宇宙磁気流体・プラズマシミュレーション
サマースクール 2012

講義テキスト

第 1 章 訂正版

千葉大学

第1章　磁気流体力学波

1.1　基礎方程式

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0 \tag{1.1}$$

運動方程式

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial \pi_{ik}}{\partial x_k} - \frac{(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})_i}{c} + \rho\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0 \tag{1.2}$$

$$\pi_{ik} = P\,\delta_{ik} + \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_\ell}{\partial x_\ell}\right) + \zeta\,\delta_{ik}\frac{\partial v_\ell}{\partial x_\ell} \tag{1.3}$$

エネルギー収支

$$T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + v_k\frac{\partial s}{\partial x_k}\right) = \Gamma - \Lambda \tag{1.4}$$

マックスウェル方程式

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} \tag{1.5}$$

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + 4\pi\boldsymbol{j}\right) = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} \tag{1.6}$$

オームの法則

$$\boldsymbol{j} = \sigma\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{B}\right) \tag{1.7}$$

ここでは Einstein の記法を採用して書いている。今回のサマースクールでは粘性が小さく ($\eta,\ \zeta\to 0$)、電気伝導度が無限大 ($\sigma\to\infty$) である極限を考える。また変位電流を無視する。この近似は、平均自由行程が十分に短いと近似したことと同じである。また重力場や加熱・冷却も無視できると考える。この近似を行うと、運動方程式とマックスウェル方程式は

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}(B_iB_k) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{B_\ell^2}{2}\right)\right] = 0 \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \tag{1.9}$$

と書き換えられる。本章ではこのように近似した理想磁気流体力学方程式を使って磁気流体波を論じる。

t	時刻	x_i	座標
ρ	密度	P	圧力
T	温度	s	比エントロピー
Γ	単位質量あたりの加熱率	Λ	単位質量あたりの冷却率
$\boldsymbol{j}$	電流密度	$\boldsymbol{B}$	磁場
$\boldsymbol{E}$	電場	σ	電気伝導度
Φ	重力ポテンシャル	c	光速度
η	ずり粘性 (shear viscosity)	ζ	体積粘性 (bulk viscosity)
ε	単位質量あたりの内部エネルギー	$\boldsymbol{v}$	速度
E	単位質量あたりのエネルギー	H	単位質量あたりのエンタルピー
T	温度	R	気体定数
C_V	定積比熱	C_P	定圧比熱

表 1.1: 変数

理想気体の状態方程式

$$P = R\rho T \tag{1.10}$$
$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} \tag{1.11}$$
$$s = \frac{R}{\gamma - 1}(\ln P - \gamma \ln \rho) = C_V (\ln P - \gamma \ln \rho) \tag{1.12}$$
$$\varepsilon = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{P}{\rho} \tag{1.13}$$
$$P = e^{s/C_V}\rho^\gamma = K\rho^\gamma \tag{1.14}$$

エントロピーにはこの他に定数項が加わる。

1.2　保存形式

粘性が無視でき (inviscid)、電気伝導度が無限大である場合について考える。このとき流体力学方程式は次のようにまとめられる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0 \tag{1.15}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_j) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho v_j v_i - \frac{B_i B_j}{4\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(P + \frac{\boldsymbol{B}^2}{8\pi}\right) = \rho g_j \tag{1.16}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho H v_i - \frac{B_i}{4\pi}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B}\right) = \rho g_i v_i + \Gamma - \Lambda \tag{1.17}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} &= \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) &(1.18)\\
E &= \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{2} + \varepsilon + \frac{|\boldsymbol{B}|^2}{8\pi\rho} &(1.19)\\
H &= \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{2} + \varepsilon + \frac{P}{\rho} + \frac{|\boldsymbol{B}|^2}{4\pi\rho} &(1.20)
\end{aligned}
$$

式 (1.17) を導出するにあたり、 熱力学の関係式

$$
d\varepsilon = Tds - Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = Tds + \frac{P}{\rho^2}d\rho \tag{1.21}
$$

