

磁気流体シミュレーション CANS



# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>磁気流体力学波</b>	<b>5</b>
1.1	基礎方程式	5
1.2	保存形式	7
1.3	線形波	8
1.4	非線形効果	12
1.5	波の固有ベクトル	13
<b>第 2 章</b>	<b>差分法の基礎</b>	<b>17</b>
2.1	差分近似	17
2.2	線形スカラー移流方程式の差分解法	19
2.2.1	1次元線形スカラー移流方程式	19
2.2.2	FTCS スキーム	19
2.2.3	FTCS スキームの数値的安定性	20
2.2.4	Lax-Friedrich のスキーム	23
2.2.5	1次精度風上差分法	24
2.2.6	Lax-Wendroff のスキーム	27
2.3	保存形表示と数値流束	29
2.4	Burgers 方程式の数値解法	30
2.5	流束制限関数	32
2.6	TVD スキーム	34
2.7	放物型方程式の差分解法	35
<b>第 3 章</b>	<b>磁気流体力学方程式に対する近似リーマン解法</b>	<b>39</b>
3.1	基礎方程式	39
3.1.1	MHD 方程式	39
3.1.2	1次元理想 MHD 方程式	40
3.2	近似リーマン解法	41
3.2.1	線形近似リーマン解法	43
3.2.2	HLL 近似リーマン解法	44
3.2.3	HLLD 近似リーマン解法	46
3.3	付録	50
3.3.1	HLL 型近似リーマン解法の正值性の証明	50
3.3.2	HLLD 近似リーマン解法のサンプルプログラム	53

<b>第4章</b>	<b>CANSを使った磁気流体力学シミュレーション</b>	<b>59</b>
4.1	CANSとは	59
4.1.1	天文数値ソフトウェア	59
4.1.2	CANSで何ができるか？	59
4.1.3	CANSの特徴	59
4.2	CANSを使ってみよう	60
4.2.1	動作環境	60
4.2.2	インストールとIDL設定	60
4.2.3	準備コンパイル	61
4.2.4	プログラムの実行	62
4.2.5	IDLによる可視化	63
4.3	計算プログラムの解説	64
4.3.1	メインルーチン main.f	64
4.3.2	サブルーチン model.f: メッシュ座標・初期条件設定	71
4.3.3	サブルーチン bnd.f: 境界条件	73
<b>第5章</b>	<b>実習の手引き (差分法の実習、磁気流体基本課題)</b>	<b>75</b>
5.1	スカラー方程式の差分解法	75
5.1.1	プログラムのコンパイルと実行 (make)	75
5.1.2	出力ファイルの説明 (out.dat)	76
5.1.3	結果の可視化表示	76
5.1.4	プログラムの変更について	77
5.1.5	データのアニメーション表示 (.r anime)	79
5.2	差分法の実習課題	85
5.2.1	1次元波動方程式	85
5.2.2	Burgers 方程式	86
5.2.3	1次元拡散方程式	86
5.3	CANS 基本課題	87
<b>第6章</b>	<b>応用課題例</b>	<b>89</b>
6.1	モーメント法を用いた相対論的輻射流体の数値解法	89
6.1.1	相対論的輻射流体方程式	89
6.1.2	課題	91

# 第1章 磁気流体力学波

花輪知幸 (千葉大学)

## 1.1 基礎方程式

連続の式

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) (\rho v_i) = 0 \quad (1.1)$$

運動方程式

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial \pi_{ik}}{\partial x_k} - \frac{(\mathbf{j} \times \mathbf{B})_i}{c} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0 \quad (1.2)$$

$$\pi_{ik} = P \delta_{ik} + \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_\ell}{\partial x_\ell} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_\ell}{\partial x_\ell} \quad (1.3)$$

エネルギー収支

$$T \left( \frac{\partial s}{\partial t} + v_k \frac{\partial s}{\partial x_k} \right) = \Gamma - \Lambda \quad (1.4)$$

マックスウェル方程式

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (1.5)$$

$$\frac{1}{c} \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{j} \right) = \nabla \times \mathbf{B} \quad (1.6)$$

オームの法則

$$\mathbf{j} = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (1.7)$$

ここでは Einstein の記法を採用して書いている。今回のサマースクールでは粘性が小さく ( $\eta, \zeta \rightarrow 0$ )、電気伝導度が無限大 ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) である極限を考える。また変位電流を無視する。この近似は、平均自由行程が十分に短いと近似したことと同じである。また重力場や加熱・冷却も無視できると考える。この近似を行うと、運動方程式とマックスウェル方程式は

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} (B_i B_k) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{B_\ell^2}{2} \right) \right] = 0 \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.9)$$

と書き換えられる。本章ではこのように近似した理想磁気流体力学方程式を使って磁気流体波を論じる。

$t$	時刻	$x_i$	座標
$\rho$	密度	$P$	圧力
$T$	温度	$s$	比エントロピー
$\Gamma$	単位質量あたりの加熱率	$\Lambda$	単位質量あたりの冷却率
$\mathbf{j}$	電流密度	$\mathbf{B}$	磁場
$\mathbf{E}$	電場	$\sigma$	電気伝導度
$\Phi$	重力ポテンシャル	$c$	光速
$\eta$	ずり粘性 (shear viscosity)	$\zeta$	体積粘性 (bulk viscosity)
$\varepsilon$	単位質量あたりの内部エネルギー	$\mathbf{v}$	速度
$E$	単位質量あたりのエネルギー	$H$	単位質量あたりのエンタルピー
$T$	温度	$R$	気体定数
$C_V$	定積比熱	$C_P$	定圧比熱

表 1.1: 変数

## 理想気体の状態方程式

$$P = R\rho T \quad (1.10)$$

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} \quad (1.11)$$

$$s = \frac{R}{\gamma - 1} (\ln P - \gamma \ln \rho) = C_V (\ln P - \gamma \ln \rho) \quad (1.12)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} \quad (1.13)$$

$$P = e^{s/C_V} \rho^\gamma = K\rho^\gamma \quad (1.14)$$

エントロピーにはこの他に定数項が加わる。

## 1.2 保存形式

粘性が無視でき (inviscid)、電気伝導度が無限大である場合について考える。このとき流体力学方程式は次のようにまとめられる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0 \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_j) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho v_j v_i - \frac{B_i B_j}{4\pi} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( P + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} \right) = \rho g_j \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho H v_i - \frac{B_i}{4\pi} \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \right) = \rho g_i v_i + \Gamma - \Lambda \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.18)$$

$$E = \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \varepsilon + \frac{|\mathbf{B}|^2}{8\pi\rho} \quad (1.19)$$

$$H = \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \varepsilon + \frac{P}{\rho} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{4\pi\rho} \quad (1.20)$$

式 (1.17) を導出するにあたり、熱力学の関係式

$$d\varepsilon = T ds - P d\left(\frac{1}{\rho}\right) = T ds + \frac{P}{\rho^2} d\rho \quad (1.21)$$

を用いた。

ベクトルを用いると上記の流体力学方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_z}{\partial z} = \mathbf{S} \quad (1.22)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_x = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + P + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} - \frac{B_x^2}{4\pi} \\ \rho v_x v_y - \frac{B_x B_y}{4\pi} \\ \rho v_x v_z - \frac{B_x B_z}{4\pi} \\ 0 \\ v_x B_y - v_y B_x \\ v_x B_z - v_z B_x \\ \rho H v_x - \frac{B_x}{4\pi} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_y = \begin{pmatrix} \rho v_y \\ \rho v_y v_x - \frac{\partial B_y B_x}{4\pi} \\ \rho v_y^2 + P + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} - \frac{B_y^2}{4\pi} \\ \rho v_y v_z - \frac{\partial B_y B_z}{4\pi} \\ v_y B_x - v_x B_y \\ 0 \\ v_y B_z - v_z B_x \\ \rho H v_y - \frac{B_y}{4\pi} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

$$\mathbf{F}_z = \begin{pmatrix} \rho v_z \\ \rho v_z v_x - \frac{B_z B_x}{4\pi} \\ \rho v_z v_y - \frac{B_z B_y}{4\pi} \\ \rho v_z^2 + P + \frac{B_z^2}{8\pi} - \frac{B_z^2}{4\pi} \\ \rho v_y v_z \\ v_z B_x - v_x B_z \\ v_z B_y - v_y B_z \\ 0 \\ \rho H v_z - \frac{B_z}{4\pi} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho g_x \\ \rho g_y \\ \rho g_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

と表せる。ここで  $\mathbf{U}$  は状態ベクトル、 $\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y, \mathbf{F}_z$  は流束、 $\mathbf{S}$  は源泉項と呼ばれる。

### 1.3 線形波

#### 流体力学波

すべての物理量は  $x$  や  $y$  に依らず、 $(z, t)$  だけの関数とする。この状況では波は平面波に限られる。また最初は簡単のため磁場や重力場は存在しないとする。このとき運動方程式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0 \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0 \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (1.28)$$

$$\frac{ds}{dt} + v_z \frac{\partial s}{\partial z} = 0 \quad (1.29)$$

このとき全ての变化は平面波と考えられる。

もし時間変化がない定常状態では、 $\rho, s, v_x, v_y, v_z, P$  はすべて一定。この状態に対して摂動を考える。

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad (1.30)$$

$$s = s_0 + s_1 \quad (1.31)$$

$$v_x = v_{x0} + v_{x1} \quad (1.32)$$

$$v_y = v_{y0} + v_{y1} \quad (1.33)$$

$$v_z = v_{z0} + v_{z1} \quad (1.34)$$

$$P = P_0 + P_1 \quad (1.35)$$

ただし状態方程式を解くと  $\rho = \rho(P, s)$  が得られるので、

$$\rho_1 = \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s P_1 + \left( \frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_P s_1 \quad (1.36)$$

$$= c_s^{-2} P_1 + \left( \frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_P s_1 \quad (1.37)$$

ここで  $c_s$  は音速を表す。

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + v_{z0} \frac{\partial \rho_1}{\partial z} + \rho_0 \frac{\partial v_{z1}}{\partial z} = 0 \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial v_{x1}}{\partial t} + v_{z0} \frac{\partial v_{x1}}{\partial z} = 0 \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial v_{y1}}{\partial t} + v_{z0} \frac{\partial v_{y1}}{\partial z} = 0 \quad (1.40)$$

$$\frac{\partial v_{z1}}{\partial t} + v_{z0} \frac{\partial v_{z1}}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_1}{\partial z} = 0 \quad (1.41)$$

$$\frac{ds_1}{\partial t} + v_{z0} \frac{\partial s_1}{\partial z} = 0 \quad (1.42)$$

方程式 (1.39), (1.40), (1.42) は波が  $v_{z0}$  で進行することを表している。

$$v_{x1}(x, t) = v_{x1}(x - v_{z0}\Delta t, t - \Delta t) \quad (1.43)$$

$$v_{y1}(x, t) = v_{y1}(x - v_{z0}\Delta t, t - \Delta t) \quad (1.44)$$

$$s_1(x, t) = s_1(x - v_{z0}\Delta t, t - \Delta t) \quad (1.45)$$

ここで  $\Delta t$  は任意の時間差。

密度の変化は 2 成分に分け、式 (1.42) を代入すると

$$c_s^{-2} \frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{v_{z0}}{c_s^2} \frac{\partial P_1}{\partial z} + \rho_0 \frac{\partial v_{z1}}{\partial z} = 0 \text{ が得られる。} \quad (1.46)$$

式 (1.46) に  $c_s \rho_0$  を掛けてから式 (1.41) との和をとると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( v_{1x} + \frac{P_1}{\rho_0 c_s} \right) + (v_{z0} + c_s) \frac{\partial}{\partial z} \left( v_{1x} + \frac{P_1}{\rho_0 c_s} \right) = 0 \quad (1.47)$$

が得られる。同様な操作で差をとると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( v_{1x} - \frac{P_1}{\rho_0 c_s} \right) + (v_{z0} - c_s) \frac{\partial}{\partial z} \left( v_{1x} - \frac{P_1}{\rho_0 c_s} \right) = 0 \quad (1.48)$$

が得られる。従って

$$J_+ = v_{1x} + \frac{P_1}{\rho_0 c_s} \quad (1.49)$$

$$J_- = v_{1x} - \frac{P_1}{\rho_0 c_s} \quad (1.50)$$

により定義される  $J_{\pm}$  は  $v_{z0} \pm c_s$  で伝播する。

## 磁気流体力学波

磁場を考慮した平面波を考える。再び全ての物理量は  $(z, t)$  だけに依存する場合、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  より、 $B_z$  は一定でなければならない。このことに注意して磁気流体方程式を書き直すと、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (1.51)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{B_z}{4\pi\rho} \frac{\partial B_x}{\partial z} = 0 \quad (1.52)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{B_z}{4\pi\rho} \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0 \quad (1.53)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{8\pi\rho} \frac{\partial}{\partial z} (B_x^2 + B_y^2) = 0 \quad (1.54)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} (v_x B_z - v_z B_x) \quad (1.55)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} (v_y B_z - v_z B_y) \quad (1.56)$$

$$\frac{ds}{\partial t} + v_z \frac{\partial s}{\partial z} = 0 \quad (1.57)$$

が得られる。

定常状態では  $\rho, P, v_x, v_y, v_z, B_x, B_y$  は全て一定。ここでは平衡状態として  $v_x = v_y = 0$  で、 $B_y = 0, B_z \geq 0$  である場合を考える。この状態の周りの摂動を考える。

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad (1.58)$$

$$s = s_0 + s_1 \quad (1.59)$$

$$v_x = v_{x1} \quad (1.60)$$

$$v_y = v_{y1} \quad (1.61)$$

$$v_z = v_{z0} + v_{z1} \quad (1.62)$$

$$B_x = B_{x0} + B_{x1} \quad (1.63)$$

$$B_y = B_{y1} \quad (1.64)$$

$$B_z = B_{z0} \quad (1.65)$$

$$P = P_0 + P_1 \quad (1.66)$$

摂動方程式は

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + v_{z0} \frac{\partial \rho_1}{\partial z} + \rho_0 \frac{\partial v_{z1}}{\partial z} = 0 \quad (1.67)$$

$$\frac{\partial v_{x1}}{\partial t} + v_{z0} \frac{\partial v_{x1}}{\partial z} - \frac{B_{z0}}{4\pi\rho_0} \frac{\partial B_{x1}}{\partial z} = 0 \quad (1.68)$$

$$\frac{\partial v_{y1}}{\partial t} + v_{z0} \frac{\partial v_{y1}}{\partial z} - \frac{B_{z0}}{4\pi\rho_0} \frac{\partial B_{y1}}{\partial z} = 0 \quad (1.69)$$

$$\frac{\partial v_{z1}}{\partial t} + v_{z0} \frac{\partial v_{z1}}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_1}{\partial z} + \frac{B_{x0}}{4\pi\rho_0} \frac{\partial B_{x1}}{\partial z} = 0 \quad (1.70)$$

$$\frac{\partial B_{x1}}{\partial t} + v_{z0} \frac{\partial B_{x1}}{\partial z} + B_{x0} \frac{\partial v_{z1}}{\partial z} = B_{z0} \frac{\partial v_{x1}}{\partial z} \quad (1.71)$$

$$\frac{\partial B_{y1}}{\partial t} + v_{z0} \frac{\partial B_{y1}}{\partial z} = B_{z0} \frac{\partial v_{y1}}{\partial z} \quad (1.72)$$

$$\frac{ds_1}{dt} + v_{z0} \frac{\partial s_1}{\partial z} = 0 \quad (1.73)$$

と書き表される。

### エントロピー波

式 (1.73) は式 (1.42) と同一で、 $s_1$  が  $v_{z0}$  で移流伝播することを表している。

### アルフヴェン波

運動方程式と誘導方程式の  $y$  成分の線形結合をとると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( v_y + \frac{B_{1y}}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \right) + \left( v_{z0} - \frac{B_{z0}}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left( v_y + \frac{B_{1y}}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \right) = 0 \quad (1.74)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( v_y - \frac{B_{1y}}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \right) + \left( v_{z0} + \frac{B_{z0}}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left( v_y - \frac{B_{1y}}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \right) = 0 \quad (1.75)$$

ここで  $v_y \pm B_{y1}/\sqrt{4\pi\rho_0}$  は Elsässer variable である。平衡状態で磁場は  $xz$  平面内にあるとしたので、 $y$  方向は平均磁場と波数のどちらにも垂直となっている。従ってこの方程式は、横波を表している。伝播速度はアルフヴェン速度と呼ばれ、波数ベクトル  $\mathbf{k}$  を用いて次のように評価できる。

$$v_{Az} \equiv \frac{|B_{z0}|}{\sqrt{4\pi\rho_0}} = \frac{|\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0|}{k \sqrt{4\pi\rho_0}} \quad (1.76)$$

## 磁気音波

残りの4本の微分方程式は

$$c_s^{-2} \frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{v_{z0}}{c_s^2} \frac{\partial P_1}{\partial z} + \rho_0 \frac{\partial v_{z1}}{\partial z} = 0 \quad (1.77)$$

$$\frac{\partial v_{x1}}{\partial t} + v_{z0} \frac{\partial v_{x1}}{\partial z} - \frac{B_{z0}}{4\pi\rho_0} \frac{\partial B_{x1}}{\partial z} = 0 \quad (1.78)$$

$$\frac{\partial v_{z1}}{\partial t} + v_{z0} \frac{\partial v_{z1}}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_1}{\partial z} + \frac{B_{x0}}{4\pi\rho_0} \frac{\partial B_{x1}}{\partial z} = 0 \quad (1.79)$$

$$\frac{\partial B_{x1}}{\partial t} + v_{z0} \frac{\partial B_{x1}}{\partial z} + B_{x0} \frac{\partial v_{z1}}{\partial z} = B_{z0} \frac{\partial v_{x1}}{\partial z} \quad (1.80)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + v_{z0} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -v_{Az} \\ c_s & 0 & 0 & v_{Ax} \\ 0 & -v_{Az} & v_{Ax} & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z} = 0 \quad (1.81)$$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{P_1}{c_s \rho_0} \\ v_{x1} \\ v_{z1} \\ \frac{B_{x1}}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \end{pmatrix} \quad (1.82)$$

分散関係

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega, \quad \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow ik, \quad \lambda = \frac{\omega}{k} \quad (1.83)$$

$$(\lambda - v_{z0})^4 - (c_s^2 + v_{Ax}^2 + v_{Az}^2)(\lambda - v_{z0})^2 + c_s^2 v_{Az}^2 = 0 \quad (1.84)$$

$$\lambda = v_{z0} \pm v_f, \quad v_{z0} \pm v_s \quad (1.85)$$

$$v_f^2 = \frac{c_s^2 + v_{Ax}^2 + v_{Az}^2 + \sqrt{(c_s^2 + v_{Ax}^2 - v_{Az}^2)^2 + 4v_{Ax}^2 v_{Az}^2}}{2} \quad (1.86)$$

$$v_s^2 = \frac{c_s^2 + v_{Ax}^2 + v_{Az}^2 - \sqrt{(c_s^2 + v_{Ax}^2 - v_{Az}^2)^2 + 4v_{Ax}^2 v_{Az}^2}}{2} \quad (1.87)$$

## 1.4 非線形効果

伝播速度は位相により異なる。最も簡単な例は磁場がない等エントロピーの流れ。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (1.88)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (1.89)$$

密度は圧力だけの関数であることに注意すると、連続の式は

$$\frac{1}{c_s \rho} \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) + c_s \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (1.90)$$

と書き改められる。新しい変数として

$$w \equiv \int \frac{1}{c_s \rho} dP \quad (1.91)$$

と置くと流体力学方程式は

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v_z \frac{\partial w}{\partial z} + c_s \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (1.92)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + c_s \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.93)$$

$$\frac{\partial J_{\pm}}{\partial t} + (v_z \pm c_s) \frac{\partial J_{\pm}}{\partial z} = 0 \quad (1.94)$$

$$J_{\pm} = v_z \pm w \quad (1.95)$$

ここで波の振幅を表す変数  $J_{\pm}$  を Riemann 不変量と呼ぶ。エントロピーや Elsässer variable も Riemann 不変量である。

初期に  $J_- = 0$  であれば、つねに  $J_- = 0$  なので  $J = 2v_z = 2w$ 。伝播速度  $v_z + w$  は、 $J$  が大きいほど大きい。従って初期の波形が正弦波でも次第に切り立った波形に変わる。ついには衝撃波へと変化する。

比熱比  $\gamma$  が一定の理想気体の場合、

$$w = \frac{2c_s}{\gamma - 1} \propto \rho^{(\gamma-1)/2} \quad (1.96)$$

## 1.5 波の固有ベクトル

磁場のない場合

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ \rho E \end{pmatrix} \quad (1.97)$$

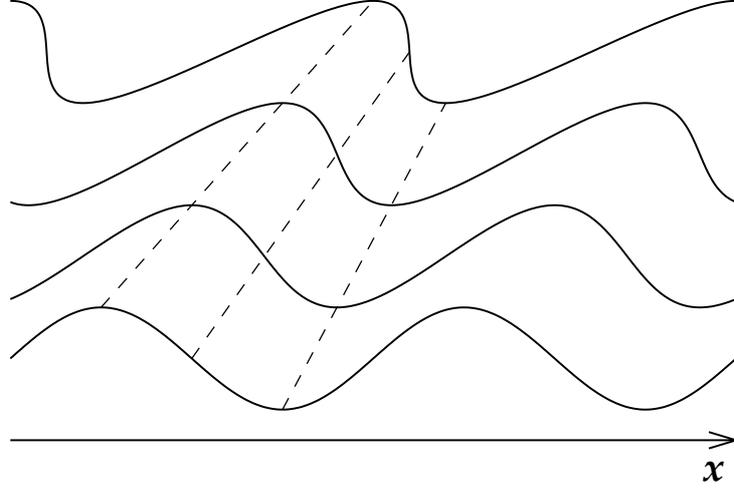


図 1.1: 波の伝播による波頭の先鋭化

$$\begin{aligned}
\Delta U &= \left( \frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_P s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ H - C_p T \end{pmatrix} + v_{x1} \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \\ 0 \\ 0 \\ \rho v_x \end{pmatrix} + v_{y1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \\ 0 \\ \rho v_y \end{pmatrix} \\
&+ v_{z1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho \\ \rho v_z \end{pmatrix} + c_s^{-2} P_1 \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ H \end{pmatrix} \\
&= \left( \rho_1 - \frac{P_1}{c_s^2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ H - C_p T \end{pmatrix} + v_{x1} \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \\ 0 \\ 0 \\ \rho v_x \end{pmatrix} + v_{y1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \\ 0 \\ \rho v_y \end{pmatrix} \\
&+ \frac{1}{2} \left( \frac{P_1}{c_s^2} + \frac{\rho v_{z1}}{c_s} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z + c_s \\ H + c_s v_z \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left( \frac{P_1}{c_s^2} - \frac{\rho v_{z1}}{c_s} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z - c_s \\ H - c_s v_z \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.98}$$

## 磁場のある場合

$$\begin{aligned}
\Delta U = & \left( \frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_P s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ H - C_p T \end{pmatrix} + v_{x1} \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho v_x \end{pmatrix} + v_{y1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho v_y \end{pmatrix} \\
& + \frac{1}{2} \left( \frac{P_1}{c_s^2} + \frac{\rho v_{z1}}{c_s} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z + c_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ H + c_s v_z \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left( \frac{P_1}{c_s^2} - \frac{\rho v_{z1}}{c_s} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z - c_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ H - c_s v_z \end{pmatrix} \\
& + B_{1x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{B_{0x}}{4\pi} \end{pmatrix} + B_{1y} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.99}
\end{aligned}$$

エントロピー波は流体のときと同じ。

アルフヴェン波による変化は

$$\Delta U_{\text{Alfven}} = \left( v_{y1} + \frac{B_{y1}}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{4\pi\rho_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left( v_{y1} - \frac{B_{y1}}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{4\pi\rho_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.100}$$

と表される。

$\lambda = v_{z0} + v_*$  で伝播する磁気音波による変化 (固有ベクトル)

$$d\mathbf{q} = \begin{pmatrix} c_s c_{Ax} v_* \\ (c_s^2 - v_*^2) v_{Az} \\ v_*^2 c_{Ax} \\ (c_s^2 - v_*^2) v_* \end{pmatrix} \quad (1.101)$$

と表される。

伝播速度の大小

$$-v_f \leq -v_{Az} \leq -v_s \leq 0 \leq v_s \leq v_{Az} \leq v_f \quad (1.102)$$

## 第2章 差分法の基礎

松元亮治 (千葉大学)

流体・磁気流体方程式を差分法を用いて数値的に解く際に必要になる基礎的事項について解説する。波の伝播をあらわす線形移流方程式や非線形の Burgers 方程式をとりあげ、差分法の数値的な安定性や数値振動について論じる。特に、数値的な安定性に優れ、非物理的な数値振動を起こさない差分法として風上差分法を紹介する。

