

# MHDシミュレーションの 多次元化と高精度化

簗島 敬(海洋研究開発機構)

共同研究者: 松本 洋介(千葉大学), 三好 隆博(広島大学)

# MHDシミュレーションの基本(昨日の復習)

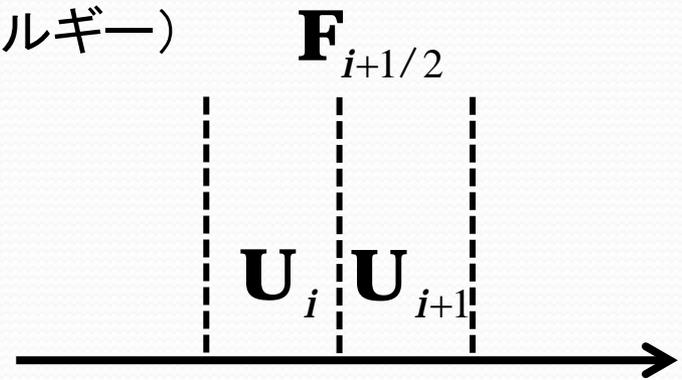
$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \Rightarrow \mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \Delta t \frac{\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}}{\Delta x}.$$

$\mathbf{U}$ : 保存量ベクトル(密度、運動量、磁場、エネルギー)

$\mathbf{F}$ : 流束ベクトル

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \text{Riemann}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}).$$

(↑Roe法, HLLD法など)



## ● 今日の話は.....**実用化**

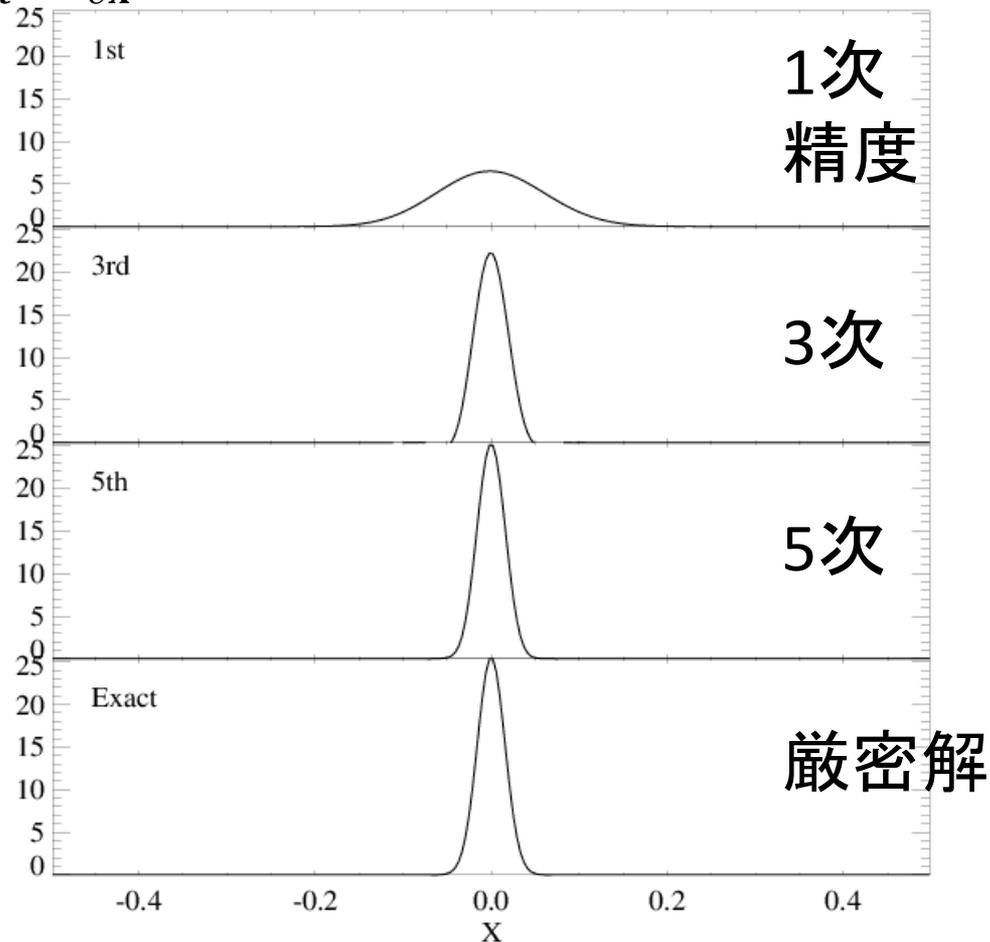
● 高次精度化

● 多次元化

$$\longrightarrow \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = 0$$

# 高次精度化とは

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (v = \text{const}) \quad T = 1.00$$



- 物理量プロファイルを高次関数で近似し、高解像度の解を得る

$$f(\Delta x) \sim f(0) + f'(0)\Delta x, \leftarrow 1\text{次}$$

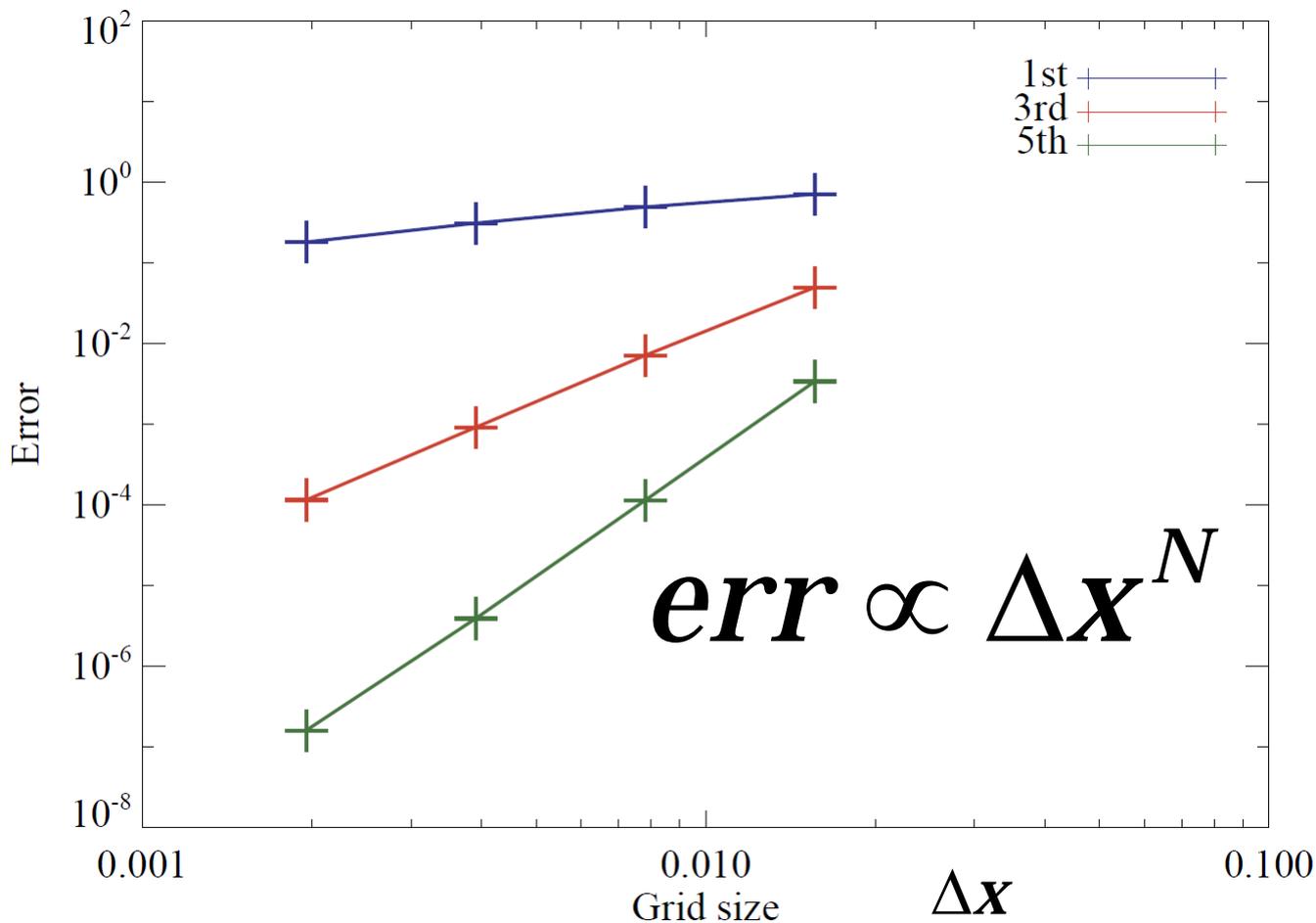
$$f(\Delta x) \sim f(0) + f'(0)\Delta x$$

