新しい圧縮性MHD解法：
高次精度，衝撃波捕獲，磁場のソレノイダル条件
を自動的に満たすには

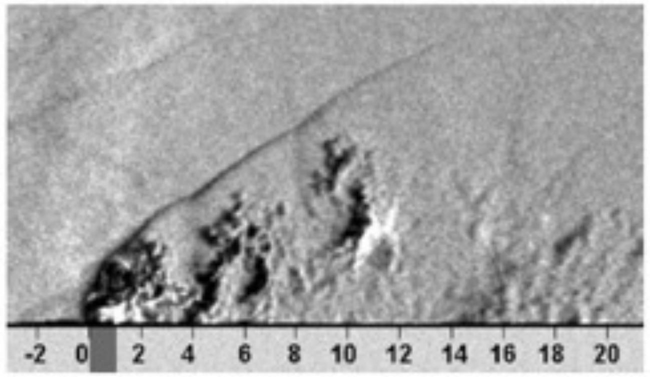
河合宗司

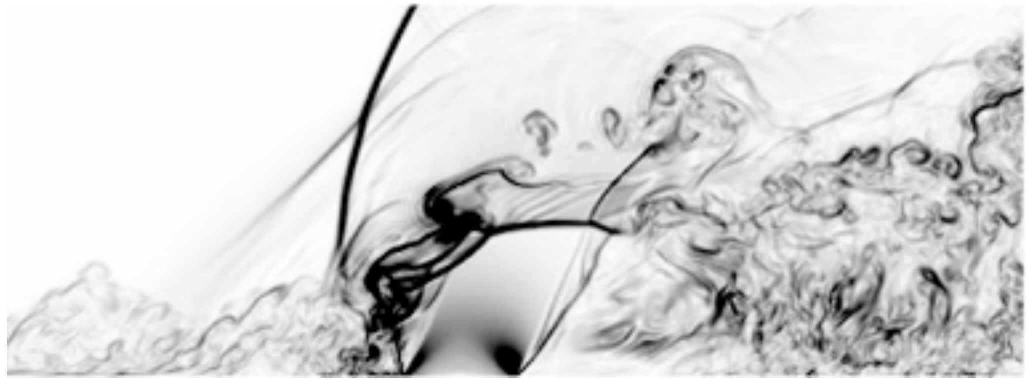
宇宙科学研究所 (ISAS), 宇宙航空研究開発 (JAXA)

