi') = p_R^2 - \frac{2\rho_R p_R}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{|\mathbf{B}_{tR}|^2}{\rho_R c_{fR}^2 - B_x^2} \right) \xi^2 < 0$$

$$\xi^2 > \frac{(\gamma - 1)p_R}{2\rho_R} \left(1 - \frac{|\mathbf{B}_{tR}|^2}{\rho_R c_{fR}^2 - B_x^2} \right)^{-1} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} c_{fR}^2$$

$$S_R > u_R + \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} c_{fR}$$



HLLD近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

$$\xi \equiv S_R - u_R > 0, \eta \equiv S_R - S_M > 0, \zeta \equiv S_M - u_R$$

■ 壓力の正値性

$$\begin{aligned} p_R^{**} &= (\gamma - 1) \left(e_R^{**} - \rho_R^{**} |\boldsymbol{v}_R^{**}|^2 / 2 - |\boldsymbol{B}_R^{**}|^2 / 2 \right) \\ &= p_R^* > 0 \end{aligned}$$

■ 正値性保存の条件

$$S_R > u_R + \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} c_{fR}, \quad S_L < u_L - \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} c_{fL}$$

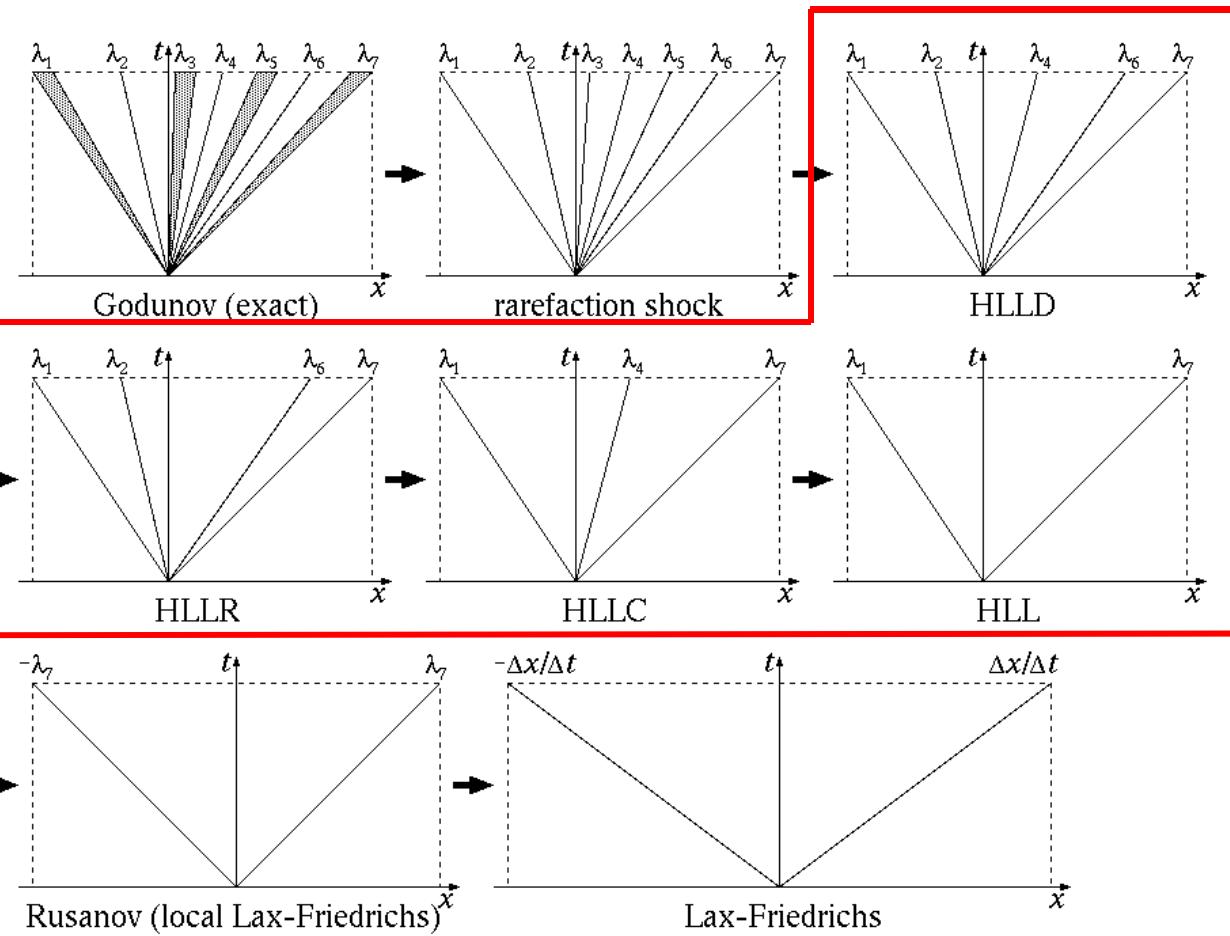


HLLD近似リーマン解法

□ HLL型近似リーマン解法

- HLLD近似解の重み付き平均値

- 正值性保存





HLLD近似リーマン解法

□ HLL型近似リーマン解法

■ 正值性保存HLLC法 [Miyoshi, Kusano, 2007]

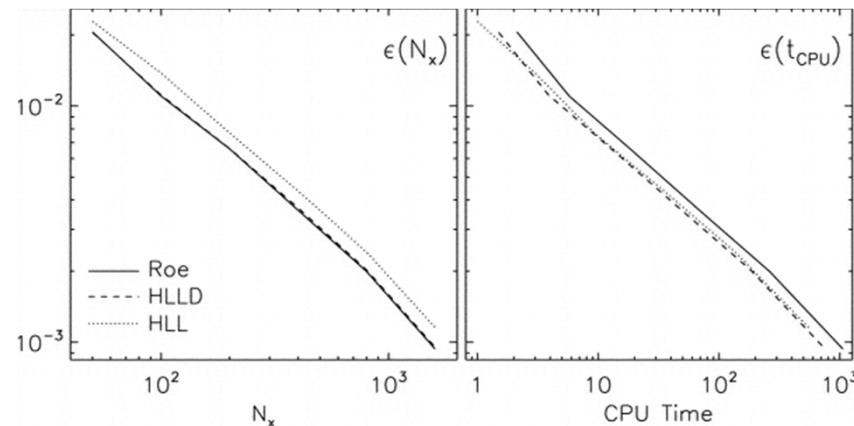
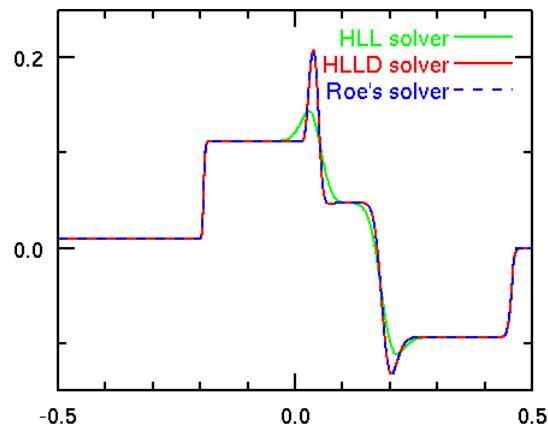
$$U = \begin{cases} \frac{(S_L - S_L^*)U_L^* - (S_L^* - S_M)U_L^{**}}{S_L - S_M} & \text{for } S_L \leq \lambda \leq S_M \\ \frac{(S_R - S_R^*)U_R^* - (S_R^* - S_M)U_R^{**}}{S_R - S_M} & \text{for } S_M \leq \lambda \leq S_R \end{cases}$$

$$\mathbf{F}_{1/2} = \begin{cases} \mathbf{F}_L^* + S_L \frac{S_L^* - S_M}{S_L - S_M} (\mathbf{U}_L^* - \mathbf{U}_L^{**}) & \text{if } S_M \geq 0 \\ \mathbf{F}_R^* + S_R \frac{S_R^* - S_M}{S_R - S_M} (\mathbf{U}_R^* - \mathbf{U}_R^{**}) & \text{if } S_M \leq 0 \end{cases}$$