### 2.1 差分近似

変数  $u$  が空間座標  $x, y$  に依存するという 2 次元問題を考える。

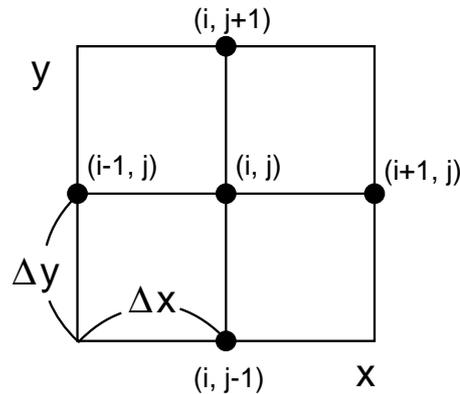


図 2.1: 2次元メッシュの図

2次元空間を図のような格子に区切り、各格子点の座標を  $(x_i, y_j)$  とする。格子間隔は  $x$  方向が  $\Delta x$ 、 $y$  方向が  $\Delta y$  とする。 $x_{i\pm 1} = x_i \pm \Delta x$ 、 $y_{j\pm 1} = y_j \pm \Delta y$  である。以下、格子点番号  $(i, j)$  を用いて  $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$  のように略記する。

着目している点  $(x_i, y_j)$  のまわりでテイラー展開すると、

$$u_{i+1,j} = u(x_i + \Delta x, y_j) = u_{i,j} + \Delta x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + \frac{\Delta x^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i + \dots \quad (2.1)$$

$$u_{i-1,j} = u(x_i - \Delta x, y_j) = u_{i,j} - \Delta x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i - \frac{\Delta x^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i + \dots \quad (2.2)$$

式(2.1)から式(2.2)を引くと

$$u_{i+1,j} - u_{i-1,j} = 2\Delta x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + O(\Delta x^3) \quad (2.3)$$

したがって、

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (2.4)$$

すなわち、 $(i, j)$ 点における  $u$  の  $x$  方向の微分係数  $(\partial u / \partial x)_i$  が  $\Delta x^2$  の誤差を含む近似のもとで ( $\Delta x$  について2次の精度で) 以下のように求まる

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (2.5)$$

これを中心差分の式と言う。

同様に、 $\Delta x$  について1次の精度で以下の差分近似式が得られる。

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \quad (\text{前進差分}) \quad (2.6)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} \quad (\text{後退差分}) \quad (2.7)$$

式(2.1)と式(2.2)を加えると

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} = 2u_{i,j} + \Delta x^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + O(\Delta x^4) \quad (2.8)$$

したがって、

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (2.9)$$

これより、 $u$  の  $x$  に関する2階微分の係数  $(\partial^2 u / \partial x^2)_i$  を  $\Delta x$  について2次の精度で以下のように近似することができる

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad (2.10)$$

同様に、

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_j = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2}. \quad (2.11)$$

## 2.2 線形スカラー移流方程式の差分解法

### 2.2.1 1次元線形スカラー移流方程式

流体・磁気流体方程式の本質は波の伝播にある。この部分だけを取り出して次のような方程式を考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.12)$$

ただし、 $c$ は定数で  $c > 0$  とする。この方程式は、スカラー量  $u$  の空間分布が、一定の速度  $c$  で伝播することをあらわす波動方程式である。

方程式 (2.12) の厳密解は

$$u(x, t) = u(x - ct, 0) \quad (2.13)$$

である。これは、時刻  $t > 0$  におけるスカラー量  $u$  のプロフィールは  $t = 0$  のスカラー量  $u$  のプロフィールが形を保って  $ct$  だけ平行移動した形になることをあらわす。

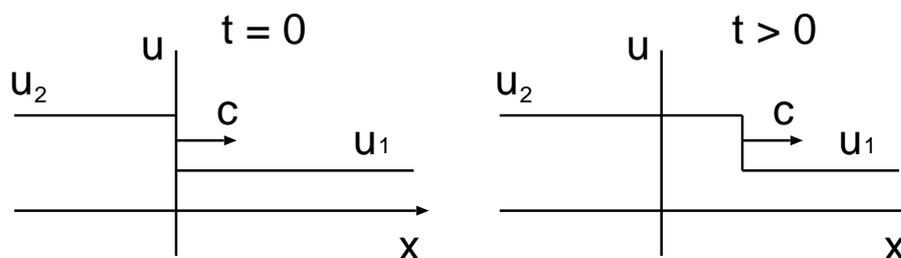


図 2.2: 1次元スカラー移流問題の初期条件と時間発展

いま、図 2.2 のように初期に  $x \geq 0$  で  $u = u_1$ 、 $x < 0$  で  $u = u_2$  のように  $x = 0$  で不連続な分布を考えてみると  $t > 0$  での厳密解は右図のような形になる。

### 2.2.2 FTCS スキーム

1次元線形スカラー移流方程式 (2.12) を時間について現在の時刻  $t_n$  と  $\Delta t$  後の時刻  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  の間で前進差分、空間については中心差分をとって差分化すると次式を得る。ここで、 $u_j^n = u(x_j, t_n)$  である。

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (2.14)$$

このような差分のとり方を FTCS スキーム (Forward in Time and Centered Difference in Space) と言う。これを整理すると、

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2} \nu (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (2.15)$$

ここで、 $\nu$ は次式で定義される数であり、クーラン数と呼ばれる。

$$\nu \equiv c \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (2.16)$$

式(2.15)の右辺は時刻 $t_n$ での値、左辺は時刻 $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ での値だけで書けている。したがって、時刻 $t_n$ での各格子点での値がわかっているならば直ちに1タイムステップ後( $t_{n+1}$ )の各格子点での値を計算することができる。このような解法のことを陽解法と言う。FTCSスキームにおける変数の依存関係を図示すると図2.3のようになる。矢印は時刻 $t_{n+1}$ の白丸の点の値を計算するのに時刻 $t_n$ の黒丸の格子点の値を使うことを示す。

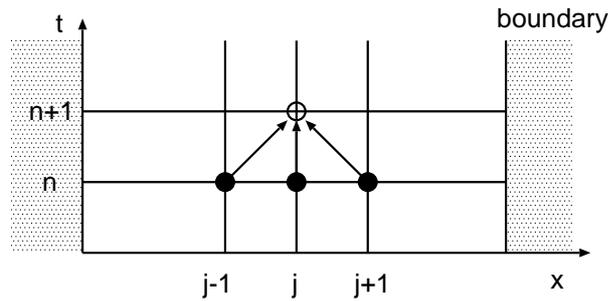


図 2.3: FTCS スキームにおける変数の依存関係

1次元波動伝播のシミュレーションを行うアルゴリズムは一般に次のようになる。

1. 各メッシュ点の座標値  $x_j$  をセットする (メッシュ生成)
2. 各メッシュ点の初期値  $u_j(t=0)$  をセットする (初期条件)
3. 時刻  $t$  が、あらかじめ決められた終了時刻  $t_{\text{end}}$  に達するまで、あるいは決められた回数だけ、以下を繰り返す
  - (a) 左右の境界を除く各格子点について  $\Delta t$  後の値を差分式にもとづいて計算する (時間積分)。たとえば FTCS スキームの場合には計算式 (2.15) を用いる。
  - (b) 左右の境界の値を境界条件から決める。たとえば隣接点と同じ値を入れる (境界条件の適用)
  - (c) 時刻を  $\Delta t$  だけ進める

FTCS スキームを用いて1次元線形スカラー移流方程式を解いた結果を図2.4に示す。波は形を保って伝わらずに振動が発生してしまっている。この振動は物理的な理由で発生しているのではなく、数値的不安定性によるものである。なぜこのような数値振動が発生してしまうのか、次節で説明する。

### 2.2.3 FTCS スキームの数値的安定性

#### Von Neumann の安定性解析

前節の FTCS スキームによって1次元波動伝播のシミュレーションを行ってみると解が激しく振動して数値的に不安定になってしまうことがわかった (図2.4)。この不安定性の原因を調べるために

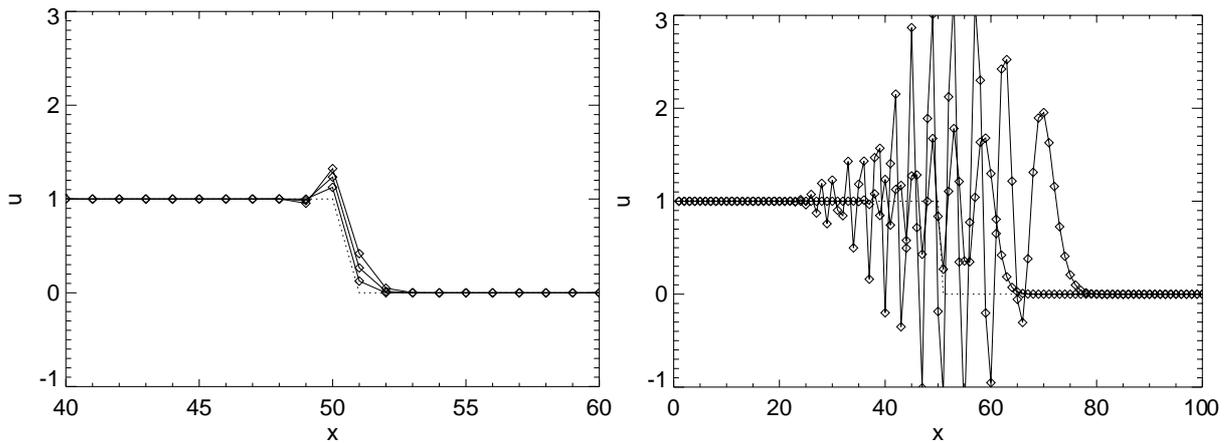


図 2.4: 左図: FTCS スキームで、初期値として、 $j = 1, \dots, 50$  に対して  $u = 1$ 、 $j = 51, \dots, 100$  に対して  $u = 0$  とし、クーラン数  $\nu = c\Delta t/\Delta x = 0.25$  で 1 ステップ、2 ステップ、3 ステップ 計算したときの  $u$  をプロットした図。右図: 50 ステップ、100 ステップ 計算したときの  $u$  をプロットした図。

$$u_j^n = \cos(j\theta) \tag{2.17}$$

を差分式 (2.15) に代入してみる。ここで  $\theta$  は、波の波数を  $k$  として  $\theta = k\Delta x$  であらわされる量である。たとえば  $\theta = \pi$  のとき  $u_j^n$  は図 2.5 左図のように 2 メッシュで 1 波長の波、 $\theta = \pi/3$  のときは右図のように 6 メッシュで 1 波長の波をあらわす。

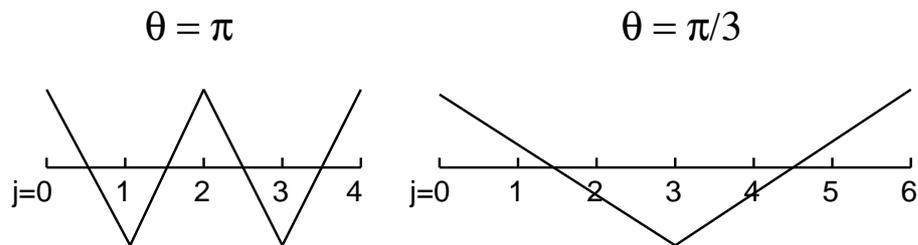


図 2.5: メッシュ番号を  $j$  としたときの  $u_j^n = \cos(j\theta)$  のプロフィール。左図:  $\theta = \pi$  の場合。右図:  $\theta = \pi/3$  の場合。

その結果は

$$u_j^{n+1} = \cos(j\theta) + \nu \sin\theta \sin(j\theta) = \text{Re} \left[ (1 - i\nu \sin\theta) e^{ij\theta} \right] \tag{2.18}$$

これをもう一度差分式に代入すると

$$u_j^{n+2} = (1 - \nu^2 \sin^2\theta) \cos(j\theta) + 2\nu \sin\theta \sin(j\theta) \tag{2.19}$$

$$= \text{Re} \left[ (1 - i\nu \sin\theta)^2 e^{ij\theta} \right] \tag{2.20}$$

である。ここで、 $i$ は虚数単位、 $Re$ は実部をとることをあらわす。以上からわかるように、

$$u_j^{n+k} = Re \left[ (1 - i\nu \sin\theta)^k e^{ij\theta} \right] \quad (2.21)$$

が成り立つ。

以上と同様に、式(2.17)を複素数に拡張した  $u_j^n = e^{ij\theta}$  を差分式(2.15)に代入すると

$$u_j^{n+k} = (1 - i\nu \sin\theta)^k u_j^n \quad (2.22)$$

が成り立つ。

差分法(差分スキーム)の数値的安定性を導くひとつの方法として、

$$u_j^n = g^n e^{ij\theta} \quad (2.23)$$

を差分式に代入して複素増幅率  $g$  を求め、1タイムステップ間の振幅の増幅率  $|g| \leq 1$  となる条件を求める方法がある。これを Von Neumann の安定性解析と言う。

$u_j^n = g^n \exp(ij\theta)$  を FTCS 差分式に代入すると

$$g = 1 - \frac{1}{2}\nu(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \quad (2.24)$$

$$= 1 - i\nu \sin\theta \quad (2.25)$$

したがって

$$|g|^2 = 1 + \nu^2 \sin^2\theta \geq 1 \quad (2.26)$$

以上の結果より、 $\theta = 0$  の場合を除いて FTCS スキームは常に不安定になる。

### テイラー展開による方法

差分した式にテイラー展開を適用して差分式が満たす偏微分方程式を導くことによっても FTCS スキームが数値的に不安定であることを示すことができる。 $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ 、 $x_{j\pm 1} = x_j \pm \Delta x$  を用いると、

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t^2 + \dots \quad (2.27)$$

$$u_{j+1}^n = u_j^n + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Delta x^3 + \dots \quad (2.28)$$

$$u_{j-1}^n = u_j^n - \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Delta x^3 + \dots \quad (2.29)$$

FTCS スキームの差分式

$$u_j^{n+1} - u_j^n = -\frac{1}{2}\nu(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (2.30)$$

の左辺に(2.27)、右辺に(2.28)、(2.29)を代入すると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t^2 = -\nu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Delta x^3 + \dots \right) \quad (2.31)$$

これを整理すると

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t - \frac{c}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Delta x^2 + \dots \quad (2.32)$$

ここで、解くべき偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.33)$$

より

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.34)$$

であることを用いると

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta t - \frac{c}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Delta x^2 + \dots \quad (2.35)$$

右辺が差分化によって新たに加わった項である。右辺第1項は負の拡散係数を持つ拡散項になっている。「正の拡散」は物理量の値のピークをなまらせる働きがあるが、「負の拡散」では物理量が周囲よりもわずかに高い値を持つ部分があるところのピークがどんどん大きくなるという不安定性を生ずる。

よって、テイラー展開法からもスカラー移流方程式の FTCS スキームは数値的に不安定であることがわかる。

#### 2.2.4 Lax-Friedrich のスキーム

この方法では FTCS スキームの右辺の  $u_j^n$  を  $(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)/2$  で置き換え、以下のように差分化する。

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{\nu}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (2.36)$$

$u_j^n = g^n \exp(ij\theta)$  を代入して増幅率  $g$  を求めると

$$g = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) - \frac{1}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \quad (2.37)$$

$$= \cos\theta - i\nu\sin\theta \quad (2.38)$$

したがって

$$|g|^2 = \cos^2\theta + \nu^2\sin^2\theta \quad (2.39)$$

図 2.6 に増幅率  $|g|$  を  $\theta$  の関数として極座標  $(g, \theta)$  で示す。Lax-Friedrich のスキームでは、クーラン数  $\nu = c\Delta t/\Delta x$  が  $|\nu| \leq 1$  を満たす場合、安定に計算を進めることができる。この条件のことを Courant, Friedrich, Lewy 条件 (CFL 条件あるいはクーラン条件) と言う。

クーラン条件の意味を考えてみよう。差分式 (2.36) を書き換えると以下の式を得る。

$$u_j^{n+1} = \frac{1-\nu}{2} u_{j+1}^n + \frac{1+\nu}{2} u_{j-1}^n \quad (2.40)$$

クーラン条件  $|\nu| \leq 1$  が満たされている場合、時刻  $t = t_{n+1}$  の値  $u_j^{n+1}$  は  $t = t_n$  の  $j-1$  点の値  $u_{j-1}^n$  と  $j+1$  点の値  $u_{j+1}^n$  の内挿値になっている。

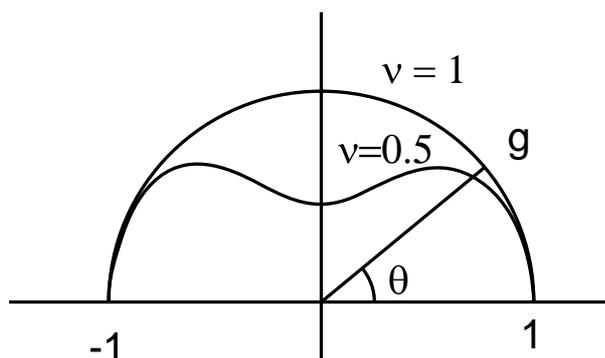


図 2.6: Lax-Friedrich スキームの場合の増幅率

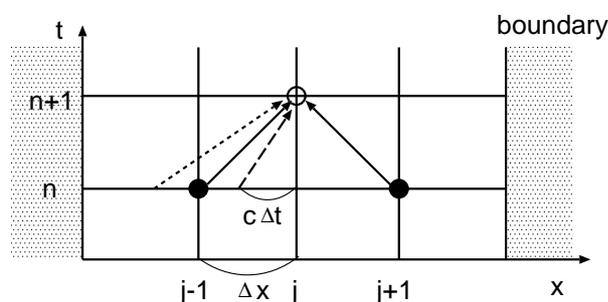


図 2.7: Lax-Friedrich スキームにおける依存関係。破線と点線はそれぞれ  $\nu < 1$ 、 $\nu > 1$  の場合の波の伝播を示す。

図 2.7 に Lax-Friedrich スキームにおける変数の依存関係を示す。実線は時刻  $t = t_{n+1}$  の白丸の格子点の値を計算する際に用いられる時刻  $t = t_n$  の格子点、破線は  $\nu = c\Delta t/\Delta x < 1$  の場合、点線は  $\nu > 1$  の場合の波の伝播を示す。

クーラン条件は  $|c|\Delta t < \Delta x$ 、すなわち時間間隔  $\Delta t$  の間に波が 1 メッシュ以上伝わってはいけないことを意味する。 $u_j^{n+1}$  は  $u_{j-1}^n$  と  $u_{j+1}^n$  だけから計算されるが、時間間隔が  $\Delta t > \Delta x/|c|$  となると  $x_{j-1} \leq x \leq x_{j+1}$  より外側からも情報が伝わってくるため計算を安定に進めることができなくなるのである。

図 2.8 に Lax-Friedrich スキームを用いて 1 次元線形スカラー移流方程式の解を求めた結果を示す。数値振動のない解が得られている。Lax-Friedrich スキームの欠点は数値散逸が大きく、不連続面が時間とともになまってしまうことである。

### 2.2.5 1 次精度風上差分法

図 2.9 のように波が正の方向に伝わっている場合を考える。このとき、 $j$  点での空間微分を、 $j$  点と風上にあたる  $j-1$  点の間の差分で近似する方法が風上差分である。

1 次元スカラー移流方程式を時間については前進差分、空間については風上差分として差分化すると、 $c > 0$  の場合、以下の差分式を得る。

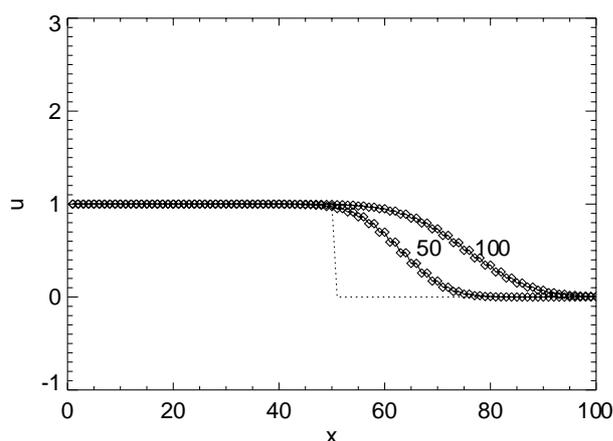


図 2.8: Lax-Friedrich スキームを用いた 1 次元線形スカラー移流問題のシミュレーション結果。クーラ  
ン数  $\nu = 0.25$  で 50 ステップ、100 ステップ計算した結果を示す。

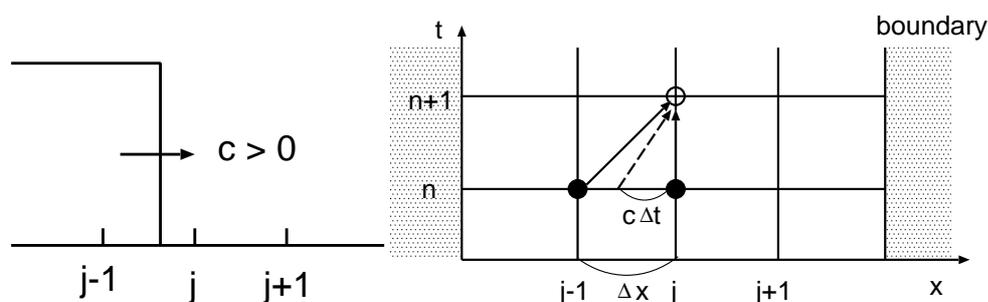


図 2.9: 左図: 右方向に伝わる波、右図: 1 次精度風上差分における依存関係。破線は波による情報の伝  
達を示す。

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (2.41)$$

したがって

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n) \quad (2.42)$$

図 2.9 右図に 1 次精度風上差分における変数の依存関係を示す。黒丸は時刻  $t_{n+1}$  の白丸の格子点の  
値を計算する際に用いられる時刻  $t_n$  の格子点、破線は時刻  $t_{n+1}$  に白丸の格子点に到達する波の伝播を  
示す。

増幅率は

$$g = 1 - \nu(1 - e^{-i\theta}) \quad (2.43)$$

$$= (1 - \nu + \nu \cos\theta) - i\nu \sin\theta \quad (2.44)$$

したがって

$$|g|^2 = (1 - \nu + \nu \cos \theta)^2 + \nu^2 \sin^2 \theta \quad (2.45)$$

$$= 1 - 2\nu(1 - \nu)(1 - \cos \theta) \quad (2.46)$$

これより、 $0 \leq \nu \leq 1$  の場合、任意の  $\theta$  について  $|g| \leq 1$  であり、安定であることがわかる。

風上差分の差分式 (2.42) は次のようにも書ける。

$$u_j^{n+1} = (1 - \nu)u_j^n + \nu u_{j-1}^n. \quad (2.47)$$

クーラン条件  $0 \leq \nu \leq 1$  が満たされている場合、 $u_j^{n+1}$  は時刻  $t = t_{n+1}$  に  $j$  番目の格子点に到達する波の  $t = t_n$  での位置 (図 2.9 の破線矢印の出発点) における値  $u(x_j - c\Delta t, t_n)$  を  $u_{j-1}^n$  と  $u_j^n$  から線形内挿した値になっている。

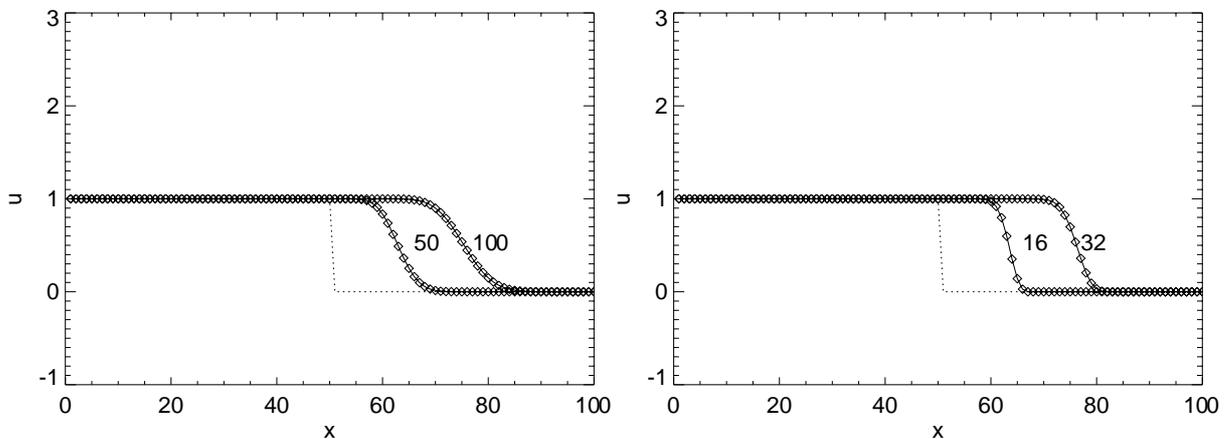


図 2.10: 1次精度風上差分法を用いた1次元線形スカラー移流問題のシミュレーション結果。左: クーラン数  $\nu = 0.25$  で 50 ステップ、100 ステップ計算した結果。右:  $\nu = 0.80$  で 16 ステップ、32 ステップ計算した結果。

図 2.10 に 1次精度風上差分法を用いたシミュレーション結果を示す。

### 練習問題

- クーラン数  $\nu$  が 1, 0.75, 0.5 の場合について 1次精度風上差分の増幅率  $|g|$  を位相  $\theta$  の関数として求め、極座標  $(|g|, \theta)$  でプロットせよ。
- 1次精度風上差分法の差分式 (2.42) にテイラー展開を適用することによって、以下の偏微分方程式が得られることを示せ。右辺第1項が拡散項であることに注意して、クーラン条件を導け。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} c \Delta x (1 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{6} c (\Delta x)^2 (2\nu^2 - 3\nu + 1) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dots \quad (2.48)$$

