



2012年8月5日(月)-9日(金) 千葉大学統合情報センター2階:電算実習室
宇宙磁気流体・プラズマシミュレーションサマースクール

近似リーマン解法に基づく 磁気流体方程式の数値解法

三好 隆博

広島大学大学院理学研究科



うんざりとするかもしれませんが・・・

頑張ってください。

内容

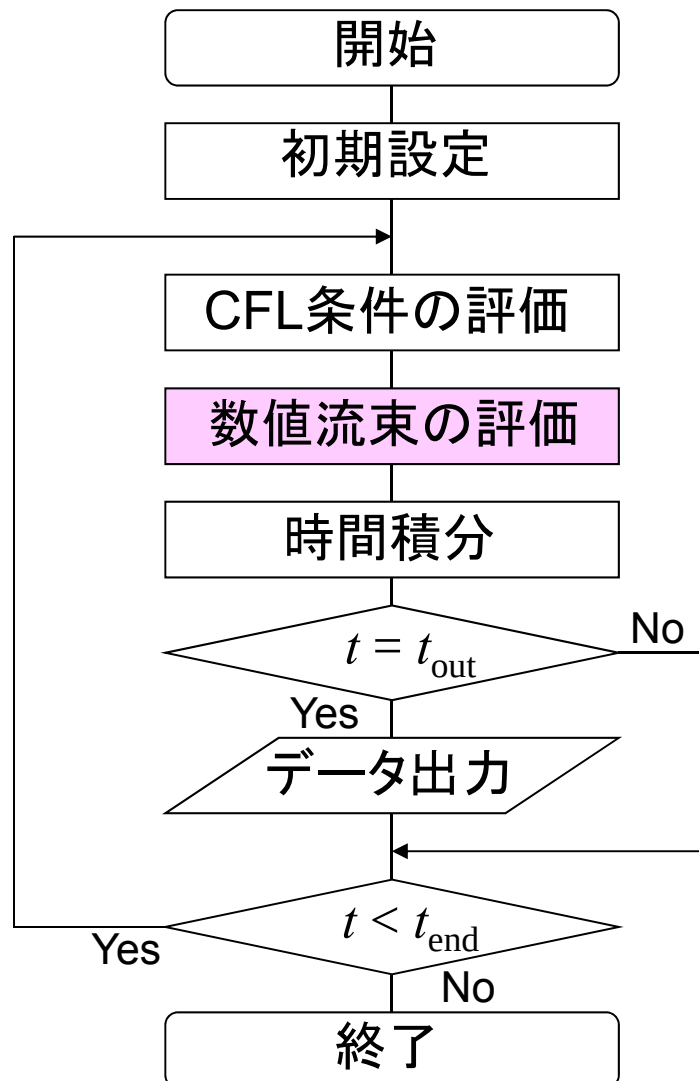
- はじめに
 - 双曲型保存則
 - MHD方程式
- 近似リーマン解法
 - HLL型近似リーマン解法
- 近似リーマン解法の高次精度化
 - MUSCL補間
- 近似リーマン解法の多次元化
 - 磁場発散の数値処理
- フローチャート



はじめに



はじめに



はじめに

□ 宇宙プラズマにおける流体現象の特徴

- 保存性、非線形性、圧縮性、多次元性

□ 流れの支配方程式

- 線形移流方程式
- Burgers方程式
- Euler方程式
- MHD方程式
-

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (au) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{U} = 0 \Leftrightarrow \dots$$

双曲型保存則

□ 1次元システム方程式の保存則

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0$$

$\mathbf{U}$: 保存変数ベクトル

$\mathbf{F}$: 流束ベクトル

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{A} \equiv \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}$$

$$\mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{A} \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{\Lambda}$$

$\mathbf{W}$: 特性変数ベクトル

$\mathbf{A}$: ヤコビ行列

$\mathbf{\Lambda}$: 固有値行列 $\Rightarrow$ 独立の実固有値

$\mathbf{R}$: 右固有ベクトル

双曲型方程式

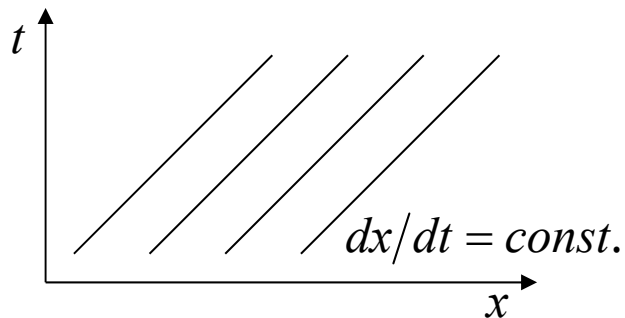
双曲型保存則

□ 連立移流方程式

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0, \quad d\mathbf{W} \equiv R^{-1} d\mathbf{U}$$

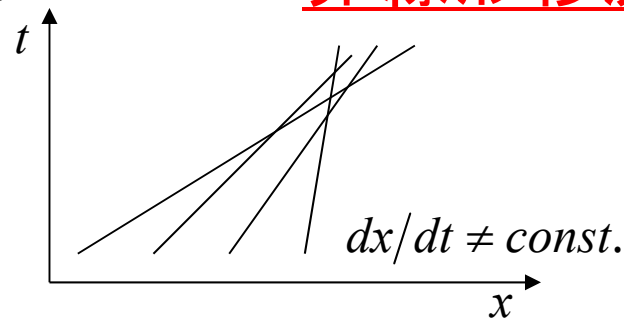
$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda_k = \text{const.}$$



$$\lambda_k \neq \text{const.}$$

非線形移流方程式



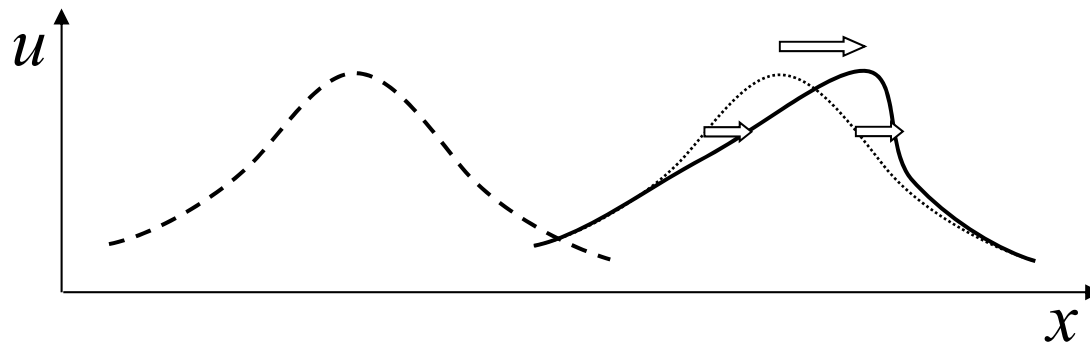
双曲型保存則

□ 非線形移流方程式

■ Burgers方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad f = \frac{u^2}{2}$$

$$\Rightarrow u(x, t) = u(x - u(x, 0)t, 0)$$



□ 非線形双曲型保存則

□ 非線形結合で高次モード生成

□ 有限時間で**不連続解**を形成

双曲型保存則

□ 弱解 (weak solution)

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, t) \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt \\ &= - \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(U \frac{\partial \phi}{\partial t} + F \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, 0) U(x, 0) dx = 0 \end{aligned}$$

$\phi(x, t)$: 無限回微分可能かつ無限遠で0の任意関数

- 不連続解を含むより一般的な解
- 解の一意性消失
- 物理的な解はエントロピー条件を満足

双曲型保存則

□ 双曲型保存則の数値解法

■ 保存型解法

$$U_t + \nabla \cdot F = 0$$

□ Lax-Wendroffの定理[1960]

- 数値解が収束すれば、その解は保存則の弱解に収束

□ Hartenのエントロピー条件[1980]

- 数値解がエントロピー条件を満足し、収束すれば、その解は保存則の物理解に収束

■ 非保存型解法

$$U_t + (A \cdot \nabla)U = 0$$

□ Hou-LeFlochの定理[1994]

- 数値解が収束したとしても、衝撃波を含むその解は非物理的解に収束

双曲型保存則

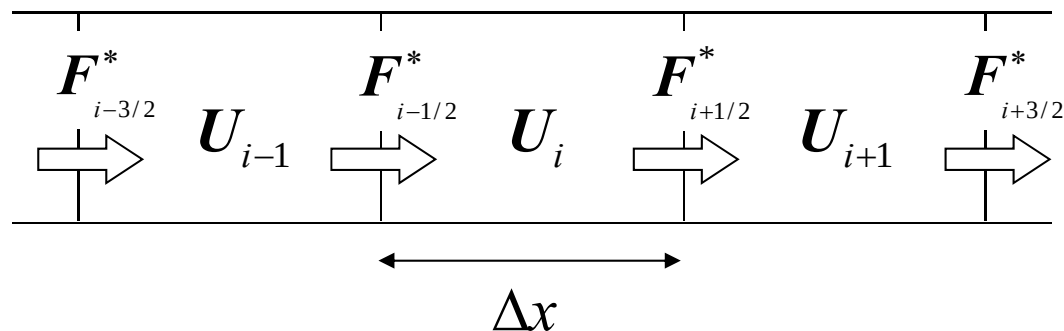
□ 保存型解法

- 有限差分法
- 有限要素法
- 有限体積法

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U dx + F(U(x_{i+1/2}, t)) - F(U(x_{i-1/2}, t)) = 0$$

$$\Delta x \frac{\Delta U_i}{\Delta t} + F_{i+1/2}^* - F_{i-1/2}^* = 0$$

$F_{i+1/2}^*$: 数值流束



MHD方程式

□ MHD方程式(保存形式)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \\ \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \left(p + \frac{B^2}{2} \right) \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B} \right] = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0, \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{\gamma p}{\gamma - 1} \right) \mathbf{v} + \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right] = 0, \end{array} \right.$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (\text{ideal}),$$
$$p = (\gamma - 1) \left(e - \rho v^2 / 2 - B^2 / 2 \right),$$

MHD方程式

□ 1次元MHD方程式

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad B_x = \text{const.},$$

$$\mathbf{U} = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, B_y, B_z, e]^T,$$

$$\mathbf{F} = [\rho u, \rho u u + p_T, \rho v u - B_x B_y, \rho w u - B_x B_z,$$

$$B_y u - B_x v, B_z u - B_x w, (e + p_T)u - B_x (v B_y + w B_z)]^T,$$

$$p = (\gamma - 1) \left(e - \rho (u^2 + v^2 + w^2) / 2 - (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) / 2 \right),$$

$$p_T = p + (B_y^2 + B_z^2 - B_x^2) / 2,$$

$$\lambda_1 = u - c_f, \lambda_2 = u - c_a, \lambda_3 = u - c_s, \lambda_4 = u,$$

$$\lambda_5 = u + c_s, \lambda_6 = u + c_a, \lambda_7 = u + c_f$$

MHD方程式

□ MHD方程式の波の性質

■ 特性波

$$c_a^2 \equiv B_x^2 / \rho, \quad c_{f,s}^2 \equiv \left(\gamma p + B^2 \pm \sqrt{(\gamma p + B^2)^2 - 4\gamma p B_x^2} \right) / 2\rho$$

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \lambda_5 \leq \lambda_6 \leq \lambda_7$$

■ Rankine-Hugoniotの関係式

$$[F] = 0, [u] \neq 0 \quad (\text{速進衝撃波、遅進衝撃波})$$

$$[\rho] = [p] = [B_y^2 + B_z^2] = 0, \quad \pm \sqrt{\rho}[v] = [B_y], \quad \pm \sqrt{\rho}[w] = [B_z]$$

(回転不連続)

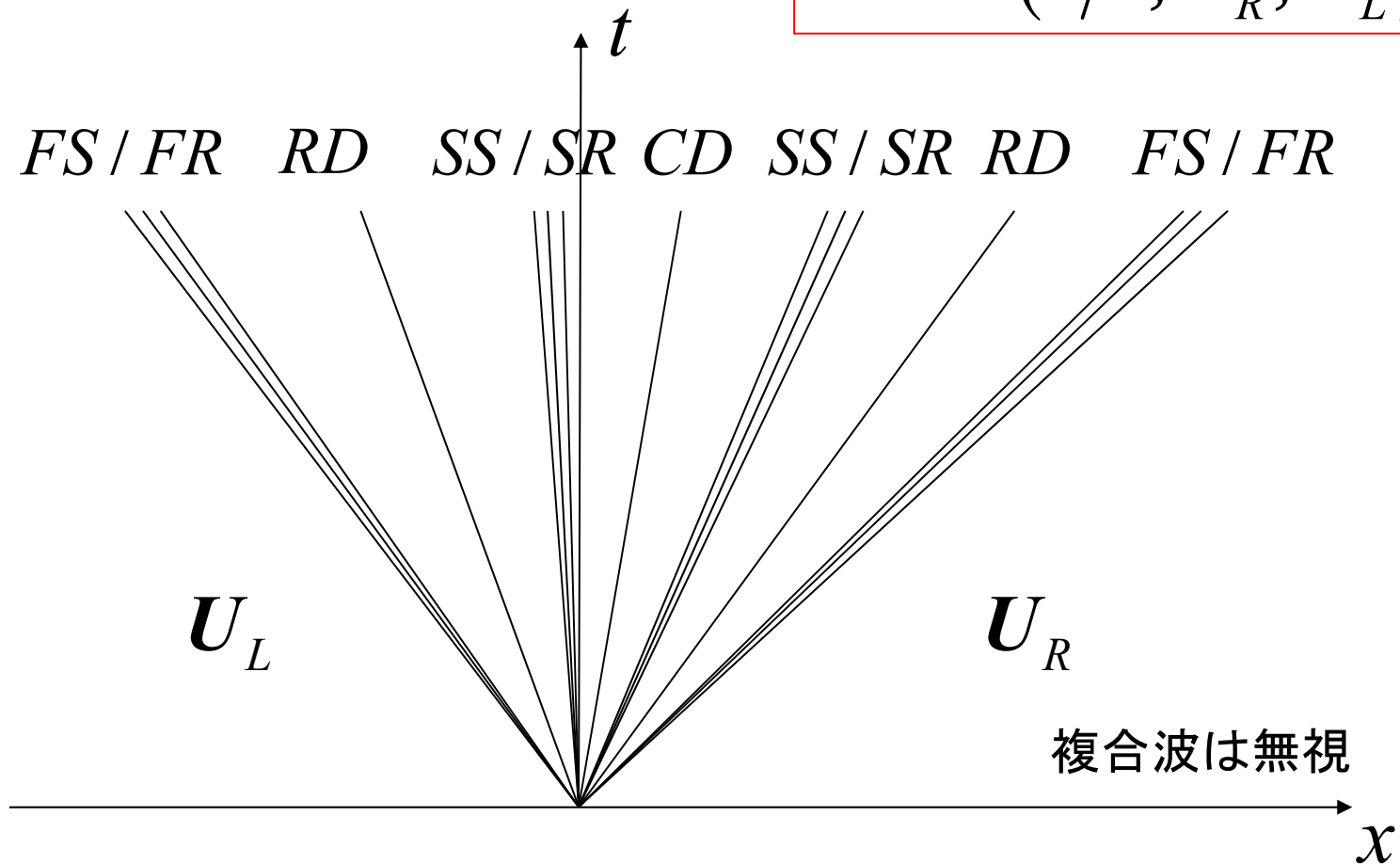
$$[v] = [w] = [B_y] = [B_z] = [p] = 0, \quad B_x \neq 0 \quad (\text{接触不連続})$$

$$\left[p + (B_y^2 + B_z^2) / 2 \right] = 0, \quad B_x = 0 \quad (\text{接線不連続})$$

MHD方程式

□ MHD衝撃波管問題(リーマン問題)

$$U = U(x/t; U_R, U_L)$$



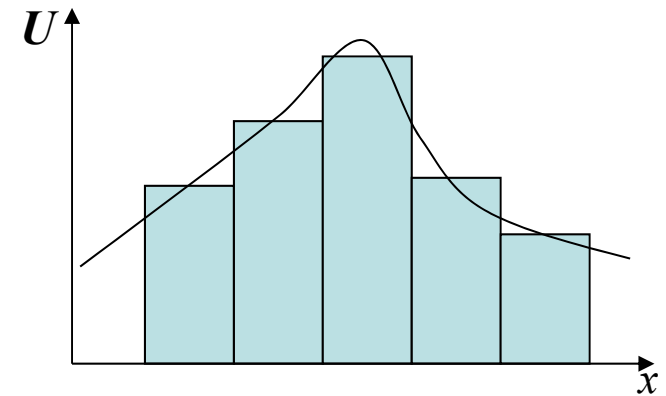
近似リーマン解法

近似リーマン解法

□ 近似リーマン解法 (Godunov型解法)

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt = \oint (U dx - F dt) = 0$$

■ 物理量分布を一定と仮定

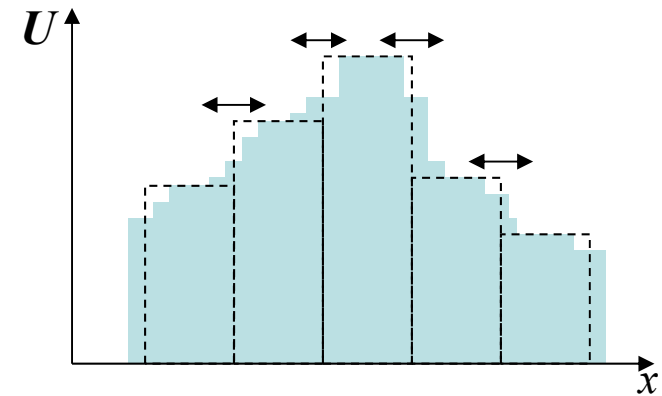


近似リーマン解法

□ 近似リーマン解法 (Godunov型解法)

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt = \oint (U dx - F dt) = 0$$

- 物理量分布を一定と仮定
- リーマン問題厳密解・近似解

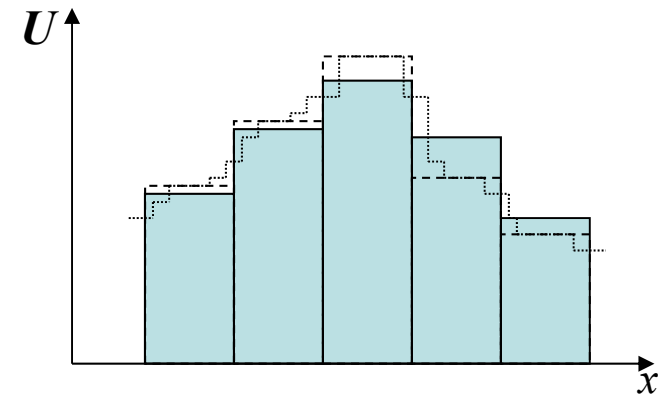


近似リーマン解法

□ 近似リーマン解法 (Godunov型解法)

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt = \oint (U dx - F dt) = 0$$

- 物理量分布を一定と仮定
- リーマン問題厳密解・近似解
- 厳密解・近似解の空間積分

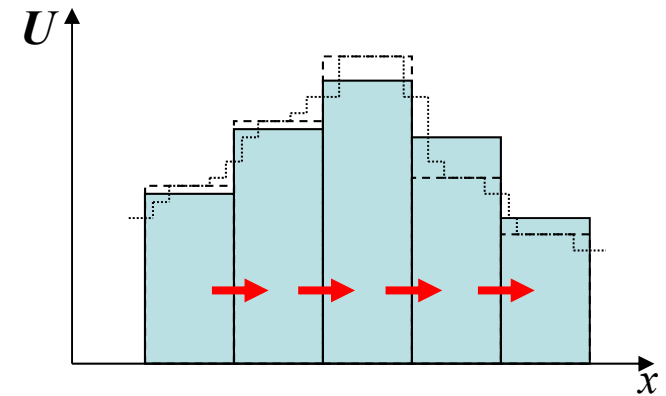


近似リーマン解法

□ 近似リーマン解法 (Godunov型解法)

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt = \oint (U dx - F dt) = 0$$

- 物理量分布を一定と仮定
- リーマン問題厳密解・近似解
- 厳密解・近似解の空間積分
- 数値流束による形式 (時空間保存則から評価)



$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U^{n+1} dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U^n dx + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \underline{F_{i+1/2}} dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} F_{i-1/2} dt = 0$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1/2}} U \left(\frac{x - x_{i+1/2}}{\Delta t}; U_i^n, U_{i+1}^n \right) dx - (x_{i+1/2} - x_i) U_i^n + \Delta t (\underline{F_{i+1/2}} - F_i^n) = 0$$

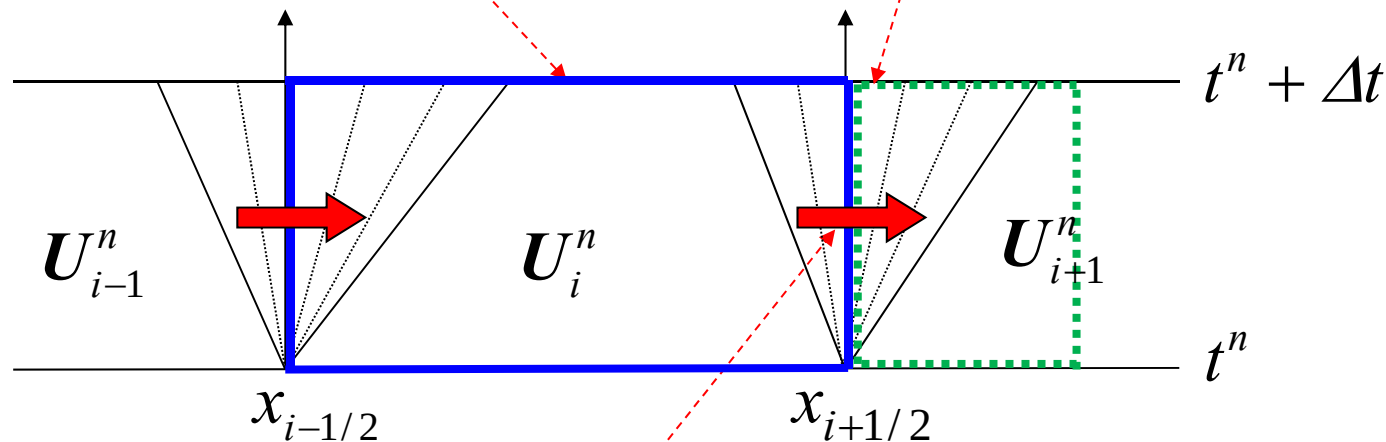
近似リーマン解法

□ 近似リーマン解法 (Godunov型解法)

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt = \oint (U dx - F dt) = 0$$

$$U_i^{n+1} = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(x, t^n + \Delta t) dx$$

$$U \left(\frac{x - x_{i+1/2}}{\Delta t}; U_i^n, U_{i+1}^n \right)$$

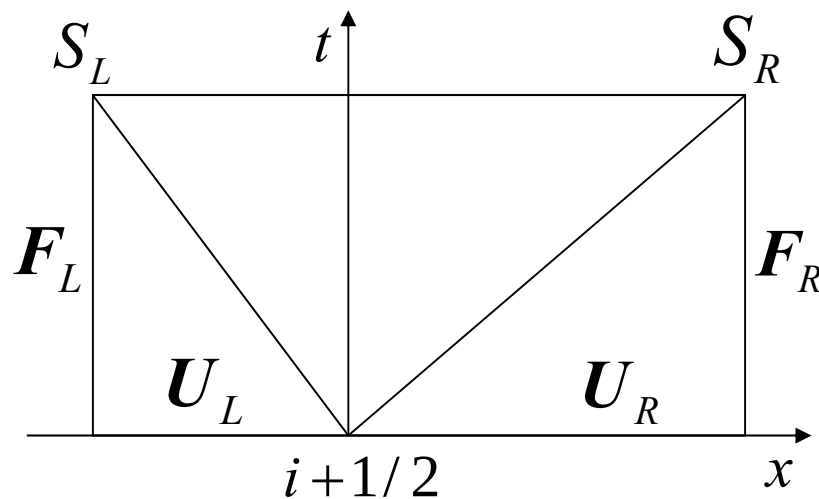


$$F_{i+1/2} = \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} F(x_{i+1/2}, t) dt$$