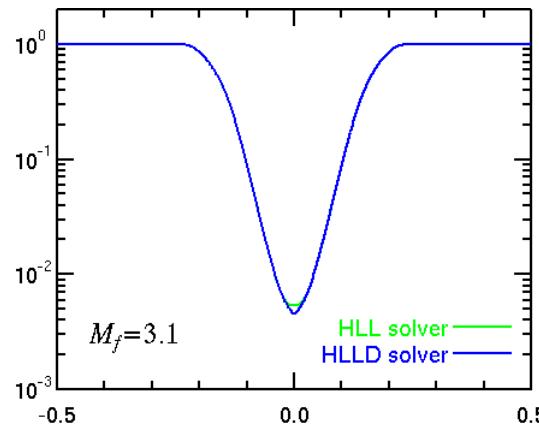
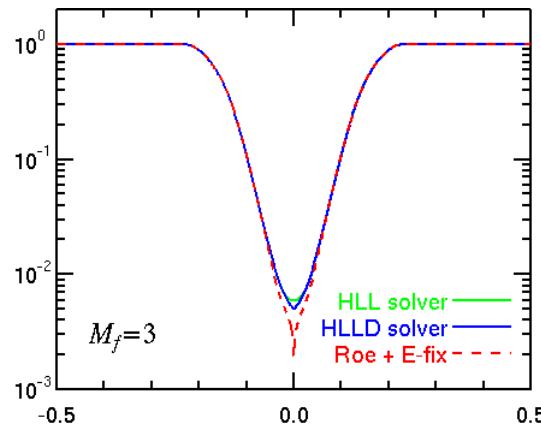
HLLD近似リーマン解法

□ 精度・計算速度の検証



□ 口バスト性の検証

[Mignone et al., 2007]





□ はじめに

- 双曲型保存則
- MHD方程式

□ 近似リーマン解法

- HLL近似リーマン解法
- HLLD近似リーマン解法

□ 近似リーマン解法の多次元化

- 磁場発散の数値処理

□ HLLD近似リーマン解法の展開



内容

□ はじめに

- 双曲型保存則
- MHD方程式

□ 近似リーマン解法

- HLL近似リーマン解法
- HLLD近似リーマン解法

□ 近似リーマン解法の多次元化

- 磁場発散の数値処理

□ HLLD近似リーマン解法の展開

時間と体力はありますか？



近似リーマン解法の多次元化

□ 近似リーマン解法の多次元化

■ 多次元の特性の理論に基づく多次元解法

□ Euler方程式でも容易ではない

□ MHD方程式では想像を絶する

- 磁場による波動の指向性

- **磁場のソレノイダル性** $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$



近似リーマン解法の多次元化

□ 近似リーマン解法の多次元化

■ 多次元の特性の理論に基づく多次元解法

□ Euler方程式でも容易ではない

□ MHD方程式では想像を絶する

- 磁場による波動の指向性

- **磁場のソレノイダル性** $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

■ 1次元数値解法の利用

□ Split法 $\mathbf{U}^{n+1} = \left(L_x^{n+\alpha} L_y^{n+\beta} L_z^{n+\gamma} \dots \right) \mathbf{U}^n$

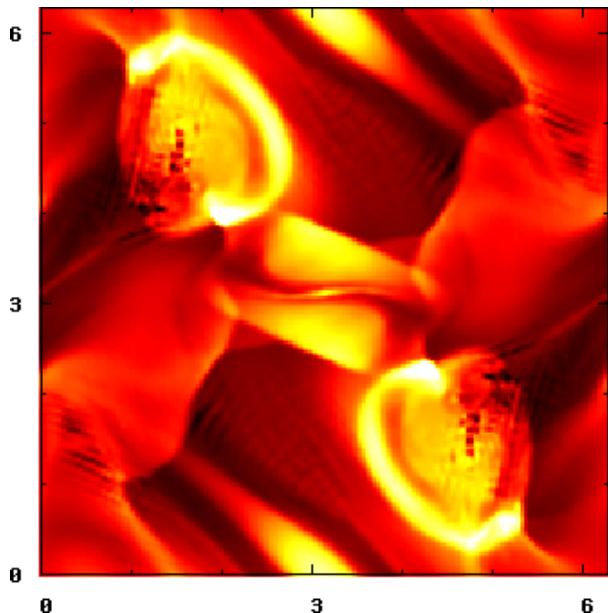
□ Unsplit法 $\mathbf{U}^{n+1} = \left(L^{n+\alpha} \dots \right) \mathbf{U}^n$

□ 数値的な磁場発散の生成

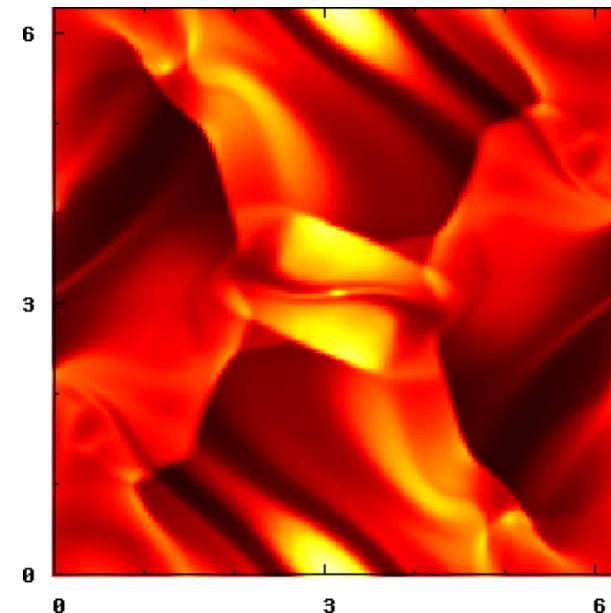


近似リーマン解法の多次元化

□ 数値的な磁場発散の影響



(補正なし)



(補正あり)

- 非物理的な磁気力が解全体に影響

$$-\nabla \cdot (p_T I - BB) = j \times B + B(\nabla \cdot B)$$

- 数値的な磁場発散の処理は必須！



磁場発散の数値処理

□ プロジェクション法

- ソレノイダルベクトル場への射影

課題：連立一次方程式の計算コスト

□ 移流拡散法

- 数値的な磁場発散の移流、拡散

課題：磁場発散の停留、蓄積

□ Constrained-Transport(CT)法

- ソレノイダル条件を維持する離散化

課題：高安定化、高次精度化



磁場発散の数値処理

□ プロジェクション法 [Brackbill, Barnes, 1980]

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{B}^n + \mathbf{L}(U^n) \Delta t = \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \phi$$

$$\mathbf{B}^{n+1} = \mathbf{B}^* + \nabla \phi$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^{n+1} = \nabla \cdot \mathbf{B}^* + \nabla \cdot \nabla \phi = 0 \Rightarrow \Delta \phi = -\nabla \cdot \mathbf{B}^*$$

- ソレノイダル条件を満足する最小補正ベクトル場
- 各ステップの計算後に連立一次方程式の計算

$$B_{x_i,j} = B_{x_i,j}^* + \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2 \Delta x}, \quad B_{y_i,j} = B_{y_i,j}^* + \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2 \Delta x}$$

$$\frac{\phi_{i+2,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-2,j}}{4 \Delta x^2} + \frac{\phi_{i,j+2} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-2}}{4 \Delta y^2} = -(\nabla \cdot \mathbf{B}^*)_{i,j}$$