$$+ f''(0)\Delta x^2 / 2 + f'''(0)\Delta x^3 / 6, \uparrow 3\text{次}$$

# 高次精度化の必要性

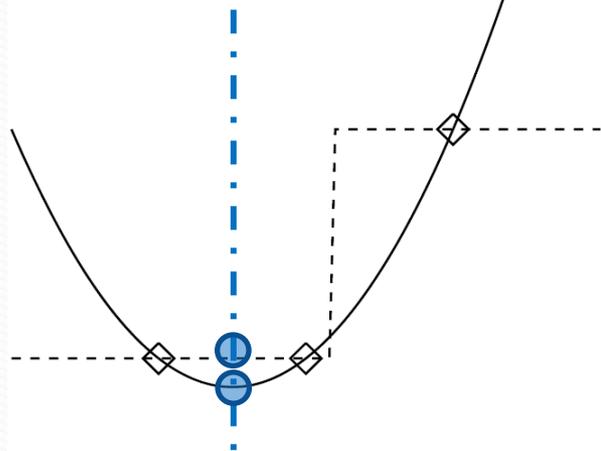
## N次精度スキームの誤差

- 低次スキームで高解像度計算結果を得るには、計算負荷甚大

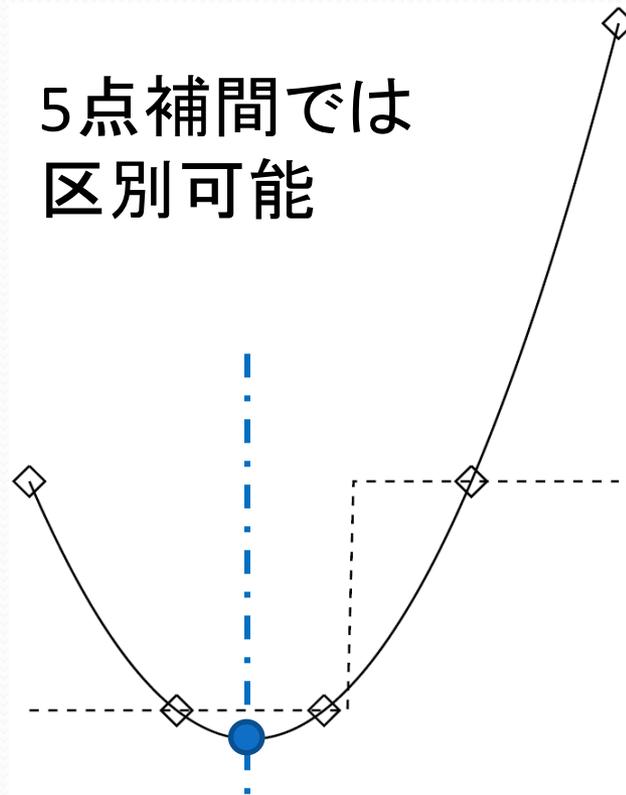


# 高次精度化の必要性

3点補間では実線と点線の区別がつかない



5点補間では区別可能



- ステンシルを広げることでプロファイルをより正確に再現
  - 極値の保持

# 流体シミュレーションの高次精度化例

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \Rightarrow \frac{d\mathbf{U}_i}{dt} = -\frac{\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}}{\Delta x}.$$

$\mathbf{U}$ : 保存量ベクトル  
 $\mathbf{F}$ : 流束ベクトル

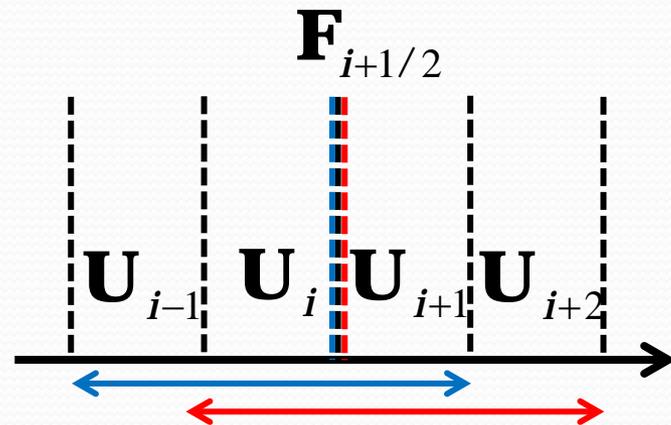
高次精度

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \text{Riemann}(\mathbf{U}_{i+1/2}^L, \mathbf{U}_{i+1/2}^R).$$

例: 線形3次精度

$$\mathbf{U}_{i+1/2}^L = (-\mathbf{U}_{i-1} + 5\mathbf{U}_i + 2\mathbf{U}_{i+1})/6$$

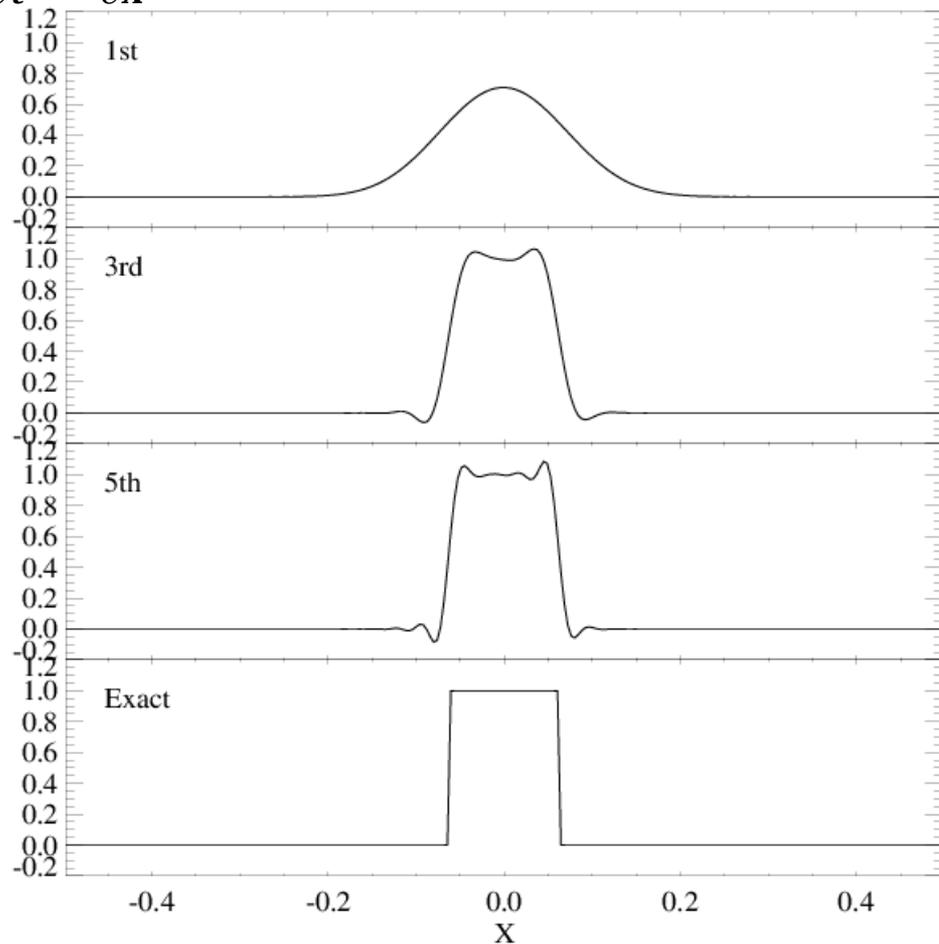
$$\mathbf{U}_{i+1/2}^R = (-\mathbf{U}_{i+2} + 5\mathbf{U}_{i+1} + 2\mathbf{U}_i)/6$$



線形N次精度化は、流体シミュレーションではあまり用いられない

# 高次精度化の欠点

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (v = \text{const}) \quad T = 1.00$$



1次  
精度

3次

5次

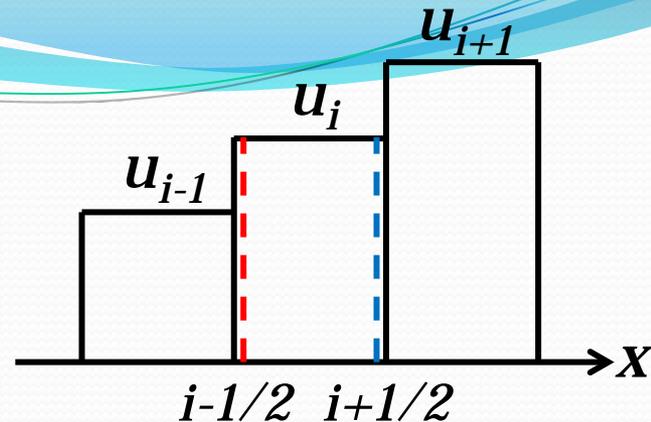
厳密解

- 不連続面近傍の数値振動
- 「線形2次以上スキームは解の単調性を維持できない」(Godunovの定理)
- **非線形スキーム**の導入

# 非線形スキーム

- 低精度@不連続面付近(衝撃波)
- 高精度@滑らかな領域(乱流)
- **Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws (MUSCL; van Leer 1979)**
- **Weighted Essentially Non-Oscillatory scheme (WENO; Jiang+ 1996)**
- **Monotonicity Preserving scheme (MP; Suresh+ 1997, CANS+に実装)**

# MUSCL法



- セル平均値 (既知)

$$u_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x) dx,$$

- テーラー展開に基づくセル*i*内の分布

$$u(x) = u(x_i) + u_i'(x_i)(x - x_i) + u_i''(x_i)(x - x_i)^2 / 2 + \dots$$

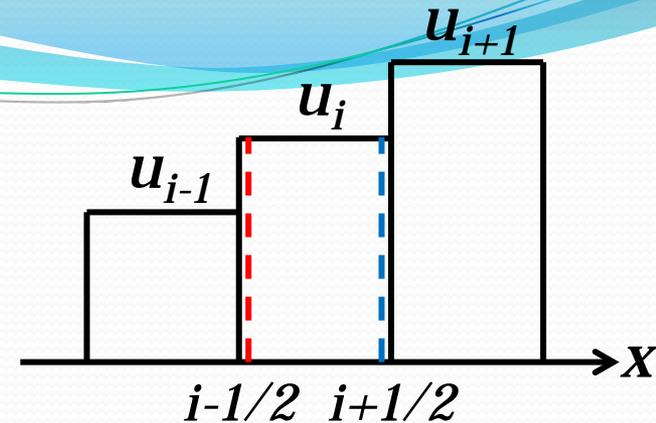
$$\approx u_i + \frac{x - x_i}{2\Delta x} (u_{i+1} - u_{i-1}) + \frac{3\kappa}{2\Delta x^2} \left[ (x - x_i)^2 - \frac{\Delta x^2}{12} \right] (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}),$$

- セル境界値

$$u_{i+1/2}^L = u(x_{i+1/2}) = u_i + \frac{1-\kappa}{4} (u_i - u_{i-1}) + \frac{1+\kappa}{4} (u_{i+1} - u_i),$$

$$u_{i-1/2}^R = u(x_{i-1/2}) = u_i - \frac{1-\kappa}{4} (u_{i+1} - u_i) - \frac{1+\kappa}{4} (u_i - u_{i-1}),$$