を用いた。

ベクトルを用いると上記の流体力学方程式は

$$
\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_y}{\partial z} = \boldsymbol{S} \tag{1.22}
$$

$$
\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad
\boldsymbol{F_x} = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + P + \frac{\boldsymbol{B}^2}{8\pi} - \frac{B_x^2}{4\pi} \\ \rho v_x v_y - \frac{B_x B_y}{4\pi} \\ \rho v_x v_z - \frac{B_x B_z}{4\pi} \\ 0 \\ v_x B_y - v_y B_x \\ v_x B_z - v_z B_x \\ \rho H v_x - \frac{B_x}{4\pi}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B}) \end{pmatrix}, \quad
\boldsymbol{F_y} = \begin{pmatrix} \rho v_y \\ \rho v_y v_x - \frac{\partial B_y B_x}{4\pi} \\ \rho v_y^2 + P + \frac{\boldsymbol{B}^2}{8\pi} - \frac{B_y^2}{4\pi} \\ \rho v_y v_z - \frac{\partial B_y B_z}{4\pi} \\ v_y B_x - v_x B_y \\ 0 \\ v_y B_z - v_y B_z \\ \rho H v_y - \frac{B_y}{4\pi}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B}) \end{pmatrix}, \tag{1.23}
$$

$$
\boldsymbol{F_z} = \begin{pmatrix} \rho v_z \\ \rho v_z v_x - \frac{B_z B_x}{4\pi} \\ \rho v_z v_y - \frac{B_z B_y}{4\pi} \\ \rho v_z^2 + P + \frac{\boldsymbol{B}^2}{8\pi} - \frac{B_z^2}{4\pi} \\ \rho v_y v_z \\ v_z B_x - v_x B_z \\ v_z B_y - v_y B_z \\ 0 \\ \rho H v_z - \frac{B_z}{4\pi}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B}) \end{pmatrix}, \quad
\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho g_x \\ \rho g_y \\ \rho g_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g} \end{pmatrix} \tag{1.24}
$$

と表せる。ここで $\boldsymbol{U}$ は状態ベクトル、$\boldsymbol{F}_x, \boldsymbol{F}_y, \boldsymbol{F}_z$ は流束、$\boldsymbol{S}$ は源泉項と呼ばれる。

1.3　線形波

流体力学波

すべての物理量は x や y に依らず、$(z,\ t)$ だけの関数とする。この状況では波は平面波に限られる。また最初は簡単のため磁場や重力場は存在しないとする。このとき運動方程式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \tag{1.25}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0 \tag{1.26}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0 \tag{1.27}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \tag{1.28}$$

$$\frac{ds}{\partial t} + v_z \frac{\partial s}{\partial z} = 0 \tag{1.29}$$

このとき全ての変化は平面波と考えられる。

もし時間変化がない定常状態では、$\rho, s, v_x, v_y, v_z, P$ はすべて一定。この状態に対して摂動を考える。

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \tag{1.30}$$

$$s = s_0 + s_1 \tag{1.31}$$

$$v_x = v_{x0} + v_{x1} \tag{1.32}$$

$$v_y = v_{y0} + v_{y1} \tag{1.33}$$

$$v_z = v_{z0} + v_{z1} \tag{1.34}$$

$$P = P_0 + P_1 \tag{1.35}$$

ただし状態方程式を解くと $\rho = \rho(P,\ s)$ が得られるので、

$$\rho_1 = \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_s P_1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_P s_1 \tag{1.36}$$

$$= c_s^{-2} P_1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_P s_1 \tag{1.37}$$