### 2.2.6 Lax-Wendroff のスキーム

Lax-Wendroff スキームはテイラー展開にもとづく差分法であり、以下のようにして導かれる。

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\Delta t^3) \quad (2.49)$$

右辺第 2 項、第 3 項に  $\partial u / \partial t = -c \partial u / \partial x$ 、 $\partial^2 u / \partial t^2 = c^2 \partial^2 u / \partial x^2$  を代入すると

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c \Delta t \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} c^2 \Delta t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta t^3) \quad (2.50)$$

空間微分  $\partial u / \partial x$ 、 $\partial^2 u / \partial x^2$  をそれぞれ中心差分で近似すると

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2} c \Delta t \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} + \frac{1}{2} c^2 \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (2.51)$$

これが Lax-Wendroff スキームである。以上の導出過程からわかるように、Lax-Wendroff スキームは空間、時間についていずれも 2 次精度の解法になっている。

Lax-Wendroff スキームの安定性を von Neumann の方法で調べてみる。増幅率は

$$g = 1 - \frac{\nu}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) + \frac{\nu^2}{2}(e^{i\theta} - 2 + e^{-i\theta}) \quad (2.52)$$

$$= 1 - i\nu \sin\theta + \nu^2 \cos\theta - \nu^2 \quad (2.53)$$

したがって、

$$|g|^2 = [1 - \nu^2(1 - \cos\theta)]^2 + \nu^2 \sin^2\theta \quad (2.54)$$

$$= 1 - 2\nu^2(1 - \nu^2)(1 - \cos\theta) \quad (2.55)$$

これより、 $|\nu| \leq 1$  であれば任意の  $\theta$  について  $|g| \leq 1$  であり、安定であることがわかる。

1 次元スカラー方程式の場合、Lax-Wendroff スキームは以下のように 2 段階に分けたスキームと同等である。この方法を 2 段階 Lax-Wendroff 法 と呼ぶ。

$$u_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{u_{j+1}^n + u_j^n}{2} - \frac{1}{2} c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n) \quad (2.56)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j-1/2}^{n+1/2}) \quad (2.57)$$

これを図示すると図 2.11 のようになる。

図 2.12 に Lax-Wendroff 法を用いて 1 次元線形スカラー移流方程式の数値解を求めた結果を示す。

Lax-Wendroff 法は空間、時間についていずれも 2 次精度の方法であるが、不連続面近傍で数値振動を生じるという欠点を持つ。これに関して、以下の定理が知られている。

#### Godunov の定理

1 次元スカラー移流方程式  $\partial u / \partial t + c \partial u / \partial x = 0$  に対して、

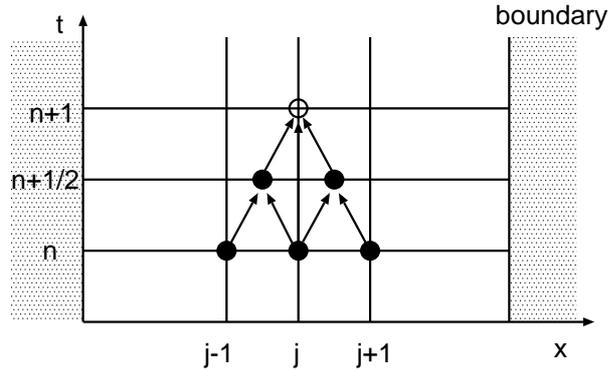


図 2.11: 2 段階 Lax-Wendroff スキームにおける依存関係。第一段階で時刻  $t_n$  における格子点  $j-1$ 、 $j$ 、 $j+1$  の値から時刻  $t_{n+1/2}$  における格子点  $j-1/2$ 、 $j+1/2$  の値が計算される。第二段階ではこれらの点の値を用いて時刻  $t_{n+1}$  の白丸の格子点の値が求まる。

$$u_j^{n+1} = \sum_k a_k u_{j+k}^n \quad (2.58)$$

この形の 2 次精度以上の精度を持つどのようなスキームも解の単調性を維持することはできない。

ここで、「解の単調性を維持する」とは、時刻  $t_n$  におけるプロフィール  $u(x, t_n)$  が  $x$  に関して単調増加または単調減少する関数であるならば時刻  $t_{n+1}$  における関数  $u(x, t_{n+1})$  も単調増加または単調減少関数でなければならないことを意味する。たとえば 1 次精度風上差分の場合、 $0 \leq \nu \leq 1$  なら  $u_j^{n+1}$  は必ず  $u_{j-1}^n$  と  $u_j^n$  の間の値をとるため、もしも  $u_{j-1}^n \leq u_j^n \leq u_{j+1}^n$  なら  $u_j^{n+1} \leq u_{j+1}^{n+1}$  となり、単調性が維持される。Godunov の定理の証明については、たとえば藤井 (1994) を参照されたい。

数値振動を抑える方法には以下のものがある。

- 人工粘性を加える

粘性係数を  $\kappa$  として、

$$\tilde{u}_j^{n+1} = u_j^{n+1} + \kappa \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (2.59)$$

とする。

拡散係数  $\kappa$  は、たとえば以下のように不連続面付近で大きな値をとるように決める。 $Q_v$  はパラメータである。

$$\kappa_{j+1/2} = Q_v \Delta x |u_{j+1}^n - u_j^n| \quad (2.60)$$

- 流束制限関数を用いる

これについては後述する。

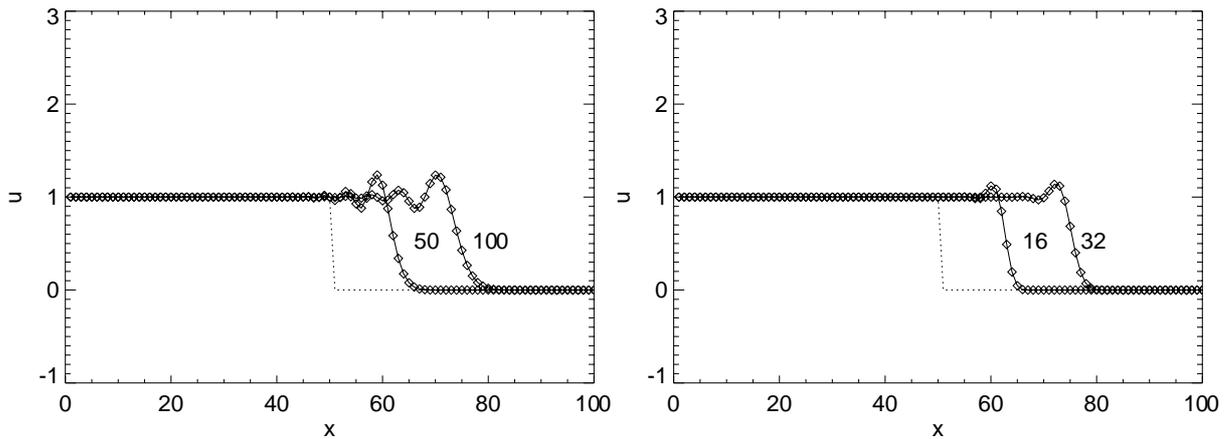


図 2.12: 2 段階 Lax-Wendroff 法による 1 次元線形スカラー移流方程式のシミュレーション結果。左図: クーラン数  $\nu = 0.25$  で 50 ステップ、100 ステップ計算した結果。右図: クーラン数  $\nu = 0.80$  で 16 ステップ、32 ステップ計算した結果。

## 2.3 保存形表示と数値流束

1 次元スカラー移流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.61)$$

を以下の形に変形する

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (2.62)$$

ここで、

$$f = cu \quad (2.63)$$

は流束をあらわす。式 (2.62) の形を保存形と呼ぶ。

保存形式の物理的意味を考えるために、図 2.13 に四角で囲って示した領域 ( $x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2}$ ) における保存量  $u$  の時間変化を求めてみよう。方程式 (2.62) を  $x = x_{j-1/2}$  から  $x = x_{j+1/2}$  まで積分すると次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u dx + f(x_{j+1/2}) - f(x_{j-1/2}) = 0. \quad (2.64)$$

したがって、保存量  $u$  の積分量

$$u_j^n = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t_n) dx \quad (2.65)$$

の時間変化は、この時間の間に左右の境界  $x_{j\pm 1/2}$  を通って出入りする流束  $f_{j\pm 1/2}$  の差に等しい。これより次式を得る。

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n) \quad (2.66)$$

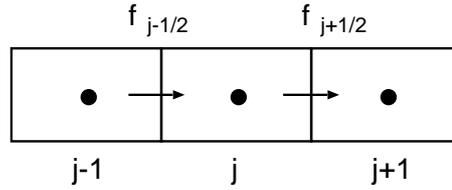


図 2.13: メッシュ点とメッシュ境界を通過して出入りする流束の関係

差分式 (2.66) は保存則を厳密に満たす。これが保存形式を用いる利点である。

メッシュ境界の流束  $f_{j\pm 1/2}^n$  は各メッシュ点での流束から近似的に計算することができる。これを 数値流束 と言い、 $\tilde{f}_{j\pm 1/2}^n$  であらわす。各種差分スキームの差分式から数値流束を求めると以下ようになる。

- FTCS

$$\tilde{f}_{j+1/2}^n = \frac{1}{2}(f_{j+1}^n + f_j^n) \quad (2.67)$$

- Lax-Friedrich

$$\tilde{f}_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{1}{\nu}\right) f_{j+1}^n + \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) f_j^n \right] \quad (2.68)$$

- Upwind (風上差分)

$$\tilde{f}_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} [(f_{j+1}^n + f_j^n) - |c|(u_{j+1}^n - u_j^n)] \quad (2.69)$$

この式は、 $c > 0$  の場合は  $\tilde{f}_{j+1/2}^n = f_j^n$ 、 $c < 0$  の場合は  $\tilde{f}_{j+1/2}^n = f_{j+1}^n$  と一致する。

- Lax-Wendroff

$$\tilde{f}_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} [(1 - \nu) f_{j+1}^n + (1 + \nu) f_j^n] \quad (2.70)$$

## 2.4 Burgers 方程式の数値解法

ここまでは、移流の速さ  $c$  が一定の場合の 1 次元線形スカラー移流方程式を扱ってきた。本節では、以下のような 非線形 波動方程式を差分近似によって解くことを考える。これは、非粘性の場合の Burgers 方程式である。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.71)$$

この方程式は流線に沿うラグランジュ微分  $d/dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial x$  を用いると次のように表現できる。

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad (2.72)$$

粒子的な描像に立てば、この方程式は力を受けていない粒子の運動を記述しており、その解はもちろん  $u = \text{一定}$  である。初期速度分布が正弦波的な場合、図 2.14 に示すように、振幅が正の領域は  $+x$  方向に、負の領域は  $-x$  方向に移動してしまい、有限の時刻で後からきた粒子が前の粒子に追いついてしまう。連続系では空間の 1 点で速度が多価になることはできないため、このような場合に解に不連続が生じる。

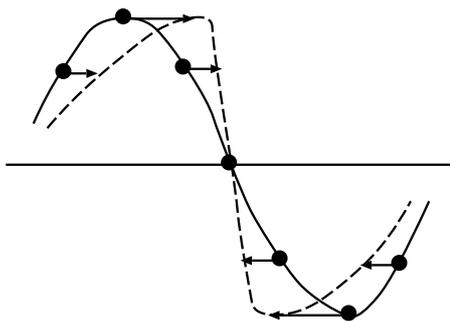


図 2.14: Burgers 方程式の解の様子。ある有限の時刻で後ろからきた粒子が前の粒子に追いつく。

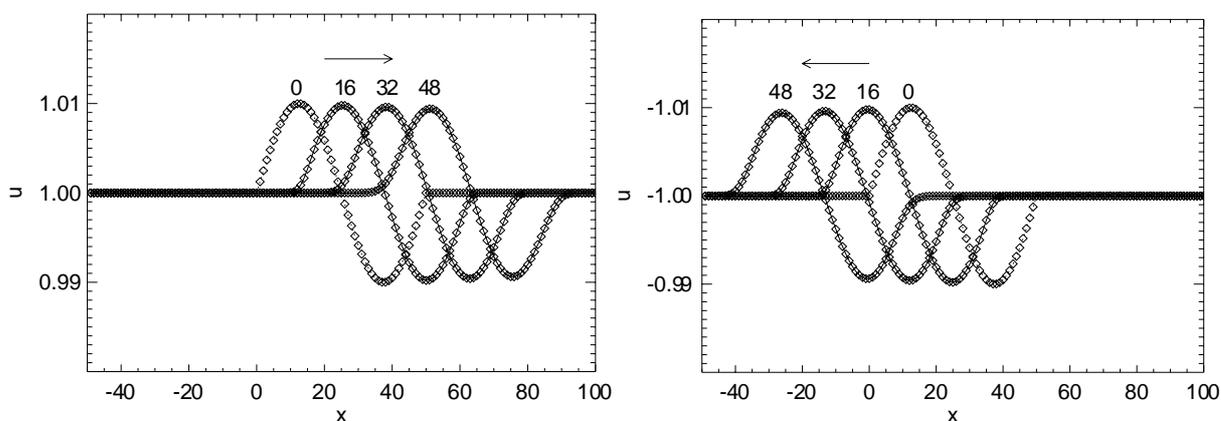


図 2.15: Burgers 方程式を 1 次精度風上差分法で解いた結果の例。左: 初期に  $u > 0$  の場合。右: 初期に  $u < 0$  の場合。図中の数字は時間ステップ数。時間きざみは  $\Delta t/\Delta x = 0.8$  とした。

Burgers 方程式を差分法によって解くため、方程式をまず、以下のような保存系に変形する。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad (2.73)$$

これは、流束  $f(x)$  が  $f(x) = u^2/2$  の場合に相当し、各種差分スキームを適用することができる。たとえば 1 次精度の風上差分法を適用する場合、線形スカラー方程式で移流の速さ  $c$  が一定である場合には

$c > 0$  のとき  $f_{j+1/2}^n = f_j^n$  であったことに注意し、メッシュ境界の  $j+1/2$  点での速さを  $(u_j(t) + u_{j+1}(t))/2$  で近似すると、

- $u_{j+1}(t) + u_j(t) > 0$  のとき、 $f_{j+1/2}^n = f_j^n = |u_j(t)|^2/2$
- $u_{j+1}(t) + u_j(t) \leq 0$  のとき、 $f_{j+1/2}^n = f_{j+1}^n = |u_{j+1}(t)|^2/2$

図 2.15 に初期に  $u(x) = 1 + \epsilon \sin(kx)$  ( $\epsilon = 0.01, 0 \leq kx \leq 2\pi$ ) のような速度分布を与えた場合の Burgers 方程式の解を 1 次精度の風上差分法で計算した結果を示す。図 2.15 左図の場合、初期に  $u \sim 1$  であることから予想できるように非線形効果が小さい間の解は波の速さが  $c = 1$  の場合の線形スカラー移流方程式の解とほぼ一致し、波はほぼその形を保ちながら右側に伝わっていく。図 2.15 右図では初期に  $u \sim -1$  であり、波は左に伝わる。

非線形性が強くなる場合の Burgers 方程式の数値解の例を図 2.16 に示す。この例では初期に  $u(x) = 1 + 0.1\sin(kx)$  のような速度分布を与え、その後の時間発展を 1 次精度の風上差分法によって解いた。Burgers 方程式の非線形項  $u\partial u/\partial x$  の効果により波がしだいに突っ立ち、不連続（衝撃波）が形成されることがわかる。

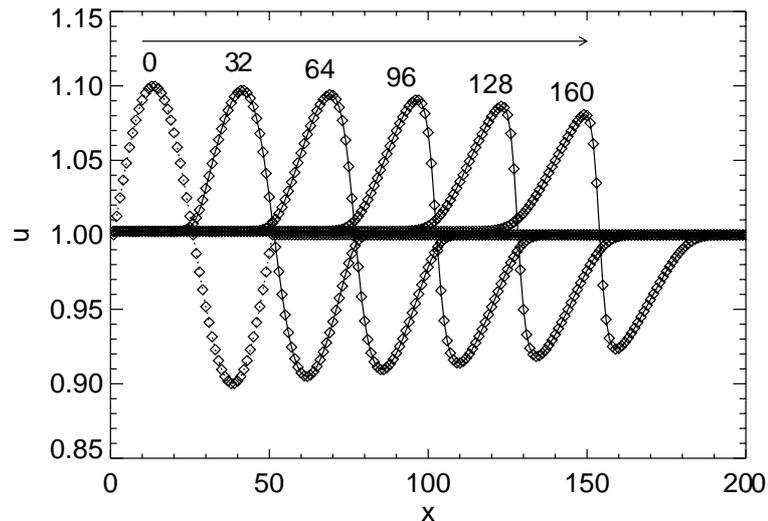


図 2.16: 初期に  $u(x) = 1 + 0.1\sin(kx)$  の速度分布から始めた場合の Burgers 方程式の数値解。図中の数字は時間ステップ数。1 次精度風上差分法で時間きざみは  $\Delta t/\Delta x = 0.8$  とした。

## 2.5 流束制限関数

以上、線形スカラー移流方程式と Burgers 方程式を例にして差分法について解説してきた。1 次精度の風上差分法を用いるとこれらの方程式の解にあらわれる不連続面を数値振動を起こすことなく

えることができる。しかしながら、Godunov の定理が示すように、空間 2 次精度以上の解法では数値振動があらわれてしまうことがわかった。

Lax-Wendroff 法の数値流束を補正することによって、不連続面近傍での振動を抑えることができないかどうか考えてみよう。Lax-Wendroff 法の数値流束は次のようにも書ける。

$$\tilde{f}_{j+1/2}^n = c[u_j^n + \frac{1}{2}(1-\nu)(u_{j+1}^n - u_j^n)] \quad (2.74)$$

数値振動が生じない 1 次精度の風上差分の数値流束は  $c > 0$  のとき  $\tilde{f}_{j+1/2}^n = cu_j$  であり、Lax-Wendroff 法の数値流束の右辺第 1 項と一致している。そこで、Lax-Wendroff 法の数値流束の右辺第 2 項を次のように補正してみる。

$$\tilde{f}_{j+1/2}^n = c[u_j^n + \frac{1}{2}(1-\nu)B_{j+1/2}(u_{j+1}^n - u_j^n)] \quad (2.75)$$

ここで導入した  $B_{j+1/2}$  のことを 流束制限関数 と呼ぶ。数値流束 (2.75) を差分式 (2.66) に代入して変形すると次式を得る。

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{u_{j-1}^n - u_j^n} = \nu[1 - \frac{1}{2}(1-\nu)B_{j-1/2}] + \frac{1}{2}\nu(1-\nu)\frac{B_{j+1/2}}{r_j} \quad (2.76)$$

ここで、

$$r_j \equiv \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{u_{j+1}^n - u_j^n} \quad (2.77)$$

である。

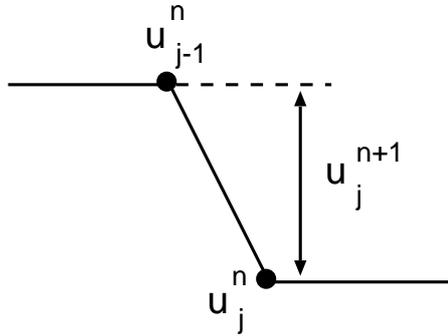


図 2.17: 数値振動が生じないようにするために  $u_j^{n+1}$  の値を制限する範囲

数値振動が生じないようにするために、図 2.17 に示したように  $u_j^{n+1}$  が  $u_j^n$  と  $u_{j-1}^n$  の間の値をとるように制限を加えることにしよう。これには、式 (2.76) の左辺の値を以下のように制限すればよい。

$$0 \leq \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{u_{j-1}^n - u_j^n} \leq 1 \quad (2.78)$$

式 (2.76) の右辺を代入すると以下の条件を得る。

$$-\frac{2}{\nu} \leq B_{j-1/2} - \frac{B_{j+1/2}}{r_j} \leq \frac{2}{1-\nu} \quad (2.79)$$

CFL 条件が満たされている場合  $0 \leq \nu \leq 1$  なので、

$$-2 \leq B_{j-1/2} - \frac{B_{j+1/2}}{r_j} \leq 2 \quad (2.80)$$

この関係式は、以下のふたつの条件がともに満たされれば成立する。

$$0 \leq B_{j+1/2} \leq 2 \quad (2.81)$$

かつ

$$0 \leq \frac{B_{j+1/2}}{r_j} \leq 2 \quad (2.82)$$

この範囲を図示すると図 2.18 の斜線のない領域になる。 $r < 0$  の場合は  $B_{j+1/2} = 0$  のみが許される。

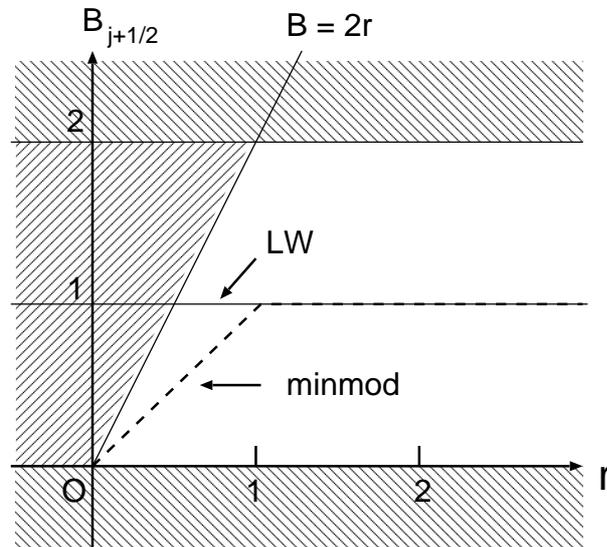


図 2.18: 流束制限関数  $B_{j+1/2}(r)$  の許容範囲。LW は Lax-Wendroff スキームの数値流束に対応する制限関数。minmod は minmod 関数。

Lax-Wendroff 法の数値流束では  $B_{j+1/2} = 1$  (図の LW) であるため、 $r < 1/2$  の領域で許容範囲外となり、数値振動が生じる。図の許容範囲内にある流束制限関数を用いることにより、数値振動が起らないようにすることができる。その一例は以下の minmod 関数 (図の minmod) である。

$$\text{minmod}(r) = \begin{cases} 0 & (r < 0) \\ r & (0 \leq r \leq 1) \\ 1 & (r > 1) \end{cases} \quad (2.83)$$

## 2.6 TVD スキーム

前節では、数値振動をおさえる方法として流束制限関数を導入した。ここでは、数値振動の発生を定量化する方法について考える。

このために、1次元線形スカラー移流方程式において以下の量を定義する。

$$U = \int \left| \frac{du}{dx} \right| dx. \quad (2.84)$$

この量は波の振幅の総和に等しく、移流方程式の厳密解では波のプロフィールが保たれるため、 $dU/dt = 0$ である。

以上との類推により、メッシュ点ごとの物理量の変化量の総和を次式のように定義し、これを Total Variation (TV) と言う。

$$TV(u^n) \equiv \sum_j |u_{j+1}^n - u_j^n| \quad (2.85)$$

Total Variation が時間とともに増大しないという条件

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n) \quad (2.86)$$

のことを Total Variation Diminishing (TVD) 条件と呼ぶ。

流束制限関数を導入することによって、差分スキームが TVD 条件を満たすようにすることができる。

## 2.7 放物型方程式の差分法

天体シミュレーションにあらわれる放物型方程式

- 熱伝導方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T$$

- 磁気拡散方程式

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \eta \nabla^2 B$$

以下のような1次元拡散方程式を差分近似によって初期値問題として解くことを考えてみよう。すなわち、時刻  $t = 0$  における  $u(x, t)$  の値  $u(x, 0)$  を与えて、任意の時刻  $t (> 0)$  における  $u(x, t)$  を求める。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.87)$$

拡散係数  $\kappa$  は  $x$  に依らないとする。よく知られているように、この方程式の解は初期条件をフーリエ変換することによって解析的に求めることができる。解のおおまかな様子を図に示す。

### 拡散方程式の陽解法 (explicit 法)

1次元拡散方程式 (2.87) を時間について現在の時刻  $t_n$  と  $\Delta t$  後の時刻  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  の間で前進差分、空間については中心差分 (FTCS 差分) をとって差分化すると次式を得る。ここで、 $u_j^n = u(x_j, t_n)$  である。

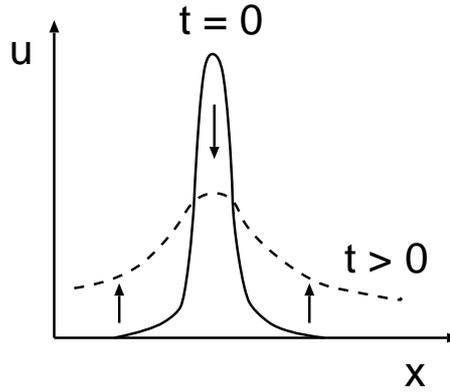


図 2.19: 拡散方程式の解の時間発展の様子

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \kappa \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (2.88)$$

式 (2.88) を変形して次式を得る

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (2.89)$$

右辺は時刻  $t_n$  での値、左辺は時刻  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  での値だけで書けている。したがって、時刻  $t_n$  での各格子点での値がわかっているならば直ちに 1 タイムステップ後 ( $t_{n+1}$ ) の各格子点での値を計算することができる (陽解法)。