# MUSCL法



- 流束制限関数 $\Phi$ の導入
  - 極値の発生を禁止

$$u_{i-1} < \underline{u_{i-1/2}^R} < u_i < \underline{u_{i+1/2}^L} < u_{i+1}$$

$$u_{i+1/2}^L = u_i + \frac{1-\kappa}{4} \Phi(r)(u_i - u_{i-1}) + \frac{1+\kappa}{4} \Phi(1/r)(u_{i+1} - u_i),$$

$$u_{i-1/2}^R = u_i - \frac{1-\kappa}{4} \Phi(1/r)(u_{i+1} - u_i) - \frac{1+\kappa}{4} \Phi(r)(u_i - u_{i-1}),$$

$$r = (u_{i+1} - u_i) / (u_i - u_{i-1}),$$

- 代表的な場合:  $\Phi(r) = r \Phi(1/r)$

$$u_{i+1/2}^L = u_i + \Phi(r)(u_i - u_{i-1}) / 2,$$

$$u_{i-1/2}^R = u_i - \Phi(1/r)(u_{i+1} - u_i) / 2.$$

# MUSCL法

- 流束制限関数

- minmod

$$\Phi(r) = \max[0, \min(1, r)],$$

$$\underline{u_{i+1/2}^L} = u_i + du/2, \underline{u_{i-1/2}^R} = u_i - du/2,$$

$$\underline{du} = \underline{MM(u_{i+1} - u_i, u_i - u_{i-1})},$$

$$MM(x, y) = \text{sgn}(x) \max[0, \min(|x|, \text{sgn}(x)y)]. \quad \text{sgn}(x): x\text{の符号}$$

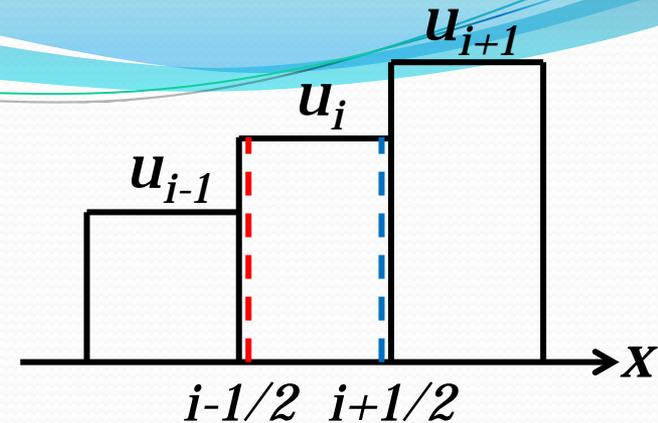
- monotonized central

$$\Phi(r) = \max[0, \min(2r, 0.5(1+r), 2)],$$

$$\underline{u_{i+1/2}^L} = u_i + du/2, \underline{u_{i-1/2}^R} = u_i - du/2,$$

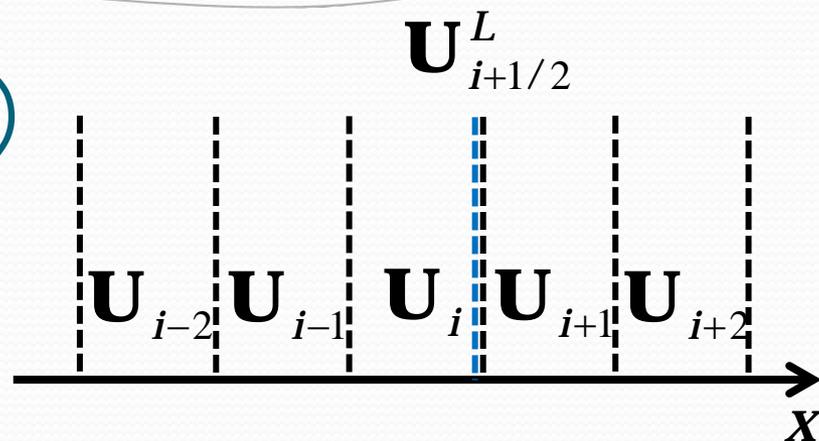
$$\underline{du} = \underline{MC(2(u_{i+1} - u_i), 2(u_i - u_{i-1}), (u_{i+1} - u_{i-1})/2)},$$

$$MC(x, y, z) = MM(x, MM(y, z)).$$



*du*: セル*i*内の勾配の候補値の内、最も滑らかなものorゼロ

# MP法 (CANS+に実装)



- 線形5点補完

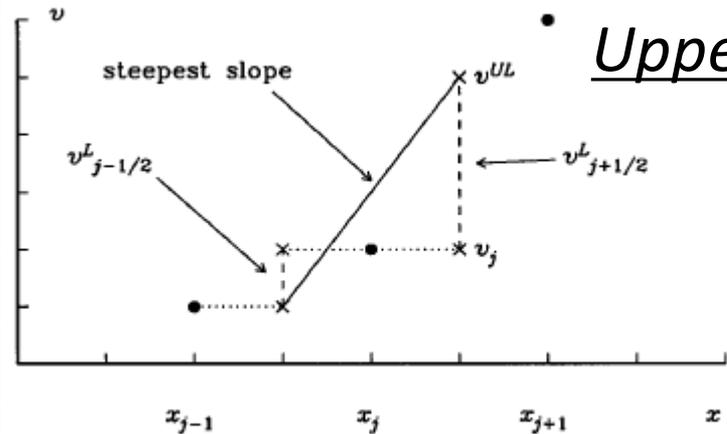
$$\mathbf{U}_{i+1/2}^L = (2\mathbf{U}_{i-2} - 13\mathbf{U}_{i-1} + 47\mathbf{U}_i + 27\mathbf{U}_{i+1} - 3\mathbf{U}_{i+2}) / 60,$$

- このままでは数値振動発生
- 周囲の幾つかの候補値と比較し、中央値を取る

$$\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}, \mathbf{U}^{UL}, \mathbf{U}^{MD}, \mathbf{U}^{LC}$$

- 単調性維持 (数値振動の抑制)
- 極値の保持 (MUSCL等のTVDスキームの改良)

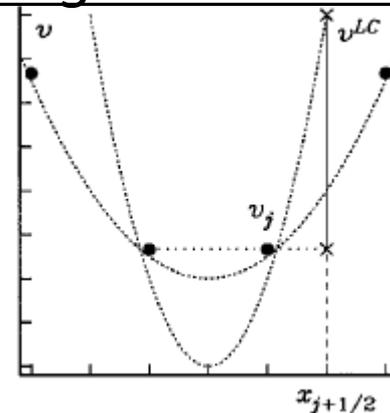
# MP法 (CANS+に実装)



Upper limit

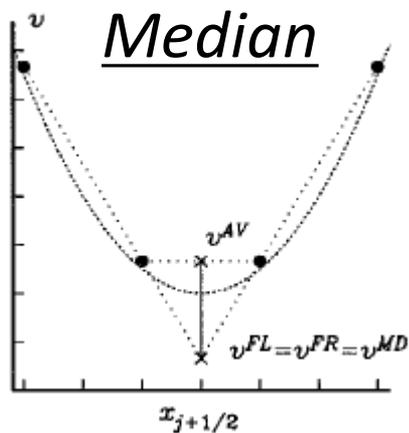
$$\mathbf{U}^{UL} = \mathbf{U}_i + \alpha(\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{i-1}), \alpha \geq 2$$

Large curvature



$$\mathbf{U}^{LC} = \mathbf{U}_i + (\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{i-1})/2 + 4\mathbf{d}_{i-1/2}^{MM}/3,$$

$$\mathbf{d}_{i-1/2}^{MM} = MM(\mathbf{U}_i + \mathbf{U}_{i-2} - 2\mathbf{U}_{i-1}, \mathbf{U}_{i+1} + \mathbf{U}_{i-1} - 2\mathbf{U}_i).$$

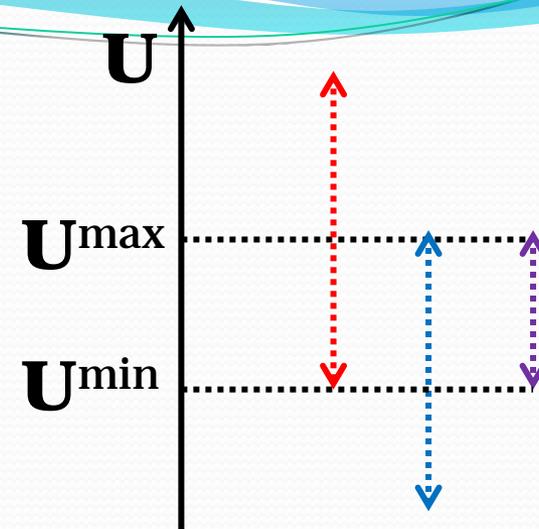


Median

$$\mathbf{U}^{MD} = \text{median}[(\mathbf{U}_i + \mathbf{U}_{i+1})/2,$$

$$\mathbf{U}_i + (\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{i-1})/2, \mathbf{U}_{i+1} - (\mathbf{U}_{i+2} - \mathbf{U}_{i+1})/2]$$

# MP法 (CANS+に実装)



- 単調性維持かつ極値の保持

$$\mathbf{U}_{i+1/2}^L \in \underline{I[\mathbf{U}_i, \mathbf{U}^{UL}, \mathbf{U}^{LC}]} \text{ and } \underline{I[\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}, \mathbf{U}^{MD}]},$$



$$\mathbf{U}_{i+1/2}^L = (2\mathbf{U}_{i-2} - 13\mathbf{U}_{i-1} + 47\mathbf{U}_i + 27\mathbf{U}_{i+1} - 3\mathbf{U}_{i+2}) / 60,$$

$$\mathbf{U}^{\max} = \min[\max(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}, \mathbf{U}^{MD}), \max(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}^{UL}, \mathbf{U}^{LC})],$$

$$\mathbf{U}^{\min} = \max[\min(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}, \mathbf{U}^{MD}), \min(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}^{UL}, \mathbf{U}^{LC})],$$

$$\mathbf{U}_{i+1/2}^L \leftarrow \text{median}(\mathbf{U}_{i+1/2}^L, \underline{\mathbf{U}^{\max}, \mathbf{U}^{\min}}).$$

# 時間更新

- 空間精度を上げた際は、時間精度も上げないと数値的に不安定
- ルンゲ・クッタ法:  $\frac{dy}{dt} = f(y)$

1次

$$y^{n+1} = y^n + f(y^n)\Delta t.$$

2次 (MUSCLで使用)

$$y^* = y^n + f(y^n)\Delta t,$$

$$y^{n+1} = \frac{y^n}{2} + \frac{1}{2}[y^* + f(y^*)\Delta t]$$

3次 (MPで使用)