□ チェッカーボード現象



磁場発散の数値処理

□ 境界プロジェクション法 [Miyoshi, Kusano, 2011]

$$\left. \begin{aligned} b_{x,i+1/2,j}^n &= \frac{B_{x,i+1,j} + B_{x,i,j}}{2} + \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta x} \\ b_{y,i,j+1/2}^n &= \frac{B_{x,i,j+1} + B_{x,i,j}}{2} + \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{b}^n = 0$$
$$\frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{\Delta y^2} = -(\nabla \cdot \mathbf{B}^n)_{i,j}$$
$$\mathbf{B}^{n+1} = \mathbf{B}^n + \mathbf{L}(\mathbf{U}^n, \mathbf{b}^n) \Delta t$$

■ 各ステップの計算前に連立一次方程式の計算

□ 数値流束の段階で非物理的磁気力を排除



磁場発散の数値処理

□ 移流拡散法(8-wave法) [Powell, 1994]

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} \end{pmatrix} (\nabla \cdot \mathbf{B}) + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) \\ \mathbf{B} \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) \end{pmatrix}$$

■ 磁場発散はエントロピー波で移流

$$(\nabla \cdot \mathbf{B})_t + \nabla \cdot [\mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{B})] = \nu \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{B})$$

■ 非保存型解法

■ 流れのよどみ点での磁場発散の蓄積

□ 拡散項は実効的ではない



磁場発散の数値処理

□ 移流拡散法(9-wave法) [Dedner+, 2002]

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \phi = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + c_h^2 \nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{c_h^2}{c_p^2} \phi$$

- 磁場発散は追加された固有値で**等方的**に移流

$$(\nabla \cdot \mathbf{B})_{tt} + c_h^2/c_p^2 (\nabla \cdot \mathbf{B})_t - c_h^2 \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0$$

$c_p \rightarrow \infty$: 波動方程式 $c_h \rightarrow \infty$: 拡散方程式

- 固有値は流れと直接的には無関係
- 保存型解法
- 非保存(Powell型のソース項)への拡張も可能



磁場発散の数値処理

□ CT法 [Evans, Hawley, 1988]

$$\Delta b_{x i+1/2, j}^n = -\frac{\Delta t}{\Delta y} \left(E_{z i+1/2, j+1/2} - E_{z i+1/2, j-1/2} \right)$$
$$\Delta b_{y i, j+1/2}^n = \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(E_{z i+1/2, j+1/2} - E_{z i-1/2, j+1/2} \right)$$

■ Field-CT法

■ Flux-CT法 [Balsara, Spricer, 1999]

$$E_{z i+1/2, j} = -F_{B_y, x_{i+1/2, j}}, E_{z i, j+1/2} = F_{B_x, y_{i, j+1/2}}$$

$$E_{z i+1/2, j+1/2} = \frac{E_{z i+1/2, j} + E_{z i+1/2, j+1} + E_{z i, j+1/2} + E_{z i+1, j+1/2}}{4}$$



磁場発散の数値処理

□ CT法

■ HLL-Flux-CT法 [Miyoshi, Kusano, 2011]

$$E_{zi+1/2,j+1/2} = \frac{E_{zi+1/2,j} + E_{zi+1/2,j+1} + E_{zi,j+1/2} + E_{zi+1,j+1/2}}{4}$$
$$+ \frac{\Delta y}{8} \left[\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} \right)_{i+1/2,j+1/4} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} \right)_{i+1/2,j+3/4} \right]$$
$$+ \frac{\Delta x}{8} \left[\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \right)_{i+1/4,j+1/2} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \right)_{i+3/4,j+1/2} \right]$$

- 1次元近似リーマン解法とコンシスティント
- 電場の微分をHLL数値流束で評価



磁場発散の数値処理

□ CT法

■ HLL-Flux-CT法 [Miyoshi, Kusano, 2011]

$$E_{z i+1/2, j+1/2} = \left(\frac{E_z^{i+} + E_z^{i-} + E_z^{j+} + E_z^{j-}}{4} \right)_{i+1/2, j+1/2}$$

$$E_z^{j\pm}_{i+1/2, j\pm 1/2} = E_{z i+1/2, j} \pm \frac{\Delta y}{2} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} \right)_{i+1/2, j+1/4}$$

$$E_z^{i\pm}_{i\pm 1/2, j+1/2} = E_{z i, j+1/2} \pm \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \right)_{i+1/4, j+1/2}$$

□ 1次元近似リーマン解法とコンシスティント

[Gardiner, Stone, 2005]

□ 電場の微分をHLL数値流束で評価



磁場発散の数値処理

□ 数値実験

■ HLLD近似リーマン解法

□ 2次MUSCL+minmod制限関数

□ 2次Runge-Kutta-TVD法

□ ヤコビ法(連立一次方程式)

■ Orszag-Tang渦問題

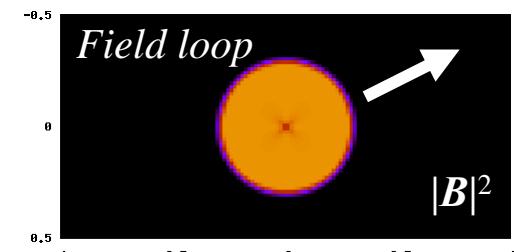
$$\mathbf{v} = (-\sin y, \sin x, 0), \mathbf{B} = (-\sin y, \sin 2x, 0)$$

■ Field loop移流問題

$$\mathbf{v} = v_0(\cos \theta, \sin \theta, 0), A_z = \max(A_0(R - r), 0), \beta = 2 \times 10^6$$

■ 爆発風問題

$$\mathbf{B} = \left(10/\sqrt{2}, 10/\sqrt{2}, 0\right), \beta_{\text{core}} = 2, \beta_{\text{ambient}} = 2 \times 10^{-3}$$