### Von Neumann の安定性解析

FTCS スキームの数値的安定性を調べるために  $u_j^n = g^n \exp(ij\theta)$  を FTCS 差分式に代入すると

$$g^{n+1} e^{ij\theta} = g^n e^{ij\theta} + \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} g^n [e^{i(j+1)\theta} - 2e^{ij\theta} + e^{i(j-1)\theta}]. \quad (2.90)$$

よって、

$$g = 1 - 2 \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} (1 - \cos\theta). \quad (2.91)$$

増幅率が  $|g| \leq 1$  であるためには

$$-1 \leq 1 - 2 \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} (1 - \cos\theta) \leq 1. \quad (2.92)$$

したがって、

$$0 \leq \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} (1 - \cos\theta) = \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \leq 1. \quad (2.93)$$

任意の  $\theta$  (任意の波長の波) について安定であるためには

$$0 \leq \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (2.94)$$

以上により、FTCS スキームにより 1次元拡散方程式のシミュレーションを行う場合、時間ステップ  $\Delta t$  が上式を満たすようにコントロールする必要があることがわかる。たとえばメッシュサイズを半分にした場合、 $\Delta t$  は 1/4 にしなければならない。

### 拡散方程式の陰解法 (implicit 法)

拡散方程式を差分化する際に右辺の空間差分の部分に、求めるべき  $t_{n+1}$  での  $u$  の値を含めて差分する方法がある。このような方法を 陰解法(implicit) 法と呼び、explicit 法とは安定性条件が異ってくる。代表的な陰解法である Crank-Nicolson 法では、パラメータ  $\lambda$  を導入して、以下のように差分化する。

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \kappa \left[ \lambda \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + (1 - \lambda) \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right] \quad (2.95)$$

これを整理すると次のような行列を含む式になる。

$$A u^{n+1} = b(u^n). \quad (2.96)$$

これを解いて  $u^{n+1}$  を求めればよい。

### 練習問題

1. 行列  $A$  とベクトル  $b$  の各要素を求めなさい。
2. Von Neumann の安定性解析により、 $\lambda > 1/2$  ならば  $\kappa \Delta t / \Delta x^2 > 0$  を満たす任意の  $\Delta t$  について Crank-Nicolson スキームは数値的に安定であることを示しなさい。

### 参考文献

- (1) 流体力学の数値計算法 (1994) 東京大学出版会、藤井孝蔵著
  - (2) Numerical Computation of Internal and External Flows, C. Hirsch, John Wiley & Sons, 1990
- (1) は、数値流体力学全般についてまとめられたテキストであり、必読文献である。



## 第3章 磁気流体力学方程式に対する近似リーマン解法

三好隆博 (広島大学)

この章では、磁気流体力学 (MHD) 方程式に対する代表的な衝撃波捕獲法である近似リーマン解法について解説する。

### 3.1 基礎方程式

MHD 方程式はプラズマの巨視的なダイナミクスを記述する基礎方程式である。特にここでは、電気抵抗率をゼロとした“理想”MHD 方程式を考える。

#### 3.1.1 MHD 方程式

MHD 方程式は、外力としてローレンツ力を作用させた流体方程式と磁場の時間発展方程式の組み合わせによって与えられる。無次元化した抵抗性 MHD 方程式は、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad : \quad \text{連続の式} \quad (3.1)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad : \quad \text{運動方程式} \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) = \frac{(\gamma - 1) \eta j^2}{\rho^\gamma} \quad : \quad \text{断熱の式} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad : \quad \text{誘導方程式} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{j} \quad : \quad \text{オームの法則} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} \quad : \quad \text{アンペールの法則} \quad (3.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad : \quad \text{磁場に関するガウスの法則} \quad (3.7)$$

となる。ここで、 $\rho$ 、 $\mathbf{v}$ 、 $p$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{j}$ 、 $\gamma$ 、 $\eta$ は、密度、速度、圧力、磁場、電場、電流、比熱比、電気抵抗率をそれぞれ表す。ラグランジュ微分は、 $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ である。(3.7)は磁束の保存を表わしており、(3.4)の初期条件を与える。また、(3.5)、(3.6)は見かけ上消去できる。したがって、最終的に MHD 方程式は未知数 8 個の連立非線形偏微分方程式となる。特に電場が誘導電場のみで与えられるとき、すなわち (3.5) の  $\eta$  がゼロのとき、散逸のない理想 MHD 方程式となる。

理想 MHD 方程式 (3.1)-(3.7) は、以下のとおり保存形式で書き直すことができる。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{v} \\ \mathbf{B} \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{v} \\ \rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p_T \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B} \\ \mathbf{v} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{v} \\ (e + p_T) \mathbf{v} - \mathbf{B} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

ここで、 $\mathbf{I}$  は単位行列を表す。全エネルギー密度  $e$  と全圧力  $p_T$  は、

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho |\mathbf{v}|^2}{2} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2}, \quad (3.10)$$

$$p_T = p + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2}, \quad (3.11)$$

により関係付けられる。理想 MHD 方程式のヤコビアン  $\mathbf{A}$ 、

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \quad (3.12)$$

は独立な実固有値 (特性速度) を持つ<sup>1</sup>。したがって、理想 MHD 方程式は双曲型保存則系である。

### 3.1.2 1次元理想 MHD 方程式

この後の議論のため、改めて1次元の理想 MHD 方程式を書き下す。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ B_y \\ B_z \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p_T - B_x^2 \\ \rho v u - B_x B_y \\ \rho w u - B_x B_z \\ B_y u - B_x v \\ B_z u - B_x w \\ (e + p_T) u - B_x (u B_x + v B_y + w B_z) \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

ここで、 $\mathbf{v} = (u, v, w)$ 、 $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$  とした。また、

$$p_T = p + \frac{1}{2} (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2). \quad (3.15)$$

$$p = (\gamma - 1) \left[ e - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) - \frac{1}{2} (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) \right]. \quad (3.16)$$

<sup>1</sup>ただし、固有値が縮退し得るため、厳密には固有値は完全独立ではない。

ただし、ガウスの法則 (3.7) から、1次元問題では、 $B_x$ は時間・空間的に一定となる。

ヤコビアン  $\mathbf{A}$  の固有値  $\lambda_j$  ( $j=1\dots7$ ) は、(3.14) から、2つのアルヴェン波、2つの速進磁気音波、2つの遅進磁気音波、1つのエントロピー波として、

$$\lambda_1 = u - c_f, \lambda_2 = u - c_a, \lambda_3 = u - c_s, \lambda_4 = u, \lambda_5 = u + c_s, \lambda_6 = u + c_a, \lambda_7 = u + c_f \quad (3.17)$$

が得られる。ここで、

$$c_a = |b_x|, c_{f/s} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ a^2 + b^2 \pm \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2 b_x^2} \right]}, \quad (3.18)$$

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}, b_x = \frac{B_x}{\sqrt{\rho}}, b_y = \frac{B_y}{\sqrt{\rho}}, b_z = \frac{B_z}{\sqrt{\rho}}, b^2 = b_x^2 + b_y^2 + b_z^2.$$

これから、

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \lambda_5 \leq \lambda_6 \leq \lambda_7 \quad (3.19)$$

の不等式が成り立ち、磁場の向きや強さによって固有値が縮退し得ることがわかる。

一般に双曲型保存則系は、弱解 (積分形の保存則を満たす解) として衝撃波解や不連続解を持つことが知られている。特に理想 MHD 方程式では、磁場の強さや向きによって不連続解は全く異なる性質を持つ。衝撃波の後面で磁場が強められる速進衝撃波、磁場が弱められる遅進衝撃波、衝撃波面がアルヴェン速度で伝播するアルヴェン衝撃波が衝撃波解として存在する。ただし、アルヴェン衝撃波では、

$$[\rho] = [p] = [B_y^2 + B_z^2] = 0, \pm\sqrt{\rho}[v] = [B_y], \pm\sqrt{\rho}[w] = [B_z], \quad (3.20)$$

の条件が成り立ち、衝撃波の前後で熱力学的量に変化がないので、回転不連続 (rotational discontinuity) とも呼ばれる。ここで、 $[\cdot]$  は不連続前後の物理量の差を表す。また、エントロピー波と共に伝播する不連続解として、

$$[B_y] = [B_z] = [v] = [w] = [p] = 0, B_x \neq 0 \quad (3.21)$$

を満足する接触不連続 (contact discontinuity)、

$$\left[ p + \frac{B_y^2 + B_z^2}{2} \right] = 0, B_x = 0 \quad (3.22)$$

を満足する接線不連続 (tangential discontinuity) が存在する。この他にも MHD 方程式では、複合波 (compound wave) や過圧縮衝撃波 (overcompressible shock) など普通の衝撃波でない衝撃波 (非古典的衝撃波) の存在が指摘されている。

## 3.2 近似リーマン解法

双曲型保存則系で生ずる不連続解を数値的に安定に解くため、特性の理論に基づく風上法が活発に開発研究され、大きな成功を収めてきた。このような衝撃波 (不連続解) を鋭く捕らえることができる解法を衝撃波捕獲法と呼ぶ。特にオイラー方程式に対しては、近似リーマン解法や流束ベクトル分離法、さらには AUSM (Advection Upstream Splitting Method) 系スキームといった様々なタイプの衝撃波捕獲法が開発された。流束ベクトル分離法は、オイラー方程式の流束関数  $\mathbf{F}$  が保存変数  $\mathbf{U}$  の一次同次関数

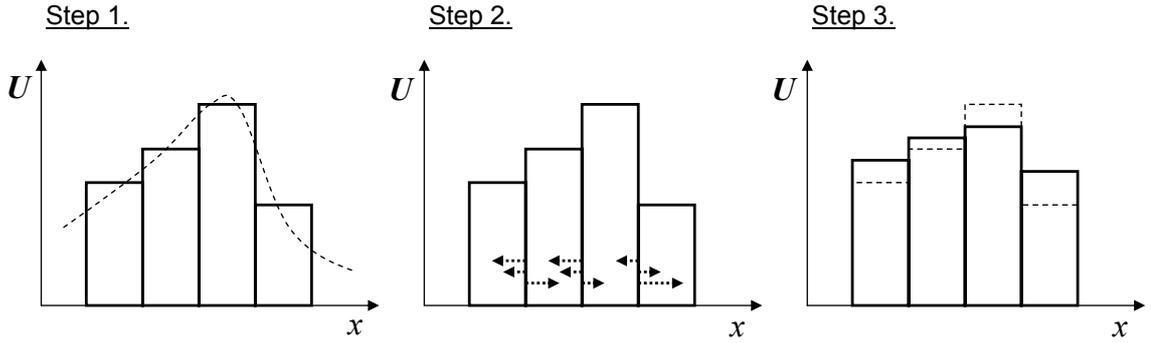


図 3.1: 近似リーマン解法のアルゴリズム。Step 1. 物理量を区分的定数関数によって近似する。Step 2. 各格子境界でリーマン問題を近似的に解く。Step 3. 各格子内でリーマン問題の解を積分する。

$\mathbf{F} = \mathbf{A}\mathbf{U}$ であることを利用して、 $\mathbf{F}$ を正負の固有値を持つ流束関数 $\mathbf{F}^\pm$ に分離する方法である。一方、MHD方程式は $\mathbf{F} \neq \mathbf{A}\mathbf{U}$ であり、 $\mathbf{F}^\pm$ の構築は困難である。AUSM系スキームでは、流束関数を移流項と音波による擾乱項に分離し、それぞれを風上化する<sup>2</sup>。MHD方程式ではアルヴェン波が存在するため、既存のAUSM系スキームを素直に適用することはできない<sup>3</sup>。したがって、MHD方程式に対する実践的な衝撃波捕獲法としては、近似リーマン解法が用いられることがほとんどである。

流束ベクトル分離法が格子内の特性速度の符号により流束分離を行うのに対し、近似リーマン解法では格子境界の特性速度の情報を用いて流束の風上化を行う。近似リーマン解法の手続きを図3.1に示す。初期条件として、物理量を各格子内で一定となるよう区分的定数関数で与える。このとき各格子境界において物理量が不連続になるため、初期値問題は各格子境界におけるリーマン問題(衝撃波管問題)に帰着する。最終的に、各格子内でリーマン問題の解を積分することによって、ある区分的定数関数として次の時刻の解が近似的に求められる。この手続きを繰り返すことにより、双曲型方程式を数値的に解くことができる。特に、各格子境界でリーマン問題を厳密に解く方法をGodunov法と呼ぶ。

ここで、 $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t^n, t^{n+1}]$ における双曲型保存則系の時空間保存、

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}(x, t^{n+1}) dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}(x, t^n) dx + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_{i+1/2}, t)) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_{i-1/2}, t)) dt = 0 \quad (3.23)$$

を考える。リーマン問題の解を $\mathbf{U}(x/t; \mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1})$ とすると、(3.23)は、

$$\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}_{i+1/2}^* - \mathbf{F}_{i-1/2}^*] = 0, \quad (3.24)$$

ただし、

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \mathbf{F}(\mathbf{U}(0; \mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1})), \quad (3.25)$$

となる(図3.2)。ここで、 $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ 、 $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ 。数値流束 $\mathbf{F}_{i+1/2}^*$ は、 $[x_{i+1/2} +$

<sup>2</sup>発見的方法によって定式化される。

<sup>3</sup>発見的方法によって定式化できる、かもしれない。パラメータ空間は無限である...

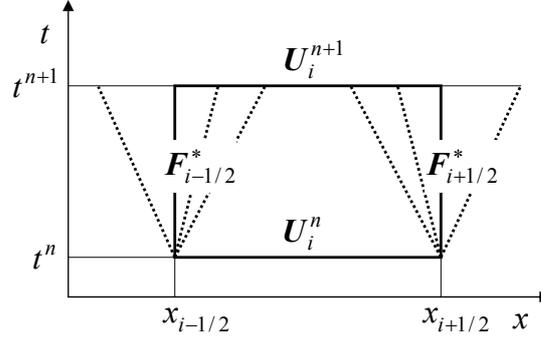


図 3.2:  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t^n, t^{n+1}]$  における双曲型保存則系のリーマン問題。

$\lambda_1 \Delta t, x_{i+1/2}] \times [t^n, t^{n+1}]$  の時空間保存から、

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \mathbf{F}_i^n - \frac{1}{\Delta t} \int_{\lambda_1 \Delta t}^0 \mathbf{U}(x/t^{n+1}; \mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n) dx - \lambda_1 \mathbf{U}_i^n \quad (3.26)$$

と与えられる。ただし、 $\lambda_1$  は最小固有値 (最小の特性速度) で負とする。 $\lambda_1 > 0$  の場合、超音速問題となるため、 $\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \mathbf{F}_i^n$  と風上側の流束で置き換えられる。保存則の対称性から、

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \mathbf{F}_{i+1}^n + \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\lambda_m \Delta t} \mathbf{U}(x/t^{n+1}; \mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n) dx - \lambda_m \mathbf{U}_{i+1}^n \quad (3.27)$$

も成立し、(3.26) と一致する。ただし、 $\lambda_m$  は最大固有値 (最大の特性速度) で正とする。

オイラー方程式や MHD 方程式は極めて高度な非線形システム方程式であり、リーマン問題の厳密解を求めるためにはニュートン法などの反復計算が必要になる。一方、Godunov 法では最終的に各格子内でリーマン問題の解を平均化するため、解の詳細な情報は失われる。そこで、リーマン問題の厳密解の代替となる性質のよい近似解の探索が重要となる。一般に、リーマン問題の近似解を用いて数値流束を評価する解法を近似リーマン解法、または Godunov 型解法と呼ぶ。

これ以降、格子境界左右の状態を示す添え字をそれぞれ  $L$ 、 $R$  とする。

### 3.2.1 線形近似リーマン解法

$[x_i, x_{i+1}] \times [t^n, t^{n+1}]$  においてヤコビアン  $\mathbf{A}$  を一定とする近似リーマン解法、つまり局所的に基礎方程式を線形化する近似法を線形近似リーマン解法と呼ぶ。

ヤコビアン  $\mathbf{A}_{i+1/2}$  を、正または負の固有値のみを持つヤコビアン  $\mathbf{A}_{i+1/2}^\pm$  に分離する。ここで  $\mathbf{A}_{i+1/2}^\pm$  は、 $\mathbf{A}_{i+1/2}$  に対する固有値行列  $\mathbf{\Lambda}_{i+1/2}$  と右固有行列  $\mathbf{R}_{i+1/2}$  を利用して、

$$\mathbf{A}_{i+1/2}^\pm = \frac{\mathbf{R}_{i+1/2} (\mathbf{\Lambda}_{i+1/2} \pm |\mathbf{\Lambda}_{i+1/2}|) \mathbf{R}_{i+1/2}^{-1}}{2} \quad (3.28)$$

と与えられる。したがって、

$$\mathbf{A}_{i+1/2} = \mathbf{A}_{i+1/2}^+ + \mathbf{A}_{i+1/2}^-, \quad |\mathbf{A}_{i+1/2}| = \mathbf{A}_{i+1/2}^+ - \mathbf{A}_{i+1/2}^-, \quad (3.29)$$

ただし、

$$|\mathbf{A}_{i+1/2}| = \mathbf{R}_{i+1/2} |\Lambda| \mathbf{R}_{i+1/2}^{-1} \quad (3.30)$$

である。右に進む波をまたぐジャンプ条件から、

$$\mathbf{F}_R - \mathbf{F}^* = \mathbf{A}_{i+1/2}^+ (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L), \quad (3.31)$$

同様に左に進む波をまたぐジャンプ条件から、

$$\mathbf{F}^* - \mathbf{F}_L = \mathbf{A}_{i+1/2}^- (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L), \quad (3.32)$$

が得られる。最終的に数値流束を対称化して表すと、

$$\mathbf{F}^* = \frac{\mathbf{F}_R + \mathbf{F}_L}{2} - \frac{1}{2} |\mathbf{A}_{i+1/2}| (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L) \quad (3.33)$$

となる。一般に、この解法は線形近似リーマン解法と呼ばれる。流束の差  $\Delta \mathbf{F}$  を  $\Delta \mathbf{F}^+ + \Delta \mathbf{F}^-$  と分離することから流束差分法とも呼ばれる。特に、ジャンプ条件が正しく評価されるよう、

$$\mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L = \mathbf{A}_{i+1/2} (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L) \quad (3.34)$$

を満足する  $\mathbf{A}_{i+1/2}$  を与える解法は Roe 法<sup>4</sup>と呼ばれ、最もスタンダードな近似リーマン解法としてよく知られている。

ただし、実際に MHD 方程式に線形近似リーマン解法を適用するには様々な工夫が必要となる。MHD 方程式では固有値 (3.17) が縮退し得るため、固有ベクトルに特異性が出現する。そのため固有ベクトルの適切な再規格化が必要となる<sup>5</sup>。また、 $\gamma = 2$  以外の場合、Roe 法に対するヤコビアン  $\mathbf{A}_{1/2}$  を求めることは容易ではない<sup>6</sup>。

線形近似リーマン解法では全ての波が考慮されており、各種不連続解を正しく解像できる。一方で、膨張波 (希薄波) が無視されているため、密度および圧力の正值性が破れることが証明されている。特に MHD 方程式では、磁気エネルギーの寄与分のため、オイラー方程式に比べてさらに正值性の条件は非常に厳しく、計算困難な初期条件が広く存在する。

### 3.2.2 HLL 近似リーマン解法

HLL 型の近似リーマン解法<sup>7</sup>では、膨張波も含めて最も速い特性速度  $S_R (> 0)$  と最も遅い速度  $S_L (< 0)$  に囲まれた領域、 $[S_L \Delta t, S_R \Delta t] \times [0, \Delta t]$  における時空間保存則、

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{S_L \Delta t}^{S_R \Delta t} \mathbf{U}(x, t) dx - S_R \mathbf{U}_R + S_L \mathbf{U}_L + \mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L = 0 \quad (3.35)$$

を満足するよう近似解が求められる。

<sup>4</sup>(3.34) に加えて、 $\mathbf{A}_{1/2}$  が独立な実固有値を持ち、ヤコビアンの適合性  $\mathbf{A}_{1/2}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \mathbf{A}(\mathbf{U})$  を満足する必要がある。これらの性質は合わせて Property U と呼ばれる。

<sup>5</sup>ここでは参考文献をあげるにとどめる。Brio and Wu, JCP, **75** (1988) 400。

<sup>6</sup>ここでは参考文献をあげるにとどめる。Cargo and Gallice, JCP, **136** (1997) 446、Balsara, ApJS, **116** (1998) 119。

<sup>7</sup>HLL 法の提案者である Harten(TVD/ENO の提案者)、Lax (双曲型保存則系業界の創始者)、van Leer(MUSCL の提案者) の頭文字。

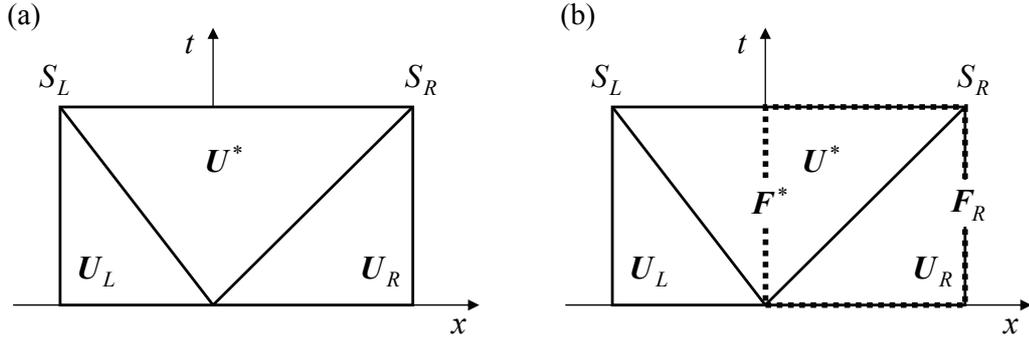


図 3.3: HLL 近似リーマン解法における (a) 近似解の模式図と (b) 数値流束評価のための積分経路。

特に HLL 法では、 $S_R$  と  $S_L$  に囲まれた領域 (リーマンファン) においてリーマン問題の解が単一状態  $U^*$  であると仮定する。(3.35) から、

$$(S_R - S_L)U^* - S_R U_R + S_L U_L + F_R - F_L = 0, \quad (3.36)$$

したがって、

$$U^* = \frac{S_R U_R - S_L U_L - F_R + F_L}{S_R - S_L} \quad (3.37)$$

が得られる (図 3.3(a))。続いて、 $[0, S_R \Delta t] \times [0, \Delta t]$  における時空間保存 (図 3.3(b)) から、

$$S_R U^* - S_R U + F_R - F^* = 0 \quad (3.38)$$

となる。ただし、数値流束  $F^*$  は、

$$F^* = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} F(0, t) dt \quad (3.39)$$

と定義される。(3.37) を (3.38) に代入すると、 $F^*$  は最終的に、

$$F^* = \frac{S_R F_L - S_L F_R + S_R S_L (U_R - U_L)}{S_R - S_L} \quad (3.40)$$

となる。もちろん、 $[S_L \Delta t, 0] \times [0, \Delta t]$  の保存則からも (3.40) は得られる。HLL 法は非線形の近似解法であり、 $F^* \neq F(U^*)$  であることに注意する必要がある。

HLL 法の数値流束 (3.40) を評価するためには、 $S_R$  と  $S_L$  の情報が必要である。MHD 方程式の特性速度は形式的には (3.17) と与えられる。しかし、厳密な  $S_R$ 、 $S_L$  を得るためには、リーマン問題を厳密に解く必要がある。そこで、 $S_R$ 、 $S_L$  を過小評価しないよう近似的に、

$$S_R = \max(u_R + c_{f_R}, u_L + c_{f_L}), \quad S_L = \min(u_R - c_{f_R}, u_L - c_{f_L}) \quad (3.41)$$

または

$$S_R = \max(u_R, u_L) + \max(c_{f_R}, c_{f_L}), \quad S_L = \min(u_R, u_L) - \max(c_{f_R}, c_{f_L}) \quad (3.42)$$

のように与えられる。また、特に Roe 平均値 (3.34) を用いて、

$$S_R = \max(u^{Roe} + c_f^{Roe}, u_R + c_{f_R}), \quad S_L = \min(u_L - c_{f_L}, u^{Roe} - c_f^{Roe}) \quad (3.43)$$

とも評価される。 $S_R < 0$ 、 $S_L > 0$ の場合についても、(3.40)が片側の流束  $\mathbf{F}_R$ 、 $\mathbf{F}_L$  に帰着できるよう、 $S_R$ 、 $S_L$  は一般に、

$$S_R = \max(S_R, 0), \quad S_L = \min(S_L, 0) \quad (3.44)$$

と拡張される。

HLL 法は  $\mathbf{U}$  や  $\mathbf{F}$  の詳細によらず非常にシンプルであり、固有ベクトルの計算も不要で計算効率が極めて高い。また、オイラー方程式および MHD 方程式に対して正値性が理論的に証明されており、極めてロバストである。しかし、リーマンファン内を単一状態と仮定しているため、接触不連続や回転不連続などを捕らえることができず、低解像度で数値的散逸が強い。