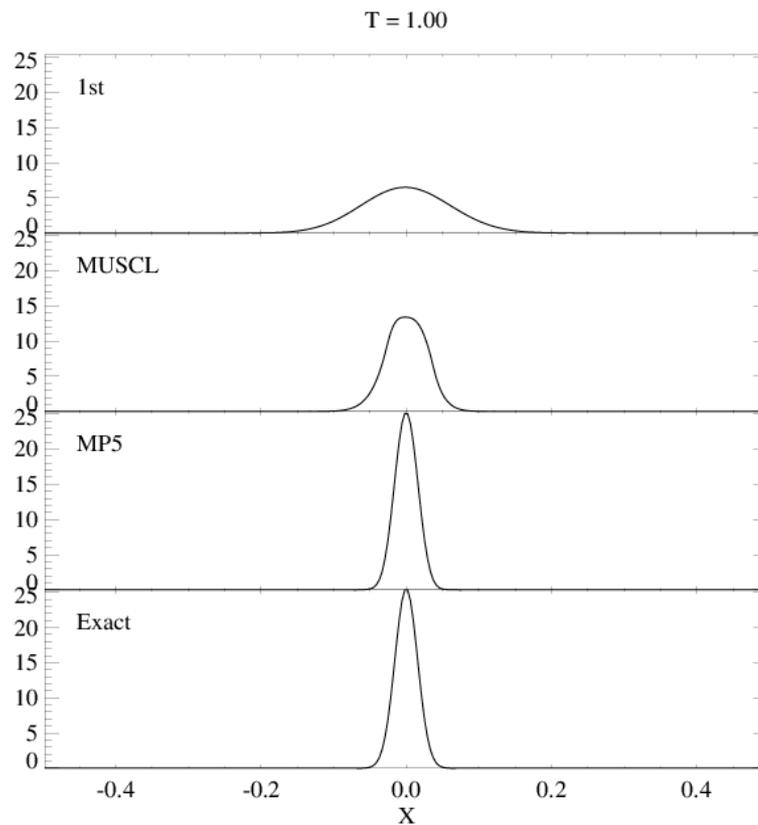
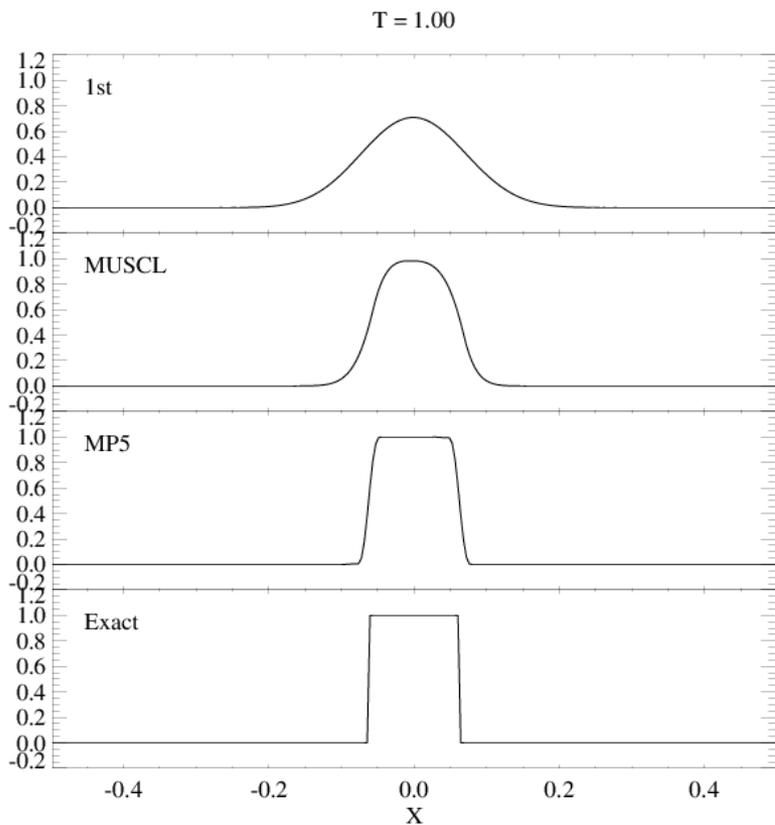
$$y^* = y^n + f(y^n)\Delta t,$$

$$y^{**} = \frac{3}{4}y^n + \frac{1}{4}[y^* + f(y^*)\Delta t],$$

$$y^{n+1} = \frac{y^n}{3} + \frac{2}{3}[y^{**} + f(y^{**})\Delta t]$$

# 線形移流

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (v = \text{const})$$



1次

MUSCL-  
minmod

MP

厳密解

# 1次元理想MHD方程式(保存形式)

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0,$$

$$\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, B_y, B_z, e)^T, \dots \text{保存変数 (conserved variables)}$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u u - B_x B_x + p + \mathbf{B}^2 / 2 \\ \rho v u - B_x B_y \\ \rho w u - B_x B_z \\ B_y u - B_x v \\ B_z u - B_x w \\ (e + p + \mathbf{B}^2 / 2)u - B_x (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} p &= (\gamma - 1)(e - \rho \mathbf{u}^2 / 2 - \mathbf{B}^2 / 2), \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \Rightarrow B_x = \text{const}, \end{aligned}$$

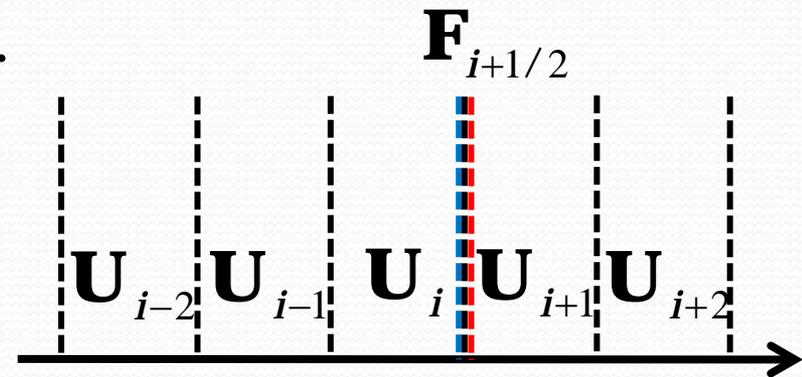
$$\mathbf{V} = (\rho, u, v, w, B_y, B_z, P)^T. \quad \dots \text{基本変数 (primitive variables)}$$

# 1次元MHDシミュレーション

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \Rightarrow \frac{d\mathbf{U}_i}{dt} = -\frac{\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}}{\Delta x}.$$

$\mathbf{U}$ : 保存量ベクトル  
 $\mathbf{F}$ : 流束ベクトル

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \text{Riemann}(\mathbf{U}_{i+1/2}^L, \mathbf{U}_{i+1/2}^R).$$



- 1次精度

$$\mathbf{U}_{i+1/2}^L = \mathbf{U}_i,$$

- 2次精度

$$\mathbf{U}_{i+1/2}^L = \text{MUSCL}(\mathbf{U}_{i-1}, \mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}),$$

- 5次精度

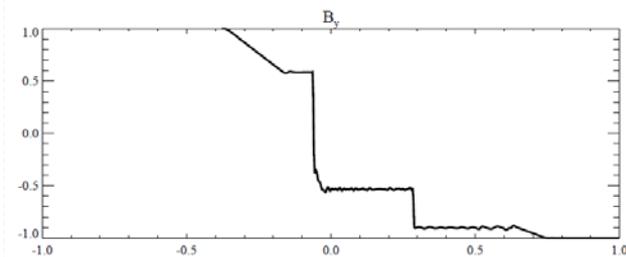
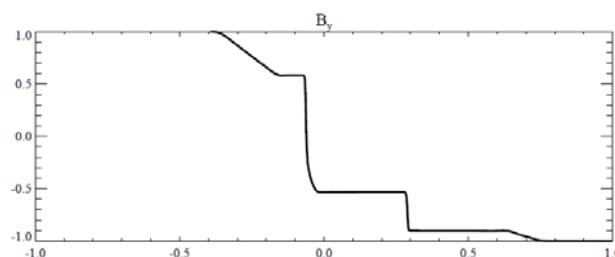
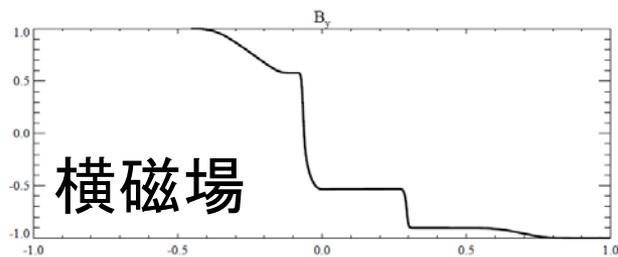
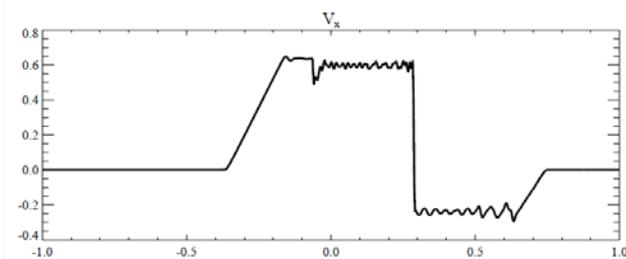
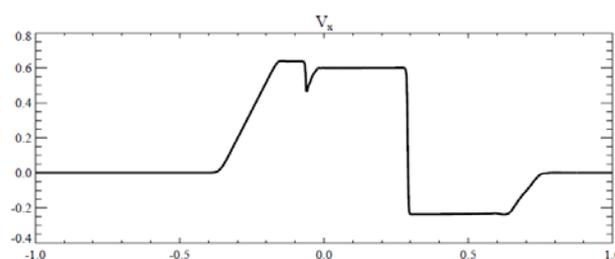
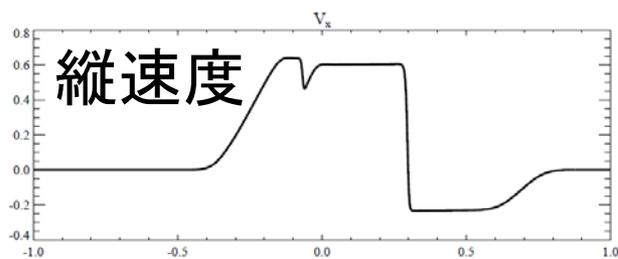
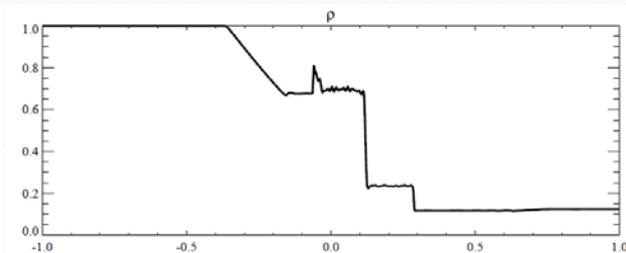
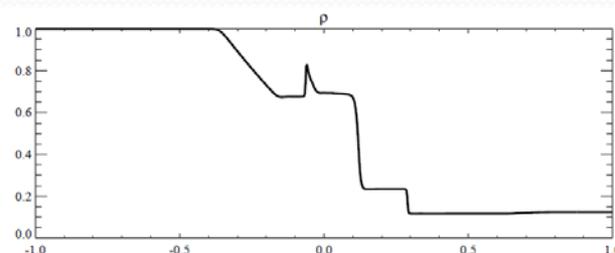
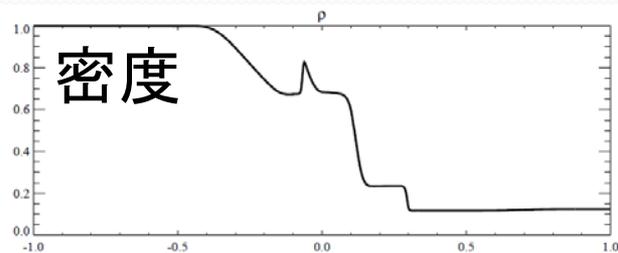
$$\mathbf{U}_{i+1/2}^L = \text{MP}(\mathbf{U}_{i-2}, \mathbf{U}_{i-1}, \mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}, \mathbf{U}_{i+2}).$$