ここで c_s は音速を表す。

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + v_{z0}\frac{\partial \rho_1}{\partial z} + \rho_0 \frac{\partial v_{z1}}{\partial z} = 0 \tag{1.38}$$

$$\frac{\partial v_{x1}}{\partial t} + v_{z0}\frac{\partial v_{x1}}{\partial z} = 0 \tag{1.39}$$

$$\frac{\partial v_{y1}}{\partial t} \;+\; v_{z0}\frac{\partial v_{y1}}{\partial z} \;=\; 0 \tag{1.40}$$

$$\frac{\partial v_{z1}}{\partial t} \;+\; v_{z0}\frac{\partial v_{z1}}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P_1}{\partial z} \;=\; 0 \tag{1.41}$$

$$\frac{ds_1}{\partial t} \;+\; v_{z0}\frac{\partial s_1}{\partial z} \;=\; 0 \tag{1.42}$$

方程式 (1.39), (1.40), (1.42) は波が v_{z0} で進行することを表している。

$$v_{x1}(x,\ t) \;=\; v_{x1}(x - v_{z0}\Delta t,\ t - \Delta t) \tag{1.43}$$

$$v_{y1}(x,\ t) \;=\; v_{y1}(x - v_{z0}\Delta t,\ t - \Delta t) \tag{1.44}$$

$$s_1(x,\ t) \;=\; s_1(x - v_{z0}\Delta t,\ t - \Delta t) \tag{1.45}$$

ここで Δt は任意の時間差。

密度の変化は 2 成分に分け、式 (1.42) を代入すると

$$c_s^{-2}\frac{\partial P_1}{\partial t} \;+\; \frac{v_{z0}}{c_s^2}\frac{\partial P_1}{\partial z} \;+\; \rho_0\frac{\partial v_{z1}}{\partial z} \;=\; 0 \text{ が得られる。} \tag{1.46}$$

式 (1.46) に $c_s\rho_0$ を掛けてから式 (1.41) との和をとると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(v_{1x} + \frac{P_1}{\rho_0 c_s}\right) + (v_{z0} + c_s)\frac{\partial}{\partial z}\left(v_{1x} + \frac{P_1}{\rho_0 c_s}\right) \;=\; 0 \tag{1.47}$$

が得られる。同様な操作で差をとると

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(v_{1x} - \frac{P_1}{\rho_0 c_s}\right) + (v_{z0} - c_s)\frac{\partial}{\partial z}\left(v_{1x} - \frac{P_1}{\rho_0 c_s}\right) \;=\; 0 \tag{1.48}$$

が得られる。従って

$$J_+ \;=\; v_{1x} + \frac{P_1}{\rho_0 c_s} \tag{1.49}$$

$$J_+ \;=\; v_{1x} - \frac{P_1}{\rho_0 c_s} \tag{1.50}$$

により定義される $J\pm$ は $v_{z0} \pm c_s$ で伝播する。

磁気流体力学波

磁場を考慮した平面波を考える。再び全ての物理量は $(z,\ t)$ だけに依存する場合、$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0$ より、B_z は一定でなければならない。このことに注意して磁気流体方程式を書き直すと、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \;+\; \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) \;=\; 0 \tag{1.51}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial t} &+ v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{B_z}{4\pi\rho}\frac{\partial B_x}{\partial z} = 0 && (1.52)\\
\frac{\partial v_y}{\partial t} &+ v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{B_z}{4\pi\rho}\frac{\partial B_y}{\partial z} = 0 && (1.53)\\
\frac{\partial v_z}{\partial t} &+ v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{8\pi\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(B_x^2 + B_y^2\right) = 0 && (1.54)\\
\frac{\partial B_x}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(v_x B_z - v_z B_x\right) && (1.55)\\
\frac{\partial B_y}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(v_y B_z - v_z B_y\right) && (1.56)\\
\frac{ds}{\partial t} &+ v_z \frac{\partial s}{\partial z} = 0 && (1.57)
\end{aligned}
$$