### 3.2.3 HLLD 近似リーマン解法

続いて、接触不連続や回転不連続を解像できる高解像度 HLL 型近似リーマン解法、HLLD 法<sup>8</sup>を検討する。HLLD 法では、リーマンファンにおいて速度  $u$  が一定と仮定する。この仮定から、リーマンファン内で加速や減速が生じないように、全圧力  $p_T$  が一定であることも要求される (図 3.4(b))。したがって、リーマンファン内は非圧縮状態となり、リーマン問題の解から遅進衝撃波は除外される。このことから、リーマン問題の近似解は、2つの速進衝撃波  $S_R$ 、 $S_L$ 、2つのアルヴェン波  $S_R^*$ 、 $S_L^*$ 、1つのエントロピー波  $S_M$  で分割された4つの状態 (リーマンファンの左から  $\mathbf{U}_L^*$ 、 $\mathbf{U}_L^{**}$ 、 $\mathbf{U}_R^{**}$ 、 $\mathbf{U}_R^*$  と表記) となる (図 3.4(a))。

リーマンファンにおける速度  $u$  はエントロピー波の速度  $S_M$  と一致する。ここで  $S_M$  は、時空間保存則 (3.37) を用いて、

$$\begin{aligned} S_M &= \frac{(\rho u)^*}{\rho^*} \\ &= \frac{(S_R - u_R)\rho_R u_R - (S_L - u_L)\rho_L u_L - p_{TR} + p_{TL}}{(S_R - u_R)\rho_R - (S_L - u_L)\rho_L} \end{aligned} \quad (3.45)$$

と与える。速度  $u$  はリーマンファン内で一定なので、

$$u_L^* = u_L^{**} = u_R^{**} = u_R^* = S_M \quad (3.46)$$

となる。また全圧力  $p_T$  も、

$$p_{TL}^* = p_{TL}^{**} = p_{TR}^{**} = p_{TR}^* = p_T^* \quad (3.47)$$

と一定である。

まず、速進衝撃波  $S_\alpha$  ( $\alpha$  は  $R$  または  $L$ ) に対するジャンプ条件、

$$S_\alpha \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* \\ B_{y_\alpha}^* \\ B_{z_\alpha}^* \\ e_\alpha^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* S_M^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* S_M - B_x B_{y_\alpha}^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* S_M - B_x B_{z_\alpha}^* \\ B_{y_\alpha}^* S_M - B_x v_\alpha^* \\ B_{z_\alpha}^* S_M - B_x w_\alpha^* \\ (e_\alpha^* + p_T^*) S_M - B_x (\mathbf{v}_\alpha^* \cdot \mathbf{B}_\alpha^*) \end{pmatrix} = S_\alpha \begin{pmatrix} \rho_\alpha \\ \rho_\alpha u_\alpha \\ \rho_\alpha v_\alpha \\ \rho_\alpha w_\alpha \\ B_{y_\alpha} \\ B_{z_\alpha} \\ e_\alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha u_\alpha \\ \rho_\alpha u_\alpha^2 + p_{T_\alpha} - B_x^2 \\ \rho_\alpha v_\alpha u_\alpha - B_x B_{y_\alpha} \\ \rho_\alpha w_\alpha u_\alpha - B_x B_{z_\alpha} \\ B_{y_\alpha} u_\alpha - B_x v_\alpha \\ B_{z_\alpha} u_\alpha - B_x w_\alpha \\ (e_\alpha + p_{T_\alpha}) u_\alpha - B_x (\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{B}_\alpha) \end{pmatrix}, \quad (3.48)$$

<sup>8</sup>HLLD 法の “D” は不連続 (discontinuities) の頭文字を表す。HLLC 法 (接触不連続 (contact discontinuity) を解像する HLL 型の近似リーマン解法) の上位の解法である。

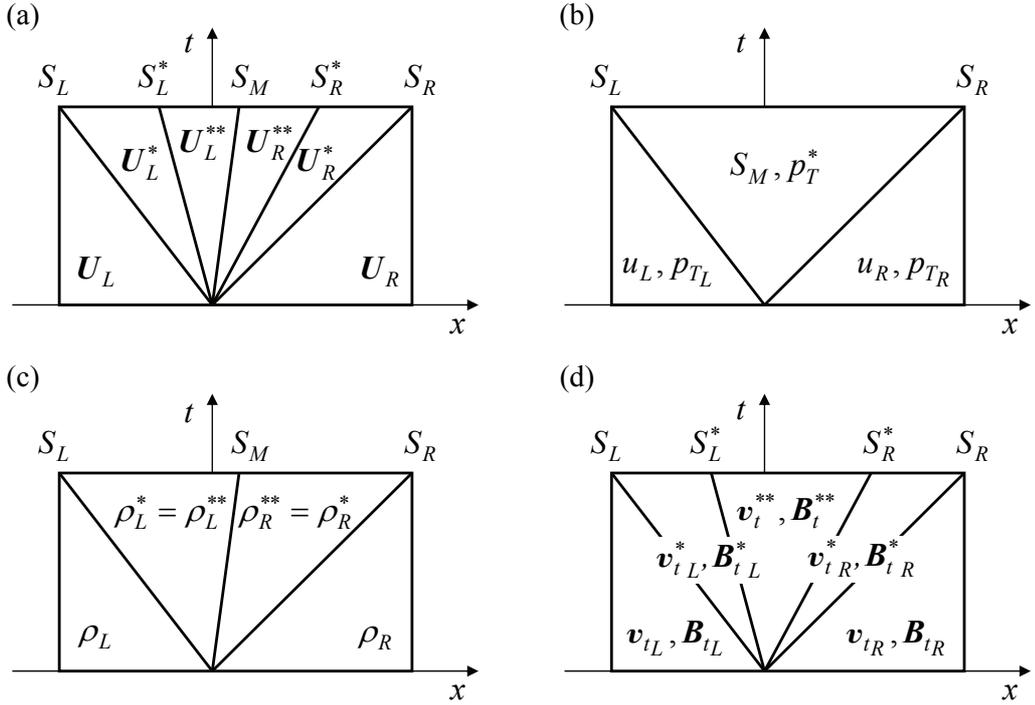


図 3.4: HLLD 近似リーマン解法における近似解の模式図。

を考えよう。第 2 式から、

$$\begin{aligned}
 p_T^* &= p_{TL} + \rho_L(S_L - u_L)(S_M - u_L) \\
 &= p_{TR} + \rho_R(S_R - u_R)(S_M - u_R) \\
 &= \frac{(\rho_R - \rho_L)p_{TL} - (\rho_L - \rho_R)p_{TR} + \rho_L\rho_R(S_R - u_R)(S_L - u_L)(u_R - u_L)}{(\rho_R - \rho_L)(S_M - u_L) - (\rho_L - \rho_R)(S_L - u_L)}
 \end{aligned} \quad (3.49)$$

が得られる。続いて第 1 式から、

$$\rho_\alpha^* = \rho_\alpha \frac{S_\alpha - u_\alpha}{S_\alpha - S_M} \quad (3.50)$$

となる。第 3 式と第 5 式を連立させて、

$$v_\alpha^* = v_\alpha - B_x B_{y\alpha} \frac{S_M - u_\alpha}{\rho_\alpha(S_\alpha - u_\alpha)(S_\alpha - S_M) - B_x^2} \quad (3.51)$$

$$B_{y\alpha}^* = B_{y\alpha} \frac{\rho_\alpha(S_\alpha - u_\alpha)^2 - B_x^2}{\rho_\alpha(S_\alpha - u_\alpha)(S_\alpha - S_M) - B_x^2} \quad (3.52)$$

が得られる。同様に、第 4 式と第 6 式から、

$$w_\alpha^* = w_\alpha - B_x B_{z\alpha} \frac{S_M - u_\alpha}{\rho_\alpha(S_\alpha - u_\alpha)(S_\alpha - S_M) - B_x^2} \quad (3.53)$$

$$B_{z\alpha}^* = B_{z\alpha} \frac{\rho_\alpha(S_\alpha - u_\alpha)^2 - B_x^2}{\rho_\alpha(S_\alpha - u_\alpha)(S_\alpha - S_M) - B_x^2} \quad (3.54)$$

が得られる。最後に第7式から、

$$e_\alpha^* = \frac{(S_\alpha - u_\alpha)e_\alpha - p_{T_\alpha}u_\alpha + p_T^*S_M + B_x(\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{B}_\alpha - \mathbf{v}_\alpha^* \cdot \mathbf{B}_\alpha^*)}{S_\alpha - S_M} \quad (3.55)$$

となる。

続いて、アルヴェン波  $S_\alpha^*$  に対するジャンプ条件を考える。 $\rho$  のジャンプ条件、すなわち連続の式から明らかに、任意の  $S_\alpha^*$  に対し、

$$\rho_\alpha^{**} = \rho_\alpha^* \quad (3.56)$$

が成り立つ (図 3.4(c))。したがって、アルヴェン波の速度は、

$$S_R^* = S_M + \frac{|B_x|}{\sqrt{\rho_R^*}}, \quad S_L^* = S_M - \frac{|B_x|}{\sqrt{\rho_L^*}} \quad (3.57)$$

と与えられる。ところが、(3.57) を用いると、 $\mathbf{v}_t = (0, v, w)$ 、 $\mathbf{B}_t = (0, B_y, B_z)$  のジャンプ条件、

$$S_\alpha^* \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* v_\alpha^{**} \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^{**} \\ B_{y\alpha}^{**} \\ B_{z\alpha}^{**} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* v_\alpha^{**} S_M - B_x B_{y\alpha}^{**} \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^{**} S_M - B_x B_{z\alpha}^{**} \\ B_{y\alpha}^{**} S_M - B_x v_\alpha^{**} \\ B_{z\alpha}^{**} S_M - B_x w_\alpha^{**} \end{pmatrix} = S_\alpha^* \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* v_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* \\ B_{y\alpha}^* \\ B_{z\alpha}^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* v_\alpha^* S_M - B_x B_{y\alpha}^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* S_M - B_x B_{z\alpha}^* \\ B_{y\alpha}^* S_M - B_x v_\alpha^* \\ B_{z\alpha}^* S_M - B_x w_\alpha^* \end{pmatrix}, \quad (3.58)$$

から、 $\mathbf{v}_{t\alpha}^{**}$ 、 $\mathbf{B}_{t\alpha}^{**}$  を解くことができない。一方、 $S_M$  に対する  $\mathbf{v}_t$ 、 $\mathbf{B}_t$  のジャンプ条件、

$$S_M \begin{pmatrix} \rho_L^* v_L^{**} \\ \rho_L^* w_L^{**} \\ B_{yL}^{**} \\ B_{zL}^{**} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_L^* v_L^{**} S_M - B_x B_{yL}^{**} \\ \rho_L^* w_L^{**} S_M - B_x B_{zL}^{**} \\ B_{yL}^{**} S_M - B_x v_L^{**} \\ B_{zL}^{**} S_M - B_x w_L^{**} \end{pmatrix} = S_M \begin{pmatrix} \rho_R^* v_R^{**} \\ \rho_R^* w_R^{**} \\ B_{yR}^{**} \\ B_{zR}^{**} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_R^* v_R^{**} S_M - B_x B_{yR}^{**} \\ \rho_R^* w_R^{**} S_M - B_x B_{zR}^{**} \\ B_{yR}^{**} S_M - B_x v_R^{**} \\ B_{zR}^{**} S_M - B_x w_R^{**} \end{pmatrix}, \quad (3.59)$$

から、

$$v_L^{**} = v_R^{**} \equiv v^{**} \quad (3.60)$$

$$w_L^{**} = w_R^{**} \equiv w^{**} \quad (3.61)$$

$$B_{yL}^{**} = B_{yR}^{**} \equiv B_y^{**} \quad (3.62)$$

$$B_{zL}^{**} = B_{zR}^{**} \equiv B_z^{**} \quad (3.63)$$

となる (図 3.4(d))。そこで、リーマンファンの時空間保存則 (3.35)、

$$(S_R - S_R^*)\mathbf{U}_R^* + (S_R^* - S_M)\mathbf{U}_R^{**} + (S_M - S_R^*)\mathbf{U}_L^{**} + (S_L^* - S_L)\mathbf{U}_L^* - S_R\mathbf{U}_R + S_L\mathbf{U}_L + \mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L = 0 \quad (3.64)$$

を利用すると、

$$v^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*}v_L^* + \sqrt{\rho_R^*}v_R^* + (B_{yR}^* - B_{yL}^*)\text{sgn}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}} \quad (3.65)$$

$$w^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*}w_L^* + \sqrt{\rho_R^*}w_R^* + (B_{zR}^* - B_{zL}^*)\text{sgn}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}} \quad (3.66)$$

$$B_y^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} B_{yR}^* + \sqrt{\rho_R^*} B_{yL}^* + \sqrt{\rho_L^* \rho_R^*} (v_R^* - v_L^*) \text{sgn}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}} \quad (3.67)$$

$$B_z^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} B_{zR}^* + \sqrt{\rho_R^*} B_{zL}^* + \sqrt{\rho_L^* \rho_R^*} (w_R^* - w_L^*) \text{sgn}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}} \quad (3.68)$$

が得られる。ここで、 $\text{sgn}$  は符号関数である。最後に  $S_\alpha^*$  に対する  $e$  のジャンプ条件から、

$$e_R^{**} = e_R^* + \sqrt{\rho_R^*} (\mathbf{v}_R^* \cdot \mathbf{B}_R^* - \mathbf{v}^{**} \cdot \mathbf{B}^{**}) \text{sgn}(B_x) \quad (3.69)$$

$$e_L^{**} = e_L^* - \sqrt{\rho_L^*} (\mathbf{v}_L^* \cdot \mathbf{B}_L^* - \mathbf{v}^{**} \cdot \mathbf{B}^{**}) \text{sgn}(B_x) \quad (3.70)$$

が得られる。ただし、 $\mathbf{v}^{**} = (S_M, v^{**}, w^{**})$ 、 $\mathbf{B}^{**} = (B_x, B_y^{**}, B_z^{**})$ 。

以上、リーマンファンにおける4つの状態、 $\mathbf{U}_L^*$ 、 $\mathbf{U}_L^{**}$ 、 $\mathbf{U}_R^{**}$ 、 $\mathbf{U}_R^*$  が完全に代数的に得られた。

数値流束  $\mathbf{F}^*$  は、HLL 法と同様に、 $[0, S_R \Delta t] \times [0, \Delta t]$  または  $[S_L \Delta t, 0] \times [0, \Delta t]$  における時空間保存則から求められる。例えば、 $S_L \leq 0 \leq S_L^*$  の場合、

$$(0 - S_L) \mathbf{U}_L^* - (0 - S_L) \mathbf{U}_L + \mathbf{F}^* - \mathbf{F}_L = 0 \quad (3.71)$$

から、 $S_L^* \leq 0 \leq S_M$  の場合、

$$(0 - S_L^*) \mathbf{U}_L^{**} + (S_L^* - S_L) \mathbf{U}_L^* - (0 - S_L) \mathbf{U}_L + \mathbf{F}^* - \mathbf{F}_L = 0 \quad (3.72)$$

から  $\mathbf{F}^*$  が得られる。最終的に、

$$\mathbf{F}^* = \begin{cases} \mathbf{F}_L & \text{for } 0 \leq S_L \\ \mathbf{F}_L^* & \text{for } S_L \leq 0 \leq S_L^* \\ \mathbf{F}_L^{**} & \text{for } S_L^* \leq 0 \leq S_M \\ \mathbf{F}_R^{**} & \text{for } S_M \leq 0 \leq S_R^* \\ \mathbf{F}_R^* & \text{for } S_R^* \leq 0 \leq S_R \\ \mathbf{F}_R & \text{for } S_R \leq 0 \end{cases} \quad (3.73)$$

となる<sup>9</sup>。ただし、

$$\mathbf{F}_{R/L}^{*/**} = \mathbf{F} \left( \rho_{R/L}^{*/**}, S_M, v_{R/L}^{*/**}, w_{R/L}^{*/**}, B_x, B_{yR/L}^{*/**}, B_{zR/L}^{*/**}, e_{R/L}^{*/**}, p_T \right) \quad (3.74)$$

である。 $S_R$  と  $S_L$  は、HLL 法と同様に、例えば、(3.41) から (3.44) のように評価する。特に磁場がゼロのとき、この解法はオイラー方程式に対する HLLC 法に帰着する。

HLL 法と異なり、HLLD 法では MHD 方程式の接触不連続や回転不連続、接線不連続を正確に解像できる。また、密度および圧力の正值性の保存性も理論的に保証される (付録 3.3.1)<sup>10</sup>。様々な数値実験の結果から、線形近似リーマン解法と同等の解像度を持ちつつ、線形近似リーマン解法に比べ計算効率が低いことも示されている。したがって、HLLD 法は、解像度、ロバストさ、計算効率の全てに優れた MHD 解法といえる。

<sup>9</sup>ジャンプ条件  $S[\mathbf{U}] - [\mathbf{F}] = 0$  を満足するように近似解を求めたので当然である。

<sup>10</sup>MHD 方程式に対する HLL 法の正值性保存性も合わせて証明できる。

### 3.3 付録

#### 3.3.1 HLL 型近似リーマン解法の正值性の証明

MHD 方程式の物理的な解の集合  $G$ 、

$$G = \left\{ \mathbf{U} \left| \rho > 0, p = (\gamma - 1) \left[ e - \frac{\rho(u^2 + v^2 + w^2)}{2} - \frac{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}{2} \right] > 0 \right. \right\} \quad (3.75)$$

を考える。 $G$ に含まれる  $\mathbf{U}_1$  と  $\mathbf{U}_2$  の重み付き平均値  $\mathbf{U}$ 、

$$\mathbf{U} = (1 - \theta)\mathbf{U}_1 + \theta\mathbf{U}_2 \quad (\text{ただし、} 0 \leq \theta \leq 1) \quad (3.76)$$

に対して、密度  $\rho$  と圧力  $p$  は、

$$\rho = (1 - \theta)\rho_1 + \theta\rho_2 \quad (3.77)$$

$$p = (1 - \theta)p_1 + \theta p_2 + \theta(1 - \theta)(\gamma - 1) \left( \frac{\rho_1\rho_2|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2}{2\rho} + \frac{|\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2|^2}{2} \right) \quad (3.78)$$

と表される。したがって、 $\rho > 0$ 、 $p > 0$  であり、 $\mathbf{U}$  も  $G$  に含まれることがわかる。

近似リーマン解法による数値解は、各格子境界におけるリーマン問題の近似解を各格子内で積分したものに等しい。一方、上で示されたとおり、 $G$  に含まれる  $\mathbf{U}$  の重み付き平均値は  $G$  に含まれる。したがって、近似リーマン解法の正值性の保存性を証明するためには、リーマン問題の近似解の正值性を調べればよいことになる。

HLLD 近似リーマン解法における  $\mathbf{U}_R^*$ 、 $\mathbf{U}_R^{**}$  の正值性の条件、

$$\rho_R^* > 0, \quad (3.79)$$

$$\rho_R^{**} > 0, \quad (3.80)$$

$$e_R^* - \frac{1}{2}\rho_R^*|\mathbf{v}_R^*|^2 - \frac{1}{2}|\mathbf{B}_R^*|^2 > 0, \quad (3.81)$$

$$e_R^{**} - \frac{1}{2}\rho_R^{**}|\mathbf{v}_R^{**}|^2 - \frac{1}{2}|\mathbf{B}_R^{**}|^2 > 0, \quad (3.82)$$

について議論しよう。

ここで、次のような変数、

$$\xi \equiv S_R - u_R, \quad \eta \equiv S_R - S_M, \quad \zeta \equiv S_M - u_R \quad (3.83)$$

を導入する。 $S_R$  が、例えば (3.41)–(3.43) のように、膨張波も含めた系最大の特性速度よりも小さくならないように与えられるので、 $\xi$  と  $\eta$  は常に正である。一方、 $\zeta$  は正と負のどちらも取り得る。また、変数の定義から  $\xi - \eta = \zeta$  である。

密度の正值性の条件 (3.79)、(3.80) は、(3.50)、(3.56) から、

$$\rho_R^* = \rho_R^{**} = \frac{\xi}{\eta}\rho_R > 0 \quad (3.84)$$

と常に満たされることがわかる。

$\mathbf{U}_R^*$ における圧力の正值性の条件 (3.81) を示すため、

$$\varphi \equiv \eta \left( e_R^* - \frac{1}{2} \rho_R^* |\mathbf{v}_R^*|^2 - \frac{1}{2} |\mathbf{B}_R^*|^2 \right) \quad (3.85)$$

の正值性を証明しよう。  $\varphi$  を整理すると、

$$\begin{aligned} \varphi &= \xi e_R - p_{TR} u_R + p_T^* S_M + B_x (\mathbf{v}_R \cdot \mathbf{B}_R - \mathbf{v}_R^* \cdot \mathbf{B}_R^*) - \eta \frac{\rho_R^* |\mathbf{v}_R^*|^2}{2} - \eta \frac{|\mathbf{B}_R^*|^2}{2} \\ &= \xi \left( \frac{p_R}{\gamma-1} + \frac{\rho_R |\mathbf{v}_R|^2}{2} + \frac{|\mathbf{B}_R|^2}{2} \right) - \left( p_R + \frac{|\mathbf{B}_R|^2}{2} \right) u_R + \left( p_R + \frac{|\mathbf{B}_R|^2}{2} + \rho_R \xi \zeta \right) S_M \\ &\quad + B_x \left( -B_x \zeta - \frac{\rho_R \xi \zeta}{\rho_R \xi \eta - B_x^2} (\mathbf{v}_{tR} \cdot \mathbf{B}_{tR}) + \frac{B_x \zeta}{\rho_R \xi \eta - B_x^2} |\mathbf{B}_{tR}|^2 + \frac{\rho_R B_x \xi \zeta^2}{(\rho_R \xi \eta - B_x^2)^2} |\mathbf{B}_{tR}|^2 \right) \\ &\quad - \xi \frac{\rho_R |\mathbf{v}_R^*|^2}{2} - (\xi - \zeta) \frac{|\mathbf{B}_R^*|^2}{2} \\ &= \frac{p_R \xi}{\gamma-1} + p_R \zeta + \frac{|\mathbf{B}_R|^2}{2} \zeta + \rho_R S_M \xi \zeta \\ &\quad + \frac{\rho_R (|\mathbf{v}_R|^2 - |\mathbf{v}_R^*|^2)}{2} \xi + \frac{|\mathbf{B}_R|^2 - |\mathbf{B}_R^*|^2}{2} \xi + \frac{|\mathbf{B}_R^*|^2}{2} \zeta \\ &\quad - B_x^2 \zeta - \frac{\rho_R B_x (\mathbf{v}_{tR} \cdot \mathbf{B}_{tR})}{\rho_R \xi \eta - B_x^2} \xi \zeta + \frac{B_x^2 |\mathbf{B}_{tR}|^2}{\rho_R \xi \eta - B_x^2} \zeta + \frac{\rho_R B_x^2 |\mathbf{B}_{tR}|^2}{(\rho_R \xi \eta - B_x^2)^2} \xi \zeta^2 \\ &= \frac{p_R \xi}{\gamma-1} + p_R \zeta + \rho_R S_M \xi \zeta + \frac{\rho_R (u_R^2 - S_M^2)}{2} \xi \\ &\quad + \frac{\rho_R (|\mathbf{v}_{tR}|^2 - |\mathbf{v}_{tR}^*|^2)}{2} \xi + \frac{|\mathbf{B}_{tR}|^2 - |\mathbf{B}_{tR}^*|^2}{2} \xi + \frac{|\mathbf{B}_{tR}|^2 + |\mathbf{B}_{tR}^*|^2}{2} \zeta \\ &\quad - \frac{\rho_R B_x (\mathbf{v}_{tR} \cdot \mathbf{B}_{tR})}{\rho_R \xi \eta - B_x^2} \xi \zeta + \frac{B_x^2 |\mathbf{B}_{tR}|^2}{\rho_R \xi \eta - B_x^2} \zeta + \frac{\rho_R B_x^2 |\mathbf{B}_{tR}|^2}{(\rho_R \xi \eta - B_x^2)^2} \xi \zeta^2 \\ &= \frac{p_R \xi}{\gamma-1} + p_R \zeta + \frac{\rho_R \xi}{2} \zeta^2 \\ &\quad + \frac{\rho_R \xi}{2} \left( \frac{2B_x (\mathbf{v}_{tR} \cdot \mathbf{B}_{tR})}{\rho_R \xi \eta - B_x^2} \zeta - \frac{B_x^2 |\mathbf{B}_{tR}|^2}{(\rho_R \xi \eta - B_x^2)^2} \zeta^2 \right) \\ &\quad + \frac{\xi}{2} \left( -\frac{2\rho_R |\mathbf{B}_{tR}|^2}{\rho_R \xi \eta - B_x^2} \xi \zeta - \frac{\rho_R^2 |\mathbf{B}_{tR}|^2}{(\rho_R \xi \eta - B_x^2)^2} \xi^2 \zeta^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( 2|\mathbf{B}_{tR}|^2 + \frac{2\rho_R |\mathbf{B}_{tR}|^2}{\rho_R \xi \eta - B_x^2} \xi \zeta + \frac{\rho_R^2 |\mathbf{B}_{tR}|^2}{(\rho_R \xi \eta - B_x^2)^2} \xi^2 \zeta^2 \right) \zeta \\ &\quad - \frac{\rho_R B_x (\mathbf{v}_{tR} \cdot \mathbf{B}_{tR})}{\rho_R \xi \eta - B_x^2} \xi \zeta + \frac{B_x^2 |\mathbf{B}_{tR}|^2}{\rho_R \xi \eta - B_x^2} \zeta + \frac{\rho_R B_x^2 |\mathbf{B}_{tR}|^2}{(\rho_R \xi \eta - B_x^2)^2} \xi \zeta^2 \\ &= \frac{p_R \xi}{\gamma-1} + p_R \zeta + \frac{\rho_R \xi}{2} \left( 1 - \frac{|\mathbf{B}_{tR}|^2}{\rho_R \xi \eta - B_x^2} \right) \zeta^2 \end{aligned} \quad (3.86)$$