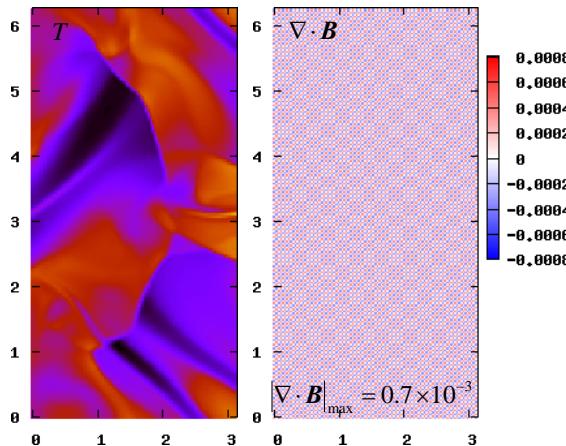




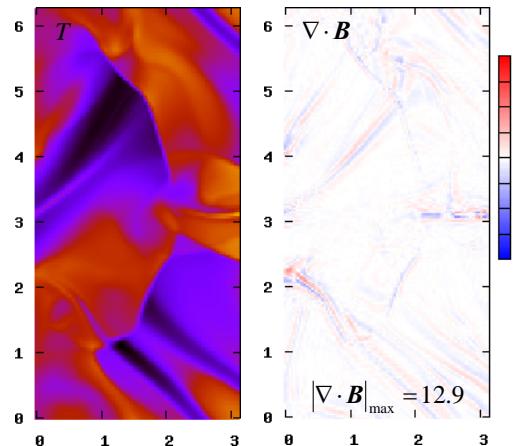
磁場発散の数値処理

□ Orszag-Tang渦問題

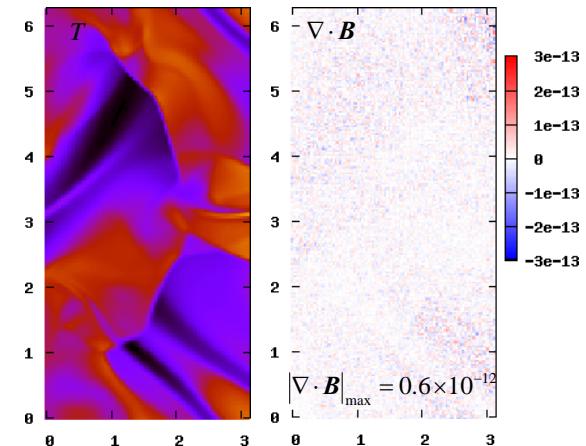
Projection



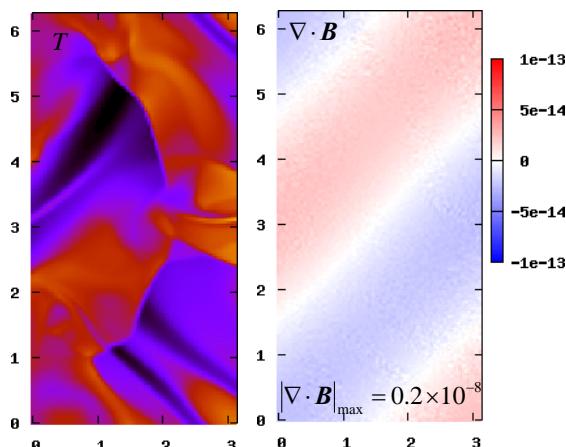
8-wave



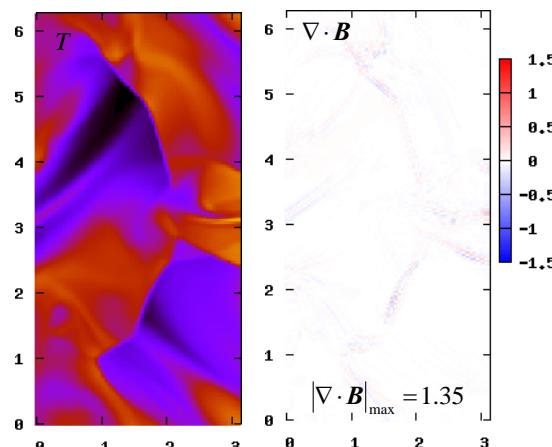
flux-CT



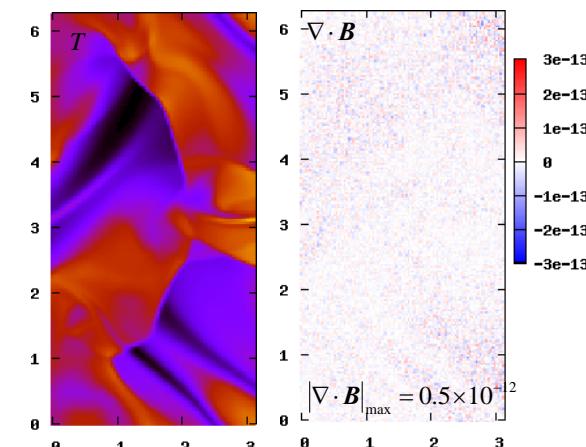
Face-projection



9-wave



HLL-flux-CT

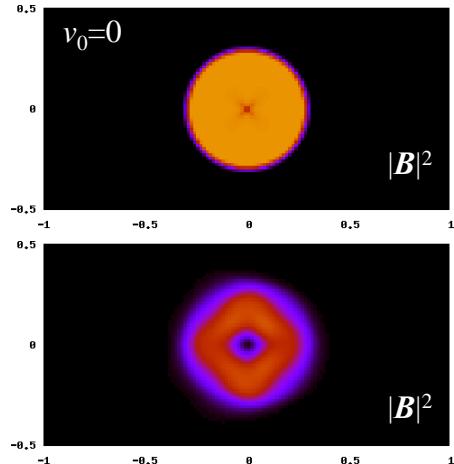




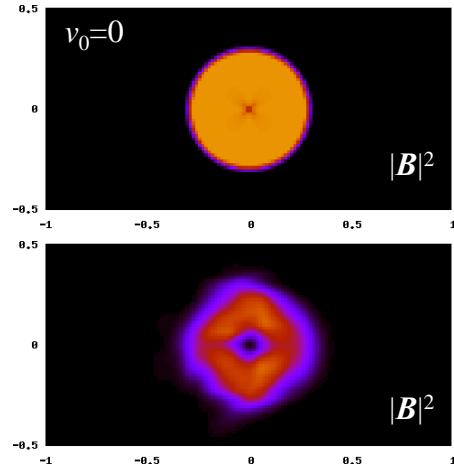
Field loop移流問題

□ Field loop問題

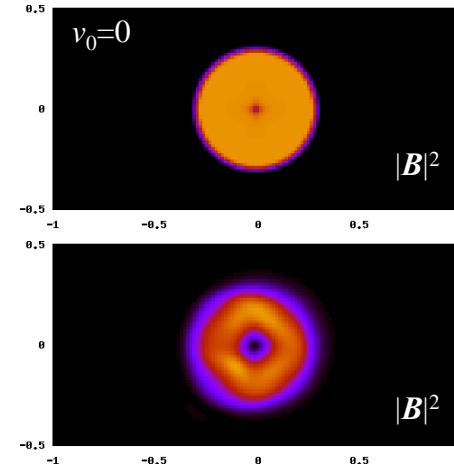
Projection



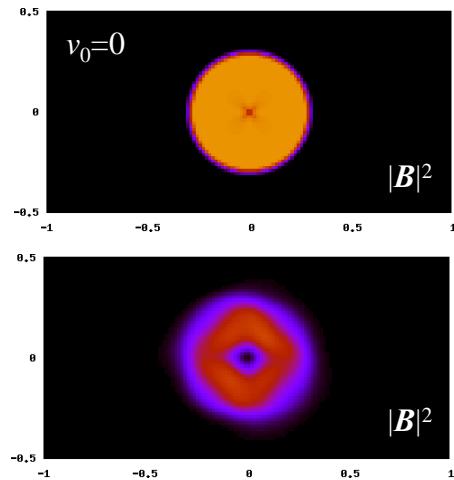
8-wave