が得られる。

定常状態では $\rho, P, v_x, v_y, v_z, B_x, B_y$ は全て一定。ここでは平衡状態として $v_x = v_y = 0$ で、$B_y = 0$ $B_z \geq 0$ である場合を考える。この状態の周りの摂動を考える。

$$
\begin{aligned}
\rho &= \rho_0 + \rho_1 && (1.58)\\
s &= s_0 + s_1 && (1.59)\\
v_x &= v_{x1} && (1.60)\\
v_y &= v_{y1} && (1.61)\\
v_z &= v_{z0} + v_{z1} && (1.62)\\
B_x &= B_{x0} + B_{x1} && (1.63)\\
B_y &= B_{y1} && (1.64)\\
B_z &= B_{z0} && (1.65)\\
P &= P_0 + P_1 && (1.66)
\end{aligned}
$$

摂動方程式は

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_1}{\partial t} &+ v_{z0}\frac{\partial \rho_1}{\partial z} + \rho_0 \frac{\partial v_{z1}}{\partial z} = 0 && (1.67)\\
\frac{\partial v_{x1}}{\partial t} &+ v_{z0}\frac{\partial v_{x1}}{\partial z} - \frac{B_{z0}}{4\pi\rho_0}\frac{\partial B_{x1}}{\partial z} = 0 && (1.68)\\
\frac{\partial v_{y1}}{\partial t} &+ v_{z0}\frac{\partial v_{y1}}{\partial z} - \frac{B_{z0}}{4\pi\rho_0}\frac{\partial B_{y1}}{\partial z} = 0 && (1.69)\\
\frac{\partial v_{z1}}{\partial t} &+ v_{z0}\frac{\partial v_{z1}}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P_1}{\partial z} + \frac{B_{x0}}{4\pi\rho_0}\frac{\partial B_{x1}}{\partial z} = 0 && (1.70)\\
\frac{\partial B_{x1}}{\partial t} &+ v_{z0}\frac{\partial B_{x1}}{\partial z} + B_{x0}\frac{\partial v_{z1}}{\partial z} = B_{z0}\frac{\partial v_{x1}}{\partial z} && (1.71)\\
\frac{\partial B_{y1}}{\partial t} &+ v_{z0}\frac{\partial B_{y1}}{\partial z} = B_{z0}\frac{\partial v_{y1}}{\partial z} && (1.72)\\
\frac{ds_1}{\partial t} &+ v_{z0}\frac{\partial s_1}{\partial z} = 0 && (1.73)
\end{aligned}
$$

と書き表される。

エントロピー波

式 (1.73) は式 (1.42) と同一で、s_1 が v_{z0} で移流伝播することを表している。

アルフヴェン波

運動方程式と誘導方程式の y 成分の線形結合をとると

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(v_y + \frac{B_{1y}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}\right) + \left(v_{z0} - \frac{B_{z0}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(v_y + \frac{B_{1y}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}\right) = 0 \tag{1.74}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(v_y - \frac{B_{1y}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}\right) + \left(v_{z0} + \frac{B_{z0}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(v_y - \frac{B_{1y}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}\right) = 0 \tag{1.75}$$

ここで $v_y \pm B_{y1}/\sqrt{4\pi\rho_0}$ は Elsässaer variable である。平衡状態で磁場は xz 平面内にあるとしたので、y 方向は平均磁場と波数のどちらにも垂直となっている。従ってこの方程式は、横波を表している。伝播速度はアルフヴェン速度と呼ばれ、波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ を用いて次のように評価できる。

$$v_{Az} \equiv \frac{|B_{z0}|}{\sqrt{4\pi\rho_0}} = \frac{|\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0|}{k\sqrt{4\pi\rho_0}} \tag{1.76}$$