# 衝撃波管問題 (Brio+ 1988)

1次

2次

5次



HLLD近似リーマン解法使用 (Miyoshi+ 2005)

# 双曲型保存則の性質

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0,$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{A}_p \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = 0, \quad \left( \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \right),$$

$$\Rightarrow \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{L} \mathbf{A} \mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{L}_p \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{L}_p \mathbf{A}_p \mathbf{R}_p \mathbf{L}_p \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = 0, \quad (\mathbf{L} \mathbf{R} = \mathbf{L}_p \mathbf{R}_p = \mathbf{1}),$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0, \quad (d\mathbf{W} = \mathbf{L} d\mathbf{U} = \mathbf{L}_p d\mathbf{V}, \Lambda = \mathbf{L} \mathbf{A} \mathbf{R}). \quad \leftarrow \text{非線形移流方程式}$$

- 方程式の対角化

- $\mathbf{L}, \mathbf{R}$ :  $\mathbf{A}$ の左,右固有ベクトルを成分とする左,右固有行列
- $\Lambda$ : 実数固有値を成分とする対角行列
- 特性量  $d\mathbf{W}$ は特性線  $\Lambda$ に沿って一定(リーマン不変量)
- 風上法に基づく補間は特性量に対して行いたい

# 特性変数変換

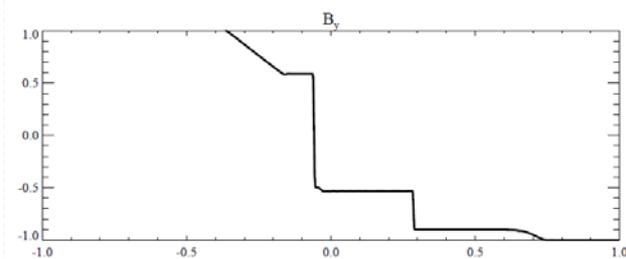
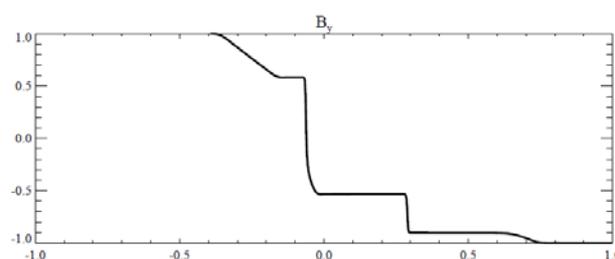
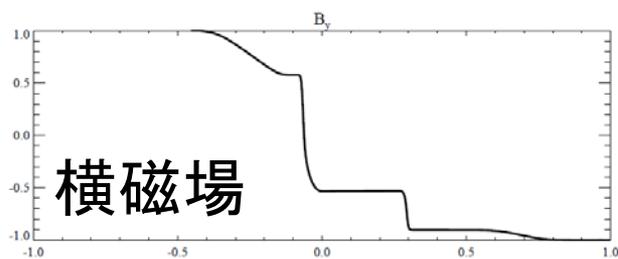
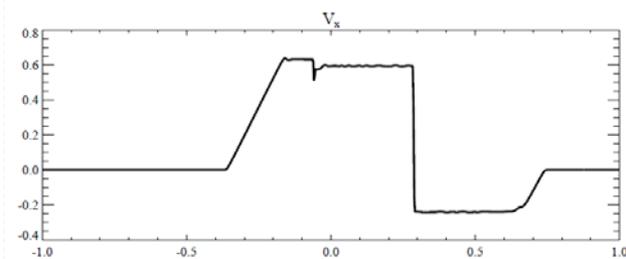
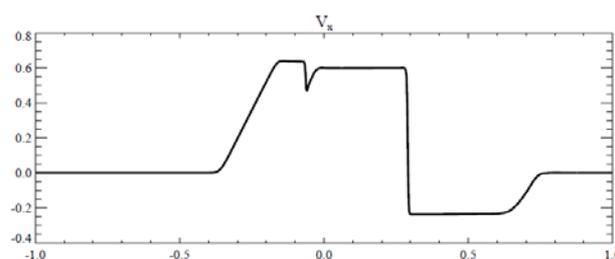
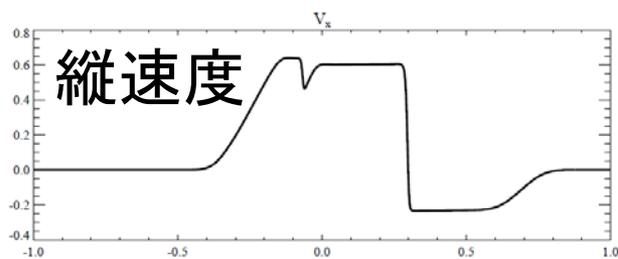
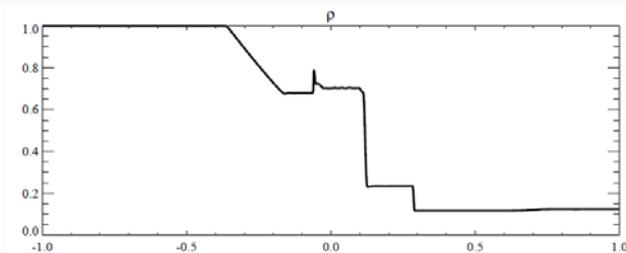
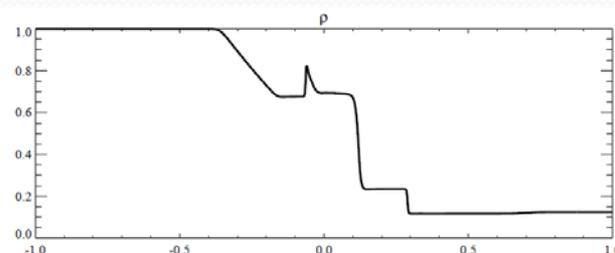
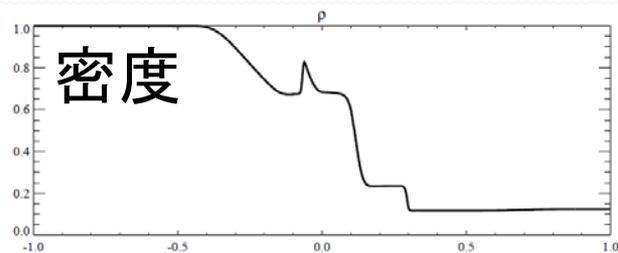
- 左右固有行列  $\mathbf{L}_i, \mathbf{R}_i$  (e.g., Ryu+ 1995)
- 特性変数変換:  $\mathbf{W}_{i+s} = \mathbf{L}_i \mathbf{U}_{i+s}$ , ( $s = -2, \dots, 2$  for MP)
- $\mathbf{W}_{i+1/2}^L, \mathbf{W}_{i-1/2}^R$ , を補間で求める
- 逆変換:  $\mathbf{U}_{i+1/2}^L = \mathbf{R}_i \mathbf{W}_{i+1/2}^L, \mathbf{U}_{i-1/2}^R = \mathbf{R}_i \mathbf{W}_{i-1/2}^R$
  
- 固有行列を計算するのが面倒
  - プログラムミス多発!!
- 固有行列が明らかでない方程式系では使えない
- CANS+に実装済み

# 衝撃波管問題 (Brio+ 1988)

1次

2次

5次



HLLD, 特性変数変換あり

## 2次元理想MHD方程式(保存形式)

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = 0,$$

$$\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, B_x, B_y, B_z, e)^T,$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u u - B_x B_x + p + \mathbf{B}^2 / 2 \\ \rho v u - B_x B_y \\ \rho w u - B_x B_z \\ 0 \\ B_y u - B_x v \\ B_z u - B_x w \\ (e + p + \mathbf{B}^2 / 2)u - B_x(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v - B_y B_x \\ \rho v v - B_y B_y + p + \mathbf{B}^2 / 2 \\ \rho w v - B_y B_z \\ B_x v - B_y u \\ 0 \\ B_z v - B_y w \\ (e + p + \mathbf{B}^2 / 2)v - B_y(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \end{pmatrix}.$$