HLL型近似リーマン解法

□ HLL近似リーマン解法 [Harten+, 1983]

- 衝撃波近似
- 2-wave近似



$S_{R,L}$: 最大/最小情報伝播速度

$$S_R = \max(u_L + c_L, u_R + c_R, 0)$$

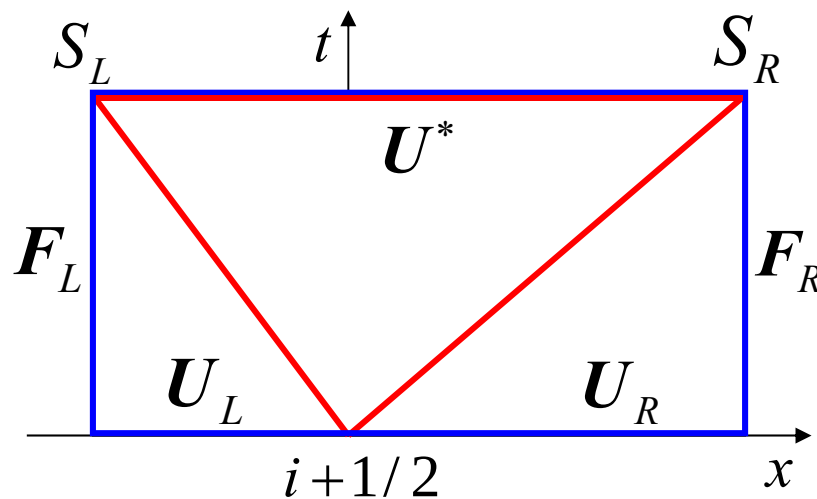
$$S_L = \min(u_L - c_L, u_R - c_R, 0)$$

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt = \oint (U dx - F dt) = 0$$

HLL型近似リーマン解法

□ HLL近似リーマン解法 [Harten+, 1983]

- 衝撃波近似
- 2-wave近似



$S_{R,L}$: 最大/最小情報伝播速度

$$S_R = \max(u_L + c_L, u_R + c_R, 0)$$

$$S_L = \min(u_L - c_L, u_R - c_R, 0)$$

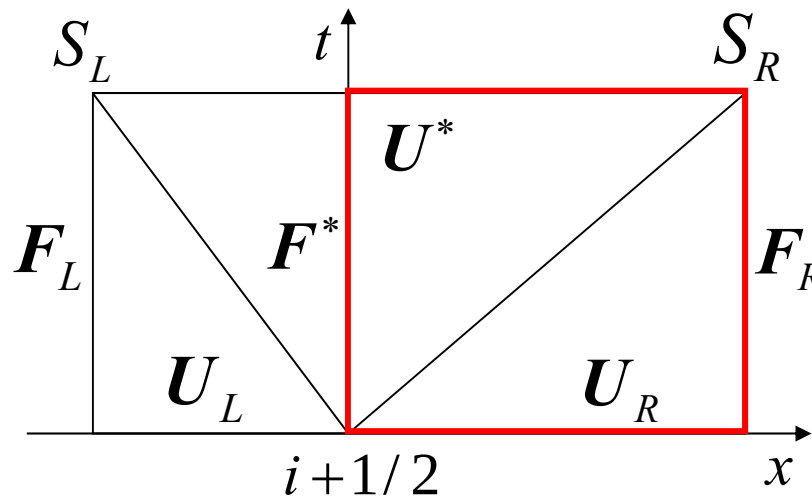
$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt = \oint (U dx - F dt) = 0$$

$$\Rightarrow (S_R - S_L)U^* + S_R U_R - S_L U_L + F_R - F_L = 0$$

HLL型近似リーマン解法

□ HLL近似リーマン解法 [Harten+, 1983]

- 衝撃波近似
- 2-wave近似



$S_{R,L}$: 最大/最小情報伝播速度

$$S_R = \max(u_L + c_L, u_R + c_R, 0)$$

$$S_L = \min(u_L - c_L, u_R - c_R, 0)$$

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt = \oint (U dx - F dt) = 0$$

$$\Rightarrow F^* = F_{R,L} + S_{R,L} (U^* - U_{R,L}) = \frac{S_R F_L - S_L F_R + S_R S_L (U_R - U_L)}{S_R - S_L}$$

HLL型近似リーマン解法

□ HLL近似リーマン解法 [Harten+, 1983]

- 衝撃波近似
- 2-wave近似

$$U^* = \frac{S_R U_R - S_L U_L + F_R - F_L}{S_R - S_L}$$

$$F^* = \frac{S_R F_L - S_L F_R + S_R S_L (U_R - U_L)}{S_R - S_L} \neq F(U^*)$$

- 固有ベクトルの計算不要
- 正值性保存 [Einfeldt, et al., 1991]
 - MHDについては [Miyoshi, Kusano, 2005]
- 接触不連続の分解不可能

HLL型近似リーマン解法

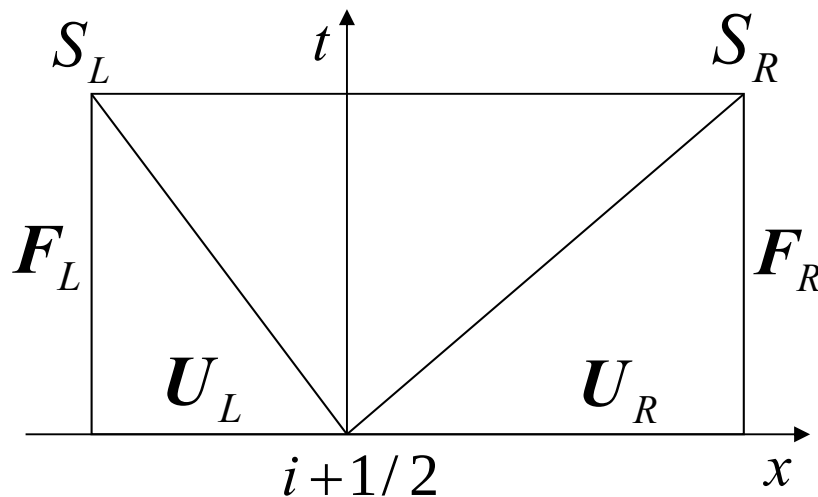
□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ 衝撃波近似

■ 5-wave近似

□ リーマンファンで移流速度一定

□ リーマンファンで全圧力一定



$S_{R,L}$: 速進磁気音波

HLL型近似リーマン解法

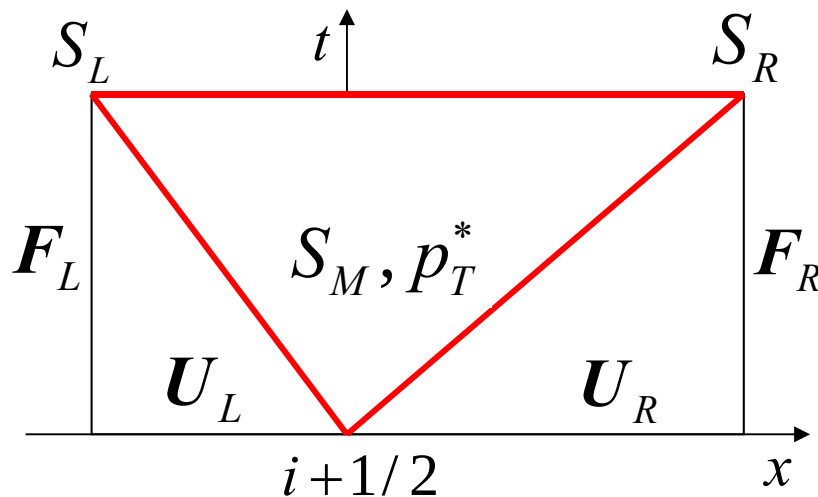
□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ 衝撃波近似

■ 5-wave近似

□ リーマンファンで移流速度一定

□ リーマンファンで全圧力一定



$S_{R,L}$: 速進磁気音波

S_M : エントロピー波

HLL型近似リーマン解法

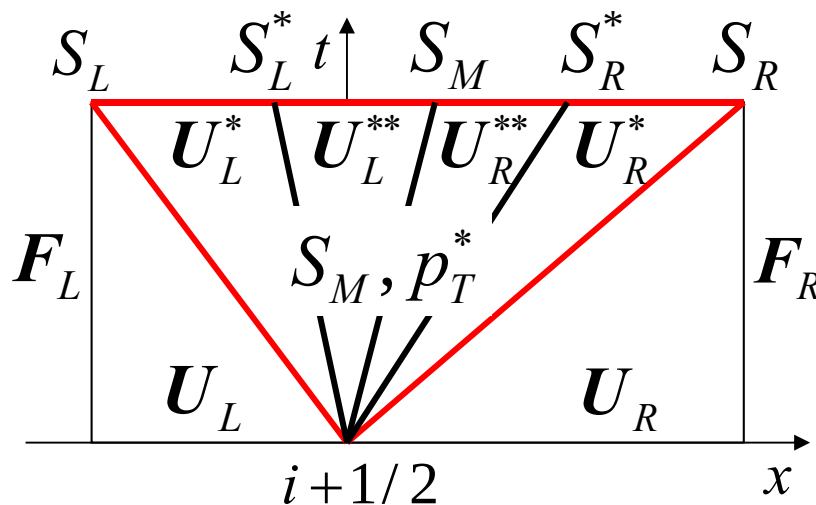
□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ 衝撃波近似

■ 5-wave近似

□ リーマンファンで移流速度一定

□ リーマンファンで全圧力一定



$S_{R,L}$: 速進磁気音波

S_M : エントロピー波

$S_{R,L}^*$: アルフェン波

HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ エントロピー波の評価 [Batten, et al., 1997]

$$S_M = \frac{(\rho u)^*}{\rho^*} = \frac{(S_R - u_R)\rho_R u_R - (S_L - u_L)\rho_L u_L - p_{TR} + p_{TL}}{(S_R - u_R)\rho_R - (S_L - u_L)\rho_L}$$

■ 全圧力の評価

HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ 速進磁気音波に対するジャンプ条件

$$S_\alpha \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* \\ B_{y\alpha}^* \\ B_{z\alpha}^* \\ e_\alpha^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* S_M^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* S_M - B_x B_{y\alpha}^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* S_M - B_x B_{z\alpha}^* \\ B_{y\alpha}^* S_M - B_x v_\alpha^* \\ B_{z\alpha}^* S_M - B_x w_\alpha^* \\ (e_\alpha^* + p_T^*) S_M - B_x (\mathbf{v}_\alpha^* \cdot \mathbf{B}_\alpha^*) \end{pmatrix} = S_\alpha \begin{pmatrix} \rho_\alpha \\ \rho_\alpha u_\alpha \\ \rho_\alpha v_\alpha \\ \rho_\alpha w_\alpha \\ B_{y\alpha} \\ B_{z\alpha} \\ e_\alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha u_\alpha \\ \rho_\alpha u_\alpha + p_{T\alpha} - B_x^2 \\ \rho_\alpha v_\alpha u_\alpha - B_x B_{y\alpha} \\ \rho_\alpha w_\alpha u_\alpha - B_x B_{z\alpha} \\ B_{y\alpha} u_\alpha - B_x v_\alpha \\ B_{z\alpha} u_\alpha - B_x w_\alpha \\ (e_\alpha + p_{T\alpha}) u_\alpha - B_x (\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{B}_\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_\alpha^* = (S_M, v_\alpha^*, w_\alpha^*), \mathbf{B}_\alpha^* = (B_x, B_{y\alpha}^*, B_{z\alpha}^*), \alpha = R, L$$

HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ エントロピー波の評価 [Batten, et al., 1997]

$$S_M = \frac{(\rho u)^*}{\rho^*} = \frac{(S_R - u_R)\rho_R u_R - (S_L - u_L)\rho_L u_L - p_{TR} + p_{TL}}{(S_R - u_R)\rho_R - (S_L - u_L)\rho_L}$$

■ 全圧力の評価

$$\begin{aligned} p_T^* &= p_{TL} + \rho_L (S_L - u_L)(S_M - u_L) \\ &= p_{TR} + \rho_R (S_R - u_R)(S_M - u_R) \\ &= \frac{(S_R - u_R)\rho_R p_{TL} - (S_L - u_L)\rho_L p_{TR} + \rho_L \rho_R (S_R - u_R)(u_R - u_L)}{(S_R - u_R)\rho_R - (S_L - u_L)\rho_L} \end{aligned}$$

HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ 速進磁気音波に対するジャンプ条件

$$S_\alpha \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* \\ B_{y\alpha}^* \\ B_{z\alpha}^* \\ e_\alpha^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* S_M^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* S_M - B_x B_{y\alpha}^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* S_M - B_x B_{z\alpha}^* \\ B_{y\alpha}^* S_M - B_x v_\alpha^* \\ B_{z\alpha}^* S_M - B_x w_\alpha^* \\ (e_\alpha^* + p_T^*) S_M - B_x (\mathbf{v}_\alpha^* \cdot \mathbf{B}_\alpha^*) \end{pmatrix} = S_\alpha \begin{pmatrix} \rho_\alpha \\ \rho_\alpha u_\alpha \\ \rho_\alpha v_\alpha \\ \rho_\alpha w_\alpha \\ B_{y\alpha} \\ B_{z\alpha} \\ e_\alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha u_\alpha \\ \rho_\alpha u_\alpha + p_{T\alpha} - B_x^2 \\ \rho_\alpha v_\alpha u_\alpha - B_x B_{y\alpha} \\ \rho_\alpha w_\alpha u_\alpha - B_x B_{z\alpha} \\ B_{y\alpha} u_\alpha - B_x v_\alpha \\ B_{z\alpha} u_\alpha - B_x w_\alpha \\ (e_\alpha + p_{T\alpha}) u_\alpha - B_x (\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{B}_\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_\alpha^* = (S_M, v_\alpha^*, w_\alpha^*), \mathbf{B}_\alpha^* = (B_x, B_{y\alpha}^*, B_{z\alpha}^*), \alpha = R, L$$

HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ HLLD解: U_{α}^*

$$\rho_{\alpha}^* = \rho_{\alpha} \frac{S_{\alpha} - u_{\alpha}}{S_{\alpha} - S_M}$$

HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ 速進磁気音波に対するジャンプ条件

$$S_\alpha \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* \\ B_{y\alpha}^* \\ B_{z\alpha}^* \\ e_\alpha^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* S_M^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* S_M - B_x B_{y\alpha}^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* S_M - B_x B_{z\alpha}^* \\ B_{y\alpha}^* S_M - B_x v_\alpha^* \\ B_{z\alpha}^* S_M - B_x w_\alpha^* \\ (e_\alpha^* + p_T^*) S_M - B_x (\mathbf{v}_\alpha^* \cdot \mathbf{B}_\alpha^*) \end{pmatrix} = S_\alpha \begin{pmatrix} \rho_\alpha \\ \rho_\alpha u_\alpha \\ \rho_\alpha v_\alpha \\ \rho_\alpha w_\alpha \\ B_{y\alpha} \\ B_{z\alpha} \\ e_\alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha u_\alpha \\ \rho_\alpha u_\alpha + p_{T\alpha} - B_x^2 \\ \rho_\alpha v_\alpha u_\alpha - B_x B_{y\alpha} \\ \rho_\alpha w_\alpha u_\alpha - B_x B_{z\alpha} \\ B_{y\alpha} u_\alpha - B_x v_\alpha \\ B_{z\alpha} u_\alpha - B_x w_\alpha \\ (e_\alpha + p_{T\alpha}) u_\alpha - B_x (\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{B}_\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_\alpha^* = (S_M, v_\alpha^*, w_\alpha^*), \mathbf{B}_\alpha^* = (B_x, B_{y\alpha}^*, B_{z\alpha}^*), \alpha = R, L$$

HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ HLLD解: U_{α}^*

$$\rho_{\alpha}^* = \rho_{\alpha} \frac{S_{\alpha} - u_{\alpha}}{S_{\alpha} - S_M}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_{t\alpha}^* = \mathbf{v}_{t\alpha} - B_x \mathbf{B}_{t\alpha} \frac{S_M - u_{\alpha}}{\rho_{\alpha}(S_{\alpha} - u_{\alpha})(S_{\alpha} - S_M) - B_x^2} \\ \mathbf{B}_{t\alpha}^* = \mathbf{B}_{t\alpha} \frac{\rho_{\alpha}(S_{\alpha} - u_{\alpha})^2 - B_x^2}{\rho_{\alpha}(S_{\alpha} - u_{\alpha})(S_{\alpha} - S_M) - B_x^2} \end{array} \right. \quad \mathbf{v}_t = (0, v, w), \mathbf{B}_t = (0, B_y, B_z)$$

HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ 速進磁気音波に対するジャンプ条件

$$S_\alpha \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* \\ B_{y\alpha}^* \\ B_{z\alpha}^* \\ e_\alpha^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* S_M^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* S_M - B_x B_{y\alpha}^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* S_M - B_x B_{z\alpha}^* \\ B_{y\alpha}^* S_M - B_x v_\alpha^* \\ B_{z\alpha}^* S_M - B_x w_\alpha^* \\ (e_\alpha^* + p_T^*) S_M - B_x (v_\alpha^* \cdot B_\alpha^*) \end{pmatrix} = S_\alpha \begin{pmatrix} \rho_\alpha \\ \rho_\alpha u_\alpha \\ \rho_\alpha v_\alpha \\ \rho_\alpha w_\alpha \\ B_{y\alpha} \\ B_{z\alpha} \\ e_\alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha u_\alpha \\ \rho_\alpha u_\alpha + p_{T\alpha} - B_x^2 \\ \rho_\alpha v_\alpha u_\alpha - B_x B_{y\alpha} \\ \rho_\alpha w_\alpha u_\alpha - B_x B_{z\alpha} \\ B_{y\alpha} u_\alpha - B_x v_\alpha \\ B_{z\alpha} u_\alpha - B_x w_\alpha \\ (e_\alpha + p_{T\alpha}) u_\alpha - B_x (v_\alpha \cdot B_\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_\alpha^* = (S_M, v_\alpha^*, w_\alpha^*), \mathbf{B}_\alpha^* = (B_x, B_{y\alpha}^*, B_{z\alpha}^*), \alpha = R, L$$

HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ HLLD解: U_{α}^*

$$\rho_{\alpha}^* = \rho_{\alpha} \frac{S_{\alpha} - u_{\alpha}}{S_{\alpha} - S_M}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_{t\alpha}^* = \mathbf{v}_{t\alpha} - B_x \mathbf{B}_{t\alpha} \frac{S_M - u_{\alpha}}{\rho_{\alpha}(S_{\alpha} - u_{\alpha})(S_{\alpha} - S_M) - B_x^2} \\ \mathbf{B}_{t\alpha}^* = \mathbf{B}_{t\alpha} \frac{\rho_{\alpha}(S_{\alpha} - u_{\alpha})^2 - B_x^2}{\rho_{\alpha}(S_{\alpha} - u_{\alpha})(S_{\alpha} - S_M) - B_x^2} \end{array} \right. \quad \mathbf{v}_t = (0, v, w), \mathbf{B}_t = (0, B_y, B_z)$$

$$e_{\alpha}^* = \frac{(S_{\alpha} - u_{\alpha})e_{\alpha} - p_{T\alpha} + p_T^* + B_x(\mathbf{v}_{\alpha} \cdot \mathbf{B}_{\alpha} - \mathbf{v}_{\alpha}^* \cdot \mathbf{B}_{\alpha}^*)}{S_{\alpha} - S_M}$$

HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ アルフェン波に対するジャンプ条件

$$S_\alpha^* \begin{pmatrix} \rho_\alpha^{**} \\ \rho_\alpha^{**} S_M \\ \rho_\alpha^{**} v_\alpha^{**} \\ \rho_\alpha^{**} w_\alpha^{**} \\ B_{y\alpha}^{**} \\ B_{z\alpha}^{**} \\ e_\alpha^{**} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha^{**} S_M \\ \rho_\alpha^{**} S_M^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_\alpha^{**} v_\alpha^{**} S_M - B_x B_{y\alpha}^{**} \\ \rho_\alpha^{**} w_\alpha^{**} S_M - B_x B_{z\alpha}^{**} \\ B_{y\alpha}^{**} S_M - B_x v_\alpha^{**} \\ B_{z\alpha}^{**} S_M - B_x w_\alpha^{**} \\ (e_\alpha^{**} + p_T^*) S_M - B_x (\mathbf{v}_\alpha^{**} \cdot \mathbf{B}_\alpha^{**}) \end{pmatrix} = S_\alpha^* \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* \\ B_{y\alpha}^* \\ B_{z\alpha}^* \\ e_\alpha^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* S_M^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* S_M - B_x B_{y\alpha}^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* S_M - B_x B_{z\alpha}^* \\ B_{y\alpha}^* S_M - B_x v_\alpha^* \\ B_{z\alpha}^* S_M - B_x w_\alpha^* \\ (e_\alpha^* + p_T^*) S_M - B_x (\mathbf{v}_\alpha^* \cdot \mathbf{B}_\alpha^*) \end{pmatrix}$$

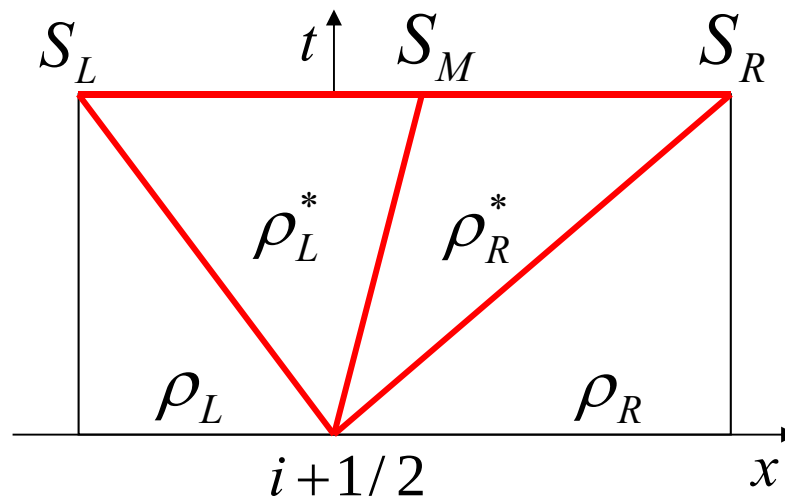
HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ HLLD解: U_{α}^{**}

$$\rho_{\alpha}^{**} = \rho_{\alpha}^{*}$$

$$S_R^{*} = S_M + \frac{|B_x|}{\sqrt{\rho_R^{*}}}, S_L^{*} = S_M - \frac{|B_x|}{\sqrt{\rho_L^{*}}}$$



HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ アルフェン波に対するジャンプ条件

$$S_\alpha^* \begin{pmatrix} \rho_\alpha^{**} \\ \rho_\alpha^{**} S_M \\ \rho_\alpha^{**} v_\alpha^{**} \\ \rho_\alpha^{**} w_\alpha^{**} \\ B_{y\alpha}^{**} \\ B_{z\alpha}^{**} \\ e_\alpha^{**} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha^{**} S_M \\ \rho_\alpha^{**} S_M^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_\alpha^{**} v_\alpha^{**} S_M - B_x B_{y\alpha}^{**} \\ \rho_\alpha^{**} w_\alpha^{**} S_M - B_x B_{z\alpha}^{**} \\ B_{y\alpha}^{**} S_M - B_x v_\alpha^{**} \\ B_{z\alpha}^{**} S_M - B_x w_\alpha^{**} \\ (e_\alpha^{**} + p_T^*) S_M - B_x (\mathbf{v}_\alpha^{**} \cdot \mathbf{B}_\alpha^{**}) \end{pmatrix} = S_\alpha^* \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* \\ B_{y\alpha}^* \\ B_{z\alpha}^* \\ e_\alpha^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* S_M^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* S_M - B_x B_{y\alpha}^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* S_M - B_x B_{z\alpha}^* \\ B_{y\alpha}^* S_M - B_x v_\alpha^* \\ B_{z\alpha}^* S_M - B_x w_\alpha^* \\ (e_\alpha^* + p_T^*) S_M - B_x (\mathbf{v}_\alpha^* \cdot \mathbf{B}_\alpha^*) \end{pmatrix}$$

HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ アルフェン波に対するジャンプ条件

$$\det \left(M \left(\mathbf{v}_{t\alpha}^{**}, \mathbf{B}_{t\alpha}^{**} \right) \right) = 0$$

■ エントロピー波に対するジャンプ条件

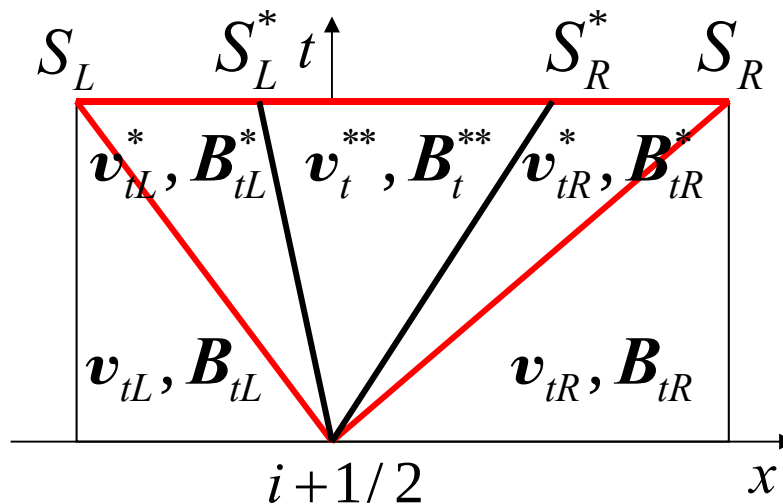
$$S_M \begin{pmatrix} \rho_L^* \mathbf{v}_{tL}^{**} \\ \mathbf{B}_{tL}^{**} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_L^* \mathbf{v}_{tL}^{**} S_M - B_x \mathbf{B}_{tL}^{**} \\ \mathbf{B}_{tL}^{**} S_M - B_x \mathbf{v}_{tL}^{**} \end{pmatrix} = S_M \begin{pmatrix} \rho_R^* \mathbf{v}_{tR}^{**} \\ \mathbf{B}_{tR}^{**} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_R^* \mathbf{v}_{tR}^{**} S_M - B_x \mathbf{B}_{tR}^{**} \\ \mathbf{B}_{tR}^{**} S_M - B_x \mathbf{v}_{tR}^{**} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{tL}^{**} = \mathbf{v}_{tR}^{**} = \mathbf{v}_t^{**}, \mathbf{B}_{tL}^{**} = \mathbf{B}_{tR}^{**} = \mathbf{B}_t^{**} \quad \text{for } B_x \neq 0$$

HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

$$\begin{aligned}
 & (S_R - S_R^*) \begin{pmatrix} \rho_R^* \mathbf{v}_{tR}^* \\ \mathbf{B}_{tR}^* \end{pmatrix} + (S_R^* - S_M) \begin{pmatrix} \rho_R^* \mathbf{v}_t^{**} \\ \mathbf{B}_t^{**} \end{pmatrix} + (S_M - S_L^*) \begin{pmatrix} \rho_L^* \mathbf{v}_t^{**} \\ \mathbf{B}_t^{**} \end{pmatrix} + (S_L^* - S_{RL}) \begin{pmatrix} \rho_L^* \mathbf{v}_{tL}^* \\ \mathbf{B}_{tL}^* \end{pmatrix} \\
 & + S_R \begin{pmatrix} \rho_R \mathbf{v}_{tR} \\ \mathbf{B}_{tR} \end{pmatrix} - S_L \begin{pmatrix} \rho_L \mathbf{v}_{tL} \\ \mathbf{B}_{tL} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_R \mathbf{v}_{tR} u_R - B_x \mathbf{B}_{tR} \\ \mathbf{B}_{tR} u_R - B_x \mathbf{v}_{tR} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_L \mathbf{v}_{tL} u_L - B_x \mathbf{B}_{tL} \\ \mathbf{B}_{tL} u_L - B_x \mathbf{v}_{tL} \end{pmatrix} = 0
 \end{aligned}$$



HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ HLLD解: U_{α}^{**}

$$\rho_{\alpha}^{**} = \rho_{\alpha}^{*}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_t^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} \mathbf{v}_{tL}^* + \sqrt{\rho_R^*} \mathbf{v}_{tR}^* + (\mathbf{B}_{tR}^* - \mathbf{B}_{tL}^*) \text{sgn}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}} \\ \mathbf{B}_t^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} \mathbf{B}_{tR}^* + \sqrt{\rho_R^*} \mathbf{B}_{tL}^* + \sqrt{\rho_L^* \rho_R^*} (\mathbf{v}_{tR}^* - \mathbf{v}_{tL}^*) \text{sgn}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}} \end{array} \right.$$

HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ アルフェン波に対するジャンプ条件

$$S_\alpha \begin{pmatrix} \rho_\alpha^{**} \\ \rho_\alpha^{**} S_M \\ \rho_\alpha^{**} v_\alpha^{**} \\ \rho_\alpha^{**} w_\alpha^{**} \\ B_{y\alpha}^{**} \\ B_{z\alpha}^{**} \\ e_\alpha^{**} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha^{**} S_M \\ \rho_\alpha^{**} S_M^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_\alpha^{**} v_\alpha^{**} S_M - B_x B_{y\alpha}^{**} \\ \rho_\alpha^{**} w_\alpha^{**} S_M - B_x B_{z\alpha}^{**} \\ B_{y\alpha}^{**} S_M - B_x v_\alpha^{**} \\ B_{z\alpha}^{**} S_M - B_x w_\alpha^{**} \\ (e_\alpha^{**} + p_T^*) S_M - B_x (v_\alpha^{**} \cdot B_\alpha^{**}) \end{pmatrix} = S_\alpha^* \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* \\ B_{y\alpha}^* \\ B_{z\alpha}^* \\ e_\alpha^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* S_M \\ \rho_\alpha^* S_M^2 + p_T^* - B_x^2 \\ \rho_\alpha^* v_\alpha^* S_M - B_x B_{y\alpha}^* \\ \rho_\alpha^* w_\alpha^* S_M - B_x B_{z\alpha}^* \\ B_{y\alpha}^* S_M - B_x v_\alpha^* \\ B_{z\alpha}^* S_M - B_x w_\alpha^* \\ (e_\alpha^* + p_T^*) S_M - B_x (v_\alpha^* \cdot B_\alpha^*) \end{pmatrix}$$

HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ HLLD解: U_{α}^{**}

$$\rho_{\alpha}^{**} = \rho_{\alpha}^{*}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_t^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} \mathbf{v}_{tL}^* + \sqrt{\rho_R^*} \mathbf{v}_{tR}^* + (\mathbf{B}_{tR}^* - \mathbf{B}_{tL}^*) \text{sgn}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}} \\ \mathbf{B}_t^{**} = \frac{\sqrt{\rho_L^*} \mathbf{B}_{tR}^* + \sqrt{\rho_R^*} \mathbf{B}_{tL}^* + \sqrt{\rho_L^* \rho_R^*} (\mathbf{v}_{tR}^* - \mathbf{v}_{tL}^*) \text{sgn}(B_x)}{\sqrt{\rho_L^*} + \sqrt{\rho_R^*}} \end{array} \right.$$

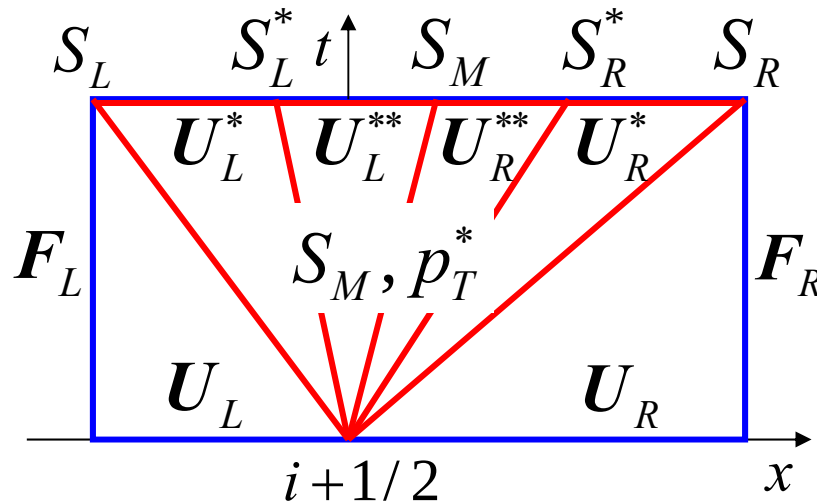
$$e_{\alpha}^{**} = e_{\alpha}^* \mp \sqrt{\rho_{\alpha}^*} (\mathbf{v}_{\alpha}^* \cdot \mathbf{B}_{\alpha}^* - \mathbf{v}^{**} \cdot \mathbf{B}^{**}) \text{sgn}(B_x) \quad (-: R, +: L)$$

HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ 単純波近似

■ 5-wave近似



$S_{R,L}$: 速進磁気音波

S_M : エントロピー波

$S_{R,L}^*$: アルフエン波

$$S_{R,L}(U_{R,L}^* - U_{R,L}) = F_{R,L}^* - F_{R,L}, \quad S_{R,L}^*(U_{R,L}^{**} - U_{R,L}^*) = F_{R,L}^{**} - F_{R,L}^*,$$

$$S_M(U_R^{**} - U_L^{**}) = F_R^{**} - F_L^{**}, \quad \frac{1}{\Delta t} \int_{S_L \Delta t}^{S_R \Delta t} U(x, t^{n+1}) dx + S_R U_R - S_L U_L + F_R - F_L = 0$$

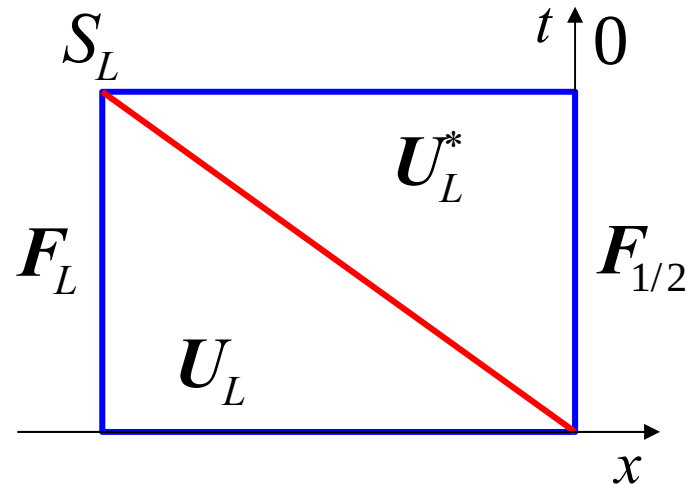
HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ 数値流束

$$F_{1/2} = F_L \quad \text{if } 0 \leq S_L$$

$$F_{1/2} = F_L + S_L U_L^* - S_L U_L = F_L^* \quad \text{if } S_L \leq 0 \leq S_L^*$$



HLL型近似リーマン解法

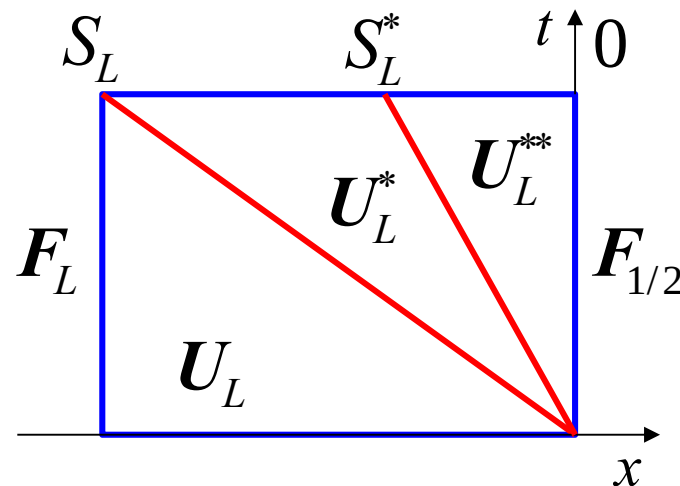
□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ 数値流束

$$F_{1/2} = F_L \quad \text{if } 0 \leq S_L$$

$$F_{1/2} = F_L + S_L U_L^* - S_L U_L = F_L^* \quad \text{if } S_L \leq 0 \leq S_L^*$$

$$\begin{aligned} F_{1/2} &= F_L + S_L^* U_L^{**} - (S_L^* - S_L) U_L^* - S_L U_L \\ &= F_L^* + S_L^* U_L^{**} - S_L^* U_L^* = F_L^* \quad \text{if } S_L^* \leq 0 \leq S_M \end{aligned}$$



HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ 数値流束

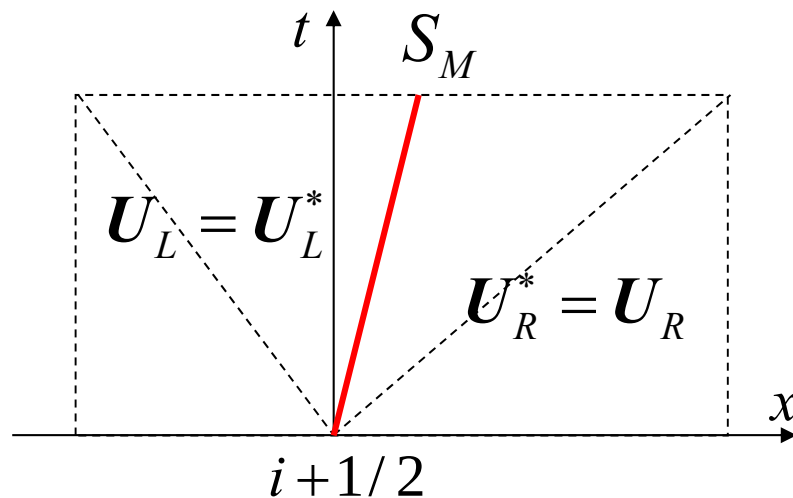
$$F_{1/2} = \begin{cases} F_L & \text{if } 0 \leq S_L \\ F_L^* & \text{if } S_L \leq 0 \leq S_L^* \\ F_L^{**} & \text{if } S_L^* \leq 0 \leq S_M \\ F_R^{**} & \text{if } S_M \leq 0 \leq S_R^* \\ F_R^* & \text{if } S_R^* \leq 0 \leq S_R \\ F_R & \text{if } S_R \leq 0 \end{cases}$$

$$F_\alpha^{*/**} = F(\rho_\alpha^{*/**}, S_M, v_{t\alpha}^{*/**}, B_x, B_{t\alpha}^{*/**}, e_\alpha^{*/**}, p_T^*)$$

HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ 孤立した接線不連続(TD)の分解



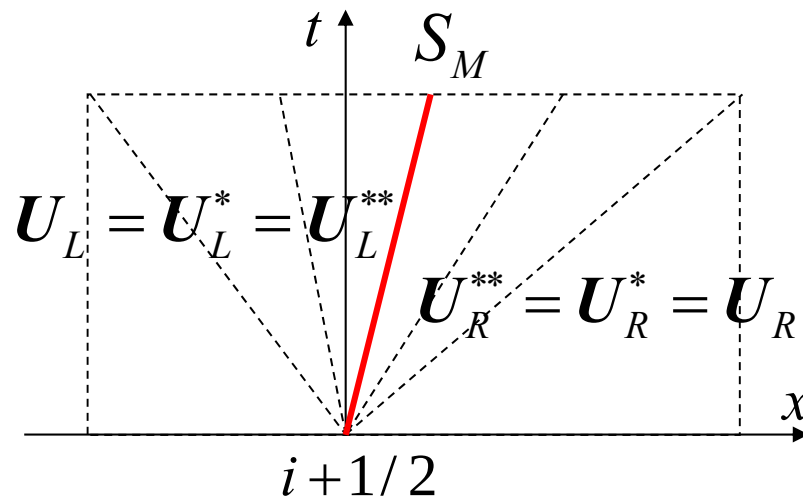
$$S_M = u, B_x = 0$$

$$S_M[U] = [F]$$

HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

- 孤立した接線不連続(TD)の分解
- 孤立した接触不連続(CD)の分解

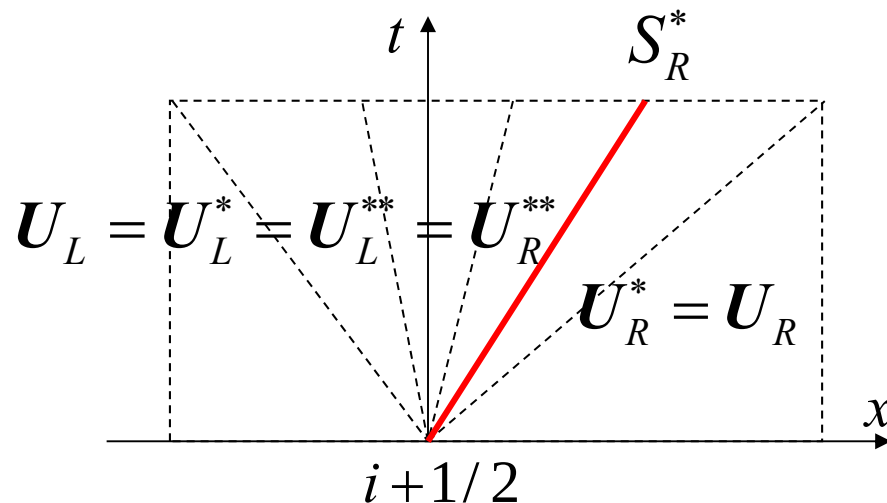


$$S_M = u, B_x \neq 0$$
$$S_M[U] = [F]$$

HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

- 孤立した接線不連続(TD)の分解
- 孤立した接触不連続(CD)の分解
- 孤立した回転不連続(RD)の分解



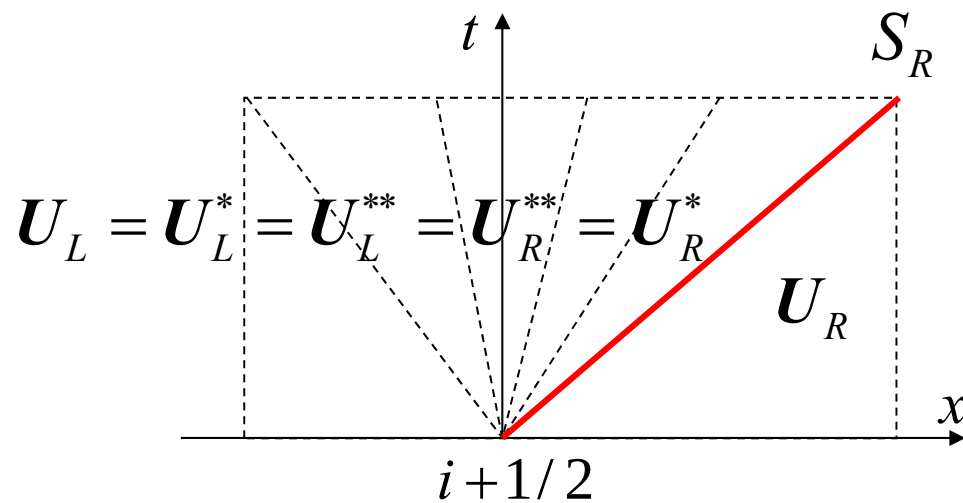
$$S_R^* = u + \frac{B_x}{\sqrt{\rho}}, B_x > 0$$

$$S_R^*[U] = [F]$$

HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

- 孤立した接線不連続(TD)の分解
- 孤立した接触不連続(CD)の分解
- 孤立した回転不連続(RD)の分解
- 孤立した速進衝撃波(FS)の分解



$$S_R[U] = [F]$$

HLL型近似リーマン解法

□ MHDの正値性

■ 物理的な解の集合

$$G = \left\{ \mathbf{U} \mid \rho > 0, e - \rho |\mathbf{v}|^2 / 2 - |\mathbf{B}|^2 / 2 > 0 \right\}$$

■ 物理的な解の重み付き平均値

$$\mathbf{U}_{1,2} \in G \Rightarrow \boxed{\mathbf{U} = (1 - \theta)\mathbf{U}_1 + \theta\mathbf{U}_2 \in G} \quad (0 \leq \theta \leq 1)$$

$$\rho = (1 - \theta)\rho_1 + \theta\rho_2 > 0$$

$$p = (1 - \theta)p_1 + \theta p_2$$

$$+ \theta(1 - \theta)(\gamma - 1) \left(|\Delta \mathbf{v}|^2 \rho_1 \rho_2 / \rho + |\Delta \mathbf{B}|^2 \right) / 2 > 0$$

HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

■ HLLD解の正值性

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{\alpha}^{*} > 0 \\ \rho_{\alpha}^{**} > 0 \\ p_{\alpha}^{*} = (\gamma - 1) \left(e_{\alpha}^{*} - \rho_{\alpha}^{*} |\mathbf{v}_{\alpha}^{*}|^2 / 2 - |\mathbf{B}_{\alpha}^{*}|^2 / 2 \right) > 0 \\ p_{\alpha}^{**} = (\gamma - 1) \left(e_{\alpha}^{**} - \rho_{\alpha}^{**} |\mathbf{v}_{\alpha}^{**}|^2 / 2 - |\mathbf{B}_{\alpha}^{**}|^2 / 2 \right) > 0 \end{array} \right.$$

HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

$$\xi \equiv S_R - u_R > 0, \eta \equiv S_R - S_M > 0, \varsigma \equiv S_M - u_R$$

■ 密度の正值性

$$\rho_R^* = \rho_R^{**} = \frac{\xi}{\eta} \rho_R > 0$$

HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

$$\xi \equiv S_R - u_R > 0, \eta \equiv S_R - S_M > 0, \varsigma \equiv S_M - u_R$$

■ 圧力の正値性

$$\begin{aligned} \varphi &\equiv \eta \left(e_R^* - \rho_R^* |\mathbf{v}_R^*|^2 / 2 - |\mathbf{B}_R^*|^2 / 2 \right) \\ &= \frac{\rho_R \xi}{2} \left(1 - \frac{|\mathbf{B}_{tR}|^2}{\rho_R \xi \eta - B_x^2} \right) \varsigma^2 + p_R \varsigma + \frac{p_R \xi}{\gamma - 1} \\ &\geq \frac{\rho_R \xi}{2} \left(1 - \frac{|\mathbf{B}_{tR}|^2}{\rho_R c_{fR}^2 - B_x^2} \right) \varsigma^2 + p_R \varsigma + \frac{p_R \xi}{\gamma - 1} \equiv \varphi' \end{aligned}$$

一生懸命テキストの方に書きました。

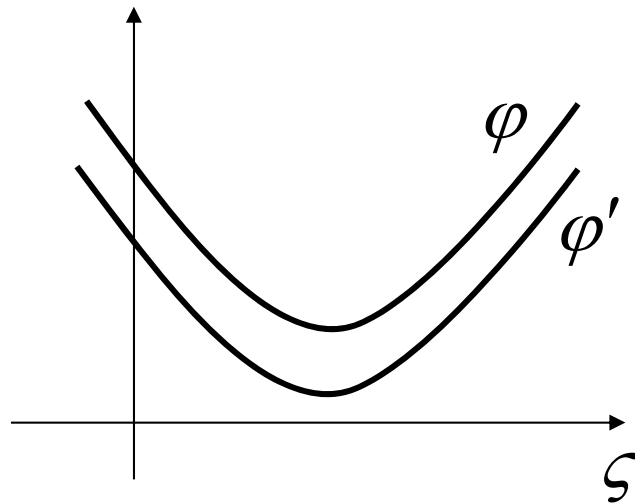
HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

$$\xi \equiv S_R - u_R > 0, \eta \equiv S_R - S_M > 0, \varsigma \equiv S_M - u_R$$

■ 圧力の正値性

$$D(\varphi') < 0 \Rightarrow \varphi' > 0$$



HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

$$\xi \equiv S_R - u_R > 0, \eta \equiv S_R - S_M > 0, \varsigma \equiv S_M - u_R$$