磁気音波

残りの 4 本の微分方程式は

$$c_s^{-2}\frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{v_{z0}}{c_s^2}\frac{\partial P_1}{\partial z} + \rho_0\frac{\partial v_{z1}}{\partial z} = 0 \tag{1.77}$$

$$\frac{\partial v_{x1}}{\partial t} + v_{z0}\frac{\partial v_{x1}}{\partial z} - \frac{B_{z0}}{4\pi\rho_0}\frac{\partial B_{x1}}{\partial z} = 0 \tag{1.78}$$

$$\frac{\partial v_{z1}}{\partial t} + v_{z0}\frac{\partial v_{z1}}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P_1}{\partial z} + \frac{B_{x0}}{4\pi\rho_0}\frac{\partial B_{x1}}{\partial z} = 0 \tag{1.79}$$

$$\frac{\partial B_{x1}}{\partial t} + v_{z0}\frac{\partial B_{x1}}{\partial z} + B_{x0}\frac{\partial v_{z1}}{\partial z} = B_{z0}\frac{\partial v_{x1}}{\partial z} \tag{1.80}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t} + v_{z0}\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial z} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -v_{Az} \\ c_s & 0 & 0 & v_{Ax} \\ 0 & -v_{Az} & v_{Ax} & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial z} = 0 \tag{1.81}$$

$$
\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \dfrac{P_1}{c_s\rho_0} \\ v_{x1} \\ v_{z1} \\ \dfrac{B_{x1}}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \end{pmatrix} \tag{1.82}
$$

分散関係

$$
\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega\,, \qquad \frac{\partial}{\partial z} \to ik\,, \qquad \lambda = \frac{\omega}{k} \tag{1.83}
$$

$$
(\lambda - v_{z0})^4 - \left(c_s^2 + v_{Ax}^2 + v_{Az}^2\right)(\lambda - v_{z0})^2 + c_s^2 v_{Az}^2 \tag{1.84}
$$

$$
\lambda = v_{z0} \pm v_f\,,\ v_{z0} \pm v_s \tag{1.85}
$$

$$
v_f^2 = \frac{c_s^2 + v_{Ax}^2 + v_{Az}^2 + \sqrt{(c_s^2 + v_{Ax}^2 - v_{Az}^2)^2 + 4v_{Ax}^2 V_{Az}^2}}{2} \tag{1.86}
$$

$$
v_s^2 = \frac{c_s^2 + v_{Ax}^2 + v_{Az}^2 - \sqrt{(c_s^2 + v_{Ax}^2 - v_{Az}^2)^2 + 4v_{Ax}^2 V_{Az}^2}}{2} \tag{1.87}
$$

1.4　非線形効果

伝播速度は位相により異なる。最も簡単な例は磁場がない等エントロピーの流れ。

$$
\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \tag{1.88}
$$

$$
\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \tag{1.89}
$$

密度は圧力だけの関数であることに注意すると、連続の式は

$$
\frac{1}{c_s\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z}\right) + c_s\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{1.90}
$$

と書き改められる。新しい変数として

$$
w \equiv \int \frac{1}{c_s\rho}\,dP \tag{1.91}
$$

と置くと流体力学方程式は

$$
\frac{\partial w}{\partial t} + v_z\frac{\partial w}{\partial z} + c_s\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{1.92}
$$

$$
\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} + c_s\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{1.93}
$$

$$
\frac{\partial J_\pm}{\partial t} + (v_z \pm c_s)\frac{\partial J_\pm}{\partial z} = 0 \tag{1.94}
$$

$$J_{\pm} = v_z \pm w \tag{1.95}$$

ここで波の振幅を表す変数 $J_{\pm}$ を Riemann 不変量と呼ぶ。エントロピーや Elsässer variable も Riemann 不変量である。

初期に $J_{-} = 0$ であれば、つねに $J_{-} = 0$ なので $J = 2v_z = 2w$。伝播速度 $v_z + w$ は、J が大きいほど大きい。従って初期の波形が正弦波でも次第に切り立った波形に変わる。ついには衝撃波へと変化する。