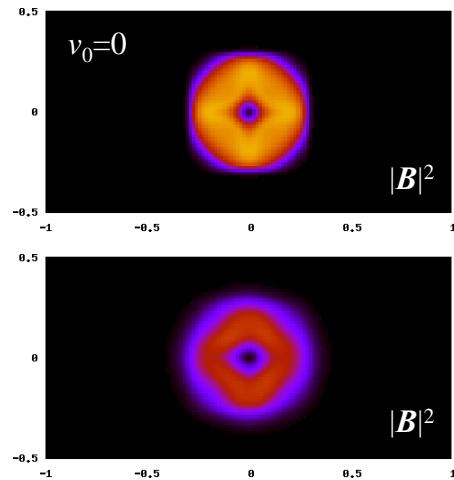
flux-CT



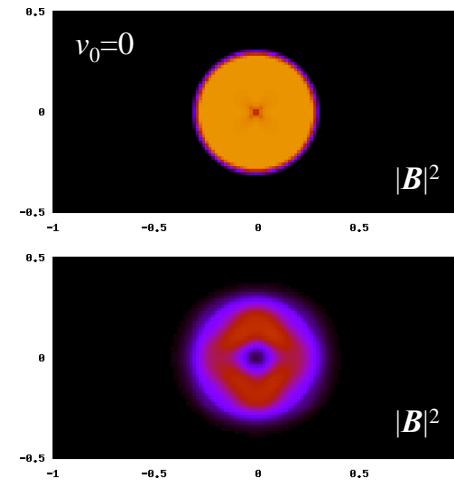
Face-projection



9-wave



HLL-flux-CT

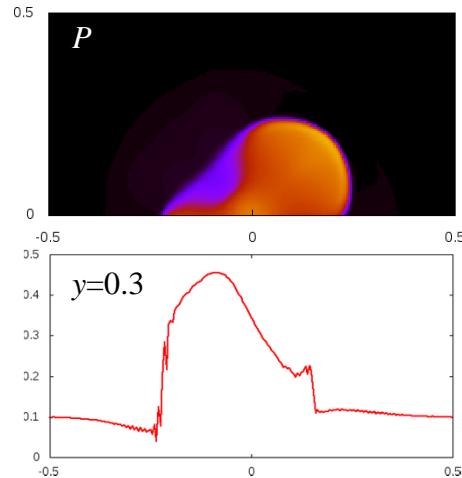




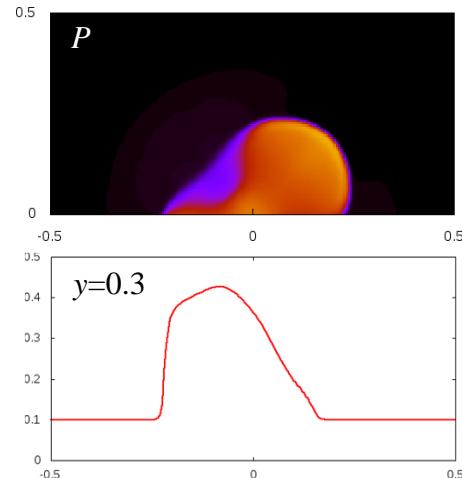
磁場発散の数値処理

□ 爆発風問題

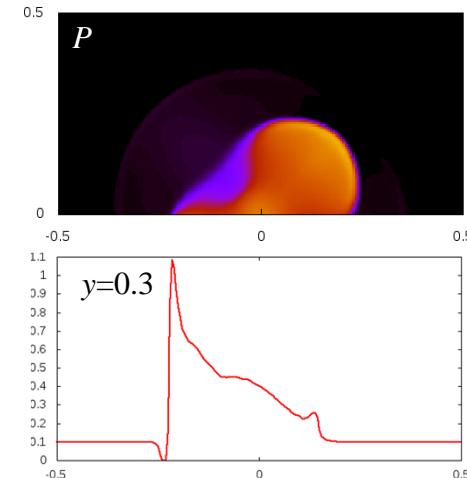
Projection



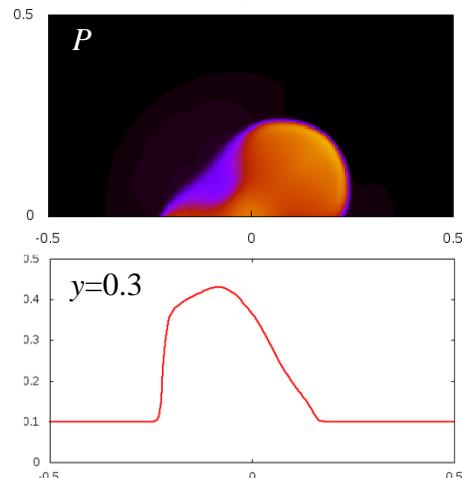
8-wave



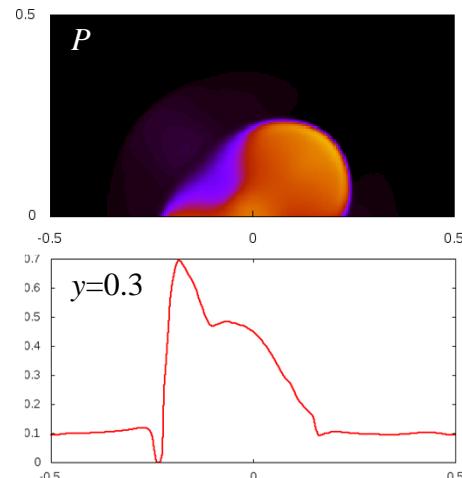
flux-CT



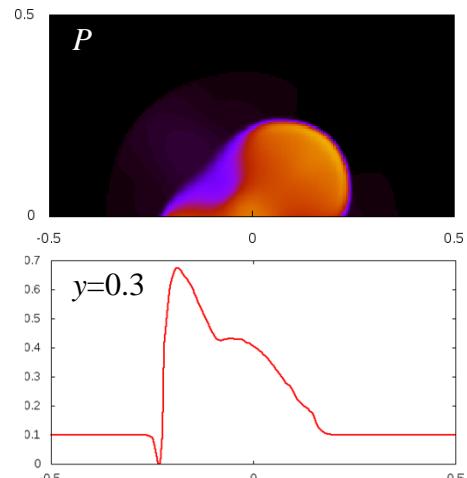
Face-projection



9-wave



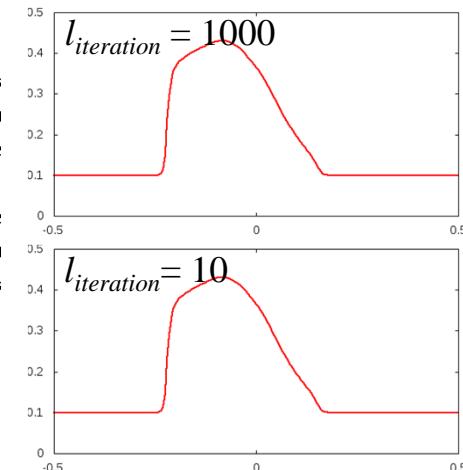
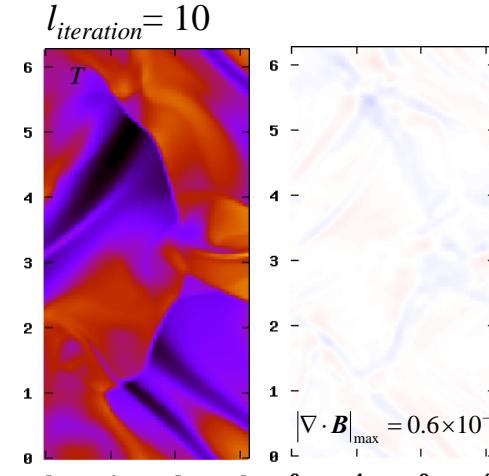
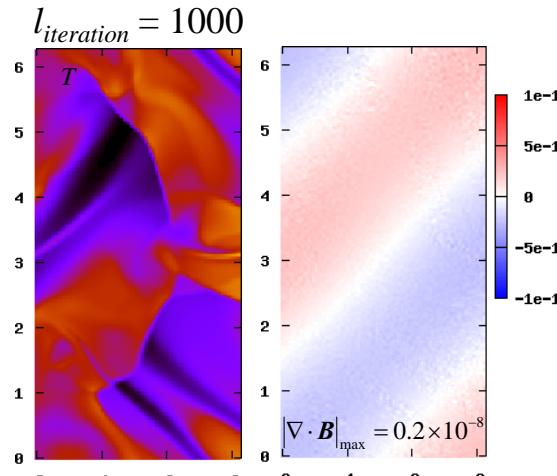
HLL-flux-CT