■ 圧力の正値性

$$D(\varphi') = p_R^2 - \frac{2\rho_R p_R}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{|\mathbf{B}_{tR}|^2}{\rho_R c_{fR}^2 - B_x^2} \right) \xi^2 < 0$$

$$\xi^2 > \frac{(\gamma - 1)p_R}{2\rho_R} \left(1 - \frac{|\mathbf{B}_{tR}|^2}{\rho_R c_{fR}^2 - B_x^2} \right)^{-1} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} c_{fR}^2$$

$$S_R > u_R + \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} c_{fR}$$

HLL型近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi, Kusano, 2005]

$$\xi \equiv S_R - u_R > 0, \eta \equiv S_R - S_M > 0, \varsigma \equiv S_M - u_R$$

■ 圧力の正值性

$$\begin{aligned} p_R^{**} &= (\gamma - 1) \left(e_R^{**} - \rho_R^{**} |\mathbf{v}_R^{**}|^2 / 2 - |\mathbf{B}_R^{**}|^2 / 2 \right) \\ &= p_R^* > 0 \end{aligned}$$

■ 正值性保存の条件

$$S_R > u_R + \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} c_{fR}, \quad S_L < u_L - \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} c_{fL}$$

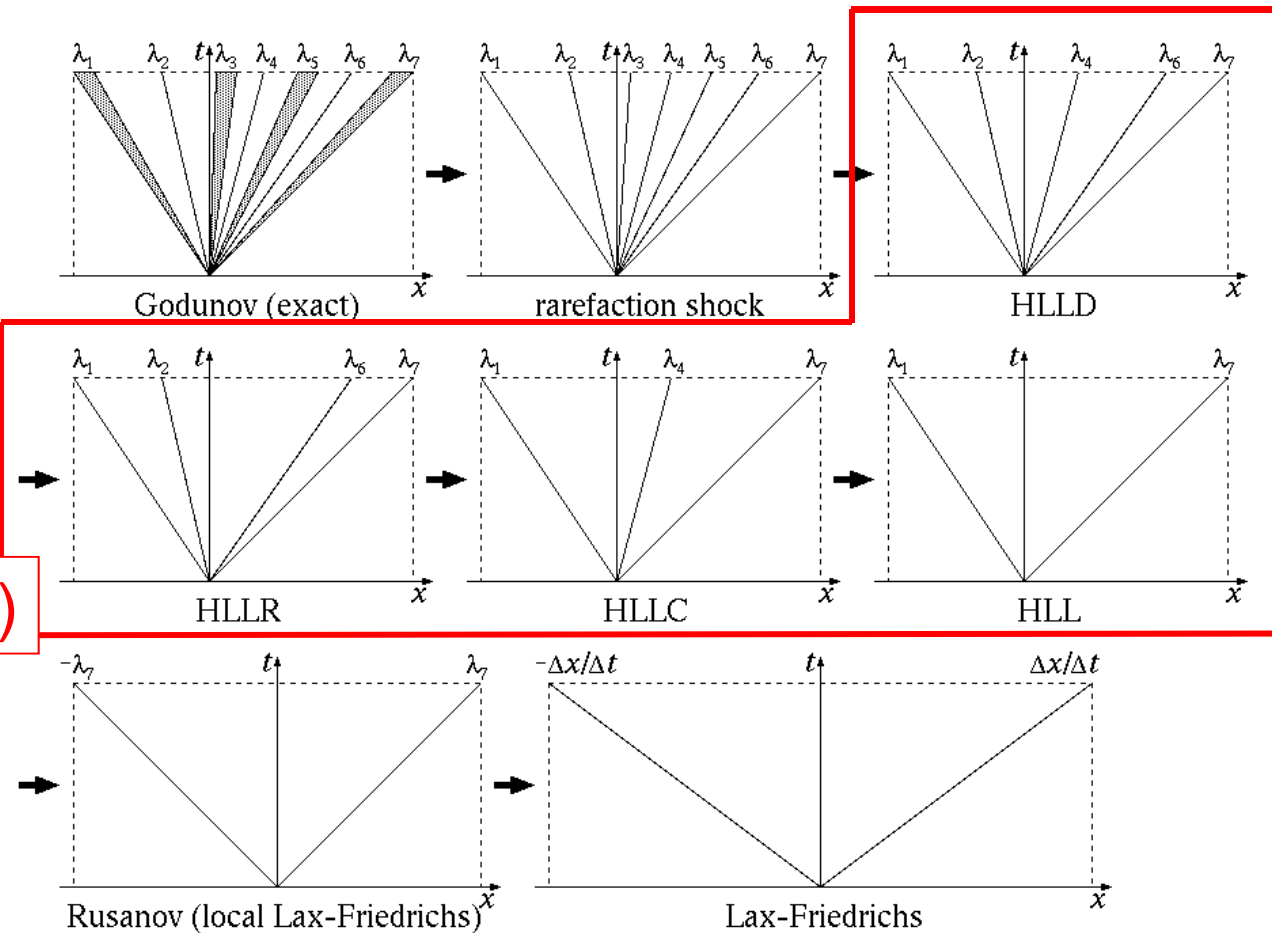
HLL型近似リーマン解法

□ HLL型近似リーマン解法

■ HLLD近似解の重み付き平均値

■ 正值性保存

(MHD HLL-type)



HLL型近似リーマン解法

□ HLL型近似リーマン解法

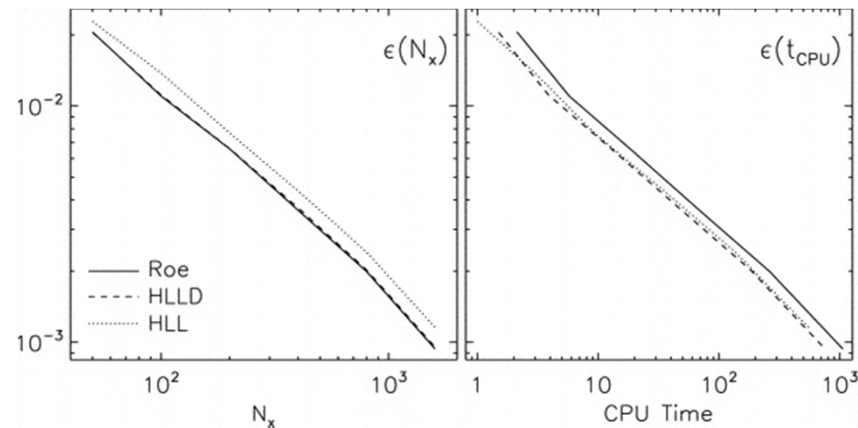
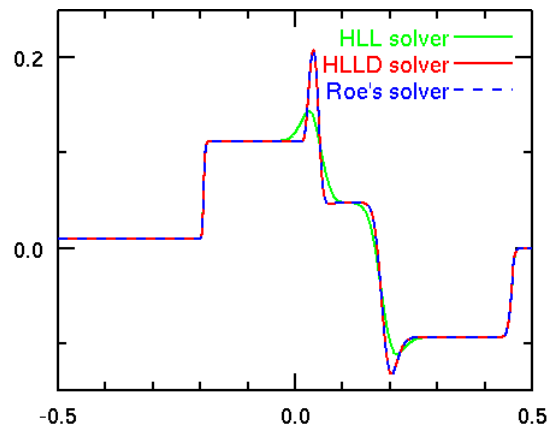
■ 正値性保存HLLC法 [Miyoshi, Kusano, 2007]

$$U = \begin{cases} \frac{(S_L - S_L^*)U_L^* - (S_L^* - S_M)U_L^{**}}{S_L - S_M} & \text{for } S_L \leq \lambda \leq S_M \\ \frac{(S_R - S_R^*)U_R^* - (S_R^* - S_M)U_R^{**}}{S_R - S_M} & \text{for } S_M \leq \lambda \leq S_R \end{cases}$$

$$F_{1/2} = \begin{cases} F_L^* + S_L \frac{S_L^* - S_M}{S_L - S_M} (U_L^* - U_L^{**}) & \text{if } S_M \geq 0 \\ F_R^* + S_R \frac{S_R^* - S_M}{S_R - S_M} (U_R^* - U_R^{**}) & \text{if } S_M \leq 0 \end{cases}$$

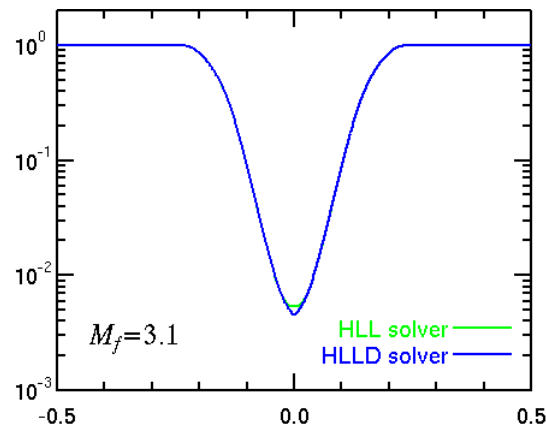
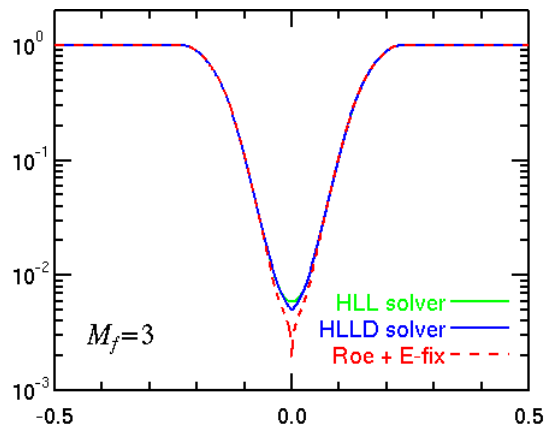
HLL型近似リーマン解法

□ 精度・計算速度の検証



[Mignone et al., 2007]

□ ロバスト性の検証

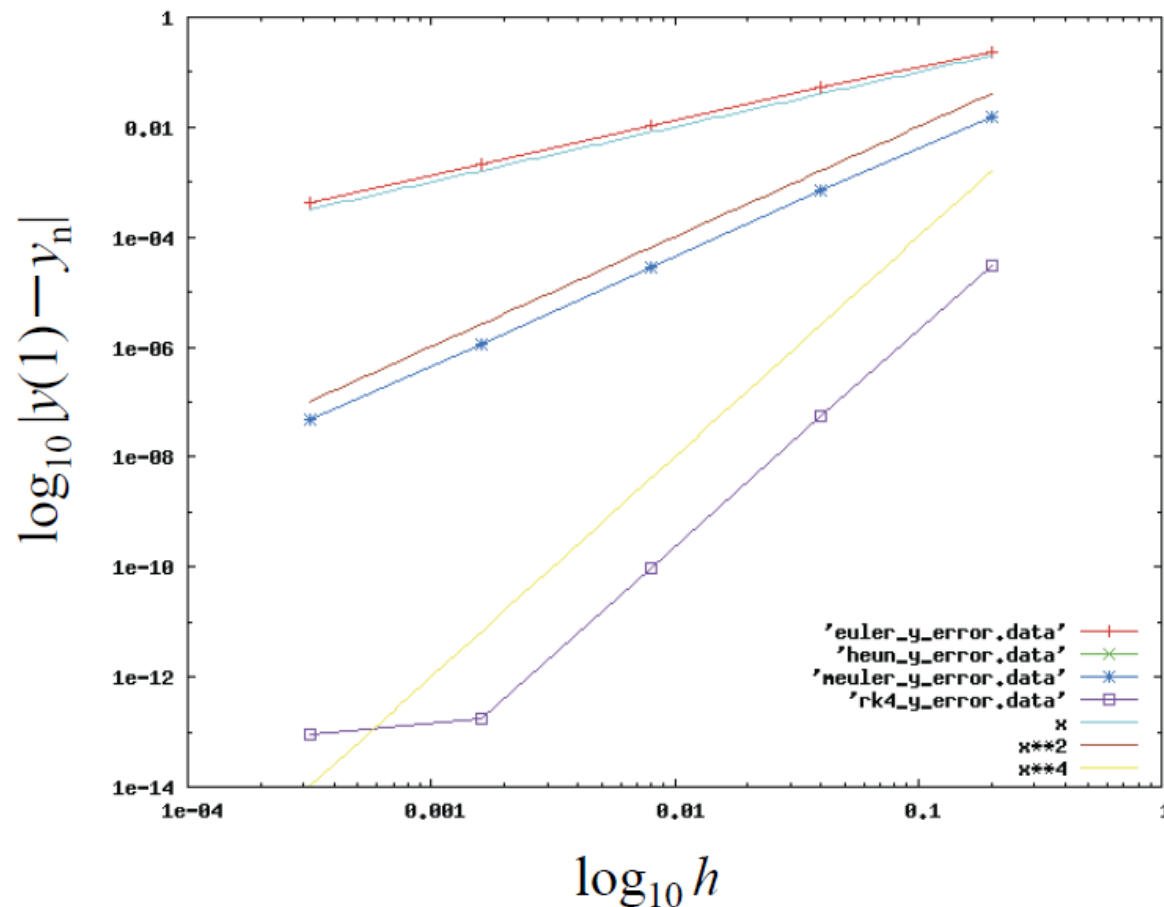


近似リーマン解法の高次精度化

近似リーマン解法の高次精度化

□ 高次精度化の重要性

■ (例) Runge-Kutta法の誤差比較



近似リーマン解法の高次精度化

□ 高次精度化のアプローチ

■ 変数補間による高次精度化

□ MUSCL、PPMなど

■ 流束補間による高次精度化

□ TVD、WENOなど

■ その他

□ WCNS 変数補間＋流束補間

□ RKDG 局所基底関数で展開

など

MUSCL補間

□ MUSCL (Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws)補間 [van Leer, 1979]

■ セル内分布を隣接セルの変数の1次関数で再構成

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ で検討}$$

$$u(x) = u(x_i) + (x - x_i)u'(x_i) + \frac{1}{2}(x - x_i)^2 u''(x_i) + O(\Delta x^3)$$

を隣接セルの変数の1次関数として表式

MUSCL補間

□ MUSCL補間 [van Leer, 1979]

$$u_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x) dx,$$

$$u'_i = u'(x_i) + O(\Delta x^2), \quad u''_i = u''(x_i) + O(\Delta x^2) \text{ から}$$

$$u(x) = u_i + (x - x_i)u'_i + \frac{1}{2} \left[(x - x_i)^2 - \frac{\Delta x^2}{12} \right] u''_i + O(\Delta x^3)$$

$$\begin{aligned} &\approx u_i + \frac{(x - x_i)}{2\Delta x} (u_{i+1} - u_{i-1}) \\ &\quad + \frac{3\kappa}{2} \left[\frac{(x - x_i)^2}{\Delta x^2} - \frac{1}{12} \right] (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \end{aligned}$$

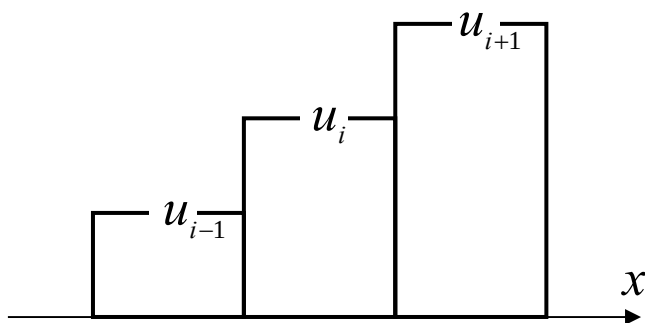
MUSCL補間

□ MUSCL補間 [van Leer, 1979]

$$u_{i+1/2}^L = u(x_{i+1/2}) = u_i + \frac{1-\kappa}{4}(u_i - u_{i-1}) + \frac{1+\kappa}{4}(u_{i+1} - u_i)$$

$$u_{i-1/2}^R = u(x_{i-1/2}) = u_i - \frac{1-\kappa}{4}(u_{i+1} - u_i) - \frac{1+\kappa}{4}(u_i - u_{i-1})$$

$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n) \equiv \sum_i |u_{i+1} - u_i|$ を満足するためには、
セル境界で新たな極値が発生しないことが必要



$$u_{i-1} \leq u_i \leq u_{i+1}$$

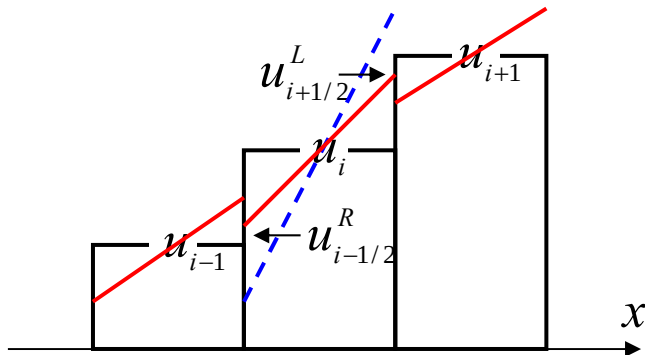
MUSCL補間

□ MUSCL補間 [van Leer, 1979]

$$u_{i+1/2}^L = u(x_{i+1/2}) = u_i + \frac{1-\kappa}{4}(u_i - u_{i-1}) + \frac{1+\kappa}{4}(u_{i+1} - u_i)$$

$$u_{i-1/2}^R = u(x_{i-1/2}) = u_i - \frac{1-\kappa}{4}(u_{i+1} - u_i) - \frac{1+\kappa}{4}(u_i - u_{i-1})$$

$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n) \equiv \sum_i |u_{i+1} - u_i|$ を満足するためには、
セル境界で新たな極値が発生しないことが必要



$$u_{i-1} \leq u_i \leq u_{i+1}$$

$$\Rightarrow u_{i-1} \leq u_{i-1/2}^R, u_{i+1/2}^L \leq u_{i+1}$$

勾配をコントロール

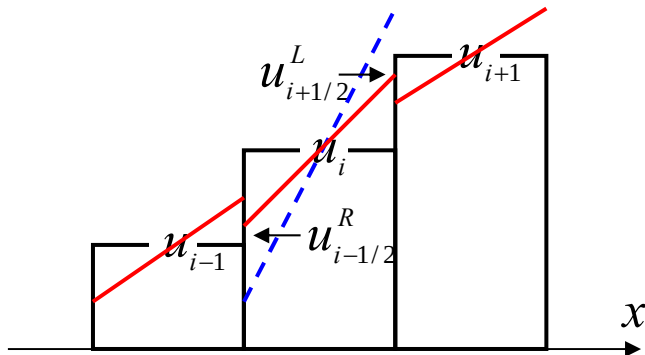
MUSCL補間

□ MUSCL補間 [van Leer, 1979]

$$u_{i+1/2}^L = u_i + \frac{1-\kappa}{4} \Phi(r)(u_i - u_{i-1}) + \frac{1+\kappa}{4} \Phi(1/r)(u_{i+1} - u_i)$$

$$u_{i-1/2}^R = u_i - \frac{1-\kappa}{4} \Phi(1/r)(u_{i+1} - u_i) - \frac{1+\kappa}{4} \Phi(r)(u_i - u_{i-1})$$

$$r = \frac{u_{i+1} - u_i}{u_i - u_{i-1}} \quad \Phi(r): \text{流束制限関数}$$



$$u_{i+1/2}^L \leq u_{i+1}$$

$$\Rightarrow \Phi(r) = \max[0, \min(b, r)]$$

$$b \leq \frac{3-\kappa}{1-\kappa}$$

MUSCL補間

□ MUSCL補間 [van Leer, 1979]

$\Phi(r) = r\Phi(1/r)$ の場合

$$u_{i+1/2}^L = u_i + \frac{1}{2}\Phi(r)(u_i - u_{i-1}), \quad u_{i-1/2}^R = u_i - \frac{1}{2}\Phi(1/r)(u_{i+1} - u_i)$$

van Leer

$$\Phi(r) = (r + |r|)/(1 + r)$$

minmod

$$\Phi(r) = \max[0, \min(1, r)]$$

monotonized central

$$\Phi(r) = \max[0, \min(2r, 0.5(1 + r), 2)]$$

superbee

$$\Phi(r) = \max[0, \min(2r, 1), \min(r, 2)]$$

MUSCL補間

□ MUSCL補間 [van Leer, 1979]

minmod

$$u_{i+1/2}^L = u_i + MM(u_{i+1} - u_i, u_i - u_{i-1})/2$$

$$u_{i-1/2}^R = u_i - MM(u_{i+1} - u_i, u_i - u_{i-1})/2$$

$$MM(x, y) = \text{sgn}(x) \max[0, \min(|x|, \text{sgn}(x)y)]$$

monotonized central

$$u_{i+1/2}^L = u_i + MC(2(u_{i+1} - u_i), 2(u_i - u_{i-1}), (u_{i+1} - u_{i-1})/2)/2$$

$$u_{i-1/2}^R = u_i - MC(2(u_{i+1} - u_i), 2(u_i - u_{i-1}), (u_{i+1} - u_{i-1})/2)/2$$

$$\begin{aligned} MC(x, y, z) &= \text{sgn}(x) \max[0, \min(|x|, \text{sgn}(x)y, \text{sgn}(x)z)] \\ &= MM(x, MM(y, z)) \end{aligned}$$

MUSCL補間

□ 線形スカラー移流方程式

- u の勾配を制御
- 保存変数(基本変数) = 特性変数

□ 非線形システム方程式

- 保存変数 $\neq$ 基本変数 $\neq$ 特性変数
- 特性変数の選択が理論的には望ましい
- 数値計算的なコストは？

MUSCL補間

□ MHD方程式

■ 保存形式

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad A \equiv \frac{\partial F}{\partial U}$$

保存変数: $U = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, B_y, B_z, e)$

■ 非保存形式

$$\frac{\partial V}{\partial t} + A_p \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

基本変数: $V = (\rho, u, v, w, B_y, B_z, p)$

$$V = (p, T, u, v, w, B_y, B_z)$$

□ MHD方程式

■ 非保存形式(特性の理論)

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \\ &= \mathbf{R}_p^{-1} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{R}_p^{-1} \mathbf{A}_p \mathbf{R}_p \mathbf{R}_p^{-1} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0 \\ & d\mathbf{W} \equiv \mathbf{R}^{-1} d\mathbf{U} = \mathbf{R}_p^{-1} d\mathbf{V} \text{ , } \mathbf{A} \equiv \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R} = \mathbf{R}_p^{-1} \mathbf{A}_p \mathbf{R}_p \end{aligned}$$

□ MHD方程式

■ 非保存形式(特性の理論)

$$\begin{aligned}
 l_p^{u\pm c_f} &= \left(0, \pm \alpha_f c_f / 2a^2, \mp (\alpha_s / 2a^2) c_s \beta_y \operatorname{sgn} B_x, \mp (\alpha_s / 2a^2) c_s \beta_z \operatorname{sgn} B_x, \alpha_s \beta_y / 2\sqrt{\rho a}, \alpha_s \beta_z / 2\sqrt{\rho a}, \alpha_f / 2\rho a^2 \right) \\
 r_p^{u\pm c_f} &= \left(\rho \alpha_f, \pm \alpha_f c_f, \mp \alpha_s c_s \beta_y \operatorname{sgn} B_x, \mp \alpha_s c_s \beta_z \operatorname{sgn} B_x, \alpha_s \beta_y \sqrt{\rho a}, \alpha_s \beta_z \sqrt{\rho a}, \alpha_f \eta p \right)^T \\
 l_p^{u\pm c_a} &= \left(0, 0, -\beta_z / \sqrt{2} \operatorname{sgn} B_x, \beta_y / \sqrt{2} \operatorname{sgn} B_x, \pm \beta_z / \sqrt{2\rho}, \pm \beta_y / \sqrt{2\rho}, 0 \right) \\
 r_p^{u\pm c_a} &= \left(0, 0, -\beta_z / \sqrt{2} \operatorname{sgn} B_x, \beta_y / \sqrt{2} \operatorname{sgn} B_x, \pm \beta_z \sqrt{2/\rho}, \pm \beta_y \sqrt{2/\rho}, 0 \right)^T \\
 l_p^{u\pm c_s} &= \left(0, \pm \alpha_s c_s / 2a^2, \pm (\alpha_f / 2a^2) c_f \beta_y \operatorname{sgn} B_x, \pm (\alpha_f / 2a^2) c_f \beta_z \operatorname{sgn} B_x, -\alpha_f \beta_y / 2\sqrt{\rho a}, -\alpha_f \beta_z / 2\sqrt{\rho a}, \alpha_s / 2\rho a^2 \right) \\
 r_p^{u\pm c_s} &= \left(\rho \alpha_s, \pm \alpha_s c_s, \pm \alpha_f c_f \beta_y \operatorname{sgn} B_x, \pm \alpha_f c_f \beta_z \operatorname{sgn} B_x, -\alpha_f \beta_y \sqrt{\rho a}, -\alpha_f \beta_z \sqrt{\rho a}, \alpha_s \eta p \right)^T \\
 l_p^u &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 1/a^2) \\
 r_p^u &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_f &\equiv \sqrt{c_f^2 - a^2} / \sqrt{c_f^2 - c_s^2}, \quad \alpha_s \equiv \sqrt{a^2 - c_s^2} / \sqrt{c_f^2 - c_s^2} \\
 \beta_y &\equiv B_y / \sqrt{B_y^2 + B_z^2}, \quad \beta_z \equiv B_z / \sqrt{B_y^2 + B_z^2}
 \end{aligned}$$