比熱比 γ が一定の理想気体の場合、

$$w = \frac{2c_s}{\gamma - 1} \propto \rho^{(\gamma-1)/2} \tag{1.96}$$

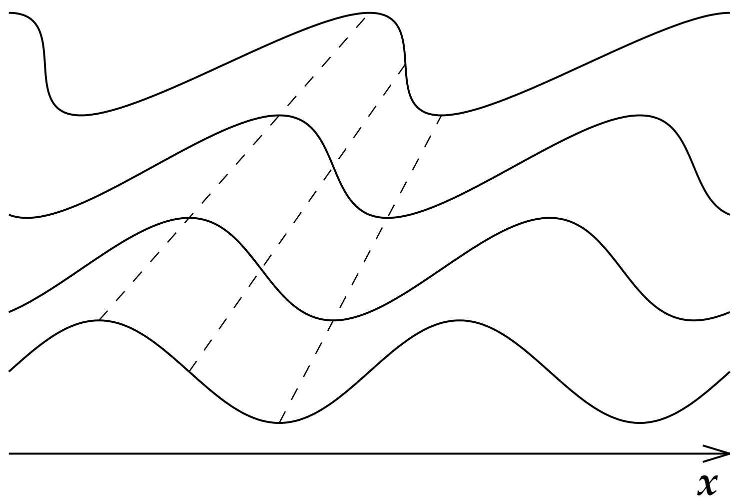

図 1.1: 波の伝播による波頭の先鋭化

1.5　波の固有ベクトル

磁場のない場合

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ \rho E \end{pmatrix} \tag{1.97}$$

$$
\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{U} &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_P s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ H - C_p T \end{pmatrix} + v_{x1} \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \\ 0 \\ 0 \\ \rho v_x \end{pmatrix} + v_{y1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \\ 0 \\ \rho v_y \end{pmatrix} \\
&\quad + v_{z1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho \\ \rho v_z \end{pmatrix} + c_s^{-2} P_1 \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ H \end{pmatrix} \qquad (1.98) \\
&= \left(\rho_1 - \frac{P_1}{c_s^2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ H - C_p T \end{pmatrix} + v_{x1} \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \\ 0 \\ 0 \\ \rho v_x \end{pmatrix} + v_{y1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \\ 0 \\ \rho v_y \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{P_1}{c_s^2} + \frac{\rho v_{z1}}{c_s}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z + c_s \\ H + c_s v_z \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left(\frac{P_1}{c_s^2} - \frac{\rho v_{z1}}{c_s}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z - c_s \\ H - c_s v_z \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

磁場のある場合

$$
\Delta \boldsymbol{U} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_P s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ H - C_p T \end{pmatrix} + v_{x1} \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho v_x \end{pmatrix} + v_{y1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho v_y \end{pmatrix}
$$

$$
+ \ \frac{1}{2}\left(\frac{P_1}{c_s^2} + \frac{\rho v_{z1}}{c_s}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z + c_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ H + c_s v_z \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(\frac{P_1}{c_s^2} - \frac{\rho v_{z1}}{c_s}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z - c_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ H - c_s v_z \end{pmatrix}
$$

$$
+ \ B_{1x}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{B_{0x}}{4\pi} \end{pmatrix} + B_{1y}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.99}
$$

エントロピー波は流体のときと同じ。

アルフヴェン波による変化は

$$
\Delta \boldsymbol{U}_{\mathrm{Alfven}} = \left(v_{y1} + \frac{B_{y1}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{4\pi\rho_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(v_{y1} - \frac{B_{y1}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{4\pi\rho_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.100}
$$

と表される。

$\lambda = v_{z0} + v_*$ で伝播する磁気音波による変化 (固有ベクトル)

$$
d\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} c_s c_{Ax} v_* \\ \left(c_s^2 - v_*^2\right) v_{Az} \\ v_*^2 c_{Ax} \\ (c_s^2 - v_*^2) v_* \end{pmatrix} \tag{1.101}
$$

と表される。

伝播速度の大小

$$
-v_f \le -v_{\mathrm{Az}} \le -v_s \le 0 \le v_s \le v_{Az} \le v_f \tag{1.102}
$$