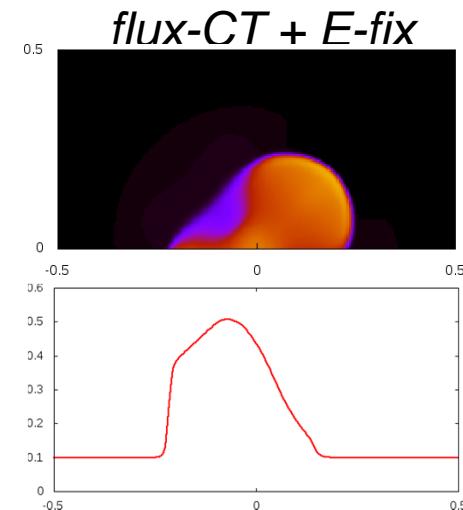
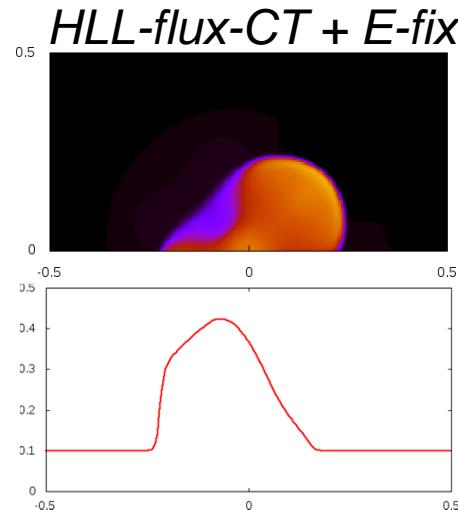
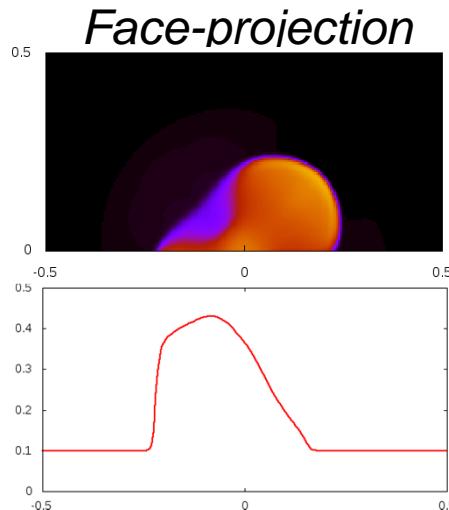


磁場発散の数値処理

□ 連立一次方程式の処理の手抜き



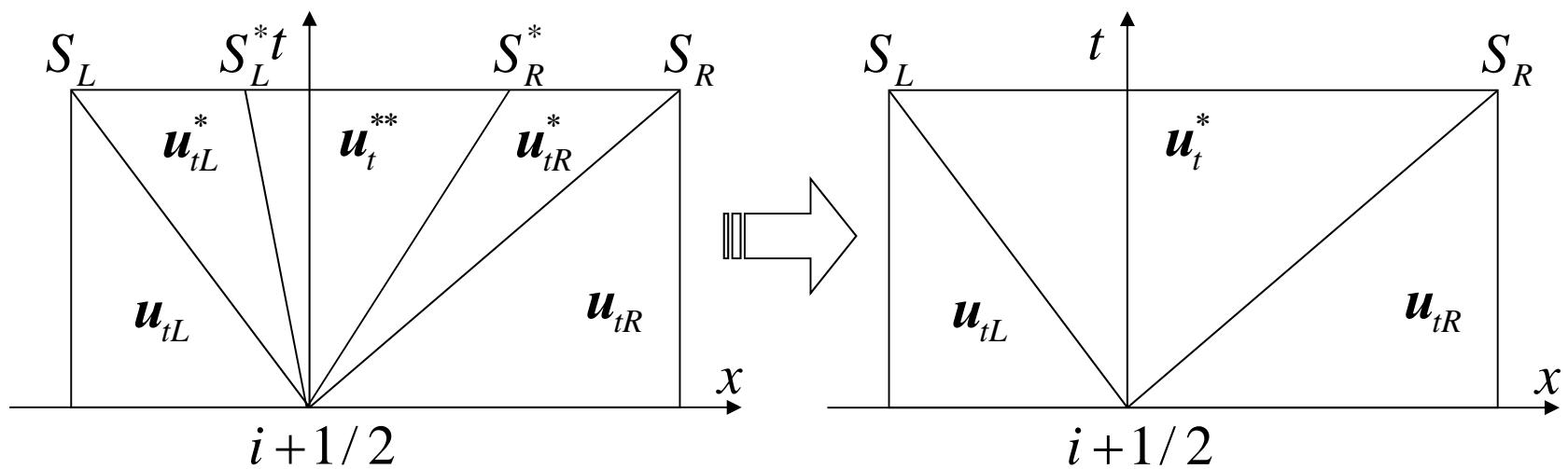
□ エネルギー補正: $e^{k+1} = e^* + \left(|\overline{\mathbf{B}}|^2 - |\mathbf{B}^*|^2 \right) / 2$





HLLD近似リーマン解法の展開

□ 横方向速度(接線速度)を一定と仮定

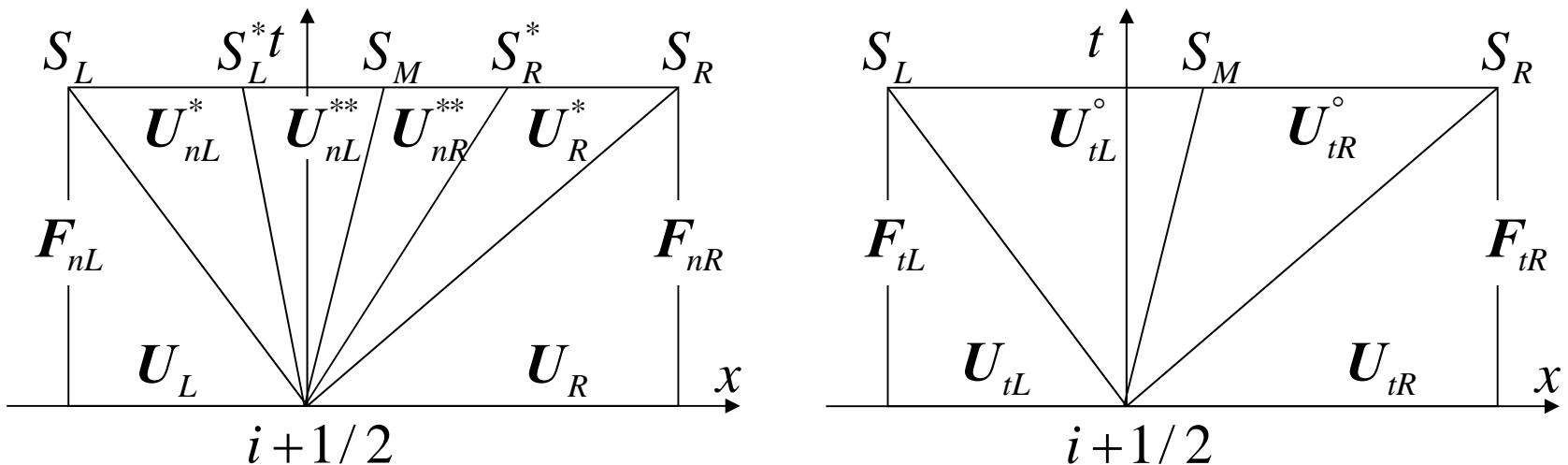




HLLD近似リーマン解法の展開

□ 横方向速度(接線速度)を一定と仮定

- $\mathbf{U}_t = (\rho v, \rho w)$: $\mathbf{U}_{tR,L}^{\circ} = \rho_{R,L}^* \mathbf{U}_t^* / \rho^*$
- $\mathbf{U}_n = (\rho, \rho u, B_x, B_y, B_z, e)$: HLLD解