□ MHD方程式

■ 非保存形式(特性の理論)

$$\Delta V_i = R_{p_i} \text{Lim}(\Delta W_j)$$

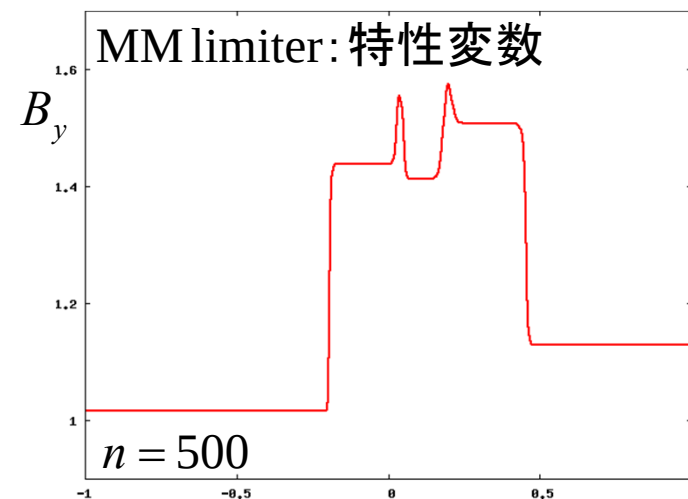
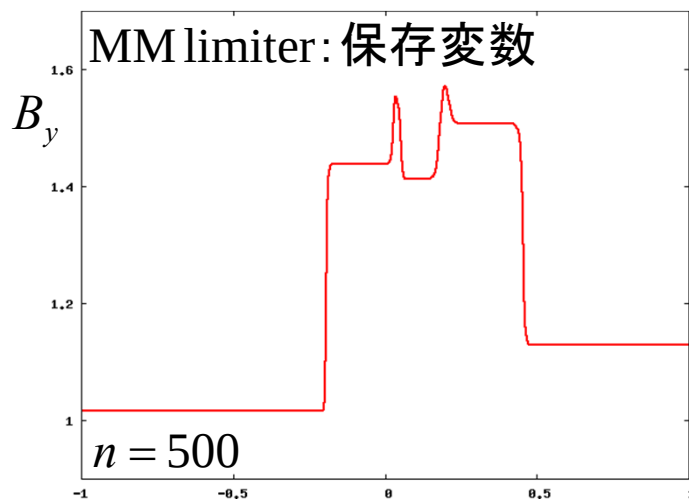
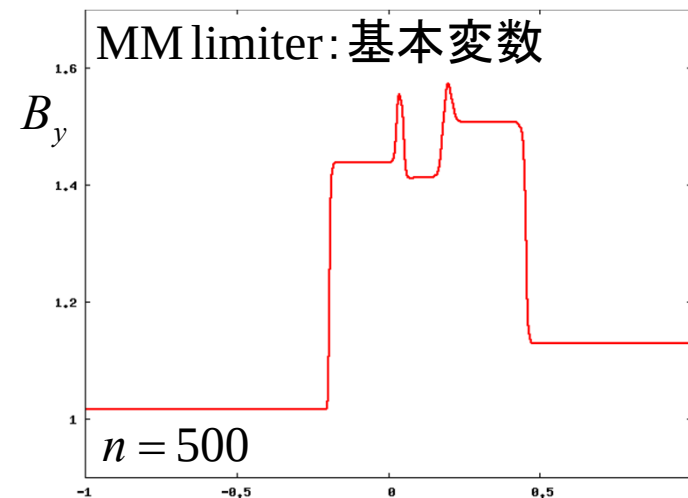
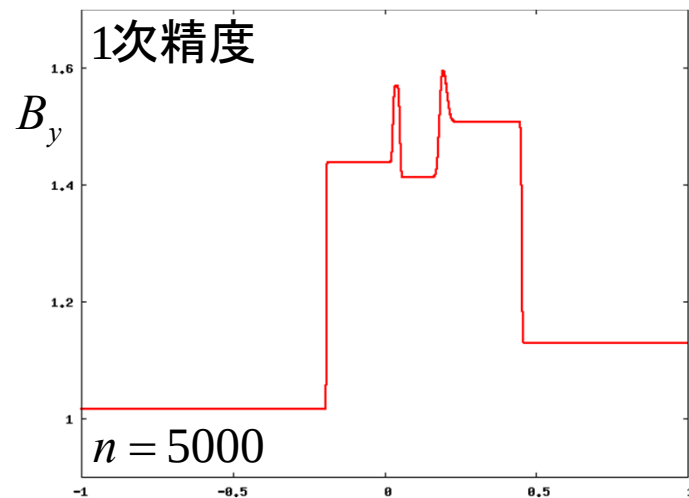
$$\underline{V_{i+1/2}^L = V_i + \Delta V_i / 2, V_{i-1/2}^R = V_i - \Delta V_i / 2}$$

$$\Delta W_i = \text{Lim}(\Delta W_j)$$

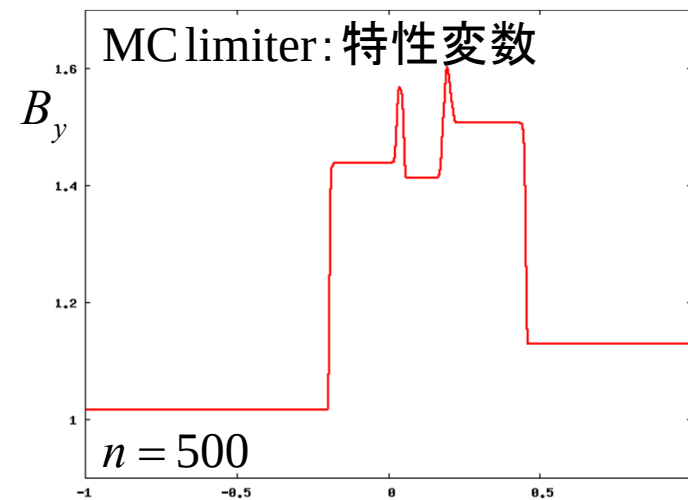
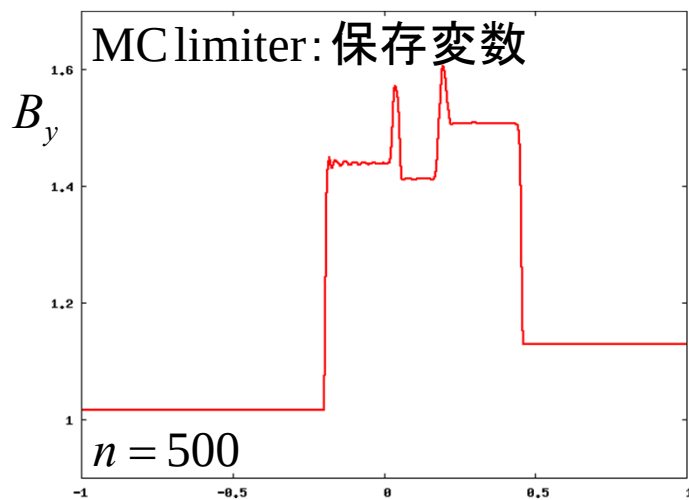
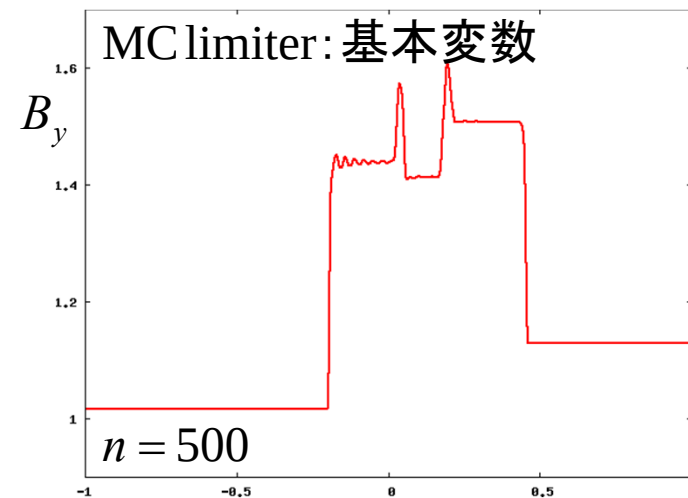
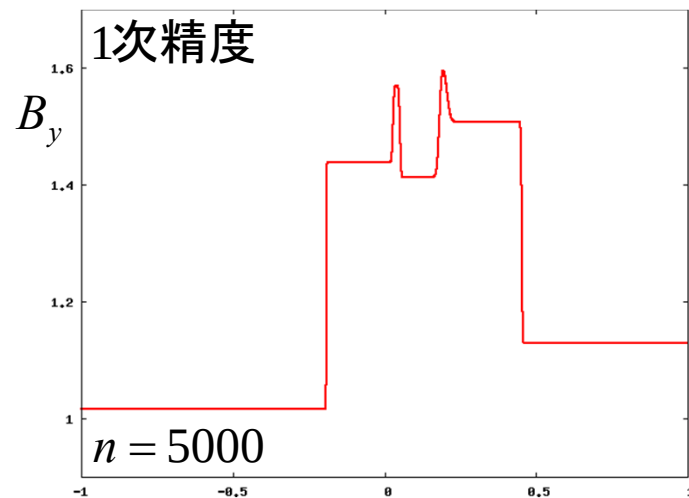
$$W_{i+1/2}^L = W_i + \Delta W_i / 2, W_{i-1/2}^R = W_i - \Delta W_i / 2$$

$$\underline{V_{i+1/2}^L = R_{p_{i+1/2}} W_{i+1/2}^L, V_{i-1/2}^R = R_{p_{i-1/2}} W_{i-1/2}^L}$$

□ 補間変数の依存性

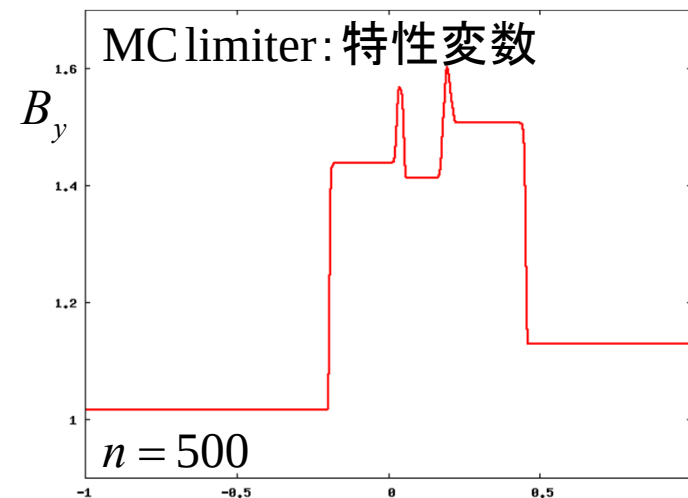
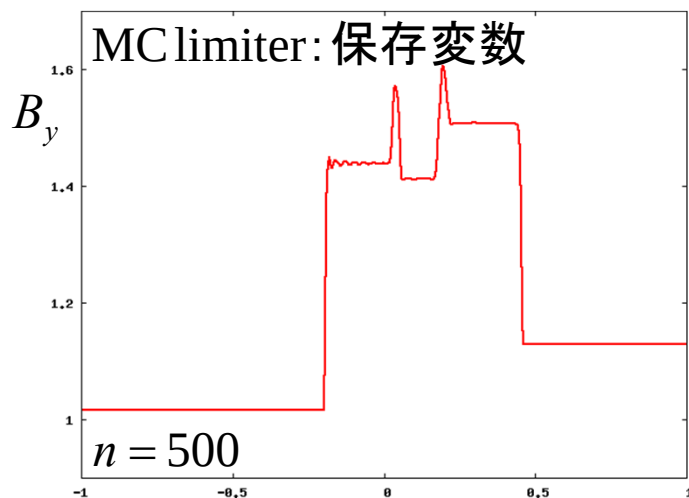
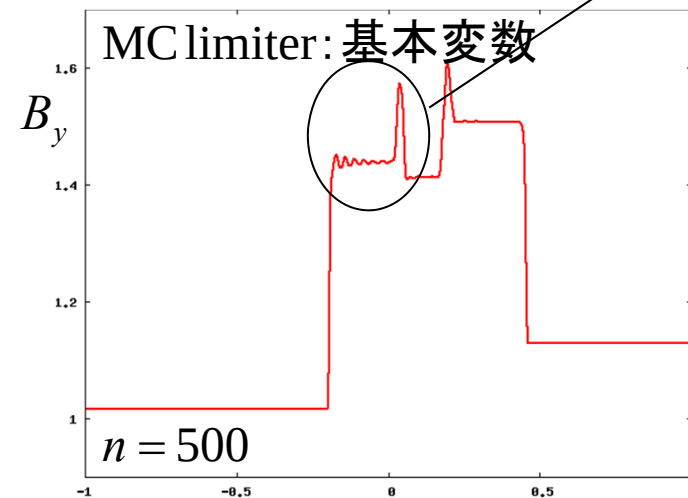
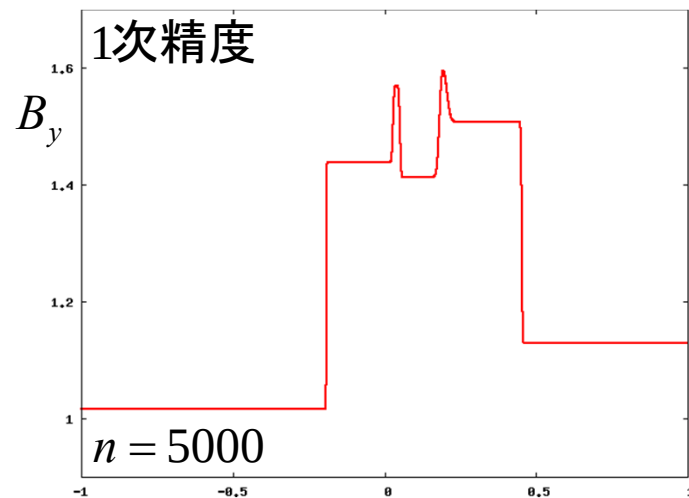


□ 補間変数の依存性



MUSCL補間

□ 補間変数の依存性



MUSCL補間

□ 近似的MHD特性変数(勇氣のある人専用)

■ 圧縮項($B_x \rightarrow 0$ として磁気張力項を消去)

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ B_y \\ B_z \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & B_y/\rho & B_z/\rho & 1/\rho \\ 0 & B_y & u & 0 & 0 \\ 0 & B_z & 0 & u & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & 0 & u \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ B_y \\ B_z \\ p \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p_T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \rho c_f^2 & u \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p_T \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{cases} p_T = p + (B_y^2 + B_z^2)/2 \\ \rho c_f^2 = \gamma p + B_y^2 + B_z^2 \end{cases}$$

MUSCL補間

□ 近似的MHD特性変数(勇気のある人専用)

■ 非圧縮項

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v \\ B_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & -B_x/\rho \\ -B_x & \boxed{u} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} v \\ B_y \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} w \\ B_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & -B_x/\rho \\ -B_x & \boxed{u} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} w \\ B_z \end{pmatrix} = 0$$

□ $u(\partial B_{y,z}/\partial x)$ は圧縮項と重複

MUSCL補間

□ 近似的MHD特性変数(勇氣のある人専用)

$$\begin{cases} dW'_1 = dp_T - \rho c_f du \\ dW'_2 = c_f^2 d\rho - dp_T \\ dW'_3 = dp_T + \rho c_f du \end{cases} \Rightarrow d\rho, du, dp_T$$

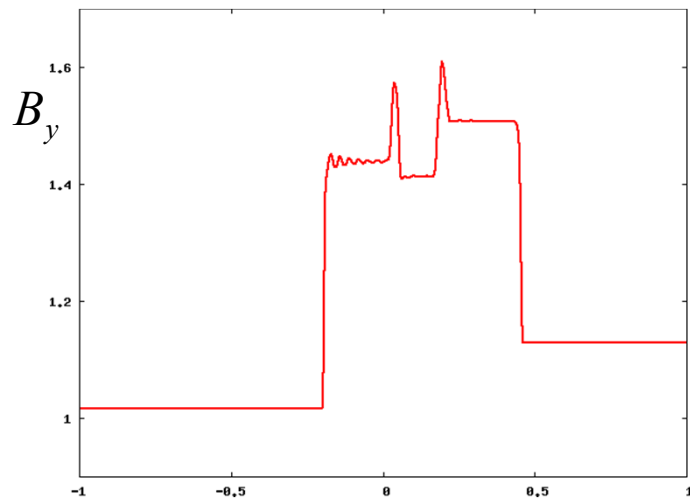
$$\begin{cases} dW'_4 = \sqrt{\rho} dv + dB_y \\ dW'_5 = \sqrt{\rho} dv - dB_y \end{cases} \Rightarrow dv, dB_y$$

$$\begin{cases} dW'_6 = \sqrt{\rho} dw + dB_z \\ dW'_7 = \sqrt{\rho} dw - dB_z \end{cases} \Rightarrow dw, dB_z$$

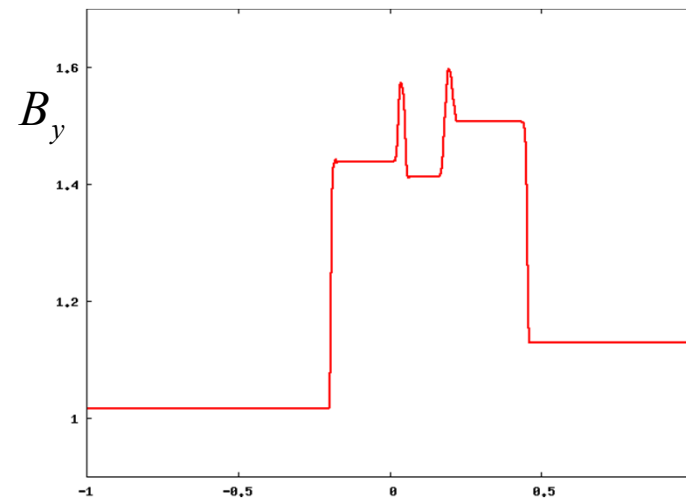
$$dp_T = dp + B_y dB_y + B_z dB_z \Rightarrow dp$$

MUSCL補間

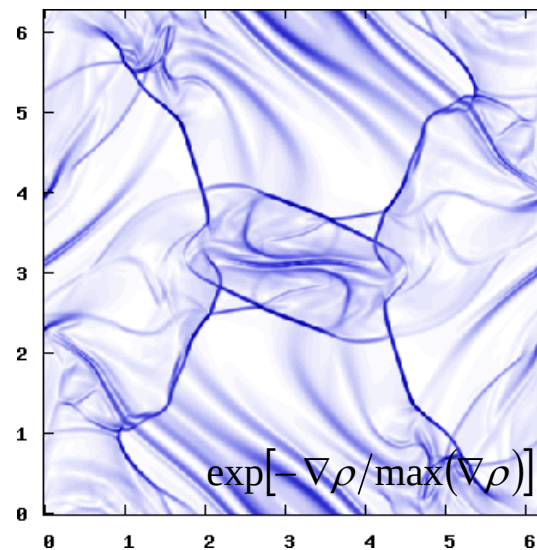
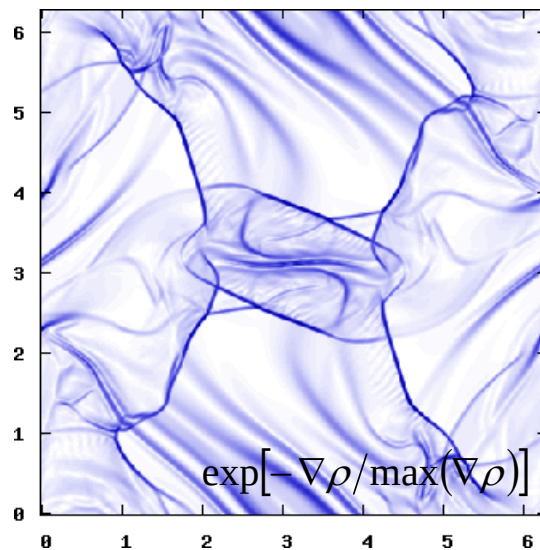
□ 保存変数の依存性



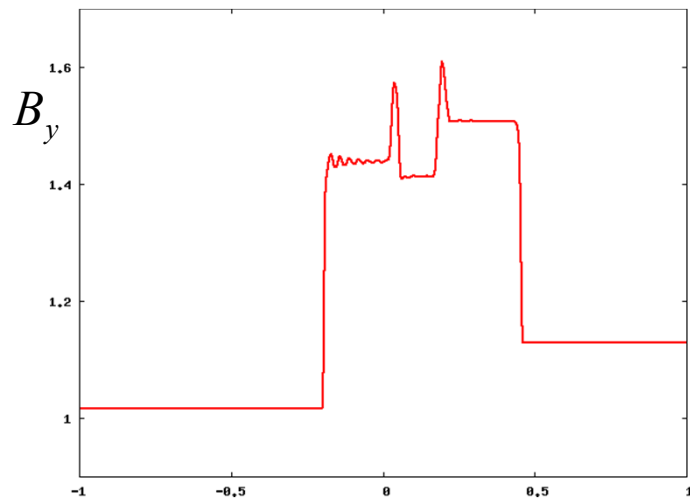
MC limiter: 基本変数



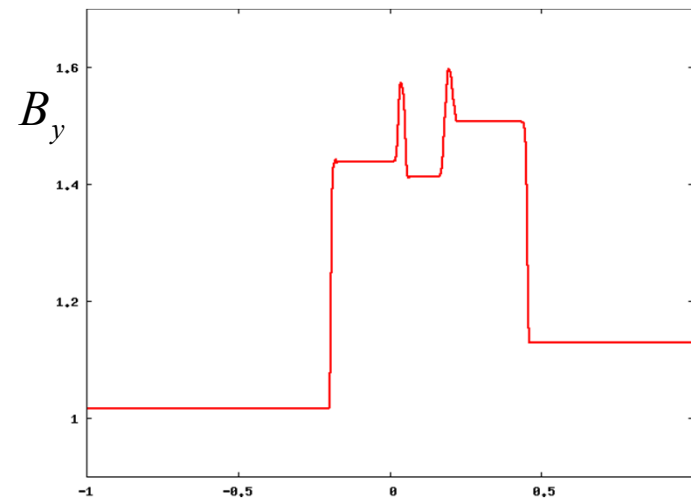
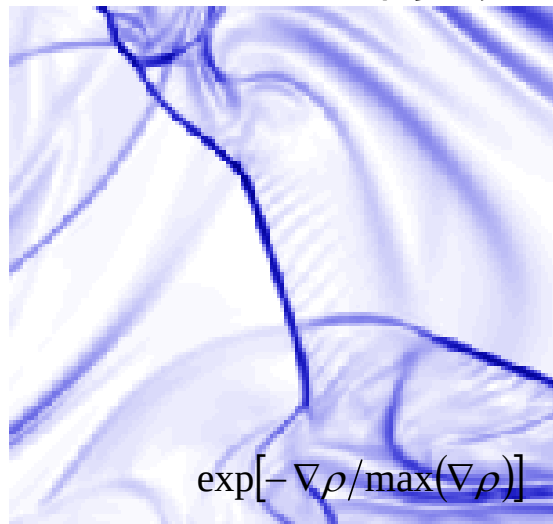
MC limiter: 近似的特性変数