となる。ただし、 $\mathbf{v}_{tR} = (0, v_R, w_R)$ 、 $\mathbf{B}_{tR} = (0, B_{yR}, B_{zR})$ 。途中、(3.49)–(3.55)、

$$p_{TR}^* = p_{TR} + \rho_R \xi \zeta \quad (3.87)$$

$$\rho_R^* = \frac{\xi}{\eta} \rho_R \quad (3.88)$$

$$\mathbf{v}_{tR}^* = \mathbf{v}_{tR} - \frac{B_x \zeta}{\rho_R \xi \eta - B_x^2} \mathbf{B}_{tR} \quad (3.89)$$

$$\mathbf{B}_{tR}^* = \frac{\rho_R \xi^2 - B_x^2}{\rho_R \xi \eta - B_x^2} \mathbf{B}_{tR} = \left(1 + \frac{\rho_R \xi \zeta}{\rho_R \xi \eta - B_x^2}\right) \mathbf{B}_{tR} \quad (3.90)$$

$$e_R^* = \frac{\xi e_R - p_{TR} u_R + p_T^* S_M + B_x (\mathbf{v}_R \cdot \mathbf{B}_R - \mathbf{v}_R^* \cdot \mathbf{B}_R^*)}{\eta} \quad (3.91)$$

を利用した。ここで、 $S_R$ が系最大の特性速度であることから、 $\xi \geq c_{fR}$ 、 $\eta \geq c_{fR}$ となるので、

$$\varphi' = \frac{p_R \xi}{\gamma - 1} + p_R \zeta + \frac{\rho_R \xi}{2} \left(1 - \frac{|\mathbf{B}_{tR}|^2}{\rho_R c_{fR}^2 - B_x^2}\right) \zeta^2 \leq \varphi \quad (3.92)$$

である。つまり、 $\varphi'$ が正であれば $\varphi$ は必ず正である。 $\varphi'$ は $\zeta$ の二次方程式であり、2次の項の係数は、

$$\rho c_f^2 - |\mathbf{B}|^2 = \rho c_f^2 - B_x^2 - |\mathbf{B}_t|^2 > 0 \quad (3.93)$$

から正である<sup>11</sup>。したがって、 $\varphi'$ の判別式 $D$ が負のとき、任意の $\zeta$ に対して $\varphi'$ は正となる。つまり、

$$D(\varphi') = p_R^2 - \frac{2\rho_R p_R}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{|\mathbf{B}_{tR}|^2}{\rho_R c_{fR}^2 - B_x^2}\right) \xi^2 < 0 \quad (3.94)$$

から、

$$\xi^2 > \frac{(\gamma - 1)p_R}{2\rho_R} \left(1 - \frac{|\mathbf{B}_{tR}|^2}{\rho_R c_{fR}^2 - B_x^2}\right)^{-1} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} c_{fR}^2 \quad (3.95)$$

のとき、正值性の条件 (3.81) は満たされる。ただし、導出過程で、

$$\rho c_s^2 - B_x^2 = -\frac{B_x^2 |\mathbf{B}_t|^2}{\rho c_f^2 - B_x^2}, \quad c_f^2 c_s^2 = \frac{\gamma p B_x^2}{\rho^2} \quad (3.96)$$

を利用した。最終的に正值性の条件は、

$$S_R > u_R + \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} c_{fR} \quad (3.97)$$

となり、 $S_R$ は明らかにこの条件を満たす。

続いて、 $\mathbf{U}_R^{**}$ における圧力の正值性の条件 (3.82) は、

$$\begin{aligned} p_R^{**} &= (\gamma - 1) \left( e_R^{**} - \frac{\rho_R^* |\mathbf{v}^{**}|^2}{2} - \frac{|\mathbf{B}^{**}|^2}{2} \right) \\ &= p_R^* + \frac{\gamma - 1}{2} \left( \left| \sqrt{\rho_R^*} \mathbf{v}_R^* + \mathbf{B}_R^* \operatorname{sgn}(B_x) \right|^2 - \left| \sqrt{\rho_R^*} \mathbf{v}^{**} + \mathbf{B}^{**} \operatorname{sgn}(B_x) \right|^2 \right) \\ &= p_R^* > 0 \end{aligned} \quad (3.98)$$

と示される。

<sup>11</sup>  $\mathbf{B}_t = 0$ 、 $B_x^2 \geq \gamma p$  のとき、 $|\mathbf{B}_t|^2 / (\rho c_f^2 - B_x^2)$  は 0/0 となる。ただし、 $\mathbf{B}_t = 0$  では、(3.86) はオイラー方程式に対する HLLC 近似リーマン解法の正值性条件に一致する。

$U_L^*$ ,  $U_L^{**}$  の正値性の条件は、対称性から、

$$S_L < u_L - \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} c_{fL} \quad (3.99)$$

となり、 $S_L$  は容易にこの条件を満たす。

以上、リーマン問題の近似解、 $U_L^*$ ,  $U_L^{**}$ ,  $U_R^*$ ,  $U_R^{**}$  の正値性が示された。したがって、HLLD 近似リーマン解法は正値性を保存する解法である。

また、HLL 近似リーマン解法における近似解は、HLLD 近似リーマン解法における近似解の重み付き平均値として与えられる。したがって、HLL 近似リーマン解法も正値性を保存する解法である。

### 3.3.2 HLLD 近似リーマン解法のサンプルプログラム

HLLD 近似リーマン解法のサンプルプログラム (Fortran90) を示す。

```
!-----
subroutine calc_flux_hlld(rol,vnl,vtl,vul,btl,bul,prl, &
                        ror,vnr,vtr,vur,btr,bur,pr, &
                        bnc, &
                        fro,fmn,fmt,fmu,fbt,fbu,fen)
!-----
real(DP), intent(IN)  :: rol,vnl,vtl,vul,btl,bul,prl
real(DP), intent(IN)  :: ror,vnr,vtr,vur,btr,bur,pr
real(DP), intent(IN)  :: bnc
real(DP), intent(OUT) :: fro,fmn,fmt,fmu,fbt,fbu,fen
real(DP)               :: bnc2,sgn
real(DP)               :: roli,pml,ptl,enl,vbl
real(DP)               :: rori,pmr,ptr,enr,vbr
real(DP)               :: cl2,cal2,cbl2,cfl2,cfl
real(DP)               :: cr2,car2,cbr2,cfr2,cfr
real(DP)               :: sr,sl
real(DP)               :: slvl,srvr,rslvl,rsrvr,drsvi
real(DP)               :: vnc,ptc
real(DP)               :: slvc,rhdl,rhdli,rhnvl,rhnbl
real(DP)               :: srvc,rhdr,rhdri,rhnvr,rhnbr
real(DP)               :: ro2l,vt2l,vu2l,bt2l,bu2l,vb2l,en2l
real(DP)               :: ro2r,vt2r,vu2r,bt2r,bu2r,vb2r,en2r
real(DP)               :: rro2l,rro2r,rro2i
real(DP)               :: vt3m,vu3m,bt3m,bu3m,vb3m,en3l,en3r
real(DP)               :: rou,vtu,vuu,btu,uu,enu
!.....
```

```

! Bn at the interface
!.....
  bnc2 = bnc**2
  sgn  = sign(1.0_DP,bnc)
!.....
! variables at the left-face
!.....
  roli = 1.0_DP/rol
  pml  = 0.5_DP*(btl**2+bul**2)
  ptl  = prl+pml
  enl  = gammam1i*prl+pml+0.5_DP*rol*(vnl**2+vtl**2+vul**2)
  vbl  = vtl*btl+vul*bul
!.....
! variables at the right-face
!.....
  rori = 1.0_DP/ror
  pmr  = 0.5_DP*(btr**2+bur**2)
  ptr  = prr+pmr
  enr  = gammam1i*prr+pmr+0.5_DP*ror*(vnr**2+vtr**2+vur**2)
  vbr  = vtr*btr+vur*bur
!.....
! maximum / minimum wave speeds
!.....
  cl2  = gamma*prl*roli
  cr2  = gamma*prr*rori
  cal2 = bnc2*roli
  car2 = bnc2*rori
  cbl2 = cl2+cal2+2.0_DP*pml*roli
  cbr2 = cr2+car2+2.0_DP*pmr*rori
  cfl2 = 0.5_DP*(cbl2+sqrt(abs(cbl2**2-4.0_DP*c12*cal2)))
  cfr2 = 0.5_DP*(cbr2+sqrt(abs(cbr2**2-4.0_DP*cr2*car2)))
  cfl  = sqrt(cfl2)
  cfr  = sqrt(cfr2)
  sl   = min(0.0_DP,min(vnl,vnr)-max(cfl,cfr))
  sr   = max(0.0_DP,max(vnl,vnr)+max(cfl,cfr))
!.....
! HLL average of the normal velocity and the total pressure
!.....
  slvl = sl-vnl
  srvr = sr-vnr

```

```

rslvl = rol*slvl
rsrvr = ror*srvr
drsvi = 1.0_DP/(rsrvr-rslvl)
vnc   = (rsrvr*vnr-rslvl*vnl-ptr+ptl)*drsvi
ptc   = (rsrvr*ptl-rslvl*ptr+rsrvr*rslvl*(vnr-vnl))*drsvi
!.....
! variables of the outer sides in the Riemann fan
!.....
slvc  = sl-vnc
srvc  = sr-vnc
ro2l  = rslvl/slvc
ro2r  = rsrvr/srvc
rhd1  = rslvl*slvc-bnc2
rhdr  = rsrvr*srvc-bnc2
if(abs(rhd1) > eps) then
  rhdli = 1.0_DP/rhd1
  rhnvl = (vnl-vnc)*bnc
  rhnbl = rslvl*slvl-bnc2
  vt2l = vtl+rhnvl*rhdli*bt1
  vu2l = vul+rhnvl*rhdli*bul
  bt2l =      rhnbl*rhdli*bt1
  bu2l =      rhnbl*rhdli*bul
else
  vt2l = vtl
  vu2l = vul
  bt2l = bt1
  bu2l = bul
end if
if(abs(rhdr) > eps) then
  rhdri = 1.0_DP/rhdr
  rhnvr = (vnr-vnc)*bnc
  rhnbr = rsrvr*srvr-bnc2
  vt2r = vtr+rhnvr*rhdri*btr
  vu2r = vur+rhnvr*rhdri*bur
  bt2r =      rhnbr*rhdri*btr
  bu2r =      rhnbr*rhdri*bur
else
  vt2r = vtr
  vu2r = vur
  bt2r = btr

```

```

    bu2r = bur
  end if
  vb2l = vt2l*bt2l+vu2l*bu2l
  vb2r = vt2r*bt2r+vu2r*bu2r
  en2l = (slvl*enl-ptl*vn1+ptc*vnc+bnc*(vbl-vb2l))/slvc
  en2r = (srvr*enr-ptl*vn1+ptc*vnc+bnc*(vbr-vb2r))/srvc
!.....
! variables of the inner sides in the Riemann fan
!.....
  rro2l = sqrt(ro2l)
  rro2r = sqrt(ro2r)
  rro2i = 1.0_DP/(rro2r+rro2l)
  vt3m = (rro2r*vt2r+rro2l*vt2l+          (bt2r-bt2l)*sgn)*rro2i
  vu3m = (rro2r*vu2r+rro2l*vu2l+          (bu2r-bu2l)*sgn)*rro2i
  bt3m = (rro2l*bt2r+rro2r*bt2l+rro2r*rro2l*(vt2r-vt2l)*sgn)*rro2i
  bu3m = (rro2l*bu2r+rro2r*bu2l+rro2r*rro2l*(vu2r-vu2l)*sgn)*rro2i
  vb3m = vt3m*bt3m+vu3m*bu3m
  en3l = en2l-rro2l*(vb2l-vb3m)*sgn
  en3r = en2r+rro2r*(vb2r-vb3m)*sgn
!.....
! variables at the interface
!.....
  if(vnc-abs(bnc)/rro2l > 0.0_DP) then
    rou = ro2l
    vtu = vt2l
    vuu = vu2l
    btu = bt2l
    buu = bu2l
    enu = en2l
  else if((vnc-abs(bnc)/rro2l <= 0.0_DP).and.(vnc >= 0.0_DP))then
    rou = ro2l
    vtu = vt3m
    vuu = vu3m
    btu = bt3m
    buu = bu3m
    enu = en3l
  else if((vnc < 0.0_DP).and.(vnc+abs(bnc)/rro2r >= 0.0_DP))then
    rou = ro2r
    vtu = vt3m
    vuu = vu3m

```

```

    btu = bt3m
    buu = bu3m
    enu = en3r
else
    rou = ro2r
    vtu = vt2r
    vuu = vu2r
    btu = bt2r
    buu = bu2r
    enu = en2r
end if
!.....
! HLLD fluxes
!.....
    fro = rou*vnc
    fmn = rou*vnc*vnc+ptc-bnc2*0.5_DP
    fmt = rou*vtu*vnc-bnc*btu
    fmu = rou*vuu*vnc-bnc*buu
    fbt = btu*vnc-bnc*vtu
    fbu = buu*vnc-bnc*vuu
    fen = (enu+ptc)*vnc-bnc*(vtu*btu+vuu*buu)
!-----
end subroutine calc_flux_hlld
!-----

```

◇ ◇ ◇ ◇ ◇

- 数値計算量を削減するため、 $p_T \rightarrow (B_t^2 + B_u^2)/2$ 、 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \rightarrow (v_t B_t + v_u B_u)$  とするなど、できるだけ代数的に整理している。
- if 文が計算が遅い場合は、sign 関数を用いてプログラムを書き換えることができる。

```

rhdli = 1.0_DP/(rhd1+0.5_DP-sign(0.5_DP,abs(rhd1)-eps))
rhdri = 1.0_DP/(rhdr+0.5_DP-sign(0.5_DP,abs(rhdr)-eps))

```

```

h1 = 0.5_DP+sign(0.5_DP,vnc)
hr = 1.0_DP-h1
h2l = 0.5_DP+sign(0.5_DP,vnc-dabs(bnc)/rro2l)
h3l = (1.0_DP-h2l)*h1
h2r = 0.5_DP-sign(0.5_DP,vnc+dabs(bnc)/rro2r)
h3r = (1.0_DP-h2r)*hr

```

```

rou = ro2l*h1l+ro2r*hr
vsu = vs2l*h2l+vs3m*h3l+vs3m*h3r+vs2r*h2r
vtu = vt2l*h2l+vt3m*h3l+vt3m*h3r+vt2r*h2r
bsu = bs2l*h2l+bs3m*h3l+bs3m*h3r+bs2r*h2r
btu = bt2l*h2l+bt3m*h3l+bt3m*h3r+bt2r*h2r
enu = en2l*h2l+en3l*h3l+en3r*h3r+en2r*h2r

```

- MHD 方程式の流束は回転対称なので、上の 1 次元数値流束サブルーチンをそのまま多次元計算に利用できる。

```

...
vn = vy
vt = vz
vu = vx
...
call calc_flux_hlld(rol,vnl,vtl,vul,...)
...
fmx_y = fmu
fmy_y = fmn
fmz_y = fmt
...

```

有限体積的なアプローチであれば、非構造格子も含むカーテシアン座標以外でも利用できる。

## 第4章 CANSを使った磁気流体力学シミュレーション

横山央明 (東京大学)  
(ver.1: 花山秀和 (国立天文台))

### 4.1 CANSとは

#### 4.1.1 天文数値ソフトウェア

物理法則にしたがって時間発展する系の進化を計算機で追及するという数値実験が、従来の理論・観測（または室内実験）に加わる第3の研究手法として確立してきた。とくに天体现象は、地上での実験が困難なのでこの手法が有効である。そのような目的で開発される計算コードは、研究者個人が作成し、個人的に使用されるか、あるいは人づてなど狭い範囲での受け渡しが多い。またある特定の研究目的を達成するために作成されているため、可読性が高くない、柔軟性がない、などの難点をもつ。そこで（ある程度の）汎用性をもつコードがいくつか公開されている。ZEUSやFlashなどはその代表例である。これらのコードに対抗して、国産のパッケージとして開発されたのがCANS (Coordinated Astronomical Numerical Softwares) である。

#### 4.1.2 CANSで何ができるか？

CANSを用いると、さまざまな流体现象の数値シミュレーションを実施し可視化することができる。とくに天体现象に適用することをめざしており、それに対応した問題設定（後述）を用意している。なかでも磁気流体力学方程式を解くことを重要視しており、プラズマ流体现象を扱うことができる。

CANSでは、圧縮性流体・磁気流体を基礎として、熱伝導・粘性・磁気拡散などの散逸現象や、光学的に薄い放射による冷却などの物理過程をモジュールとして追加することができる。1次元から3次元までの問題に対応しており、MPIライブラリによる並列化が施されている。

#### 4.1.3 CANSの特徴

CANSの最大の特徴は、方程式を解く計算コードそのものに加えて、「問題設定」が多数用意されていることである。これは、初期条件・境界条件・推奨パラメータ・可視化プログラム・解説をひとまとめにしたもので、（環境さえあれば）すぐにでも結果を可視化するところまでたどりつける。「問題設定」にはたとえば、衝撃波管問題・Rayleigh-Taylor不安定・Sedov解・磁気リコネクションなどの基本的な

問題以外に、天体への応用で恒星風・ジェット伝播・磁気回転不安定・フレア・Parker不安定・自己重力収縮なども用意されている。これらはシミュレーションに慣れるという目的以外に、それぞれの「問題設定」を改造して実際の研究に使うことができるよう配慮されている。

また、おなじ方程式に対し複数の数値解法が用意されており、比較しながら計算法の特徴を知ることができる。たとえば磁気流体方程式に対しては、改良 Lax-Wendroff 法・Roe 流束による高精度風上差分法・CIP-MOCCT 法など（HLLD 法をまもなく実装予定）がある。拡散方程式に対しては、中心差分陽解法・SOR 陰解法・biCG 陰解法などがある。

## 4.2 CANS を使ってみよう

CANS のインストールから計算実行・可視化までを概観する。

### 4.2.1 動作環境

計算コードは、Fortran77（プラス多少の拡張仕様）で記述されている。したがって Fortran コンパイラが必要である。（GCCに含まれている）GNU Fortran で開発されているが、機種依存機能は極力使われておらず、普及しているコンパイラではほぼ問題なく動作する。コマンドライン（つまり非 GUI 環境）で利用されることを前提に作られていて、make コマンドが使えることが必須である。Windows の場合、Cygwinなどで使うことを勧める。可視化には、IDL を使うことが前提でプログラムが用意されている。

### 4.2.2 インストールと IDL 設定

CANS のホームページから配布アーカイブをダウンロードして解凍する。結果以下のようなディレクトリ（フォルダ）構成になる。

```
# ls
cans/
# cd cans/
# ls
Makefile          cans3d/           idl-nosupport/  cans1d/
cans3d-nosupport/ index.html        cans1d-nosupport/ cansio/
cans2d/           cansio-nosupport/ cans2d-nosupport/ idl/
```

ディレクトリ cans1d/、cans2d/、cans3d/、cansio/が、計算コードと問題設定とが含まれる CANS の主たる構成要素である。idl/には可視化にもちいるプログラムの一部が含まれる。\*-nosupport/となっているディレクトリに含まれるコードは、動作保証がない開発途中のコードである。ここにある index.html をブラウザで表示すると、CANS 問題設定の計算結果例の画像や動画をみることができる。

以下、cans2d/を例に説明を続ける。

```
# cd cans2d/
# ls
Makefile*      hdcip/        md_corjet/    md_mhdgwave/  md_rt/
README.txt*    hdglr/        md_diskjet/   md_mhdkh/     md_sedov/
bc/            hdmlw/        md_efr/       md_mhdshktb/  md_shkref/
               hdroe/        md_flare/     md_mhdsn/     md_shktb/
cndbicg/       htcl/         md_itmhdshktb/ md_mhdwave/   md_sndwave/
cndbicgmpi/    md_advect/    md_itshktb/   md_mri/       md_sninteraction/
cndsor/        md_awdecay/   md_jetprop/   md_mricyl/    md_thinst/
cndsormpi/     md_cme/       md_kh/        md_parkerinst/
common/        md_cndsp/     md_mhd3shktb/ md_reccnd/
commonmpi/     md_cndtb/     md_mhdcndtb/  md_recon/
```

ディレクトリ名の先頭に「md\_」と付いているのが「問題設定」(MoDel)で、それ以外が方程式を解くサブルーチン群である。たとえば hdmw/は、改良 Lax-Wendroff 法で流体方程式を解くルーチン群が入っている。cndbicg/は、熱伝導方程式を biCG 法で解くルーチンなどといった具合である。詳しくは「README.txt」に記述されている。

md\_\*について一部紹介すると、md\_shktb/は衝撃波管問題 (Sod の問題)、md\_rt/は Rayleigh-Taylor 不安定、md\_mri/は磁気回転不安定、md\_efr/は太陽表面の浮上磁場現象、md\_recon/は磁気リコネクションなどなど。詳しくは各ディレクトリ下の Readme.pdf ファイルを参照してほしい。

可視化に IDL を使う場合、CANS 用 IDL プロシジャが使えるよう、IDL の探索パスを設定する必要がある。Linux の場合シェル設定ファイル (.cshrc や .bashrc などユーザー依存) で環境変数 IDL\_PATH に「(CANS をインストールしたディレクトリ) /cans/idl/」を追加する。よくわからない場合は、IDL に詳しいひとに尋ねてほしい。

### 4.2.3 準備コンパイル

計算コードをコンパイルする。まずサブルーチン群の「アーカイブファイル」を作る。CANS のルートディレクトリ (cans/) に戻って、以下のように make する。

```
# pwd
/ (インストールした元ディレクトリ) /cans/
# cd cans/
# make
...
# ls
....
libcans1d.a libcans2d.a libcans3d.a libcansio.a
```

無事に成功する (MPI コードは除く) と、上記のように libcans\*.a というファイルが複数つくられる。

libcans1d.aは、1次元計算用のルーチン群のオブジェクトファイル（コンパイル済みのサブルーチンプログラム）をまとめたアーカイブである。libcansio.aは、各次元で共通に使うファイル入出力用ルーチン群。

なお上記の方法では通常、MPI用のルーチン群はまだコンパイルされていない。そこで、必要に応じて同じディレクトリで

```
# pwd
/ (インストールした元ディレクトリ) /cans/
# cd cans/
# make mpi FC=mpif90
```

などとして、MPI用のコンパイラを使って再度同じ作業を繰り返す。

以上の作業で、方程式を解くなどのCANS基本部分のサブルーチン群（以後「計算エンジン」と呼ぶ）のコンパイルは終了しており、結果がアーカイブファイルにまとめられた。こうしておけば、計算エンジンのルーチンについて再度コンパイルする必要がなくなり、作業効率があがる。また異なった問題を解く際に、共通のエンジン部分のコードをコピーする必要がなくなる。（いっぽう短所もあり、「問題設定」ディレクトリ（次節で説明）に完全な形でのプログラムファイルが存在せず、全体を見通すことが難しくなる。これについては近々対策する予定である。）

#### 4.2.4 プログラムの実行

2次元問題設定のひとつである md\_mhdshktb/ 「磁気流体衝撃波管」（Brio-Wu問題）で説明する。まず該当のディレクトリに入る。

```
# cd cans2d/md_efr/
# ls
Readme.pdf  Readme.tex  hdcip/  hhtmlw/  hdroe/  index.html  mpi-hhtmlw/
```

複数ディレクトリがあるのは、それぞれ使っている計算エンジンが異なるためである。ここでは hhtmlw/ すなわち改良 Lax-Wendroff 法エンジンを使った場合で説明する。

```
# cd hhtmlw/
# ls
Makefile  bnd.f  model.f  moviedt.pro  pldt.pro  pldt1d.pro
batch.pro  main.f  moviedt/  pldt.png  pldt1d.png  rddt.pro
```

各ファイルの説明は次のとおり。重要なものだけ示す。

- Makefile make コマンド用設定ファイル
- main.f メインルーチン
- model.f 初期条件設定ルーチン

- bnd.f 境界条件設定ルーチン
- \*.pro 可視化用 IDL プログラム

コンパイル・実行するには make コマンドを使う。

```
# make
# ls
a.out ...
# make run
./a.out
  write    step=      0 time= 0.000E+00 nd =  1
...
  write    step=     49 time= 0.816E-01 nd =  5
  write    step=     61 time= 0.102E+00 nd =  6
  stop     step=     61 time= 0.102E+00
    ### normal stop ###
# ls
Makefile  bnd.f*  main.f*  moviedt/  pldt.png  pr.dac  vx.dac
a.out*    bnd.o   main.o   moviedt.pro*  pldt.pro*  rddt.pro*  vy.dac
az.dac    bx.dac  model.f*  out.txt   pldt1d.png  ro.dac  x.dac
batch.pro by.dac  model.o   params.txt  pldt1d.pro*  t.dac  y.dac
```