# MHDコードの多次元化

**U**: 保存量ベクトル  
**F**: X方向の流束ベクトル  
**G**: Y方向の流束ベクトル

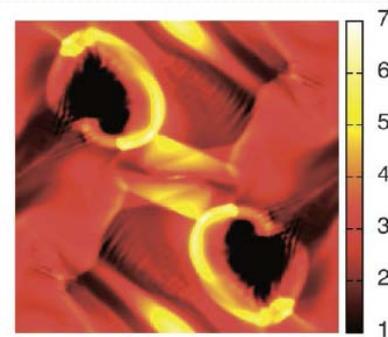
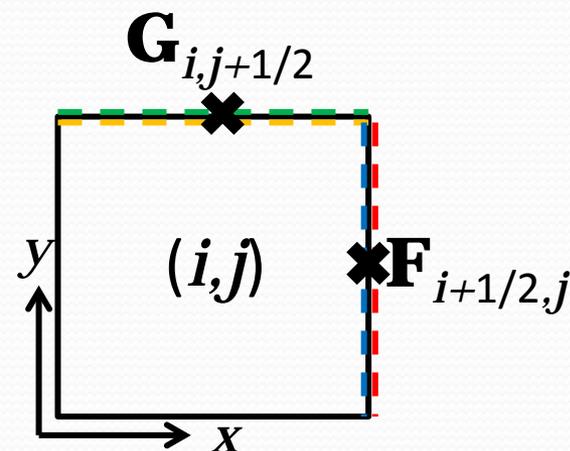
$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = 0, \Rightarrow \frac{d\mathbf{U}_{i,j}}{dt} = -\frac{\mathbf{F}_{i+1/2,j} - \mathbf{F}_{i-1/2,j}}{\Delta x} - \frac{\mathbf{G}_{i,j+1/2} - \mathbf{G}_{i,j-1/2}}{\Delta y}.$$

- 1次元数値解法の利用

$$\mathbf{F}_{i+1/2,j} = \text{Riemann}(\mathbf{U}_{i+1/2,j}^L, \mathbf{U}_{i+1/2,j}^R),$$

$$\mathbf{G}_{i,j+1/2} = \text{Riemann}(\mathbf{U}_{i,j+1/2}^L, \mathbf{U}_{i,j+1/2}^R),$$

- 同じタイミングで求めるUnsplit法
- 磁場発散の処理
  - 数値的な  $\text{div} \mathbf{B} \neq 0$  で計算破綻



# 磁場発散の処理

- **Constrained Transport (CT) 法** (Evans+ 1988)
  - $\text{Div}\mathbf{B}=0$ を離散化レベルで保証する特殊なグリッド配置
- **プロジェクション法** (Brackbill+ 1980)
  - ポアソン方程式を解いて磁場修正
- **移流拡散法** (Powell 1999, Dedner+ 2002)
  - 有限の $\text{div}\mathbf{B}$ を移流拡散方程式や電信方程式に従って処理

<http://www.astro.phys.s.chiba-u.ac.jp/cans/doc/riemann.html#id23>

# プロジェクション法/CT法

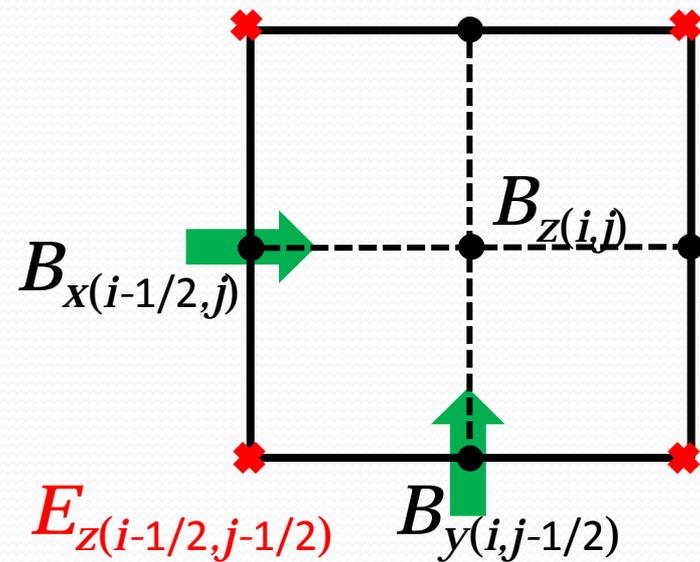
- プロジェクション法

$$\mathbf{B}^{n+1} = \mathbf{B}^* + \nabla \phi, \Rightarrow \Delta \phi = -\nabla \cdot \mathbf{B}^* .$$

- $\mathbf{B}^*$ : MHDシミュレーションで得た解 ( $\text{div} \mathbf{B}$ 誤差含む)
- $\mathbf{B}^{n+1}$ :  $\text{div} \mathbf{B} = 0$ を満たす真の解
- ポアソン方程式解いて $\phi$ 得る  $\Rightarrow \mathbf{B}^*$ を $\mathbf{B}^{n+1}$ へ更新

- CT法

- セル境界面の中心に面に垂直な磁場成分を配置
- セル角の電場を求める (e.g., Balsara+ 1999)
- $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} .$



# 移流拡散法 (CANS+に実装)

- 9-wave法 (Dedner+ 2002)

- $\text{div} \mathbf{B}$ を掃除するため方程式を変形、追加

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \phi = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + c_h^2 \nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{c_h^2}{c_p^2} \phi$$

- $\mathbf{B}$ と $\phi$ について整理すると...

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{c_h^2}{c_p^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] (\nabla \cdot \mathbf{B}) = c_h^2 \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{B}),$$

電信方程式 (波動+拡散方程式)

- 実装しやすく計算負荷も少ない

# 移流拡散法

- 1次元の場合

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} B_x \\ \phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_h^2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} B_x \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -(c_h^2 / c_p^2) \phi \end{pmatrix},$$

演算子分離

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} B_x \\ \phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_h^2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} B_x \\ \phi \end{pmatrix} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = -(c_h^2 / c_p^2) \phi,$$

固有値(伝播速度)  $\pm c_h$

$$\phi^* = \exp[-(c_h^2 / c_p^2) \Delta t] \phi^n,$$

$c_h$ : CFL条件から決める最大値

$c_p$ :  $(0.18c_h)^{(1/2)}$  (経験的な値)

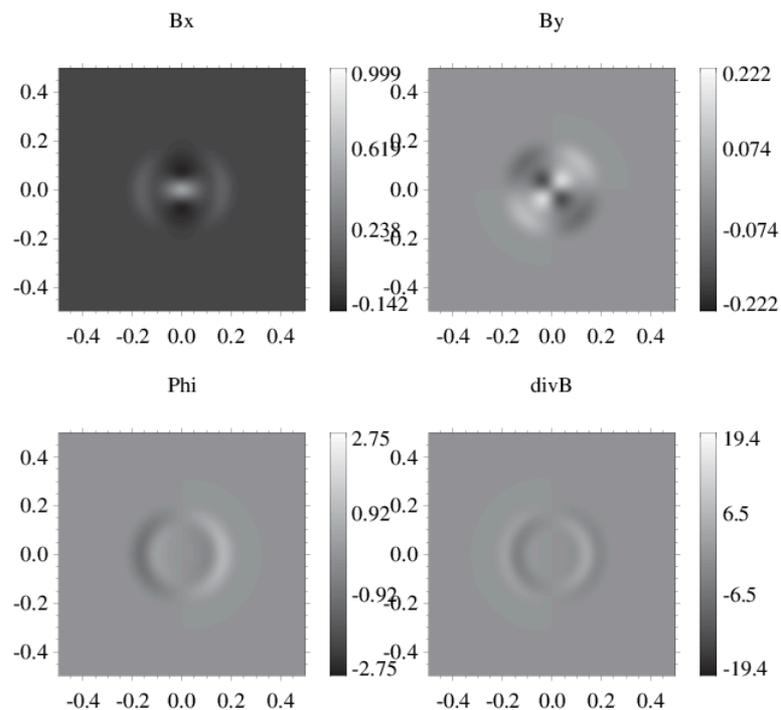
# 移流拡散法

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_x \\ \phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_h^2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_x \\ \phi \end{pmatrix} = 0,$$

- Lax-Friedrichs flux splitting

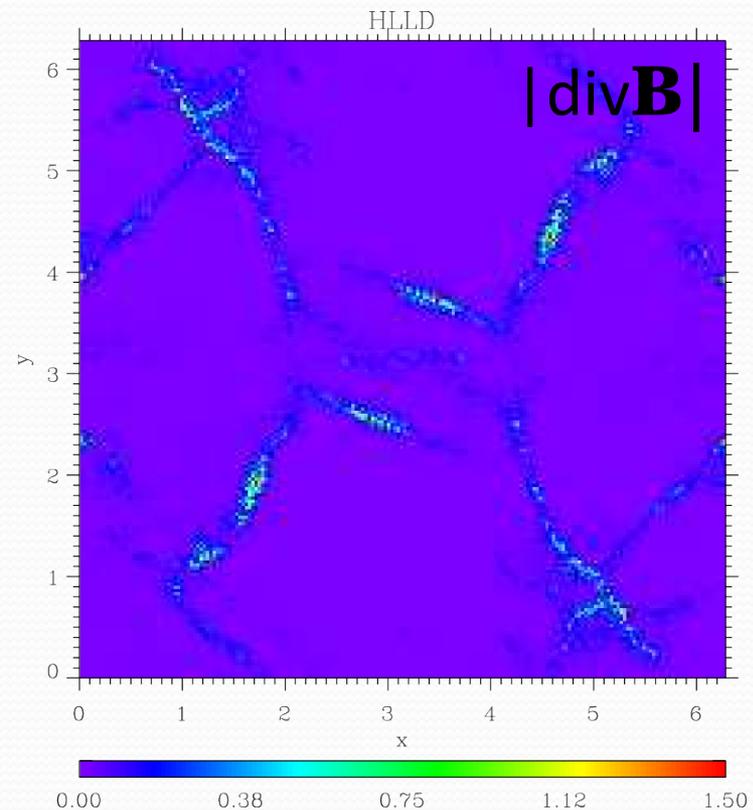
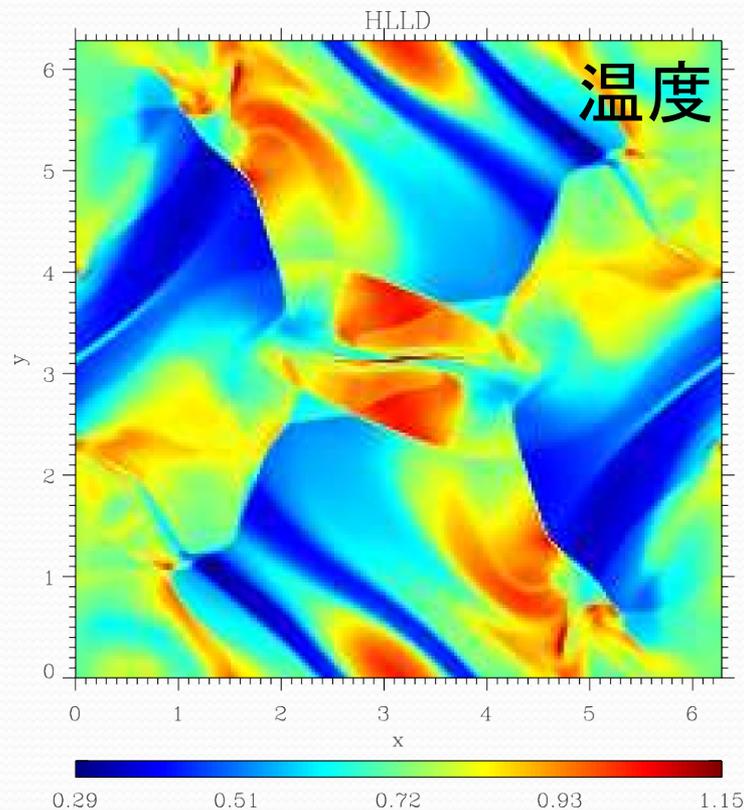
$$\phi_{i+1/2} = \frac{1}{2} (\phi_{i+1/2}^L + \phi_{i+1/2}^R) - \frac{c_h}{2} (B_{x,i+1/2}^R - B_{x,i+1/2}^L),$$