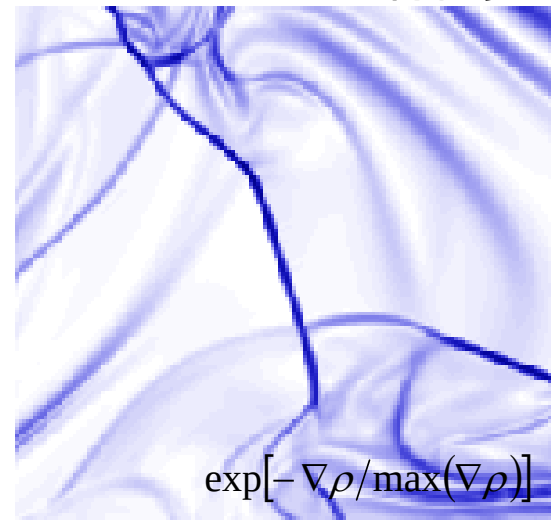
□ 保存変数の依存性



MC limiter: 基本変数



MC limiter: 近似的特性変数



近似リーマン解法の多次元化

近似リーマン解法の多次元化

□ 近似リーマン解法の多次元化

■ 多次元の特性の理論に基づく多次元解法

□ Euler方程式でも容易ではない

□ MHD方程式では想像を絶する

- 磁場による波動の指向性

- 磁場のソレノイダル性 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

近似リーマン解法の多次元化

□ 近似リーマン解法の多次元化

■ 多次元の特性の理論に基づく多次元解法

□ Euler方程式でも容易ではない

□ MHD方程式では想像を絶する

● 磁場による波動の指向性

● 磁場のソレノイダル性 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

■ 1次元数値解法の利用

□ Split法
$$\mathbf{U}^{n+1} = L_x^{n+\alpha} L_y^{n+\beta} L_z^{n+\gamma} \cdots \mathbf{U}^n \quad 0 \leq c_{CFL} \leq 1$$

□ Unsplit法
$$\mathbf{U}^{n+1} = L_{xyz}^{n+\alpha} \cdots \mathbf{U}^n \quad 0 \leq c_{CFL} \leq 1/D$$

□ 数値的な磁場発散の生成

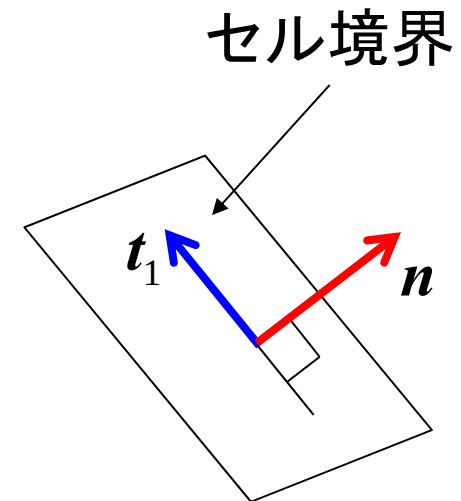
近似リーマン解法の多次元化

□ MHD流束の回転対称性

$$F(U) = T^{-1} T F(U) = T^{-1} F^{(n)}(U_n), \quad U_n = TU$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & n_x & n_y & n_z & & \\ & t_{1x} & t_{1y} & t_{1z} & & \\ & t_{2x} & t_{2y} & t_{2z} & & \\ & & & & n_x & n_y & n_z \\ & & & & t_{1x} & t_{1y} & t_{1z} \\ & & & & t_{2x} & t_{2y} & t_{2z} \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z), \quad \mathbf{t}_1 = (t_{1x}, t_{1y}, t_{1z}), \quad \mathbf{t}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{t}_1 = (t_{2x}, t_{2y}, t_{2z})$$



近似リーマン解法の多次元化

□ MHD流束の回転対称性

$$U_n = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_n \\ \rho v_{t_1} \\ \rho v_{t_2} \\ B_n \\ B_{t_1} \\ B_{t_2} \\ e \end{pmatrix}, \quad F^{(n)}(U_n) = \begin{pmatrix} \rho v_n \\ \rho v_n v_n + p_T - B_n B_n \\ \rho v_{t_1} v_n - B_n B_{t_1} \\ \rho v_{t_2} v_n - B_n B_{t_2} \\ 0 \\ B_{t_1} v_n - B_n v_{t_1} \\ B_{t_2} v_n - B_n v_{t_2} \\ (e + p_T) v_n - B_n (v \cdot B) \end{pmatrix}$$

近似リーマン解法の多次元化

□ ちなみに、回転行列の逆行列は...

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & n_x & t_{1x} & t_{2x} & & \\ & n_y & t_{1y} & t_{2y} & & \\ & n_z & t_{1z} & t_{2z} & & \\ & & & n_x & t_{1x} & t_{2x} \\ & & & n_y & t_{1y} & t_{2y} \\ & & & n_z & t_{1z} & t_{2z} \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

□ 直交直線座標の場合

$$F^{(x)}: \mathbf{n} = (1,0,0), \mathbf{t}_1 = (0,1,0), \mathbf{t}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{t}_1 = (0,0,1)$$

$$F^{(y)}: \mathbf{n} = (0,1,0), \mathbf{t}_1 = (0,0,1), \mathbf{t}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{t}_1 = (1,0,0)$$

$$F^{(z)}: \mathbf{n} = (0,0,1), \mathbf{t}_1 = (1,0,0), \mathbf{t}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{t}_1 = (0,1,0)$$

近似リーマン解法の多次元化

□ 具体的な計算手順 (x 方向)

for $i + 1/2, j, k \{$

$$\rho^L = \rho_i$$

$$v_n^L = v_{xi}$$

$$v_{t_1}^L = v_{yi}$$

$$v_{t_2}^L = v_{zi}$$

$\vdots$

$$\rho^R = \rho_{i+1}$$

$$v_n^R = v_{xi+1}$$

$$v_{t_1}^R = v_{yi+1}$$

$$v_{t_2}^R = v_{zi+1}$$

$\vdots$

calc_flux $(\rho^L, v_n^L, v_{t_1}^L, \dots, F_\rho, F_{\rho v_n}, F_{\rho v_{t_1}}, \dots)$

$$F_{\rho}^{(x)}{}_{i+1/2} = F_\rho$$

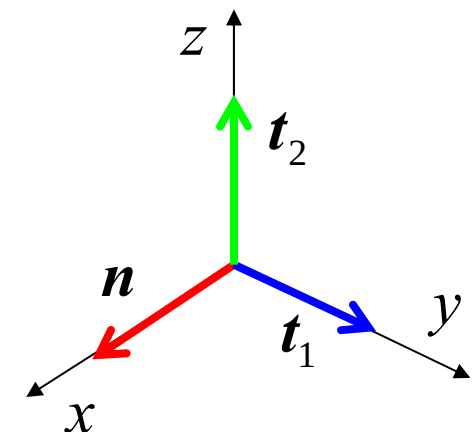
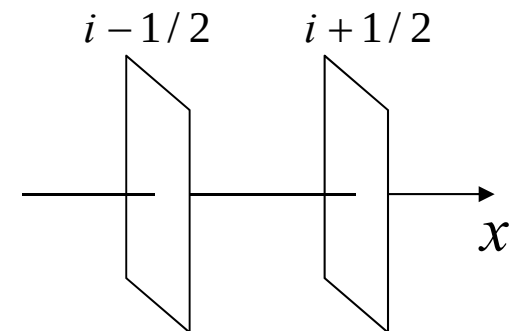
$$F_{\rho v_x}^{(x)}{}_{i+1/2} = F_{\rho v_n}$$

$$F_{\rho v_y}^{(x)}{}_{i+1/2} = F_{\rho v_{t_1}}$$

$$F_{\rho v_z}^{(x)}{}_{i+1/2} = F_{\rho v_{t_2}}$$

$\vdots$

$\}$



近似リーマン解法の多次元化

□ 具体的な計算手順 (y方向)

for $i, j + 1/2, k \{$

$$\rho^L = \rho_j$$

$$v_n^L = v_{y j}$$

$$v_{t_1}^L = v_{z j}$$

$$v_{t_2}^L = v_{x j}$$

$\vdots$

$$\rho^R = \rho_{j+1}$$

$$v_n^R = v_{y j+1}$$

$$v_{t_1}^R = v_{z j+1}$$

$$v_{t_2}^R = v_{x j+1}$$

$\vdots$

calc_flux $(\rho^L, v_n^L, v_{t_1}^L, \dots, F_\rho, F_{\rho v_n}, F_{\rho v_{t_1}}, \dots)$

$$F_{\rho}^{(y)}{}_{j+1/2} = F_\rho$$

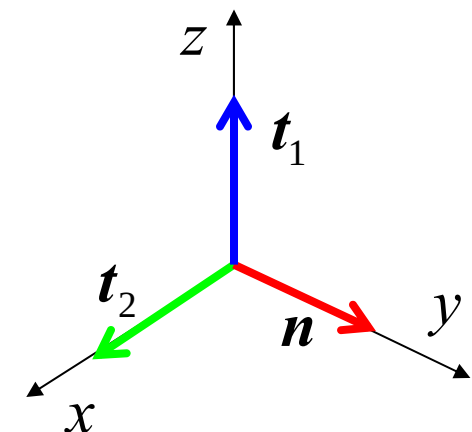
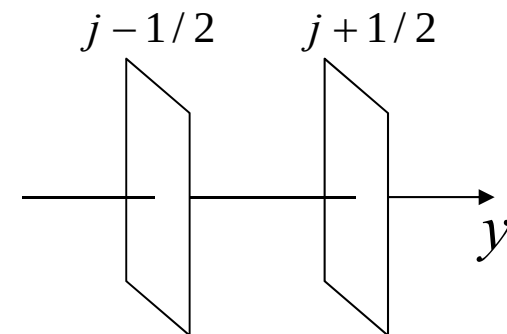
$$F_{\rho v_x}^{(y)}{}_{j+1/2} = F_{\rho v_{t_2}}$$

$$F_{\rho v_y}^{(y)}{}_{j+1/2} = F_{\rho v_n}$$

$$F_{\rho v_z}^{(y)}{}_{j+1/2} = F_{\rho v_{t_1}}$$

$\vdots$

}



近似リーマン解法の多次元化

□ 具体的な計算手順 (z 方向)

for $i, j, k + 1/2 \{$

$$\rho^L = \rho_k$$

$$v_n^L = v_{zk}$$

$$v_{t_1}^L = v_{xk}$$

$$v_{t_2}^L = v_{yk}$$

$\vdots$

$$\rho^R = \rho_{k+1}$$

$$v_n^R = v_{zk+1}$$

$$v_{t_1}^R = v_{xk+1}$$

$$v_{t_2}^R = v_{yk+1}$$

$\vdots$

calc_flux $(\rho^L, v_n^L, v_{t_1}^L, \dots, F_\rho, F_{\rho v_n}, F_{\rho v_{t_1}}, \dots)$

$$F_{\rho}^{(z)}{}_{k+1/2} = F_\rho$$

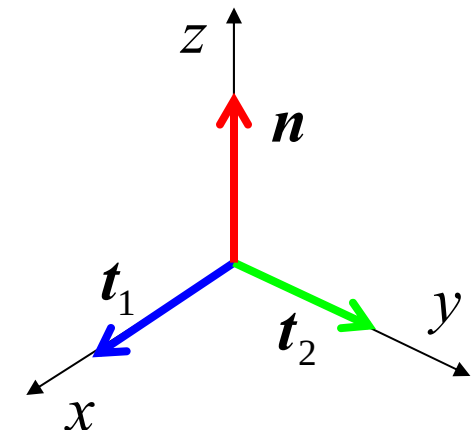
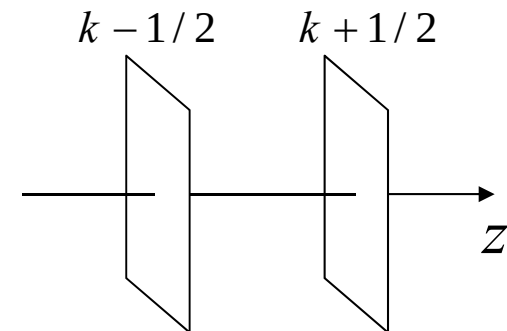
$$F_{\rho v_x}^{(z)}{}_{k+1/2} = F_{\rho v_{t_1}}$$

$$F_{\rho v_y}^{(z)}{}_{k+1/2} = F_{\rho v_{t_2}}$$

$$F_{\rho v_z}^{(z)}{}_{k+1/2} = F_{\rho v_n}$$

$\vdots$

}



近似リーマン解法の多次元化

□ 具体的な計算手順 (ΔU : Unsplitted法)

for $i, j, k \{$

$$\Delta \rho = -\frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{\rho}^{(x)}{}_{i+1/2} - F_{\rho}^{(x)}{}_{i-1/2} \right)$$

$$- \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(F_{\rho}^{(y)}{}_{j+1/2} - F_{\rho}^{(y)}{}_{j-1/2} \right)$$

$$- \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(F_{\rho}^{(z)}{}_{k+1/2} - F_{\rho}^{(z)}{}_{k-1/2} \right)$$

$$\Delta \rho v_x = -\frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{\rho v_x}^{(x)}{}_{i+1/2} - F_{\rho v_x}^{(x)}{}_{i-1/2} \right)$$

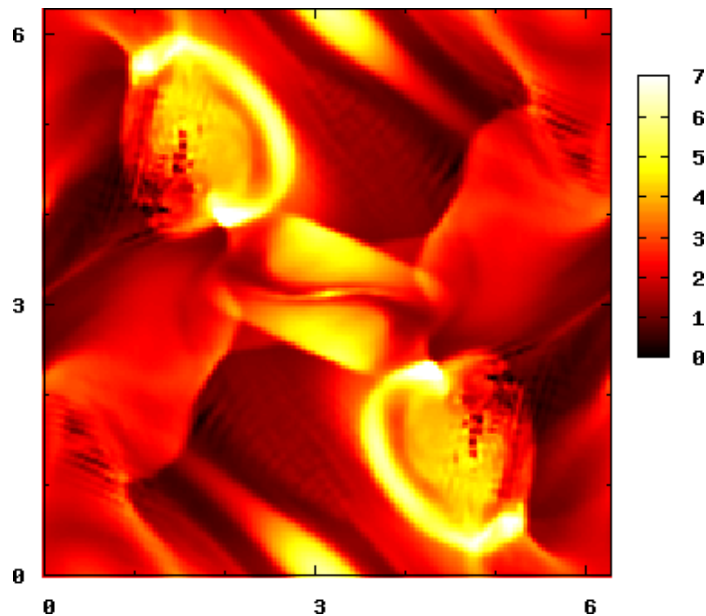
$$- \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(F_{\rho v_x}^{(y)}{}_{j+1/2} - F_{\rho v_x}^{(y)}{}_{j-1/2} \right)$$

$$- \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(F_{\rho v_x}^{(z)}{}_{k+1/2} - F_{\rho v_x}^{(z)}{}_{k-1/2} \right)$$

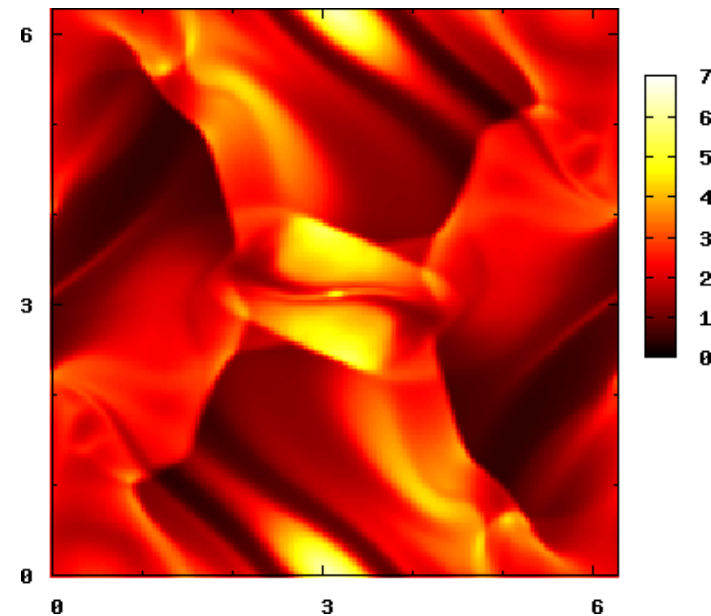
$\dots \}$

近似リーマン解法の多次元化

□ 数値的な磁場発散の影響



(補正なし)



(補正あり)

- 非物理的な磁気力が解全体に影響

$$-\nabla \cdot \left(\frac{B^2}{2} \mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{B} \right) = (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B})$$

- 数値的な磁場発散の処理は必須！

磁場発散の数値処理

□ プロジェクション法

■ ソレノイダルベクトル場への射影

課題: 連立一次方程式の計算コスト

□ 移流拡散法

■ 数値的な磁場発散の移流、拡散

課題: 磁場発散の停留、蓄積

□ Constrained-Transport (CT) 法

■ ソレノイダル条件を維持する離散化

課題: 高安定化、高次精度化

磁場発散の数値処理

□ プロジェクション法 [Brackbill, Barnes, 1980]

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{B}^n + \mathbf{L}(\mathbf{U}^n)\Delta t = \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \phi$$

$$\mathbf{B}^{n+1} = \mathbf{B}^* + \nabla \phi$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^{n+1} = \nabla \cdot \mathbf{B}^* + \nabla \cdot \nabla \phi = 0 \Rightarrow \Delta \phi = -\nabla \cdot \mathbf{B}^*$$

■ ソレノイダル条件を満足する最小補正ベクトル場

■ 各ステップの計算^後に連立一次方程式の計算

$$B_{xi,j} = B_{xi,j}^* + \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta x}, \quad B_{yi,j} = B_{yi,j}^* + \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2\Delta x}$$

$$\frac{\phi_{i+2,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-2,j}}{4\Delta x^2} + \frac{\phi_{i,j+2} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-2}}{4\Delta y^2} = -(\nabla \cdot \mathbf{B}^*)_{i,j}$$

□ チェッカーボード現象

磁場発散の数値処理

□ 境界プロジェクション法 [Miyoshi, Kusano, 2011]

$$\left. \begin{aligned} b_{x\,i+1/2,j}^n &= \frac{B_{xi+1,j} + B_{xi,j}}{2} + \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta x} \\ b_{y\,i,j+1/2}^n &= \frac{B_{xi,j+1} + B_{xi,j}}{2} + \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{b}^n = 0$$
$$\frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{\Delta y^2} = -(\nabla \cdot \mathbf{B}^n)_{i,j}$$
$$\mathbf{B}^{n+1} = \mathbf{B}^n + \mathbf{L}(\mathbf{U}^n, \mathbf{b}^n) \Delta t$$

- 各ステップの計算前に連立一次方程式の計算
 - 数値流束の段階で非物理的磁気力を排除

磁場発散の数値処理

□ 移流拡散法 (8-wave法) [Powell, 1994]

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} \end{pmatrix} (\nabla \cdot \mathbf{B}) + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) \\ \mathbf{B} \cdot \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) \end{pmatrix}$$

■ 磁場発散はエントロピー波で移流

$$(\nabla \cdot \mathbf{B})_t + \nabla \cdot [\mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{B})] = \nu \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{B})$$

■ 非保存型解法

■ 流れのよどみ点での磁場発散の蓄積

□ 拡散項は実効的ではない

磁場発散の数値処理

□ 移流拡散法 (9-wave法) [Dedner+, 2002]

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \phi = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + c_h^2 \nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{c_h^2}{c_p^2} \phi$$

- 磁場発散は追加された固有値で**等方的**に移流

$$(\nabla \cdot \mathbf{B})_{tt} + c_h^2 / c_p^2 (\nabla \cdot \mathbf{B})_t - c_h^2 \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0$$

$c_p \rightarrow \infty$: 波動方程式 $c_h \rightarrow \infty$: 拡散方程式

- 固有値は流れと直接的には無関係
- 保存型解法
- 非保存 (Powell型のソース項) への拡張も可能

磁場発散の数値処理

□ 移流拡散法 (9-wave法) [Dedner+, 2002]

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} B_x \\ \phi \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \phi \\ c_h^2 B_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -c_h^2 / c_p^2 \phi \end{pmatrix}$$

■ Step 0: 移流速度の決定

$$c_h = c_{CFL} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

磁場発散の数値処理

□ 移流拡散法 (9-wave法) [Dedner+, 2002]

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} B_x \\ \phi \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \phi \\ c_h^2 B_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -c_h^2 / c_p^2 \phi \end{pmatrix}$$

■ Step 1: 風上数値流束の評価

$$\begin{pmatrix} \phi \\ c_h^2 B_x \end{pmatrix}_{i+1/2} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} \phi \\ c_h^2 B_x \end{pmatrix}_{i+1} + \begin{pmatrix} \phi \\ c_h^2 B_x \end{pmatrix}_i \right\} - \frac{1}{2} |A| \left\{ \begin{pmatrix} B_x \\ \phi \end{pmatrix}_{i+1} - \begin{pmatrix} B_x \\ \phi \end{pmatrix}_i \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_h^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad AR = R\Lambda \Rightarrow |A| = R|\Lambda|R^{-1} = \begin{pmatrix} c_h & 0 \\ 0 & c_h \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} B_{xi+1/2} = \frac{1}{2} (B_{xi+1} + B_{xi}) - \frac{1}{2c_h} (\phi_{i+1} - \phi_i) \\ \phi_{i+1/2} = \frac{1}{2} (\phi_{i+1} + \phi_i) - \frac{c_h}{2} (B_{xi+1} - B_{xi}) \end{cases}$$

磁場発散の数値処理

□ 移流拡散法 (9-wave法) [Dedner+, 2002]

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} B_x \\ \phi \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \phi \\ c_h^2 B_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -c_h^2 / c_p^2 \phi \end{pmatrix}$$

■ Step 2: ソース項 (減衰項) の評価

$$\phi^* = L_\phi(B_x^n, \phi^n)$$

$$\phi^{n+1} = \exp\left(-\Delta t c_h^2 / c_p^2\right) \phi^*$$

磁場発散の数値処理

□ 移流拡散法 (9-wave法) [Dedner+, 2002]

$$\begin{aligned} & \text{calc_flux} (\cdots, B_n^L, B_n^R, \phi^L, \phi^R, F_{B_n}, F_\phi, c_h) \{ \\ & \quad B_n^{9\text{-wave}} = \frac{1}{2} (B_n^L + B_n^R) - \frac{1}{2c_h} (\phi^R - \phi^L) \\ & \quad \phi^{9\text{-wave}} = \frac{1}{2} (\phi^L + \phi^R) - \frac{c_h}{2} (B_n^R - B_n^L) \\ & \quad \vdots \\ & \quad F_{B_n} = \phi^{9\text{-wave}} \\ & \quad F_\phi = c_h^2 B_n^{9\text{-wave}} \\ & \} \end{aligned}$$

磁場発散の数値処理

□ CT法 [Evans, Hawley, 1988]

$$\Delta b_{x\,i+1/2,j}^n = -\frac{\Delta t}{\Delta y} \left(E_{zi+1/2,j+1/2} - E_{zi+1/2,j-1/2} \right)$$
$$\Delta b_{y\,i,j+1/2}^n = \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(E_{zi+1/2,j+1/2} - E_{zi-1/2,j+1/2} \right)$$

■ Field-CT法

■ Flux-CT法 [Balsara, Spricer, 1999]

$$E_{zi+1/2,j} = -F_{B_y,x_{i+1/2,j}}, \quad E_{zi,j+1/2} = F_{B_x,y_{i,j+1/2}}$$

$$E_{zi+1/2,j+1/2} = \frac{E_{zi+1/2,j} + E_{zi+1/2,j+1} + E_{zi,j+1/2} + E_{zi+1,j+1/2}}{4}$$