上記のように「normal stop」メッセージで終了すれば、無事計算できたことになる。新しく次のファイル群が生成されるはずである。\*.dac が計算結果データ（バイナリ形式）、out.txt が画面出力と同じメッセージ（テキスト形式）、params.txt が計算パラメータ（テキスト形式）。

#### 4.2.5 IDL による可視化

IDL を立ち上げ、計算結果データを読み込み、可視化する。

```
# idl
IDL> .r rddt ; データ読み込み
IDL> .r pldt
Plot columns & rows ? : 3 2 ; パネル数が聞かれる。この例では「3行2列」を選択
Variable for color-maps ? (ro,pr,te) : ro ; 表示物理量。この例では「密度」を選択
start step ? : 0 ; 開始ステップ。この例では「0番目」すなわち「初期条件から」を選択
```

うまくいけば新しくウィンドウが立ち上がり、上の例では「3行2列に、密度の分布が、初期条件から」表示されるはずである。成功例として同ディレクトリに pldt.png というファイルが用意されているので、一致を確かめてほしい。なお pldt.pro では、指定した物理量以外に、速度が矢印で、磁力線が実線（実際はベクトルポテンシャル  $A_z$  の等高線）で示される。

また `moviedt.pro` を使えば、動画の材料となる画像ファイルを作れる。上と同じように実行すると、あらたに `moviedt/` というディレクトリが作成され（デフォルトでは作成済み）、その下に連番で画像ファイルが作られる。これをつなぎ合わせれば動画となる。注意：プレビューの動画は `moviedt/` 以下のファイルを表示しているのので、`moviedt.pro` を実行すると上書きされてしまう。

### 4.3 計算プログラムの解説

この節では、問題設定 `cans1d/md_mhdshktb/hdmlw`、磁気流体衝撃波管問題を改良 Lax-Wendroff 法で解く場合を例にとって実際のプログラムについて解説する。ここでは計算法の詳細には踏み込まない。改良 Lax-Wendroff 法についての詳しい説明は、「数値天文学テクニカルマニュアル 2004 年版」の第 1 章に掲載されているのでそちらを参照してほしい。

#### 4.3.1 メインルーチン `main.f`

メインルーチン（ファイル `main.f`）は、大きく分けて「開始処理部（エピローグ）」「時間発展部」「終了処理部（エピローグ）」の 3 部構成からなる。さらにその前に、Fortran プログラムで必要な「配列定義部」がある。開始処理部では、サブルーチン `model` を呼び、メッシュ座標や初期条件を設定するのが主な動作である。時間発展部が主たる計算エンジンで、磁気流体方程式を解いて物理変数の時間発展を求める。与えられた終了条件をみたすまでこの部分が繰り返される。そして終了処理部では、終了メッセージを出力してプログラム実行を止める。以下、実際のプログラムにコメントを入れながら解説する。

```

c=====|
c   array definitions
c=====|
      implicit double precision (a-h,o-z)
! 倍精度浮動小数点データを基本データ型とする。
      parameter (margin=1)
      parameter (ix=1024+2*margin)
      dimension x(ix),xm(ix),dx(ix),dxm(ix)
! x(*)がメッシュ座標、xm(*)はメッシュ境界の座標、dx(*)がメッシュ幅、dxm(*)はメッシュ
中心間の距離。
! ixはx軸のメッシュ数
! marginは、興味ある領域の外に準備する、計算上必要な袖メッシュ数。計算エンジンに依存して
数が異なる。ここで用いる mlw_m では、1個。

      dimension ro(ix),pr(ix)
      dimension vx(ix),vy(ix),by(ix)
! 時間変化する基本変数の配列。roは密度、prは圧力、vx、vyは速度、byは磁場
      dimension bx(ix),bxm(ix)
! x軸に沿った1次元MHDでは、磁場のx成分は時間変動しない(divB=0なので)。
! サブルーチン model.f で固定値として与えられる。

913  format (1x,' write      ','step=',i8,' time=',e10.3,' nd =',i3)
915  format (1x,' stop      ','step=',i8,' time=',e10.3)
c=====|
c   prologue
c=====|
      mcont=0
! mcont=1とすると、過去の計算結果データ(ディレクトリ in/以下に置く)を読み込んで継続計
算を実行する。継続計算では、下の tend の値設定に注意すること。前回の計算の最終時刻が tend
より大きいと、継続計算がただちに終了してしまう。
c-----|
c   set parameters controlling finalization and data-output
      tend=0.1d0
! tendは終了させたい時刻。
      nstop=100000
! nstopは終了させたいステージ数。
! t > tend または ns > nstop が満たされたら計算終了。
      dtout=0.01d0
! dtoutは、データ出力間隔。tの値がdtoutの(ほぼ)整数倍になったら出力。
c      dtout=1.d-10
c      nstop=1
c-----|
c   initialize counters

```

```

merr = 0
ns = 0
t = 0.0d0
tp = 0.0d0
nd=1
mwflag=0

```

! 以上、カウンタの初期化。

! merrはエラーが起きたときゼロ以外の値が代入される。

! nsは計算ステージ数。

! tは時刻。tpは、ひとつ前のステージでの時刻。データ出力タイミングの判断に使う。

! ndは、次に出すデータが何番目か。

! mwflagは、「いま保持している計算結果を出力しました」というフラグ。重複して同じデータを出力するのを防ぐための仕掛け。

```

c-----|

```

```

c file open for "standart output"

```

```

mf_out=7
open(mf_out,file='out.txt',status='replace',iostat=merr)
if (merr.ne.0) then
  merr=10001
  goto 9999
endif
close(mf_out)

```

! 標準出力（コンソール出力）と同じ内容を残すファイル（out.txt）のオープン

! out.txtは出力のたびに開け閉めする。こうすると長時間の計算途中でも中身を確認できる。

```

c-----|

```

```

c file open

```

```

mf_params=9
call dacdefparam(mf_params,'params.txt')

```

! 計算パラメータを出力するファイル（params.txt）をオープン

```

mf_t =10
call dacdef0s(mf_t,'t.dac',6)
mf_ro=20
call dacdef1s(mf_ro,'ro.dac',6,ix)
mf_pr=21
call dacdef1s(mf_pr,'pr.dac',6,ix)
mf_vx=22
call dacdef1s(mf_vx,'vx.dac',6,ix)
mf_vy=23
call dacdef1s(mf_vy,'vy.dac',6,ix)
mf_by=24
call dacdef1s(mf_by,'by.dac',6,ix)

```

! 計算結果を出力するファイル（t.dac、ro.dac、pr.dacなど）をオープン

! 引数「6」は、データ型が倍精度であることを示す。

```

    call dacputparami(mf_params,'ix',ix)
    call dacputparami(mf_params,'margin',margin)
! 計算パラメータを出力
c-----|
c  setup numerical model (grid, initial conditions, etc.)
    call model(ro,pr,vx,vy,by,bx,bxm,gm,margin,x,ix,mf_params)
! メッシュ座標・初期条件を設定 (後で詳述)
    call grdrdy(dx,xm,dxm,x,ix)
! メッシュ座標 (x) から、メッシュ幅 (dx) やメッシュ境界での座標など (xm, dxm) を計算
    call bnd(margin,ro,pr,vx,vy,by,ix)
! 境界条件の適用
c  floor=1.d-9
c  call chkdav(n_floor,ro,vx,floor,ix)
c  call chkdav(n_floor,pr,vx,floor,ix)
c-----|
c  read-data
    ndi=1000
    if (mcont.eq.1) then
        mfi_t=60
        call dacopnr0s(mfi_t,'in/t.dac',mtype,nx0)
        mfi_ro=70
        call dacopnr1s(mfi_ro,'in/ro.dac',mtype,ix0,nx0)
        mfi_pr=71
        call dacopnr1s(mfi_pr,'in/pr.dac',mtype,ix0,nx0)
        mfi_vx=72
        call dacopnr1s(mfi_vx,'in/vx.dac',mtype,ix0,nx0)
        mfi_vy=73
        call dacopnr1s(mfi_vy,'in/vy.dac',mtype,ix0,nx0)
        mfi_by=74
        call dacopnr1s(mfi_by,'in/by.dac',mtype,ix0,nx0)
        do n=1,ndi
            read(mfi_t,end=9900) t
            read(mfi_ro) ro
            read(mfi_pr) pr
            read(mfi_vx) vx
            read(mfi_vy) vy
            read(mfi_by) by
        enddo
9900  continue
! 以上、継続計算 (mcont=1) のとき、過去の計算結果 (ディレクトリ in/の下に置く) を読み込む。
    endif

```

```

c-----|
c   data output
      mf_x=11
      call dacdef1d(mf_x,'x.dac',6,ix)
      write(mf_x) x
      close(mf_x)
      mf_bx=12
      call dacdef1d(mf_bx,'bx.dac',6,ix)
      write(mf_bx) bx
      close(mf_bx)
      call dacputparamd(mf_params,'gm',gm)
      write(mf_t) t
      write(mf_ro) ro
      write(mf_pr) pr
      write(mf_vx) vx
      write(mf_vy) vy
      write(mf_by) by
      write(6,913) ns,t,nd
      open(mf_out,file='out.txt',status='old',form='formatted'
&      ,position='append')
      write(mf_out,913) ns,t,nd
      close(mf_out)
      nd=nd+1
! 初期条件を出力する
c=====|
c   time integration
c=====|
1000 continue
      ns = ns+1
      mwflag=0
c-----|
c   obtain time spacing

      safety=1.0d0
      dtmin=1.d-10
      call cfl_m(dt,safety,dtmin,merr,gm,bx,ro,pr,vx,vy,by,dx,ix)
      if (merr.ne.0) goto 9999
! CFL条件にもとづいて、時間刻み幅 dt を各ステージで決定する。
! safety は、CFL 条件の臨界値から実際の dt を求めるときの安全係数。通常 1 以下の値。
! dtmin は、dt の値に対する下限値。dt<dtmin になるとエラーとみなして計算を止める。
      tp = t
      t = t+dt
! 時刻の更新

```

```

c-----|
c      solve hydrodynamic equations
          qav=1.d0
          call mlw_m(ro,pr,vx,vy,by,bx,bxm,dt,qav,gm,dx,dxm,ix)
! 主要エンジン部。ここでは改良 Lax-Wendroff (MLW) (と Lapidus 人工粘性) で MHD 方程式を解
! く。
! qav は人工粘性の強さ。
          call bnd(margin,ro,pr,vx,vy,by,ix)
! 境界条件の適用
c      floor=1.d-9
c      call chkdav(n_floor,ro,vx,floor,ix)
! 計算結果をチェックして、floor の値より ro が小さいメッシュでは値を floor と置き換え、vx
! をゼロとする。この問題設定では不要。
c      call chkdav(n_floor,pr,vx,floor,ix)
! 同様。ただし pr をチェック。
c-----|
c      data output
          mw=0
          nt1=int(tp/dtout)
          nt2=int(t/dtout)
          if (nt1.lt.nt2) mw=1
! 「dtout の整数倍」の判断をする部分
          if (mw.ne.0) then
              write(mf_t) t
              write(mf_ro) ro
              write(mf_pr) pr
              write(mf_vx) vx
              write(mf_vy) vy
              write(mf_by) by
              write(6,913) ns,t,nd
              open(mf_out,file='out.txt',status='old',form='formatted'
&                ,position='append')
                  write(mf_out,913) ns,t,nd
              close(mf_out)
              nd=nd+1
              mwflag=1
          endif
! データ出力
c-----|
c      loop test
          if (ns .lt. nstop .and. t .lt. tend) goto 1000
! 主要計算部を繰り返すかどうかの判断文
! 「t<tendかつ ns<nstop」であれば繰り返す

```

```

c=====|
c   epilogue
c=====|
9999 continue
c-----|
c data output
  if (mwflag.eq.0) then
    write(mf_t) t
    write(mf_ro) ro
    write(mf_pr) pr
    write(mf_vx) vx
    write(mf_vy) vy
    write(mf_by) by
    write(6,913) ns,t,nd
    open(mf_out,file='out.txt',status='old',form='formatted'
&      ,position='append')
      write(mf_out,913) ns,t,nd
    close(mf_out)
  endif
! データ出力
c-----|
c ending message
  write(6,915) ns,t
  if (merr.eq.0) then
    write(6,*) ' ### normal stop ###'
  else
    write(6,*) ' ### abnormal stop ###'
    write(6,*) ' merr = ',merr
  endif
  open(mf_out,file='out.txt',status='old',form='formatted'
&      ,position='append')
  write(mf_out,915) ns,t
  if (merr.eq.0) then
    write(mf_out,*) ' ### normal stop ###'
  else
    write(mf_out,*) ' ### abnormal stop ###'
    write(mf_out,*) ' merr = ',merr
  endif
  close(mf_out)
! 終了メッセージ
  stop
! プログラム終了
end

```

## 4.3.2 サブルーチン model.f: メッシュ座標・初期条件設定

サブルーチン model.f では、計算に必要なパラメータ（比熱比  $\gamma$  など）や、メッシュ座標（配列  $x(ix)$ ）、初期条件を設定する。

```

c=====|
      subroutine model(ro,pr,vx,vy,by,bx,bxm,gm,margin,x,ix
&      ,mf_params)
c=====|
      implicit double precision (a-h,o-z)
c-----|
      dimension dxm(ix),x(ix)
      dimension ro(ix),pr(ix),vx(ix)
      dimension vy(ix),by(ix)
      dimension bx(ix),bxm(ix)

c-----|
c  parameters
c-----|
      pi = acos(-1.0d0)
! pi は、円周率。逆三角関数を使って値を出している。
      gm=2.d0
! gm は、比熱比

c-----|
c  grid
c-----|
      dx0=1.d0/real(ix-margin*2)
! この問題設定では、一様幅のメッシュを配置するので、計算領域サイズ (=1としている) とメッ
! シュ数 (ix) とからメッシュ幅を求める。袖メッシュの分をだけ引くのを忘れずに。

      do i=1,ix
          dxm(i)=dx0
      enddo

      izero=ix/2
      x(izero)=-dxm(izero)/2
! x=0 となる座標を、ix/2 番目と (ix/2+1) 番目とのメッシュ境界に置いた。こうすればメッシュ
! 数が偶数になり、dx0 がキリのよい数値になる。

```

```

do i=izero+1,ix
  x(i) = x(i-1)+dxm(i-1)
enddo
do i=izero-1,1,-1
  x(i) = x(i+1)-dxm(i)
enddo
! メッシュ座標値の設定
c-----|
c  initial condition
c-----|
  b0=sqrt(4.d0*pi)

do i=1,ix
  if (x(i).le.0) then
    ro(i) = 1.d0
    pr(i) = 1.d0
    by(i) = b0
  else
    ro(i) = 0.125d0
    pr(i) = 0.1d0
    by(i) = -b0
  endif
  vx(i) = 0.0d0
  vy(i) = 0.0d0
  bx(i) = b0*0.75d0
  bxm(i) = b0*0.75d0
enddo
! 初期条件を設定。基本 Brio & Wu (1988) にならった。
! x 軸に沿った 1次元 MHD では、磁場の x 成分 (bx(*), bxm(*)) は時間変動しない (divB=0 なの
! サブルーチン model.f で固定値として与えられる。

c-----|
c  write parameters to file
c-----|

return
end

```

## 4.3.3 サブルーチン bnd.f: 境界条件

サブルーチン bnd.fでは、境界条件を適用する。この問題設定 md\_mhdshktb では、対称境界条件を与えている。

```

c=====|
      subroutine bnd(margin,ro,pr,vx,vy,by,ix)
c=====|
c      apply boundary condition
c-----|
      implicit double precision (a-h,o-z)
      dimension ro(ix),pr(ix),vx(ix),vy(ix),by(ix)
c-----|

      call bdsppx(0,margin,ro,ix)
      call bdsppx(0,margin,pr,ix)
      call bdsppx(0,margin,vx,ix)
      call bdsppx(0,margin,vy,ix)
      call bdsppx(0,margin,by,ix)
! 「bd (境界) s (対称) p(メッシュ境界) p (正対称) x (x座標)」あるいは
! 「bd (境界) s (対称) p(メッシュ境界) m (反対称) x (x座標)」の意味。
! 最初の引数「0 (1)」は、x座標の負(正)サイドの境界という意味。

      call bdsppx(1,margin,ro,ix)
      call bdsppx(1,margin,pr,ix)
      call bdsppx(1,margin,vx,ix)
      call bdsppx(1,margin,vy,ix)
      call bdsppx(1,margin,by,ix)

      return
      end

```



## 第5章 実習の手引き (差分法の実習、磁気流体基本課題)

### 5.1 スカラー方程式の差分解法

#### スカラー方程式の差分解法パッケージの説明

スカラー方程式の差分解法を試してみましょう。以下のファイルが用意されています。

```
# ls scalar
Makefile  anime.pro  main.f      pldt.pro    pldtps.pro  rddt.pro
```

プログラムは Fortran 言語を用いて書かれています。上記のリストで main.f が Fortran プログラムファイルです。

#### 5.1.1 プログラムのコンパイルと実行 (make)

次にプログラムをコンパイルする方法について説明します。ディレクトリ “scalar” に移動した後に `make` を実行します。するとプログラムがコンパイルされ、実行されます。正しくコンパイルされるとオブジェクトファイル `main.o` と実行オブジェクトファイル `a.out` を作成します。正しく実行されるとデータファイル `out.dat` を出力します。

```
# cd scalar
# make
gfortran -c -o main.o main.f
main.f:
  MAIN:
gfortran -o a.out main.o
./a.out
  write      step=          0 time= 0.000E+00
  write      step=         50 time= 0.125E+02
  write      step=        100 time= 0.250E+02
  ### normal stop ###
# ls
Makefile  anime.pro  main.o      pldt.pro    rddt.pro
a.out*    main.f     out.dat     pldtps.pro
```

### 5.1.2 出力ファイルの説明 (out.dat)

出力ファイル `out.dat` はデータの確認を容易にするためにアスキー形式でかかれており、ファイルを直接エディタで開いて見ることができます。ファイルをみてみましょう。第1行目に配列の大きさ (`nx`) と時間データの数 (`nt`) がそれぞれ書かれています。第2行目に始めの時間データの `time step` 数 (`ns`)、時刻 (`time`) が書かれています。第3行目から第102行目に渡って、始めの時間データの  $x$  座標 (`x`)、そこでの変数の値 (`u`) が順にかかれています。第103行目移行に、次の時間データが書かれています。書式については、Fortranプログラム `main.f` の53, 55, 59行目に `Format` 文で指定されていますので、参考にしてください。

```
# head out.dat
100,   3
   0,  0.00
  1.0, 1.0000000
  2.0, 1.0000000
  3.0, 1.0000000
(後略)
```

### 5.1.3 結果の可視化表示

結果の表示には IDL といった可視化プログラムを利用します。IDL は数値シミュレーション結果を可視化をするのによく用いられます。

### IDLの起動 (idl)

まずは idl を実行してみましょう。

```
# idl
```

すると以下のようになり、IDL が起動します。

```
IDL Version 8.6. (c) 2011, Research Systems, Inc.  
Installation number: XXXXX.  
Licensed for use by: XXXXX  
  
IDL>
```

### データ読み込み (.r rddt)

データの読み込みには `rddt.pro` というプログラムを用います。以下のように入力してみてください。ファイル `out.dat` からデータが読み込まれ、idl でデータを利用できるようになります。

```
IDL> .r rddt
```

`.r` は run を意味します。

### データ表示 (.r pldt)

データの表示には `pldt.pro` というプログラムを用います。以下のように入力してみてください。

```
IDL> .r pldt
```

### IDLの終了 (exit)

`exit` を入力すると IDL を終了することができます。

```
IDL> exit
```

## 5.1.4 プログラムの変更について

### 計算エンジンの変更

サンプルプログラムの計算エンジンは FTCS になっています。以下の 72 行目から 88 行目の間で、計算エンジンを変更してください。



### メッシュ数の設定 (jx)

メッシュ数を変更するには、5行目の `parameter` 文にある `jx` の値を変更します。メッシュ数をかえることで数値計算の分解能をあげることができます。

```
parameter (jx=100)
```

### 最終ステップ数、出力の設定 (nstop, nskip)

最終ステップ数と出力ファイルの間隔は、14行目の `nstop` と 15行目の `nskip` の値をそれぞれ変更します。ファイルの出力間隔を短くすることで、アニメーションを滑らかに表示することができます。その一方、出力されるファイルのサイズは大きくなります。

```
c   time control parameters

      nstop=100
      nskip = 50
```

### CFL条件の変更 (safety)

CFL条件は、68行目の (`safety`) の値を変更します。出力されるデータファイルの時間間隔は、現在、`nskip` で制御しているため、`safety` の値を変更すると、出力される時間も変わることにご注意ください。

```
c   obtain time spacing
      safety=0.25
```

### 5.1.5 データのアニメーション表示 (.r anime)

データのアニメーション表示には `anime.pro` というプログラムを用います。IDLでデータを読み込んだ後に、以下のように入力してみてください。

```
IDL> .r anime
```

デフォルトのままでは、データのステップ間隔が大きく、きれいにみれません。`nskip` を 1 にしてどのように進化するか見てみましょう。`anime.pro` の window が開いている状態で、もう一度、`anime.pro` を実行するとエラーが出ますのでご注意ください。

## 付録

## サンプルプログラム、main.f

```
c=====|
c   array definitions
c=====|
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      parameter (jx=100)

      dimension x(1:jx),u(1:jx),f(1:jx)

c-----|
c   prologue
c=====|
c   time control parameters

      nstop=100
      nskip = 50

c-----|
c   initialize counters

      time = 0.0
      ns   = 0

      nx = nstop/nskip+1

c-----|
c   Set initial condition
c-----|

      pi=4.*atan(1.0)
c   grid
      dx=1.0
      x(1)=dx
      do j=1,jx-1
         x(j+1)=x(j)+dx
      enddo
```

```
c
c variable
  do j=1,jx/2
    u(j)= 1.0
  enddo
  do j=jx/2+1,jx
    u(j)= 0.0
  enddo

c
c velocity
  cs=1.0

c-----|
c   Output initial condition
c
  write(6,103) ns,time
103 format (1x,' write   ','step=',i8,' time=',e10.3)
  open(unit=10,file='out.dat',form='formatted')
  write(10,100) jx,nx
100 format(i5,',',i5)
  write(10,101) ns,time
101 format (i5,',',f6.2)
  do j=1,jx
    write(10,102) x(j),u(j)
  enddo
102 format(f5.1,',',f10.7)

c=====|
c   time integration
c=====|
1000 continue
  ns = ns+1

c-----|
c   obtain time spacing
  safety=0.25
  dt=safety*dx/cs
  time=time+dt
```

```
c-----|
c   solve equation
c
c                                     ftcs - start >>>
c   do j=1,jx-1
c     f(j)=0.5*cs*(u(j+1)+u(j))
c   enddo
c
c   f(jx)=f(jx-1)
c
c   do j=2,jx-1
c     u(j)=u(j)-dt/dx*(f(j)-f(j-1))
c   enddo
c
c   u(1)=u(2)
c   u(jx)=u(jx-1)
c                                     ftcs - end   >>>
c-----|
c   data output
c   if (mod(ns,nskip).eq.0) then
c     write(6,103) ns,time
c     write(10,101) ns,time
c     do j=1,jx
c       write(10,102) x(j),u(j)
c     enddo
c   endif
c
c   if (ns .lt. nstop) goto 1000
c   close(10)
c
c=====|
c   write(6,*) '   ### normal stop   ###'
c   end
```

## サンプルプログラム、rddt.pro

```
; rddt.pro
openr,1,'out.dat'
readf,1,jx,nx

; define array
ns=intarr(nx)
t=fltarr(nx)

x=fltarr(jx)
u=fltarr(jx,nx)

; temporary variables for read data
ns_and_t=fltarr(2,1)
x_and_u=fltarr(2,jx)

for n=0,nx-1 do begin
  readf,1,ns_and_t
  readf,1,x_and_u
  ns(n)=fix(ns_and_t(0,0))
  t(n)=ns_and_t(1,0)
  u(*,n)=x_and_u(1,*)
endfor

close,1
free_lun,1

x(*)=x_and_u(0,*)

delvar,ns_and_t,x_and_u

help
end
```

## サンプルプログラム、pldt.pro

```
!x.style=1
!y.style=1
!p.charsize=1.4

plot,x,u(*,0),xtitle='x',ytitle='u',linest=1,yrange=[-1,3],xrange=[0,100]
for n=1,nx-1 do begin
  oplot,x,u(*,n)
  oplot,x,u(*,n),psym=4
endfor

end
```

## サンプルプログラム、anime.pro

```
!x.style=1
!y.style=1
!p.charsize=1.4

window,xsize=480,ysize=480
xinteranimate,set=[480,480,nx]

for n=0,nx-1 do begin

  plot,x,u(*,n),xtitle='x',ytitle='u',yrange=[-1,3],xrange=[0,100]
  oplot,x,u(*,n),psym=4

  xinteranimate,frame=n,window=0

endfor

xinteranimate

end
```