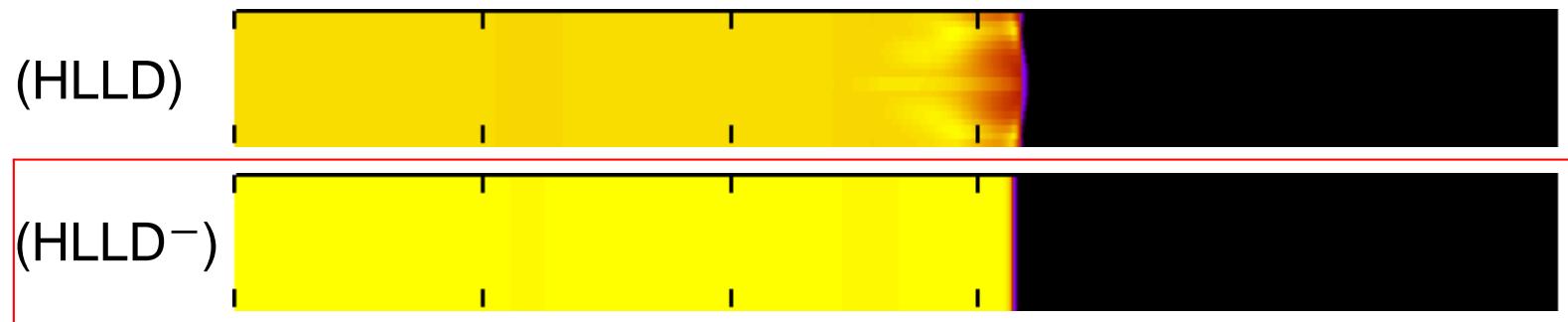


- \mathbf{U}_t に付加的に数値粘性
- 衝撃波安定のcontact-preserving解法(HLLD⁻法)

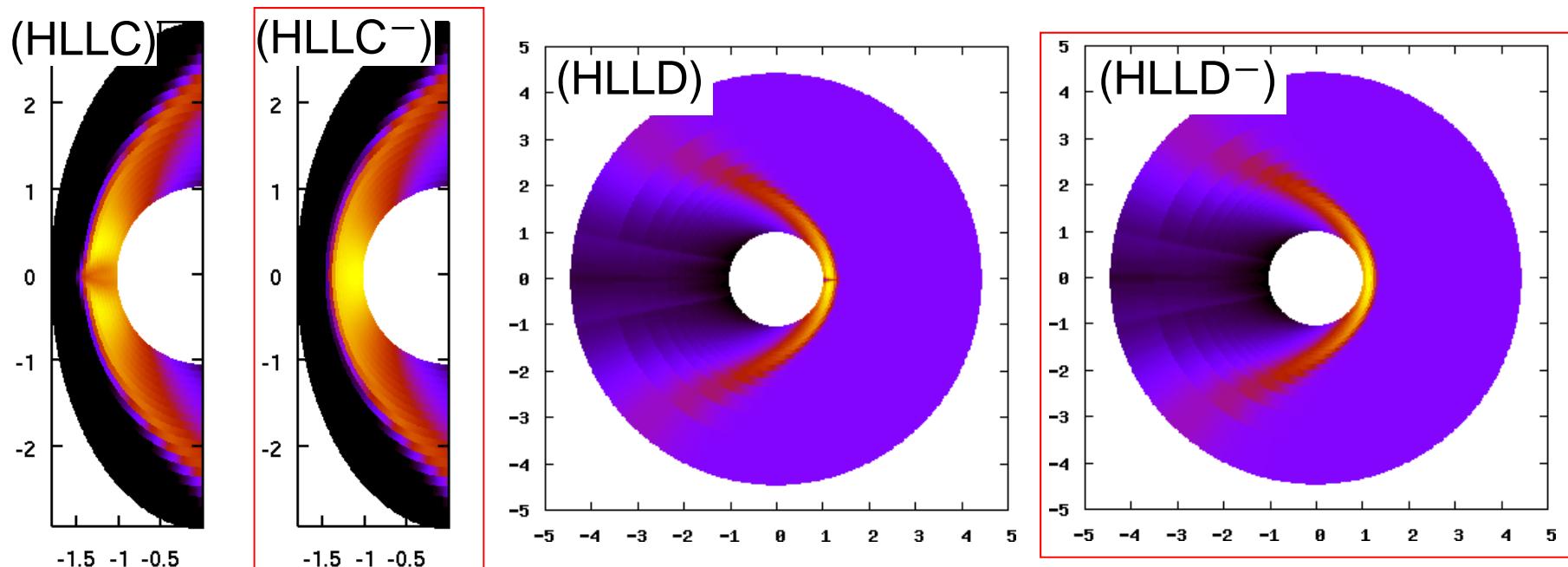


HLLD近似リーマン解法の展開

□ odd-evenデカップリング



□ カーバンクル現象





HLLD近似リーマン解法の展開

□ 背景ポテンシャル磁場を除去したMHD

$$U = [\rho, \rho \mathbf{u}, \mathbf{B}_1, e_1]^T,$$

$$F = [\rho \mathbf{u}, \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + p_{T1} \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B} + \mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0,$$

$$\mathbf{u} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u}, (\mathbf{e}_1 + p_{T1} - \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{u} - \mathbf{B}_1 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}_1) + \mathbf{B} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0)]^T,$$

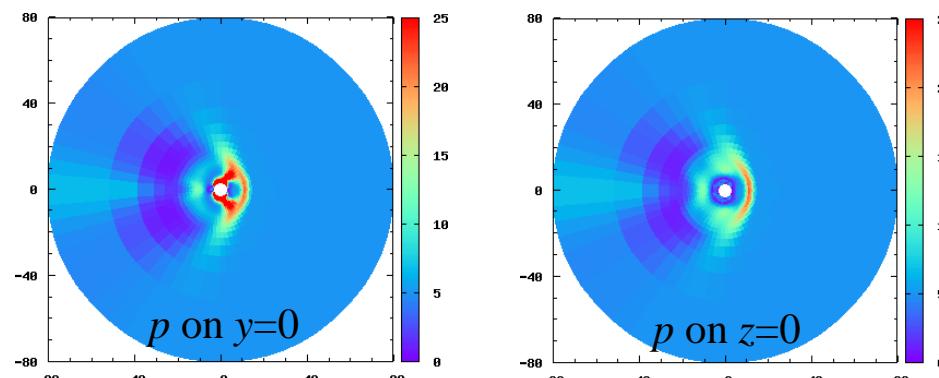
$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B} - \mathbf{B}_0, \quad p_{T1} = p + B_1^2/2 + \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_0,$$

$$p = (\gamma - 1)(e_1 - \rho u^2/2 - B_1^2/2)$$

■ セル境界のリーマン問題で \mathbf{B}_0 を一定と仮定

□ 数値実験：

太陽風-磁気圏





HLLD近似リーマン解法の展開

□ 多成分・一般化状態方程式のMHD

$$U = [\rho, \rho\mathbf{u}, \mathbf{B}, e, \rho_1, \dots, \rho_m]^T,$$

$$\mathbf{F} = [\rho\mathbf{u}, \rho\mathbf{u}\mathbf{u} + p_T \mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{B},$$

$$\mathbf{u}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{u}, (e + p_T)\mathbf{u} - \mathbf{B}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}), \rho_1\mathbf{u}, \dots, \rho_m\mathbf{u},]^T,$$

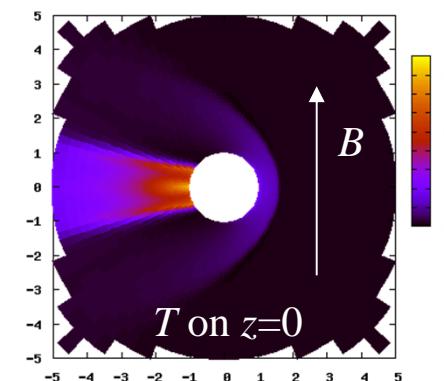
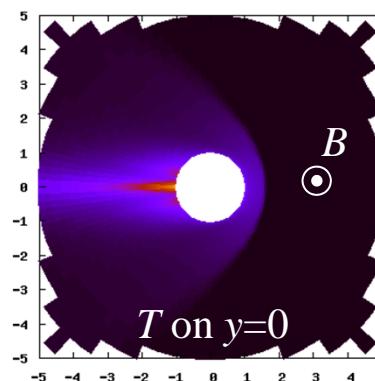
$$p = p(\rho, \varepsilon), \varepsilon = \varepsilon(\rho, p), e = \rho(\varepsilon + u^2/2 + B^2/2\rho), a^2 = (\partial p / \partial \rho)_s$$