$$c_h^2 B_{x,i+1/2} = \frac{c_h^2}{2} (B_{x,i+1/2}^L + B_{x,i+1/2}^R) - \frac{c_h}{2} (\phi_{i+1/2}^R - \phi_{i+1/2}^L).$$



# 2D MHD with 9-wave

- Orszag-Tang 渦問題



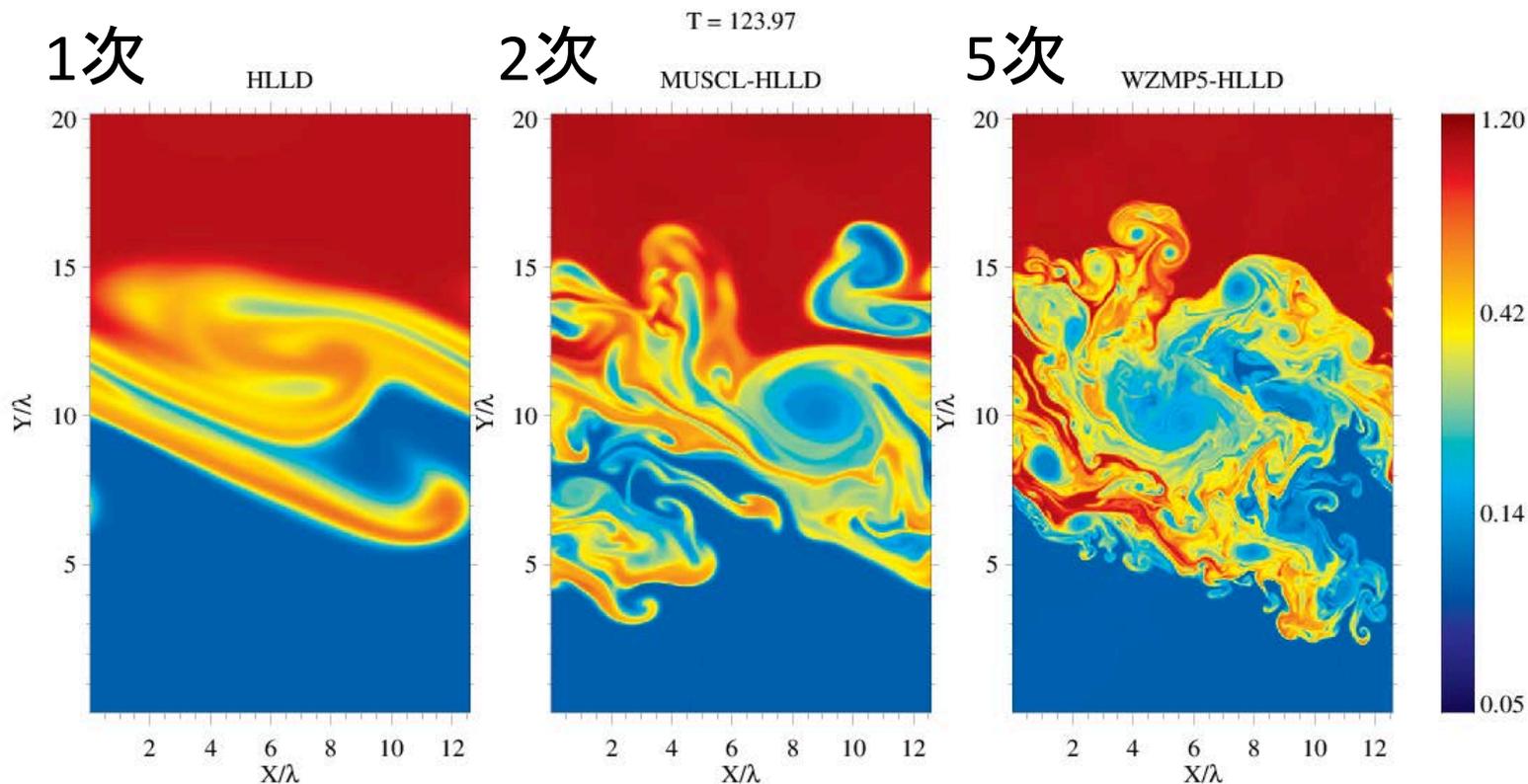
<http://www.astro.phys.s.chiba-u.ac.jp/cans/doc/riemann.html#id23>

# 高次精度MHDコードの実用例

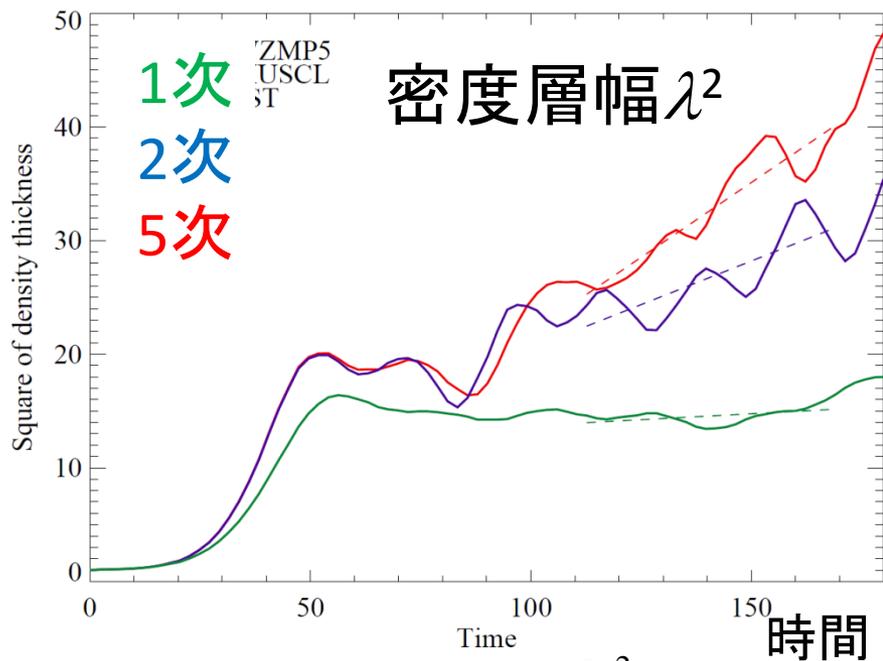
- ケルビン・ヘルムホルツ不安定
- 磁気リコネクション
  
- 1次, 2次, 5次精度で特性変数補間
- HLLD近似リーマン解法
- 3次ルンゲ・クッタ法

# ケルビン・ヘルムホルツ不安定

- 速度差がある流体の間で発生する不安定
- 2次的不安定で乱流発展 (Matsumoto+2006)



# KH乱流発展

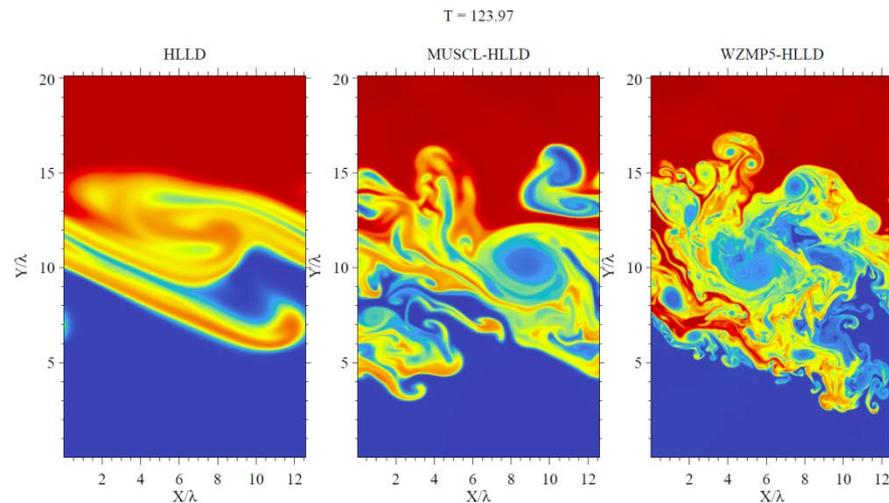


● 乱流混合  $D_{yy} = \frac{d\lambda^2}{dt}$

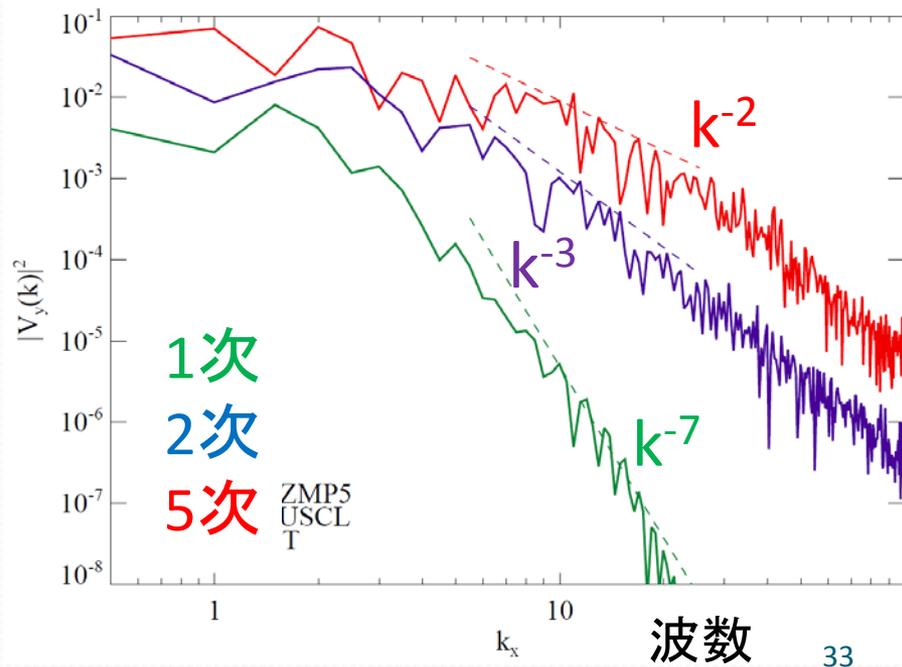
$= 0.26$  (5th)