## 5.2 差分法の実習課題

### 5.2.1 1次元波動方程式

スカラー方程式の差分解法のパッケージを動かさない。サンプルプログラムは、FTCSスキームを用いて、1次元波動方程式を計算するものである。初期条件は、 $j = 1, \dots, 50$  に対して  $u_j = 1$ 、 $j = 51, \dots, 100$  に対して  $u_j = 0$ 、クーラン数  $\nu = c\Delta t/\Delta x = 0.25$  として計算をおこなう。このプログラムを

1. Lax-Wendroff 法によるもの、
2. 空間1次精度の風上差分によるもの、
3. 流束制限関数として minmod 関数を用いたもの

に書きかえ、計算結果をグラフ表示し、テキストの結果と比較しなさい。

### 補足解説

1次元波動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (5.1)$$

を差分化すると

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n) \quad (5.2)$$

となる。ここで、FTCSスキームの数値流束を用いると

$$f_{j+1/2}^n = \frac{1}{2}(f_{j+1} + f_j) = \frac{1}{2}c(u_{j+1} + u_j) \quad (5.3)$$

となる。

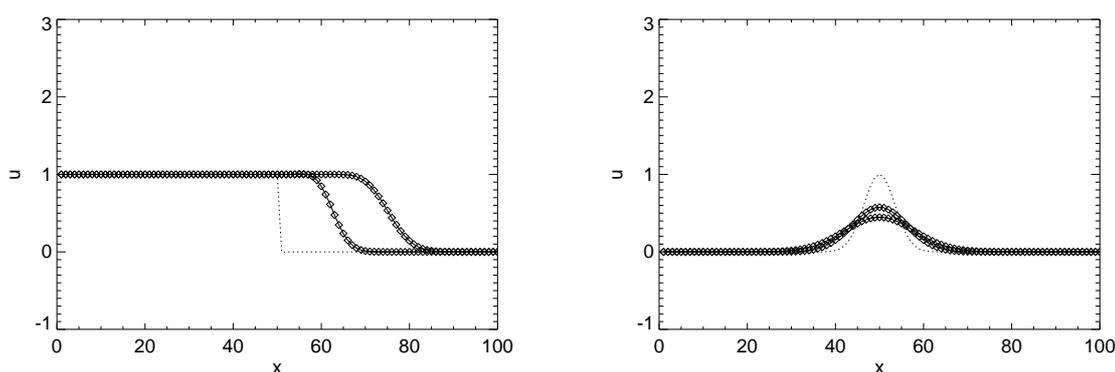


図 5.2: 計算結果。左: Lax-Wendroff 法+流束制限関数。右: 1次元拡散方程式。

### 5.2.2 Burgers 方程式

1次元波動方程式のプログラムを参考にして Burgers 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad (5.4)$$

を1次精度風上差分法を用いて解くプログラムを作成し、結果をグラフ表示し、テキストの結果と比較しなさい。数値流束は

$$f_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{u_{j+1}^2}{2} + \frac{u_j^2}{2} \right) - \frac{1}{2} |u_{j+1} + u_j| (u_{j+1} - u_j) \right\} \quad (5.5)$$

と書くこともできる。

### 5.2.3 1次元拡散方程式

1次元波動方程式のプログラムを参考にして1次元拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5.6)$$

を FTCS スキームを用いて解くプログラムを作成し、適当な初期条件を設定してシミュレーションを行い、結果をグラフ表示しなさい。

例えば、初期の分布にはガウス分布を仮定し、`cs` の代わりに `kappa` を定義しましょう。

```
c variable
  do j=1,jx
    u(j)= exp(-(((x(j)-x(jx/2))/5.)**2))
  enddo
c
c kappa
  kappa=1.0
```

## 5.3 CANS 基本課題

### 衝撃波管問題

CANS の 1 次元パッケージを使ってください。

1. 基本課題「等温衝撃波管 (md\_litshktb)」を実行し、IDL で rddt.pro と pldt.pro を用いて可視化せよ。
2. 基本課題「流体衝撃波管 (md\_shktb)」を実行し、可視化せよ。
3. 基本課題「衝撃波生成 (md\_shkform)」を実行し、anime.pro を用いて可視化せよ。
4. 基本課題「MHD 衝撃波管 (md\_mhdshktb)」を実行し、可視化せよ。

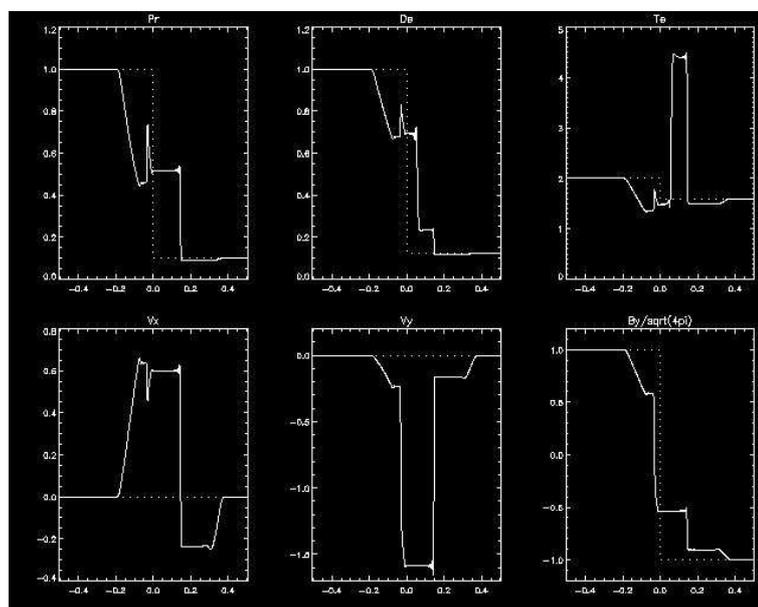


図 5.3: md\_mhdshktb の結果

### 補足

- 基本課題を動かした後に Fortran プログラムを変更し、make すると、再コンパイルし、計算を実行します。この際、出力ファイル params.txt や\*\*\*.dac を上書きします。必要な出力ファイルは、名前を変更したり、別ディレクトリに移してとっておきましょう。
- オブジェクトファイル、出力ファイルを消去したい場合は、make clean を実行してください。

### 重力成層流体中を伝わる磁気流体波動

太陽表面大気的光球・彩層では磁気流体波に、さまざまなおもしろい現象がおこる。重力的に成層していることに加えて、ちょうどガス圧優勢から磁気圧優勢に遷移することから、周波数によるカットオ

フ、突っ立ちによる衝撃波形成やモード変換などを起こす。またこうして伝わった波のエネルギーが、高密度プラズマを押し上げることで、スピキュールと呼ばれるジェット現象を引き起こす。そして外部に伝わった波はやがて破碎・熱化してコロナ加熱に寄与するとも考えられている。

本演習では、2次元で太陽表面大気中を伝わる磁気流体波についてのシミュレーションを行う。まずは、一様大気を伝わる波動から始め、成層や一様磁場、さらには非一様磁場など一歩ずつ拡張して物理に対する理解を深めながら進める。

### 方程式系・計算モデル

2次元デカルト座標系で、3成分磁場が入った磁気流体方程式を解く。磁気拡散・熱伝導・放射冷却を考慮しない（演習の進み具合によってはこれらの効果も導入する）。波発生のために、運動方程式に加速源をソース項として加える。空間局所的（Gauss 関数）、時間周期的（正弦関数）。圧縮性波動・シア（Alfven 的）波動をそれぞれ試す。背景として、以下のような、大気・磁場構造を順に考える。以下で  $\beta = p/p_m$  は、 $p$  はガス圧、 $p_m$  は磁気圧。

- (1) 一様背景中の MHD 波動（CANS のまま）
- (2) 重力成層・一様温度・一様磁場 ( $\beta > 1$ ) 中の MHD 波動（まずは、波動の突っ立ち）周波数を変えて、エヴァネッセントや重力波のケースも実施。
- (3) 同上 ( $\beta < 1$ )
- (4) 同上（下半分  $\beta > 1$ 、上半分  $\beta < 1$ ）モードコンバージョンがみえるか？
- (5) 重力無・膨らんだ磁力線 ( $\beta > 1$ )
- (6) 同上 ( $\beta < 1$ )
- (7) 同上（下半分  $\beta > 1$ 、上半分  $\beta < 1$ ）モードコンバージョンがみえるか？
- (8) 重力成層・膨らんだ磁力線
- (9) …

### 参考とする先行研究

重力的に成層した大気中（ただしコロナ含まず）を伝わる線形磁気流体波動の伝播については Bogdan et al. (2003) が2次元シミュレーションを実施している。波が  $\beta = 1$  境界面を通過する際のモード変換について詳しく調べている。いっぽう、波動注入によるスピキュール形成については、Kudoh & Shibata (1999) による1次元シミュレーションがある。

### 参考文献

- Bogdan et al. 2003, ApJ, 599, 626  
 Kudoh et al. 1999 ApJ, 514, 493

## 第6章 応用課題例

### 6.1 モーメント法を用いた相対論的輻射流体の数値解法

高橋博之 (国立天文台)

近年のスーパーコンピュータの発達と数値計算コードの高精度化に伴い、より高解像度・長時間の磁気流体計算を行う事が可能になってきた。その一方で、磁気流体に自己重力や、特殊・一般相対性理論、電気抵抗、熱伝導、粘性、輻射輸送など、より多くの物理を含めた現実的な計算も行われている。この章では相対論的流体に輻射の効果は無矛盾に取り入れた相対論的輻射流体数値計算の紹介をする。輻射場は簡単のため、光子分布関数を運動量空間で積分したモーメント量(輻射エネルギー密度、フラックス)で記述する。モーメント方程式の導出は省略するが、詳しくは数値天文学マニュアル (<http://www.astro.phys.s.chiba-u.ac.jp/hpci/ss2012/>) や Mihalas & Mihalas (1984); Kato et al. (2008); Takahashi et al. (2012) を参照してほしい。

以下、メトリックは平坦とし ( $\text{diag } g_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$ )、添字のギリシャ文字とアルファベットはそれぞれ時空4次元 (0, 1, 2, 3) と空間3次元 (1, 2, 3) を表す。

#### 6.1.1 相対論的輻射流体方程式

相対論的輻射流体方程式は以下で記述される:

$$\frac{\partial(\rho\gamma)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^j)}{\partial x^j} = 0, \quad (6.1)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [(\epsilon + p_g)\gamma^2 - p_g] + \frac{\partial}{\partial x^j} \left[ (\epsilon + p_g)\gamma \frac{u^j}{c} \right] = G^0, \quad (6.2)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} [(\epsilon + p_g)\gamma u^i] + \frac{\partial}{\partial x^j} \left[ (\epsilon + p_g) \frac{u^i u^j}{c^2} + \delta^{ij} p_g \right] = G^i. \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial t} + \frac{\partial F_r^j}{\partial x^j} = -cG^0, \quad (6.4)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial F_r^i}{\partial t} + \frac{\partial P_r^{ij}}{\partial x^j} = -G^i, \quad (6.5)$$

上から順に質量保存、ガスのエネルギー保存、ガスの運動量保存、輻射の0次モーメント式、輻射の1次モーメントの式を表す。 $\rho$ ,  $p_g$  はガス密度、ガス圧で  $\delta^{ij}$  はクロネッカーデルタである。 $\epsilon$  は静止質量エネルギー密度を含めた流体のエネルギー密度を表しており、polytropic 関係を仮定すると内部エネルギー密度  $e$ 、比熱比  $\Gamma$  を用いて

$$\epsilon = \rho c^2 + e = \rho c^2 + \frac{p_g}{\Gamma - 1}, \quad (6.6)$$

とかける。 $u^\nu = (c\gamma, \gamma v^j)$  は流体4元速度で、3元速度  $v^i$ 、ローレンツ因子  $\gamma$  との間に  $u^i = \gamma v^i = v^i / \sqrt{1 - \beta^2}$  の関係がある。ただし  $\beta^i = v^i / c$ ,  $\beta = \sqrt{\beta_k \beta^k}$  である。

$E_r$  [erg cm<sup>-3</sup>],  $F_r^i$  [erg cm<sup>-2</sup> s<sup>-1</sup>],  $P_r^{ij}$  [erg cm<sup>-3</sup>] はそれぞれ輻射場のエネルギー密度、フラックス、ストレスで、輻射とガスは輻射4元力密度  $G^\mu$  を通してエネルギー運動量のやり取りを行う。

$$G^0 = -\frac{\rho\gamma\kappa_0}{c} (4\pi B - cE_r + \beta_j F_r^j) - \frac{\rho\gamma\sigma_0}{c} \left[ \frac{u^2 E_r}{c} + \frac{u_j u_k P_r^{jk}}{c} - (2\gamma^2 - 1) \beta_j F_r^j \right], \quad (6.7)$$

$$G^i = -\frac{\rho\gamma\kappa_0}{c} (4\pi B \beta^i - F_r^i + v_k P_r^{ik}) + \frac{\rho\gamma\sigma_0}{c} \left[ F_r^i - \gamma E_r u^i - v_k P_r^{ik} + v^i \left( \frac{2\gamma u_k F_r^k}{c^2} - \frac{u_j u_k P_r^{jk}}{c^2} \right) \right]. \quad (6.8)$$

ただし  $u = \sqrt{u_k u^k}$  である。 $\kappa_0, \sigma_0$  はそれぞれ共動座標系で評価した吸収係数、及び散乱係数 (cm<sup>2</sup> g<sup>-1</sup>) を表す。B [erg cm<sup>-2</sup> s<sup>-1</sup>] は黒体輻射強度でガス温度を用いて

$$B = \frac{\sigma_{SB}}{\pi} T_g^4, \quad (6.9)$$

となる。ここで  $\sigma_{SB} = 5.67 \times 10^{-5}$  erg cm<sup>-2</sup> s<sup>-1</sup> deg<sup>-4</sup> は Stefan-Boltzmann 定数である。このガス温度は状態方程式によって決まる:

$$p_g = \frac{\rho k_B T_g}{\mu m_p}. \quad (6.10)$$

$k_B = 1.38 \times 10^{-5}$  erg deg<sup>-1</sup> はボルツマン定数、 $m_p = 1.672 \times 10^{-24}$  g はイオン質量、 $\mu$  は平均分子量である。

これらの式に加えて、クロージャー関係と呼ばれる  $P_r^{ij}$  を与える式 (輻射の状態方程式) が必要となる。ここでは2つのクロージャー関係式を紹介する。

共動座標系で等方的な放射を仮定した場合、 $P_r^{ij}$  は

$$P_r'^{ij} = \frac{\delta^{ij}}{3} E_r', \quad (6.11)$$

と表される。このように等方的な輻射圧を与える近似を **Eddington 近似** と呼ぶ。ダッシュユ' は共動座標系の物理量を表しているが、式(6.4)-(6.8) で必要なのは観測者系のストレス  $P_r^{ij}$  である。そこで式(6.11) にローレンツ変換を用いることで  $P_r^{ij}$  に対する関係式が得られる:

$$\begin{aligned} P_r^{ij} &+ \left[ -\frac{\delta^{ij}}{3} \frac{u_k u_l}{c^2} + \frac{u^i u^j u_k u_l}{(1+\gamma)^2 c^4} \right] P_r^{kl} + \frac{u^i u_k P_r^{jk} + u^j u_k P_r^{ik}}{(\gamma+1)c^2} \\ &= \frac{\delta^{ij}}{3} \gamma^2 \left( E_r - 2 \frac{\beta_j F_r^j}{c} \right) - \frac{u^i u^j E_r}{c^2} + \frac{u^i F_r^j + u^j F_r^i}{c^2} + \frac{2u^i u^j u_k F_r^k}{(\gamma+1)c^4}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

$P_r^{ij}$  は  $3 \times 3$  の対称行列のため、 $E_r, F_r^i, u^i$  を与えて  $6 \times 6$  の線形方程式を解くことで  $P_r^{ij}$  が得られる。

Eddington 近似は光学的に厚い状況では正しいが、光学的に薄い場合放射は等方的にならないため正しくない。非等方な放射を考慮したクロージャーとして **M-1 クロージャー** が提案されている:

$$P_r^{ij} = \left[ \frac{3(1-\chi)}{2} \frac{\delta^{ij}}{3} + \frac{3\chi-1}{2} n^i n^j \right] E_r, \quad (6.13)$$

$$\chi = \frac{3+4f^2}{5+2\sqrt{4-3f^2}}, \quad n^i = \frac{F_r^i}{F_r}, \quad f^i = \frac{F_r^i}{cE_r}, \quad f = \sqrt{f_k f^k}, \quad F_r = \sqrt{F_{r,k} F_r^k}. \quad (6.14)$$

### 6.1.2 課題

#### 熱平衡状態への遷移 “1d\_lte/”

ガス温度と輻射温度 ( $T_r = (E'_r/a_R)^{1/4}$ 、ただし  $a_R = 4\sigma_{\text{SB}}/c$ ) が等しくない場合、ガスと輻射は吸収・再放射を通してエネルギーのやり取りを行い、熱平衡状態 ( $T_g = T_r$ ) へと近づいていく。この節では非熱平衡状態から熱平衡状態へと遷移していく過程を考える。

仮定としてガスは定常・静的とし、ガス密度 ( $\rho = 0.025 \text{ g cm}^{-3}$ )、ガス温度 ( $T_g = 10^6 \text{ K}$ ) は一定とする。吸収係数は  $\kappa_0 = 0.4 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1} = \text{const}$  とし、散乱係数は  $\sigma_0 = 0$  とする。輻射温度は初期に  $T_r = 10^8 \text{ K}$  とする。

- 吸収を通して輻射エネルギーが減少し、熱平衡状態に近づいて行くことを確認してください。特に  $t - \log E_r$  でプロットした場合、どのように輻射エネルギーが減衰するかを確認してください。
- 輻射エネルギーが指数関数的に減衰する理由を考えてみてください。(ヒント: 式 (6.4) で  $F_r = 0, \sigma_0 = 0, v^i = 0, B = \text{const}, \frac{\partial}{\partial x^j} = 0$  とする。)

#### 1次元輻射の伝搬 “1d\_transport/”

輻射場がガス中を伝搬すると、輻射場は吸収過程により減衰しながら伝搬していく。この節では1次元一様静的なガス中を伝搬する輻射場を考える。

計算領域のサイズは  $L = 100 \text{ cm}$  で、ガス密度、ガス温度はそれぞれ  $0.01 \text{ g cm}^{-3}$ ,  $10^6 \text{ K}$  とし、輻射場はガスと熱平衡にあるとする。吸収係数は  $\kappa_0 = 10 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1} = \text{const}$  とし、散乱係数は  $\sigma_0 = 0$  とする。この一様媒質中に  $x = 0$  から輻射を  $T_r = 10^8 \text{ K}$  で照射する。

- $x - \log E_r$  上で輻射が時間とともに伝播していく様子を確認してください。
- 吸収係数を変更した場合 (*initial.f90* 内の変数 *absorption*)、どのように変化するか確認してください (ただし大きすぎると数値的に解けなくなります)。
- クロージャー関係を変えた場合 (*initial.f90* 内の変数 *radiation* を 1 から 2 に変更)、波面の伝播する速度が変わることを確かめ、なぜそのようになるか考えてください (ヒント: 光学的に薄い極限を考え、式 (6.4)-(6.5) で  $G^\mu = 0$  とし、Eddington 近似の場合は  $P_r^{ij} = \delta^{ij}/3$ 、M-1 クロージャーの場合は  $P_r^{xx} = E_r$ , その他 = 0 として特性速度を求めてください)。
- $x = 0$  から注入された光の波面が  $x = 100 \text{ cm}$  の境界を通過すると定常状態になるの定常状態になったときの、 $x - \log E_r$  の傾きを Eddington 近似を用いた場合と M-1 クロージャーを用いた場合でそれぞれ求めてください。また、その傾きが何によって決まるかを考えてみてください。(ヒント: 式 (6.4)-(6.5) で定常・静的なガスを仮定し、 $E_r \gg 4\pi B/c$  とする。)

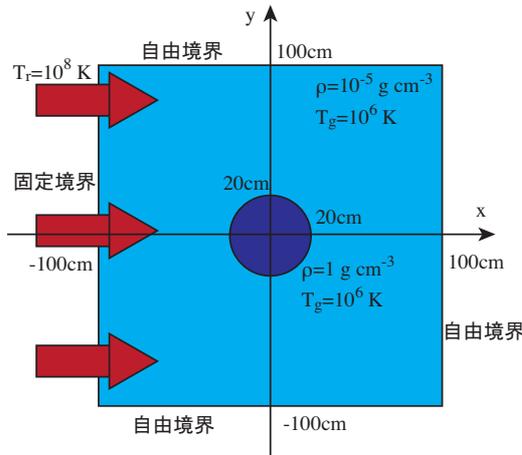


図 6.1: 2次元輻射場伝播問題の初期条件。

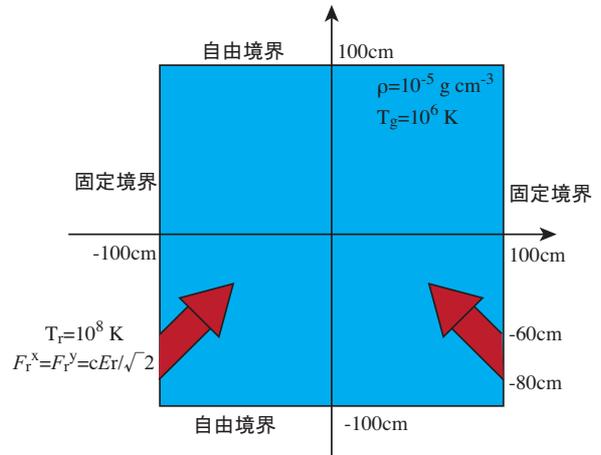


図 6.2: 輻射衝突の計算。

## 2次元輻射場の伝播 ~ 日陰問題~ 2d\_shadow/

この節では光学的に厚い物体に光を照らした場合の計算を行う (図 6.1)。密度  $\rho = 10^{-5} \text{ g cm}^{-3}$ 、温度  $T_g = 10^6 \text{ K}$  の熱平衡にある一様媒質中に半径 20cm の重たいクランプ  $\rho = 1 \text{ g cm}^{-3}$  を置く。このクランプに対して  $x = -100 \text{ cm}$  の境界から温度  $T_r = 10^8 \text{ K}$  の輻射を照射する。吸収係数は  $\kappa_0 = 1 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$ 、散乱係数は  $\sigma_0 = 0$  とする。

- Eddington 近似を用いた場合と M-1 クロージャーを用いた場合でどのように結果が変わるか確認してください。
- $\kappa_0 = 0.0$ ,  $\sigma_0 = 1 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$  とした場合 (*initial.f90* 内 *absorption = 0*, *scattering=1*)、どのように結果が変わるか確認してください。

## 2次元輻射場の伝播 ~ 輻射の衝突~ 2d\_collision/

光学的に薄いガス中を伝播する 2本の光柱を考える (図 6.2)。ガスは一様静的とし、密度  $\rho = 10^{-5} \text{ g cm}^{-3}$ 、温度  $T_g = 10^6 \text{ K}$  とする。以下の様に境界から光を注入し、二つの光が交差する様子確かめる。

$$E_r = a_R T_r^4, \quad F_r^x = F_r^y = \frac{cE_r}{\sqrt{2}}, \quad \text{if } x \leq -100 \text{ cm and } y = [-80 \text{ cm}, -60 \text{ cm}], \quad (6.15)$$

$$E_r = a_R T_r^4, \quad -F_r^x = F_r^y = \frac{cE_r}{\sqrt{2}}, \quad \text{if } x \geq 100 \text{ cm and } y = [-80 \text{ cm}, -60 \text{ cm}], \quad (6.16)$$

$$(6.17)$$

ただし  $T_r = 10^8 \text{ K}$  とする。吸収係数、散乱係数はともに 0 とし、M-1 クロージャーを用いる。

- 2本の光柱が真っ直ぐに進み、衝突することを確認してください。
- 光同士は相互作用をしないため、光が衝突することは非物理的である。なぜこのような事が起きるのか考えてみてください。

- 2本の光の強度が異なる場合にどうなるか調べてみてください。

(発展編)2次元輻射場の伝播 ~ ガスの加速~ *2d\_acc/*

ここでは輻射によってガスが加速されて行く様子を計算する。計算ボックスは2次元  $x = [-10^4, 3 \times 10^4]$  cm、 $x = [-2 \times 10^4, 2 \times 10^4]$  cm とし、一様なガス ( $\rho = 10^{-6}$  g cm $^{-3}$ ,  $T_g = 10^9$  K) で満たす。ここに円筒形的气スクランプ (半径  $3 \times 10^3$  cm、密度  $10^{-2}$  g cm $^{-3}$ ) をおき、 $x = -10^4$  cm から輻射を照射する ( $T_r = 3 \times 10^7$  K)。この問題ではガスの運動を追うため、静的なガスを仮定しない (*initial.f90* 内、変数 *hydro = .true.*)。ガスクランプが加速されていく様子確かめてください。



## 関連図書

Mihalas, D. & Mihalas, B. W. 1984, Foundations of radiation hydrodynamics (New York, Oxford University Press, 1984, 731 p.)

Kato, S., Fukue, J., & Mineshige, S. 2008, Black-Hole Accretion Disks — Towards a New Paradigm —, ed. Kato, S., Fukue, J., & Mineshige, S.

Takahashi, H. R., Ohsuga, K., Sekiguchi, Y., Inoue, T., & Tomida, K. 2012, submitted to ApJ