磁場発散の数値処理

□ CT法

■ HLL-Flux-CT法 [Miyoshi, Kusano, 2011]

$$\begin{aligned} E_{zi+1/2,j+1/2} = & \frac{E_{zi+1/2,j} + E_{zi+1/2,j+1} + E_{zi,j+1/2} + E_{zi+1,j+1/2}}{4} \\ & + \frac{\Delta y}{8} \left[\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} \right)_{i+1/2,j+1/4} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} \right)_{i+1/2,j+3/4} \right] \\ & + \frac{\Delta x}{8} \left[\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \right)_{i+1/4,j+1/2} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \right)_{i+3/4,j+1/2} \right] \end{aligned}$$

□ 1次元近似リーマン解法とコンシステント

□ 電場の微分をHLL数値流束で評価

磁場発散の数値処理

□ CT法

■ HLL-Flux-CT法 [Miyoshi, Kusano, 2011]

$$E_{zi+1/2,j+1/2} = \left(\frac{E_z^{i+} + E_z^{i-} + E_z^{j+} + E_z^{j-}}{4} \right)_{i+1/2,j+1/2}$$

$$E_z^{j\pm}_{i+1/2,j\pm 1/2} = E_{zi+1/2,j} \pm \frac{\Delta y}{2} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} \right)_{i+1/2,j+1/4}$$

$$E_z^{i\pm}_{i\pm 1/2,j+1/2} = E_{zi,j+1/2} \pm \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \right)_{i+1/4,j+1/2}$$

□ 1次元近似リーマン解法とコンシステント
[Gardiner, Stone, 2005]

□ 電場の微分をHLL数値流束で評価

磁場発散の数値処理

□ 数値実験

■ HLLD近似リーマン解法

□ 2次MUSCL+minmod制限関数

□ 2次Runge-Kutta-TVD法

□ ヤコビ法(連立一次方程式)

■ Orszag-Tang渦問題

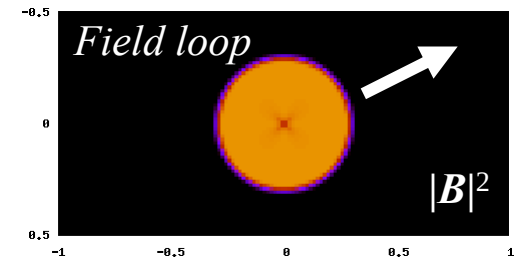
$$\mathbf{v} = (-\sin y, \sin x, 0), \quad \mathbf{B} = (-\sin y, \sin 2x, 0)$$

■ Field loop移流問題

$$\mathbf{v} = v_0(\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad A_z = \max(A_0(R - r), 0), \quad \beta = 2 \times 10^6$$

■ 爆発風問題

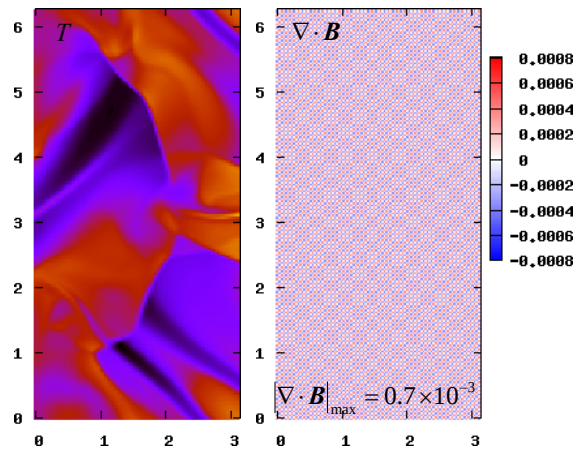
$$\mathbf{B} = (10/\sqrt{2}, 10/\sqrt{2}, 0), \quad \beta_{\text{core}} = 2, \quad \beta_{\text{ambient}} = 2 \times 10^{-3}$$



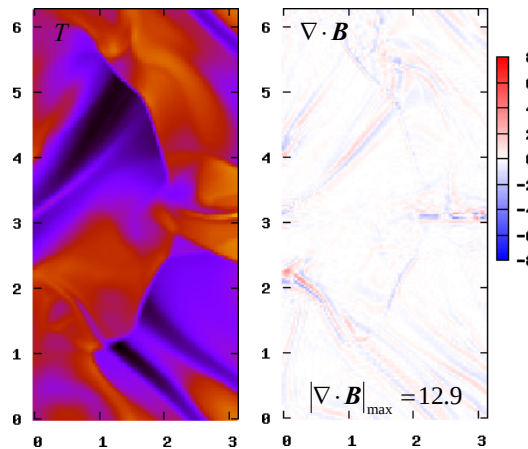
磁場発散の数値処理

□ Orszag-Tang渦問題

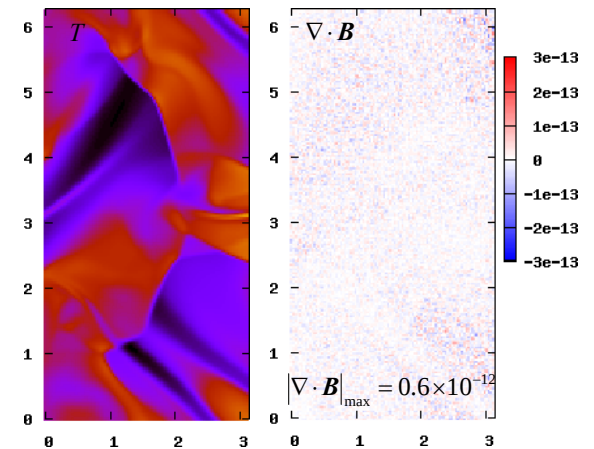
Projection



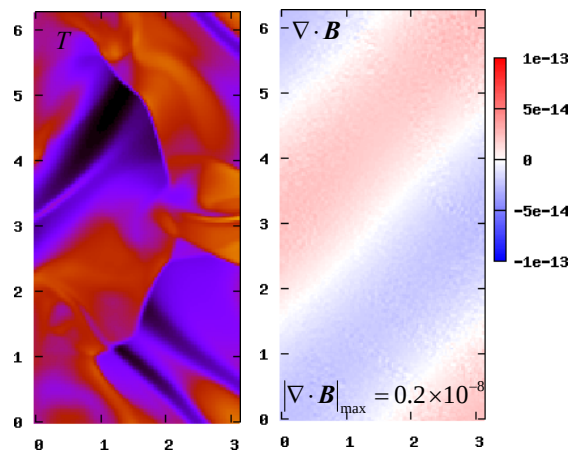
8-wave



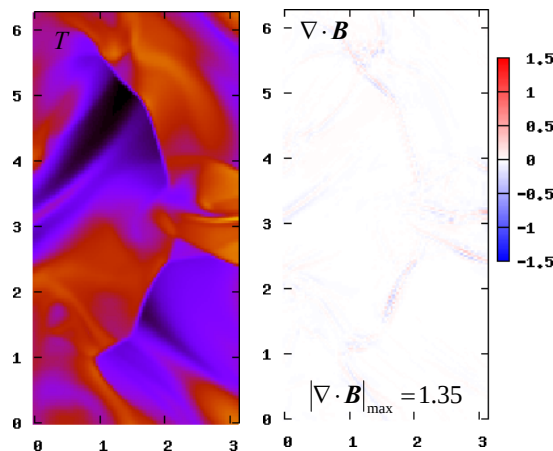
flux-CT



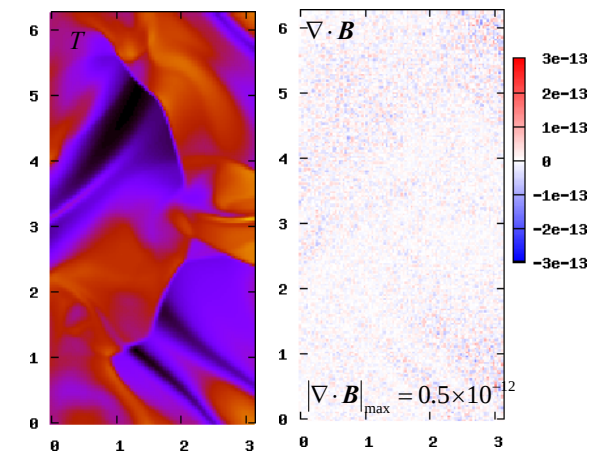
Face-projection



9-wave



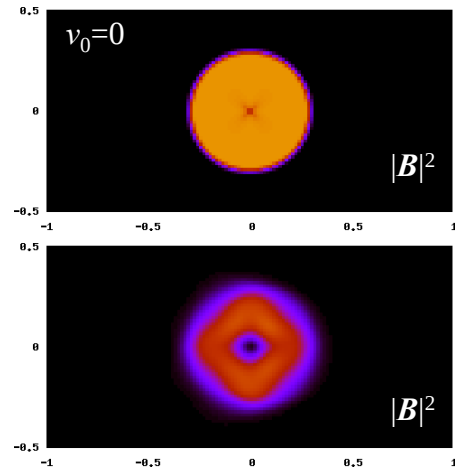
HLL-flux-CT



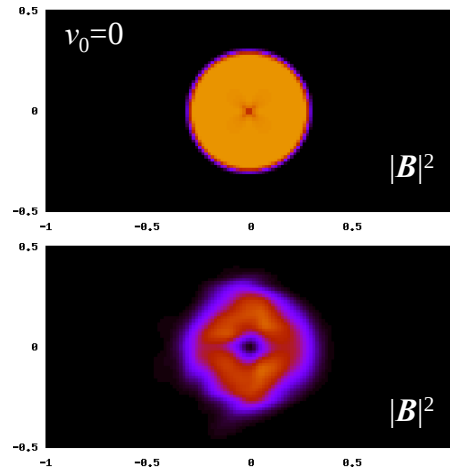
Field loop移流問題

□ Field loop問題

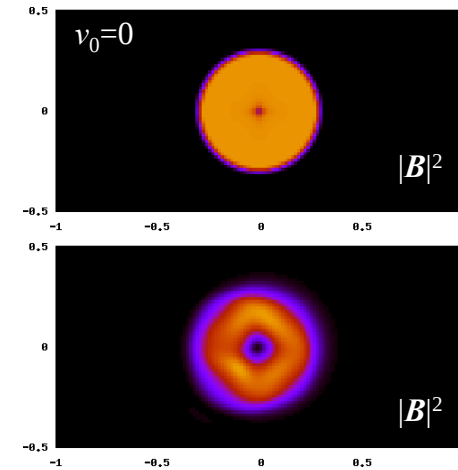
Projection



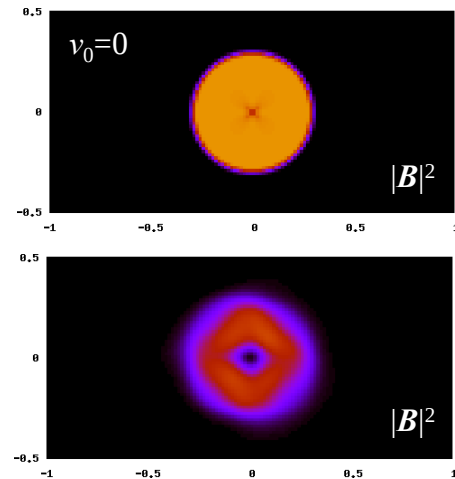
8-wave



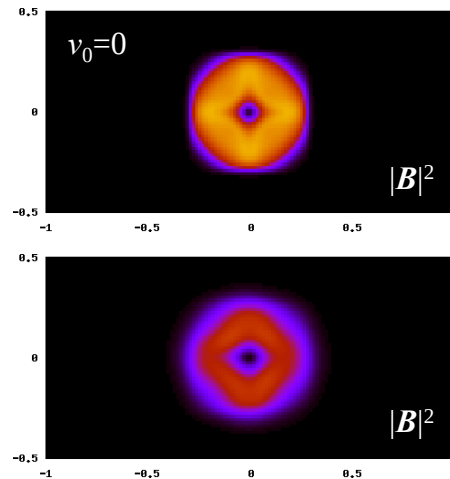
flux-CT



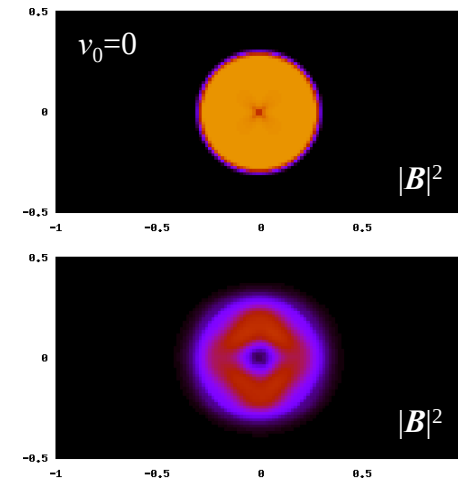
Face-projection



9-wave



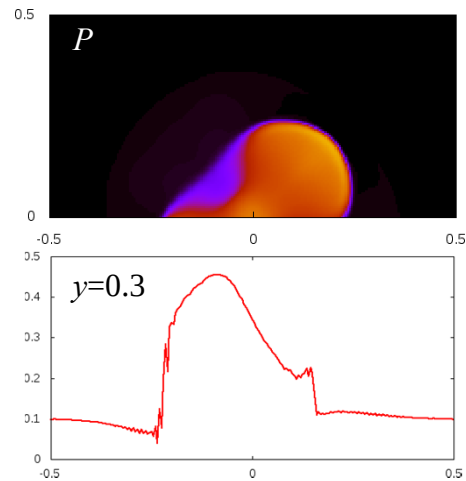
HLL-flux-CT



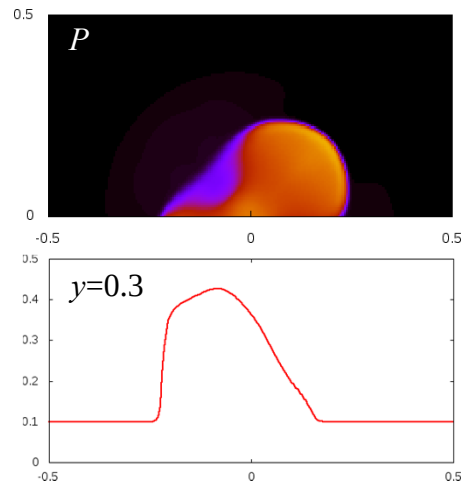
磁場発散の数値処理

□ 爆発風問題

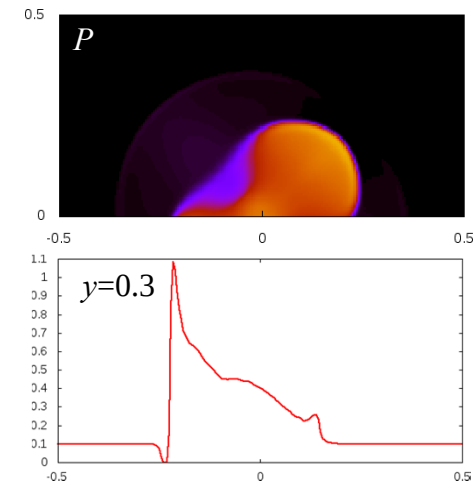
Projection



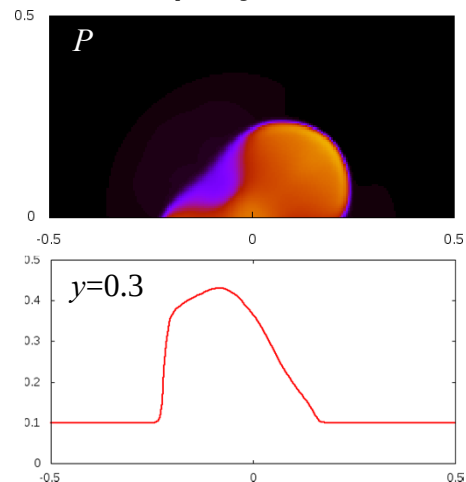
8-wave



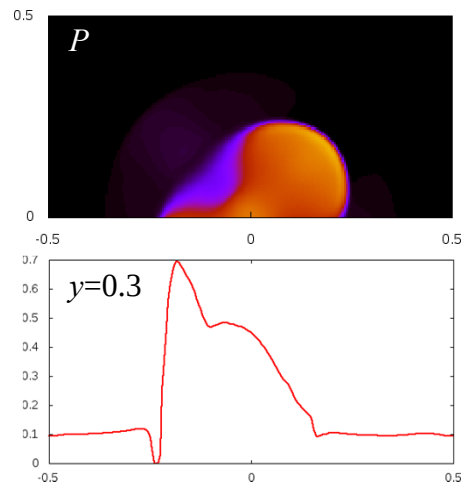
flux-CT



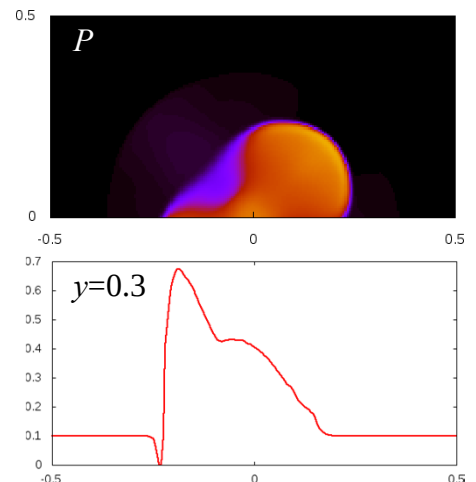
Face-projection



9-wave

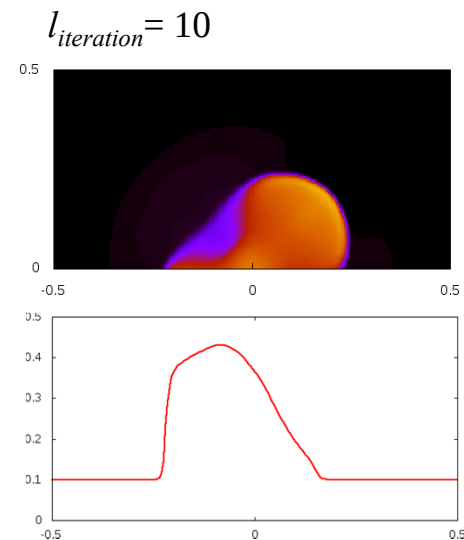
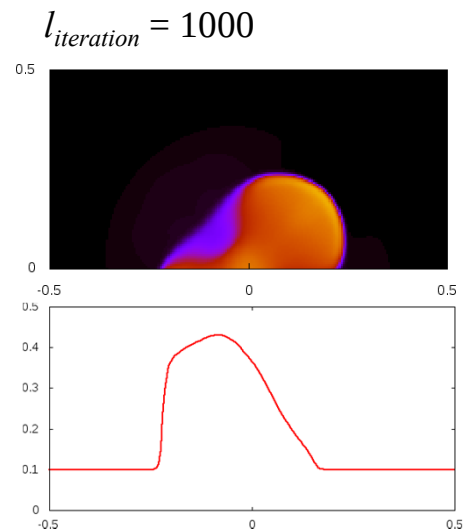
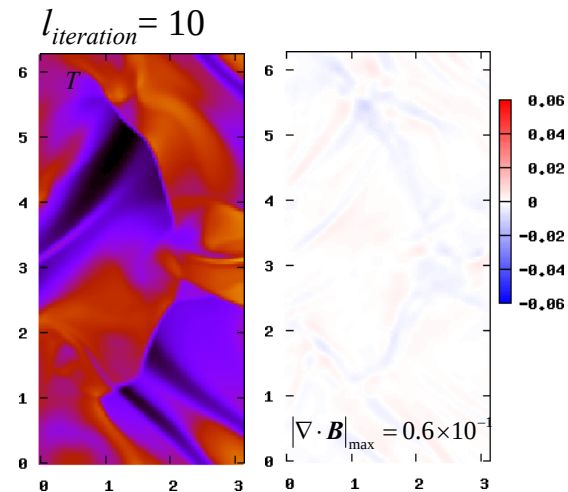
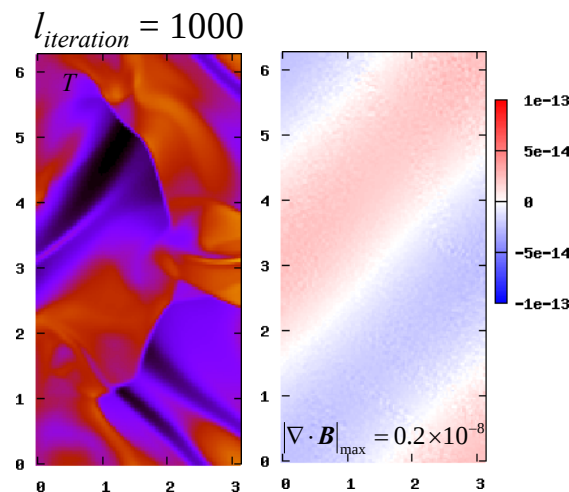


HLL-flux-CT



磁場発散の数値処理

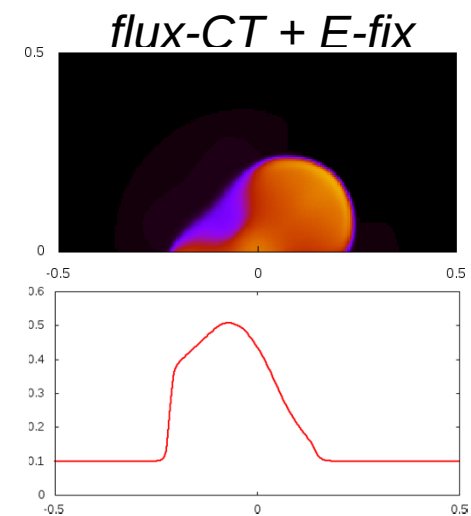
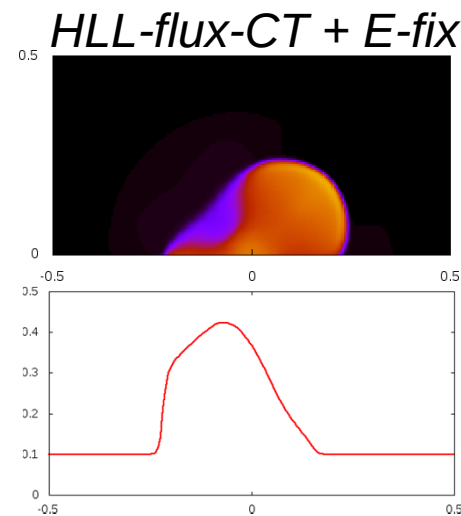
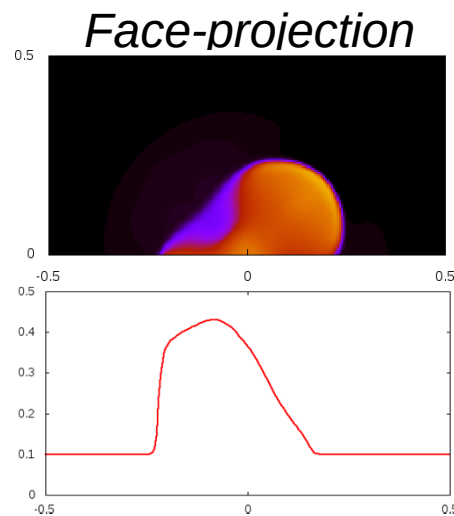
□ 連立一次方程式の処理の手抜き



磁場発散の数値処理

□ エネルギーの補正 [Balsara, Spicer, 199]