$= 0.15$  (2nd)

$= 0.02$  (1st)

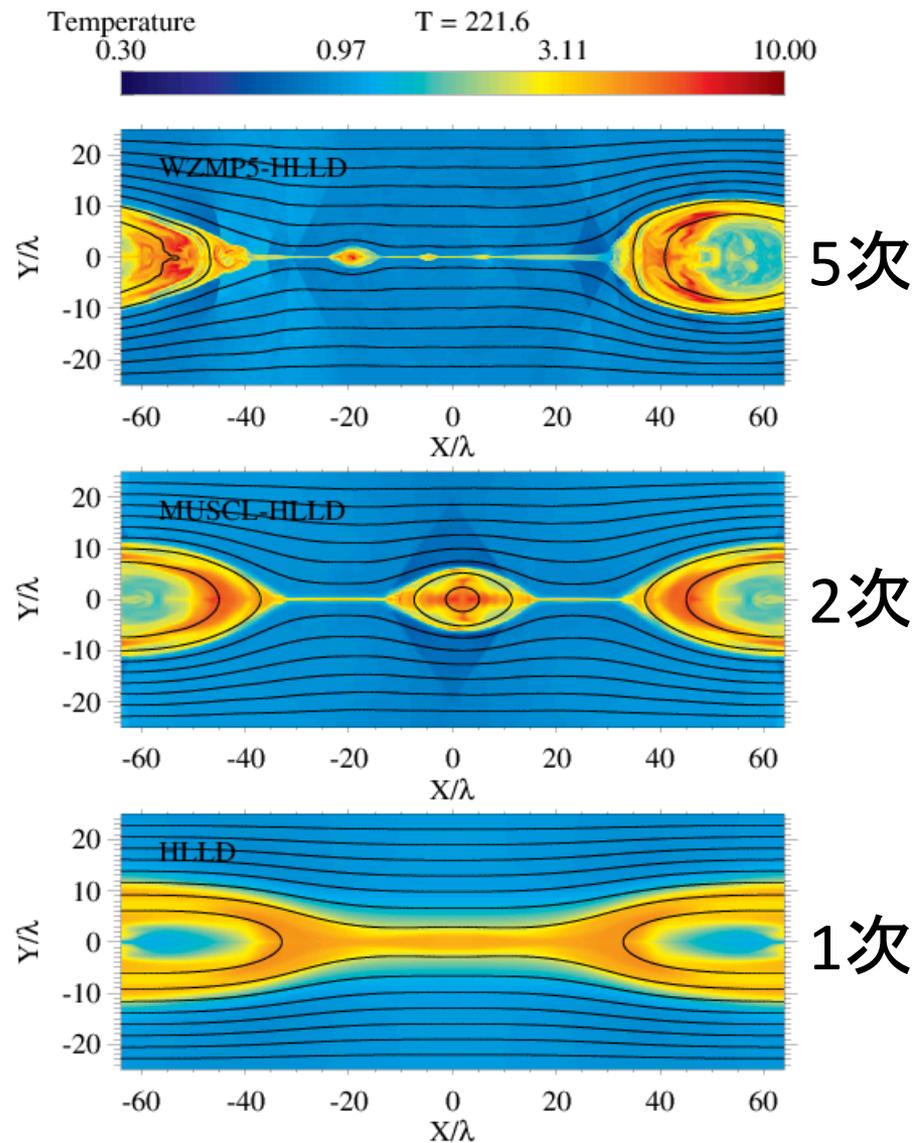
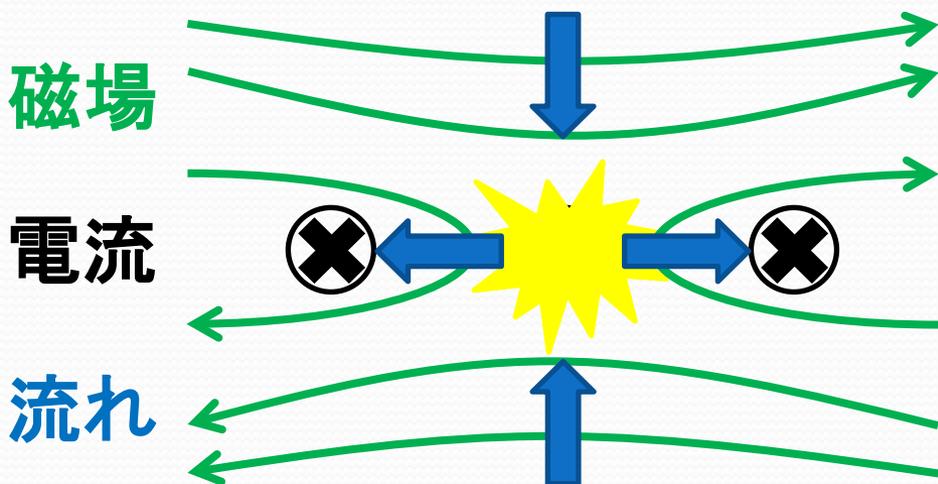


速度のパワースペクトル

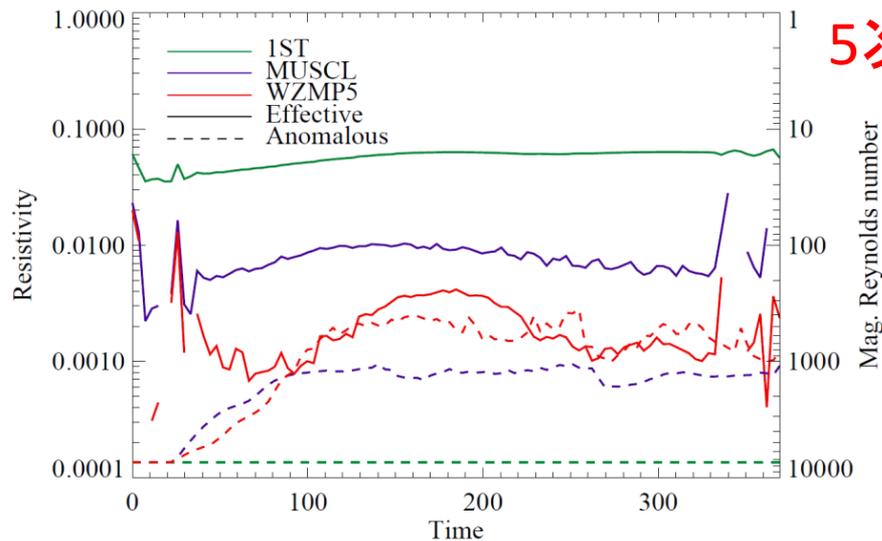
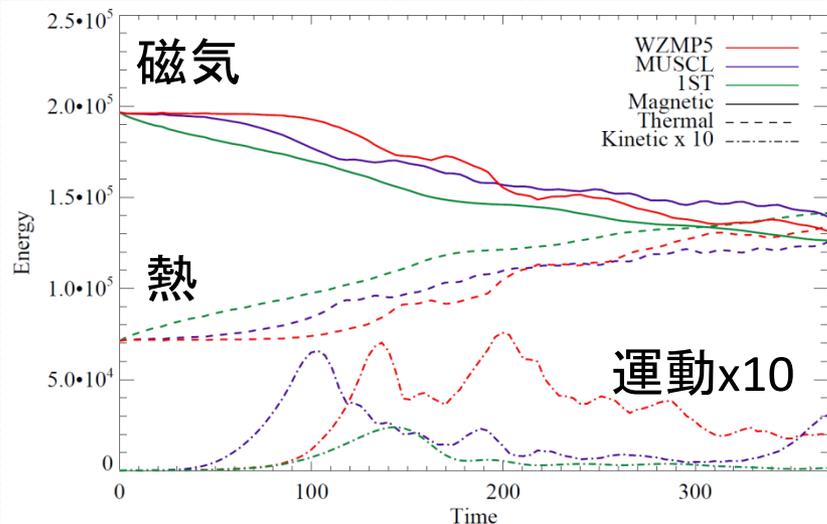


# 磁気リコネクション

- 宇宙プラズマにおける磁気エネルギー解放機構
  - 恒星フレア、磁気圏サブストーム、パルサー磁気圏...



# 磁気リコネクション



1次  
2次  
5次

- エネルギー時間変化
  - 1次スキームでは数値散逸が大きく、MRX失敗
  - 5次スキームではより効率的なエネルギー変換

## ● 電気抵抗

- 1,2次スキームでは、数値的な抵抗で散逸(実線 >> 点線)
- 5次スキームでは手で与えた抵抗で散逸(実線 ~ 点線)

# まとめ

- 実用的なMHDシミュレーションのためには、**高次精度化と多次元化は必須!!**
- **高次精度化**
  - セル境界の左右の値を**非線形補間**で求める
  - 次数が上がるほど**特性変数変換**が重要
- **多次元化**
  - 1次元数値解法の利用
  - **磁場発散**の処理 (CT, プロジェクション、移流拡散法)