□ 一般化状態方程式に依存した固有ベクトル不要

□ 数値実験：

van der Waals

$$p(\rho, \varepsilon) = \left(\frac{\gamma - 1}{1 - C_2 \rho} \right) (\rho \varepsilon + C_1 \rho^2) - C_1 \rho^2$$





HLLD近似リーマン解法の展開

- 保存型Boris修正MHD [Gombosi, et al., 2002]

$$\mathbf{U} = \left[\rho, \left(1 + B^2/\rho c^2\right) \rho \mathbf{u}, \mathbf{B}, e \right]^T,$$

$$\mathbf{F} = \left[\rho \mathbf{u}, \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + p_T \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B}, \mathbf{u} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u}, (e + p_T) \mathbf{u} - \mathbf{B} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \right]^T,$$

$$p_T = p + B^2/2, p = (\gamma - 1)(e - \rho u^2/2 - B^2/2)$$

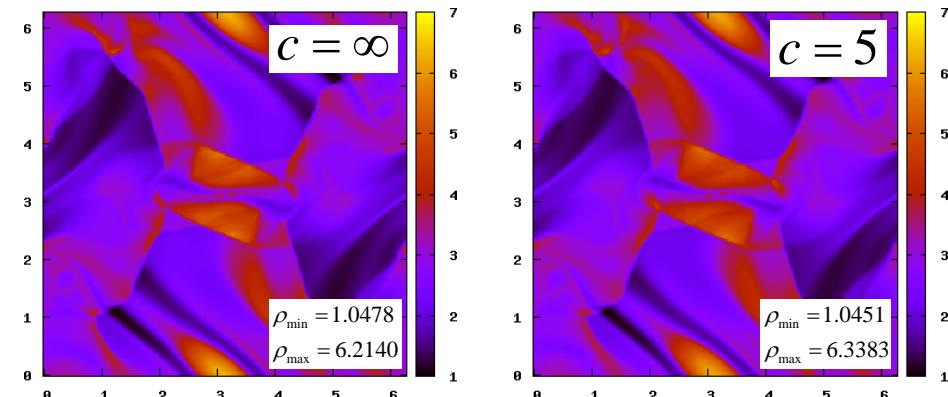
■ 強磁場付近で慣性が増大

- セル境界のリーマン問題において $\rho_A = B^2/c^2$ を一定と仮定（磁場とは非連動）

- 数値実験：

非定常問題

“Orszag-Tang渦”





HLLD近似リーマン解法の展開

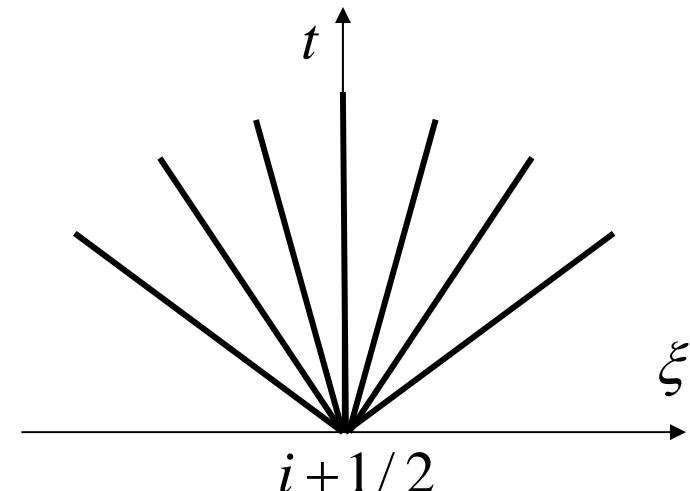
□ラグランジュ質量座標系におけるMHD

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} + \nabla_{\xi} \cdot \mathbf{F} = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla, \quad d\xi = \rho dr,$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \tau \\ \mathbf{u} \\ \tau \mathbf{B} \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\mathbf{u} \\ p_T \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B} \\ -\mathbf{B} \mathbf{u} \\ p_T \mathbf{u} - \mathbf{B}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \end{bmatrix},$$

$$\tau \equiv 1/\rho, \quad E \equiv e/\rho,$$

$$p_T = p + B^2/2, \quad p = (\gamma - 1) \left(E - u^2/2 - \tau B^2/2 \right) / \tau$$



- 正値性保存
- 見通しのよい定式化



HLLD近似リーマン解法の展開

□ 等温MHD-HLLD [Mignone, 2007]

$$U = [\rho, \rho\mathbf{u}, \mathbf{B}]^T, F = [\rho\mathbf{u}, \rho\mathbf{u}\mathbf{u} + p_T \mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{B}, \mathbf{u}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{u}]^T,$$

$$p_T = p + B^2/2, p = a^2\rho$$

■ リーマン問題を4-waveで近似

□ 相対論的MHD-HLLD [Mignone, et al., 2009]

$$U = [\Gamma\rho, \mathbf{m}, \mathbf{B}, \varepsilon]^T,$$

$$F = [\Gamma\rho\mathbf{u}, \Gamma^2 w\mathbf{u}\mathbf{u} + p_T \mathbf{I} - \mathbf{b}\mathbf{b}, \mathbf{u}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{m}]^T,$$

$$\mathbf{m} = \Gamma^2 w\mathbf{u} - b_0\mathbf{b}, \varepsilon = \Gamma^2 w - b_0 b_0 - p_T, p_T = p + B^2/2,$$

$$w = \rho + \gamma p / (\gamma - 1) + b^2, \mathbf{b} = \mathbf{B}/\Gamma + \Gamma(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}, b_0 = \Gamma(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B})$$

■ 5-wave近似(全圧一定と仮定)

■ 速度は一定でないため収束計算が必要



HLLD近似リーマン解法の展開

□衝撃波安定のcontact-and-rotational-preserving解法

■ Liou's conjecture [Liou, 2001]

$$m = m_{1/2} + \mathcal{D}^{(\rho)} \Delta \rho + \mathcal{D}^{(u)} \Delta u + \boxed{\mathcal{D}^{(p)} \Delta p} \quad (\text{圧力拡散項})$$

□衝撃波不安定性が成長するための必要条件：

$\mathcal{D}^{(p)} \neq 0, \forall M$ (Roe、HLLC(HLLD)など高解像度法)

□衝撃波安定であるための十分条件：

$\mathcal{D}^{(p)} = 0, \forall M$ (FVS、HLLなど低解像度法、AUSM+など)

■ 質量流束(粒子速度)の選択が重要

□HLLD法では保存則から粒子速度を評価

□ただし、粒子速度(全圧力)の評価は一意でない



HLLD近似リーマン解法の展開

□ 粒子速度と全圧力の選択

■ 近似リーマン解法とのハイブリッド

$$S_M^{modified} = \chi S_M + (1 - \chi) S_M^{upwind}$$

$$\begin{aligned} P_T^{modified} &= (1 + M_2)/2 \cdot (P_{TL} + \rho_L u_L (S_M - u_L)) \\ &\quad + (1 - M_2)/2 \cdot (P_{TR} + \rho_R u_R (S_M - u_R)) \end{aligned}$$

$$\chi \equiv \sqrt{1 - \min(1, M_1^2)}$$

$$M_1^2 \equiv (u_{nR}^2 + u_{t1R}^2 + u_{t2R}^2 + u_{nL}^2 + u_{t1L}^2 + u_{t2L}^2) / (a_R^2 + b_R^2 + a_L^2 + b_L^2)$$

$$M_2 = \max(-1, \min(1, 2S_M^{modified} / (S_R - S_L)))$$

$$a^2 = \gamma p / \rho, b^2 = (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) / \rho$$

□ $M \rightarrow 1$ のとき $\mathcal{D}^{(p)} \rightarrow 0$



HLLD近似リーマン解法の展開

□ 数値実験結果