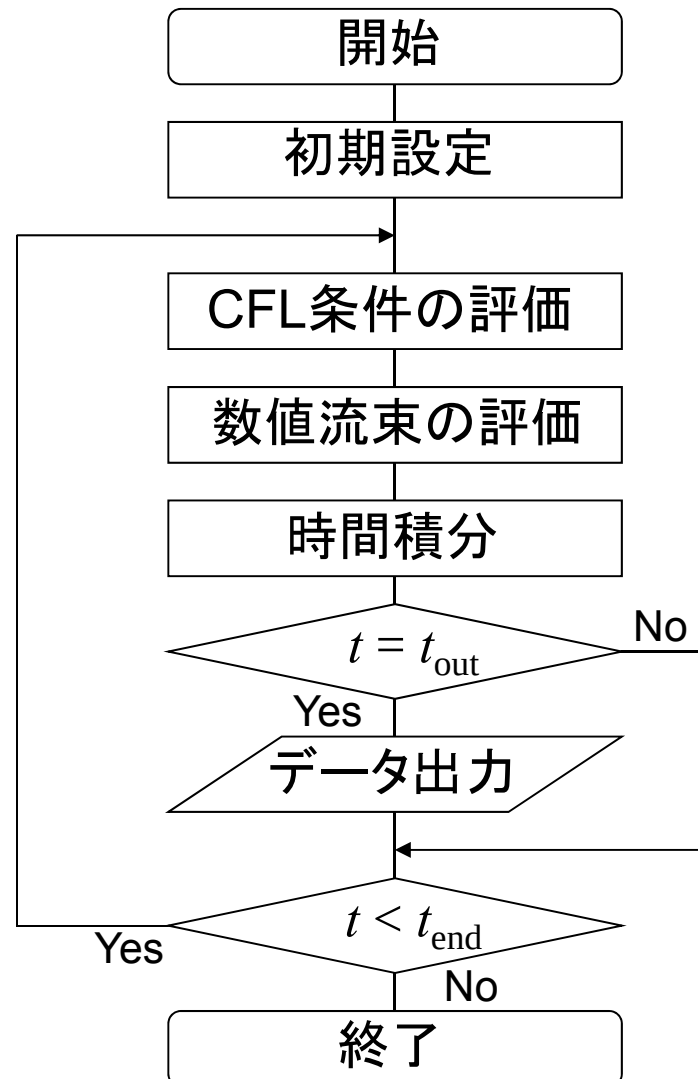
$$e^{n+1} = e^* + \left(|\mathbf{B}_{CT}^{n+1}|^2 - |\mathbf{B}_{FVM}|^2 \right) / 2$$



フローチャート

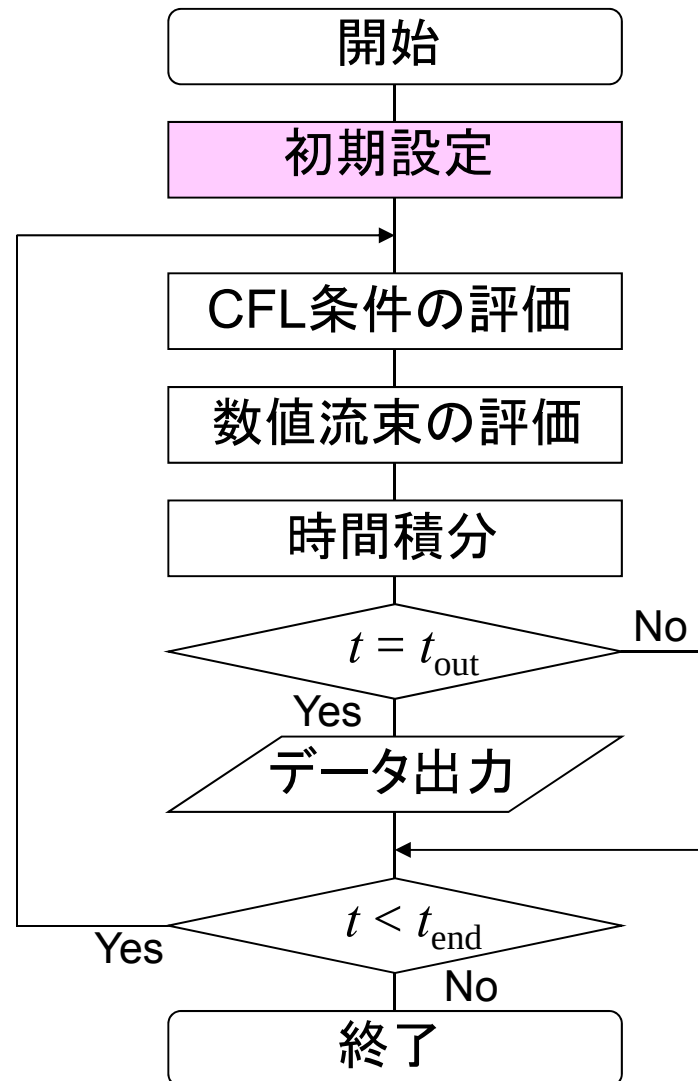
フローチャート

□ 基本手順



フローチャート

□ 基本手順



パラメータ

$\gamma, \eta, \dots$

グリッド

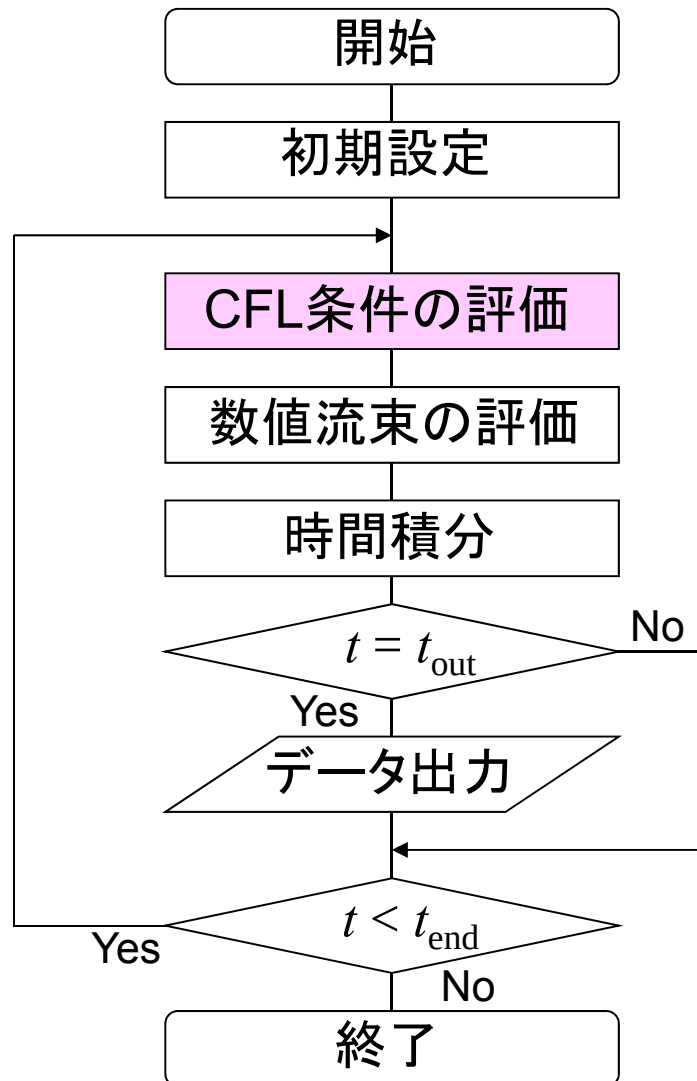
$x_i, \Delta x, \dots$

初期条件

$U(x_i, t = 0)$

フローチャート

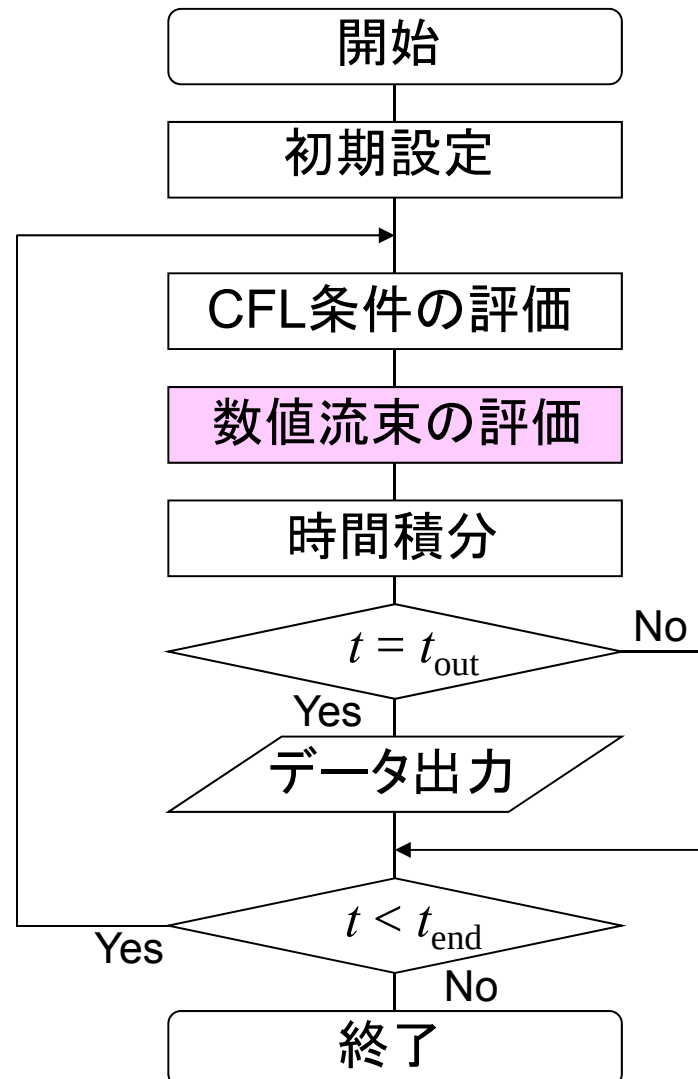
□ 基本手順



$$\lambda = |u| + c_f$$
$$\Delta t = c_{CFL} \frac{\Delta x}{\max \lambda}$$

フローチャート

□ 基本手順



for $i = 1, \dots, N + 1$

$$U_L \leftarrow U_{i-1}$$

$$U_R \leftarrow U_i$$

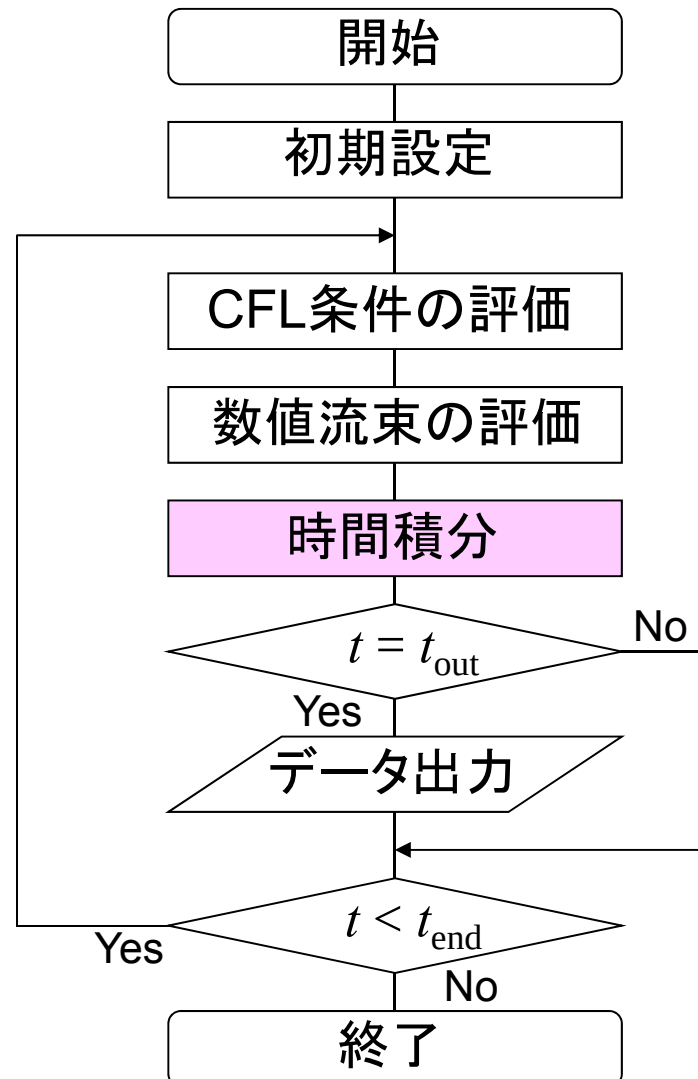
$$F_{1/2}(U_L, U_R)$$

メモ:

外部手続きを用いる場合、
インライン展開は必須

フローチャート

□ 基本手順

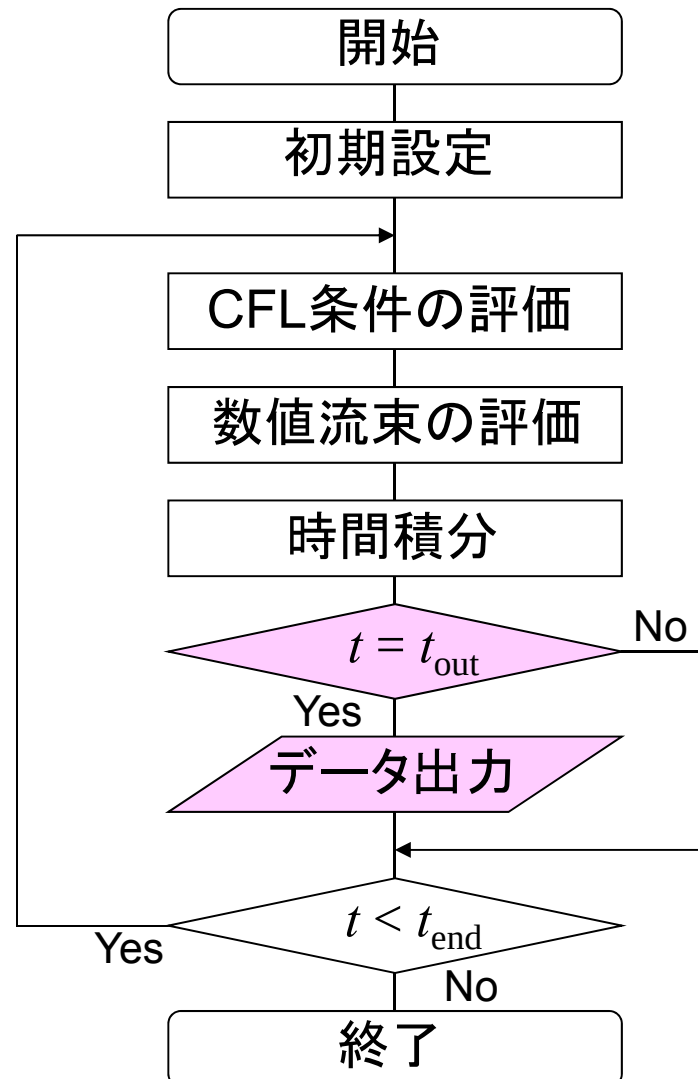


for $i = 1, \dots, N$

$$U_i \leftarrow U_i - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta F_i$$

フローチャート

□ 基本手順



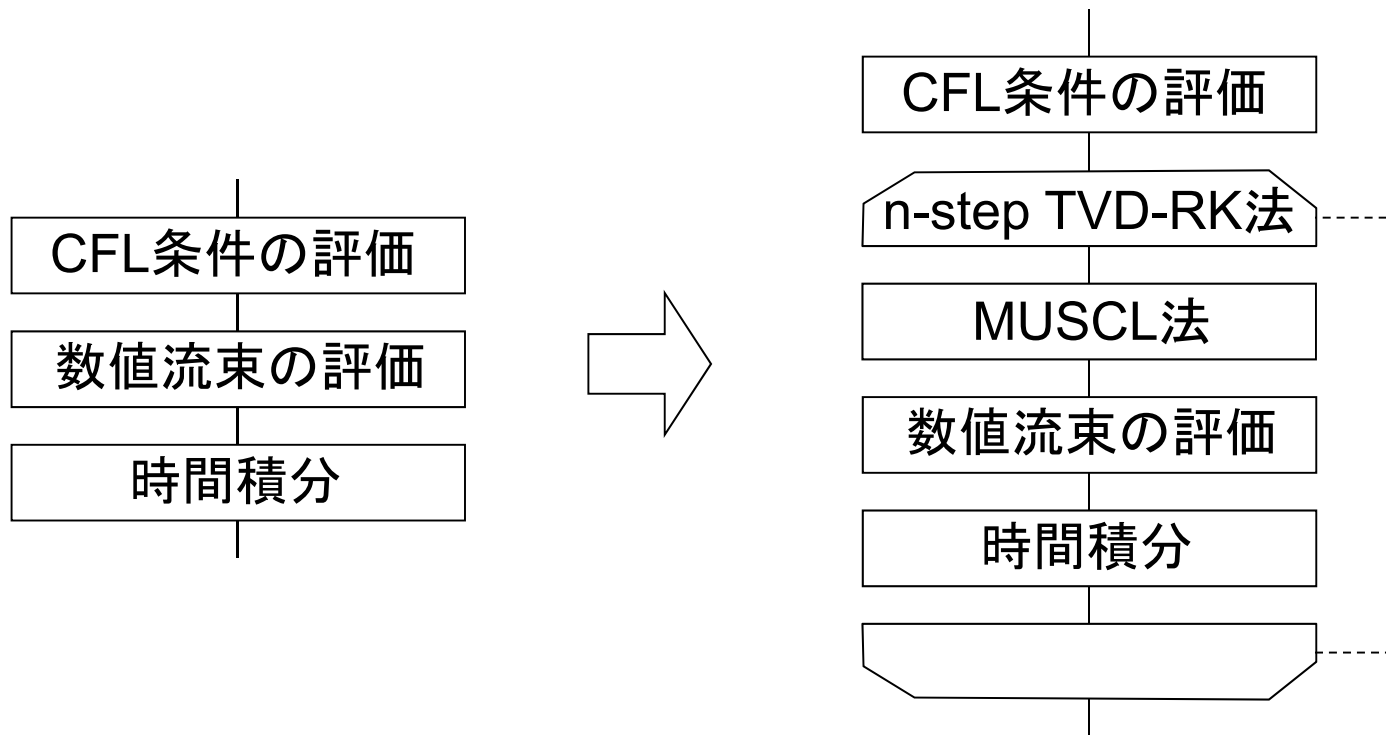
if $t > t_{\text{out}}$ then

Data Output

$$t_{\text{out}} \leftarrow t_{\text{out}} + \Delta t_{\text{out}}$$

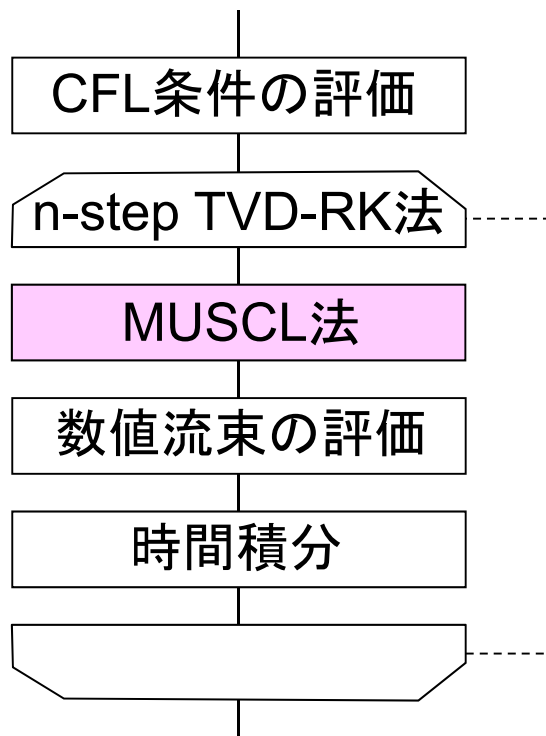
フローチャート

□ 高次精度化の例



フローチャート

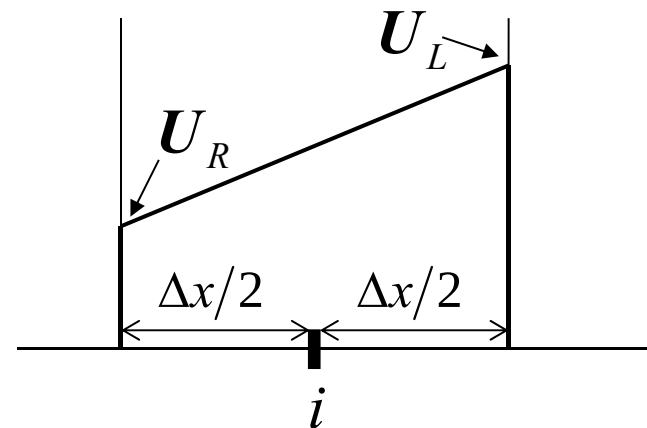
□ 高次精度化の例



for $i = 0, \dots, N + 1$

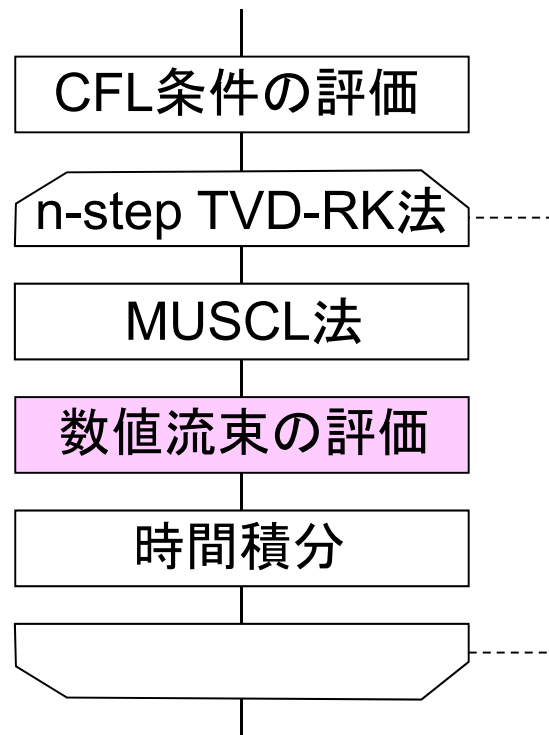
$$U_R \leftarrow U_i - \frac{\Delta x}{2} \text{Lim} \left(\frac{\Delta U}{\Delta x} \right)$$

$$U_L \leftarrow U_i + \frac{\Delta x}{2} \text{Lim} \left(\frac{\Delta U}{\Delta x} \right)$$



フローチャート

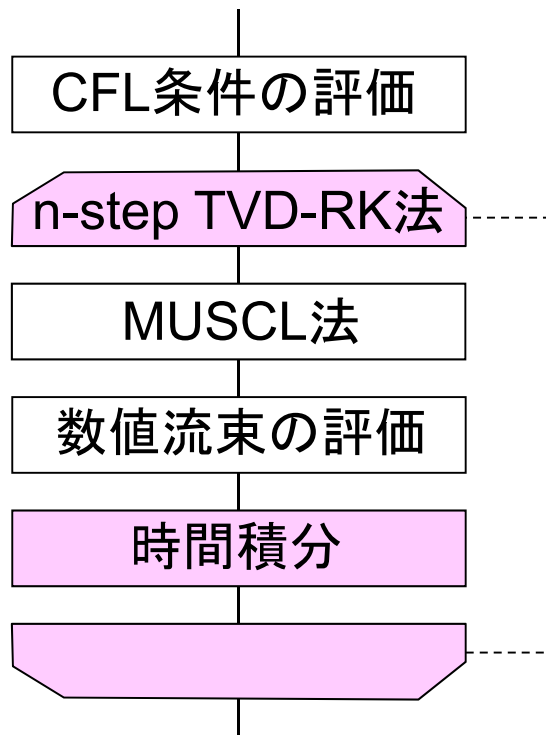
□ 高次精度化の例



$$\text{for } i = 1, \dots, N + 1$$
$$F_{1/2}(U_L, U_R)$$

フローチャート

□ 高次精度化の例



(2nd-order TVD-RK)

$$U^{(1)} = U^n + \Delta t L(U^n)$$

$$U^{n+1} = \frac{1}{2} U^n + \frac{1}{2} U^{(1)} + \frac{1}{2} \Delta t L(U^{(1)})$$

(3rd-order TVD-RK)

$$U^{(1)} = U^n + \Delta t L(U^n)$$

$$U^{(2)} = \frac{3}{4} U^n + \frac{1}{4} U^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t L(U^{(1)})$$

$$U^{n+1} = \frac{1}{3} U^n + \frac{2}{3} U^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t L(U^{(2)})$$

フローチャート

□ 多次元化の例

- Split法もUnsplit法も単に1次元の拡張です。
- なので、フローチャートは載せません。
- ただし、磁場発散の数値処理は必要です。
- (本当はもっと色々と難しいことはありますが。)

お疲れ様でした。