kawai@flab.isas.jaxa.jp
http://flab.eng.isas.jaxa.jp/member/kawai

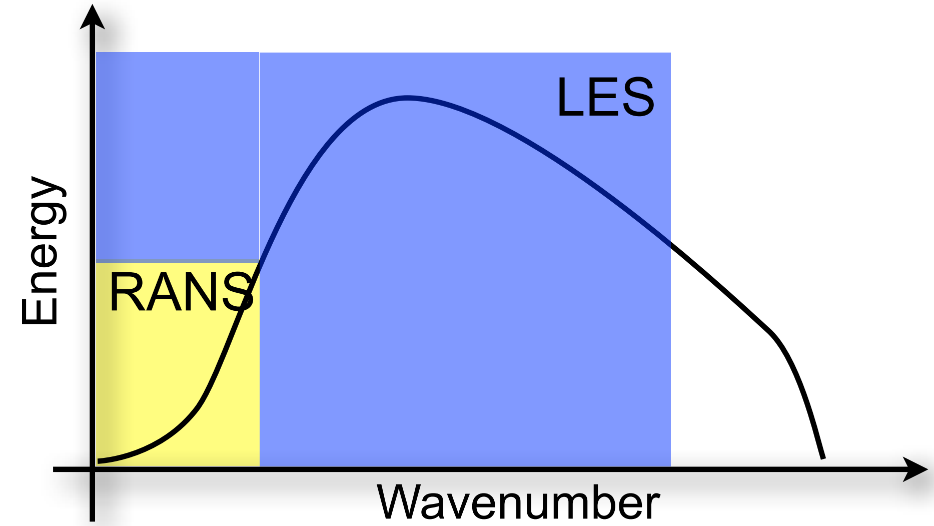
謝辞：JAXAインターナショナルトップヤングフェローシッププログラム

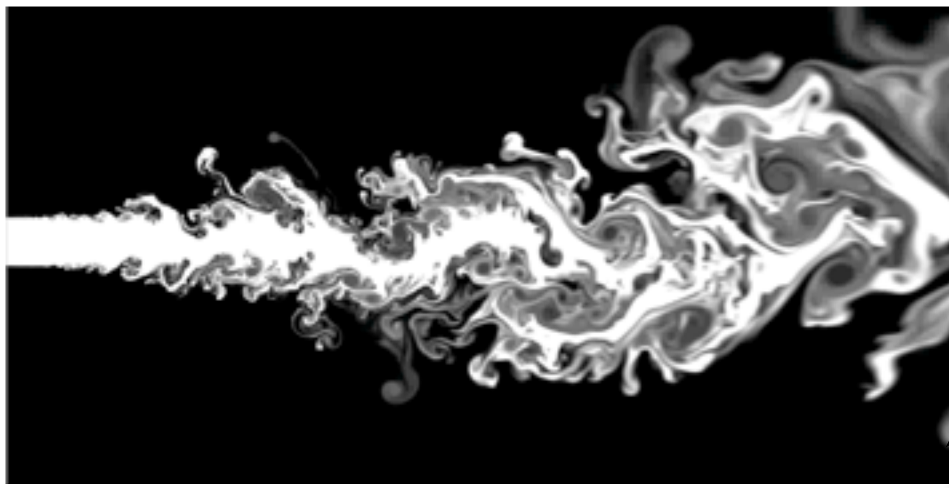
乱流: 平均データから変動データへ

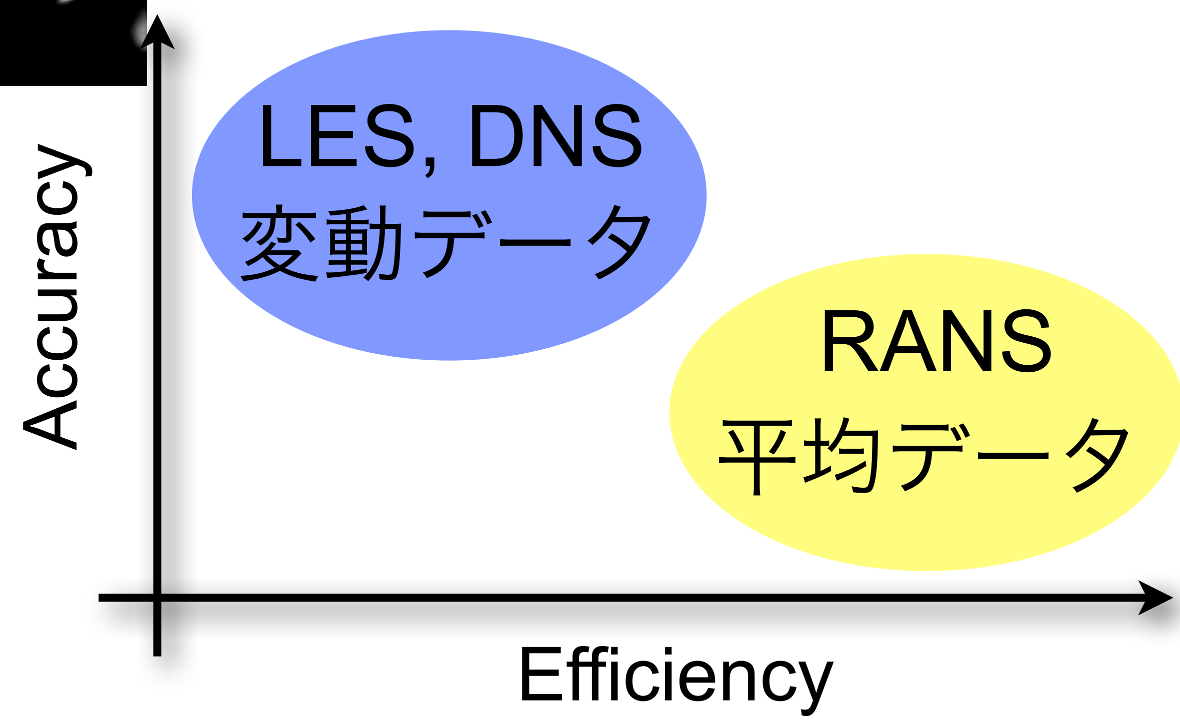




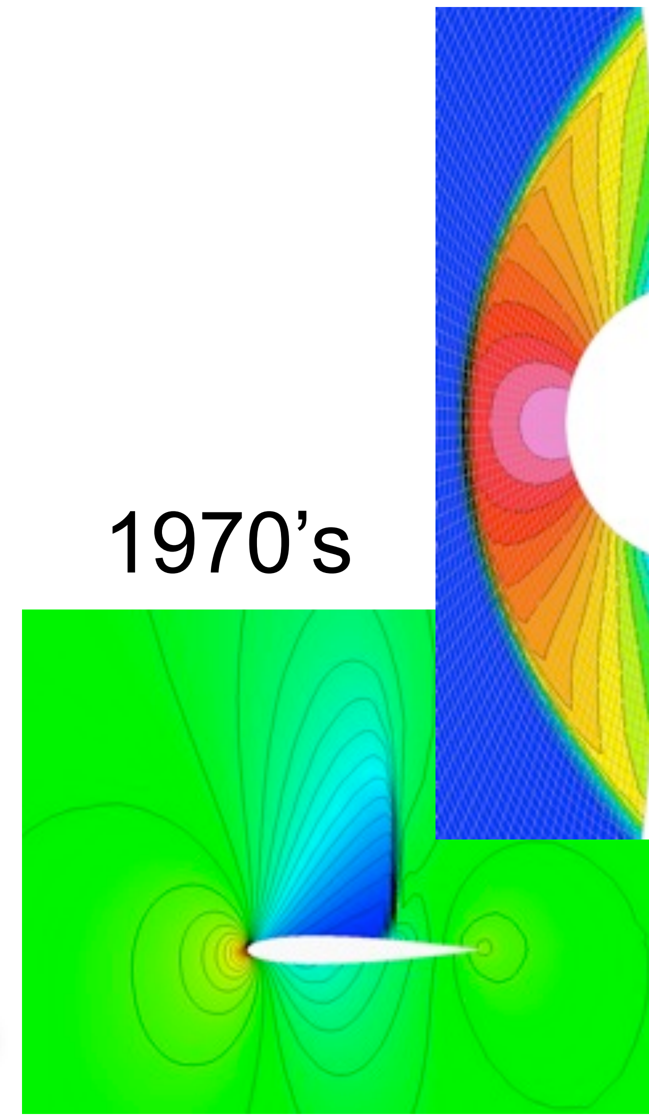
Kawai & Lele JCP (2010)







1970’s



低次精度風上法から高次精度中心差分法へ（必須！）

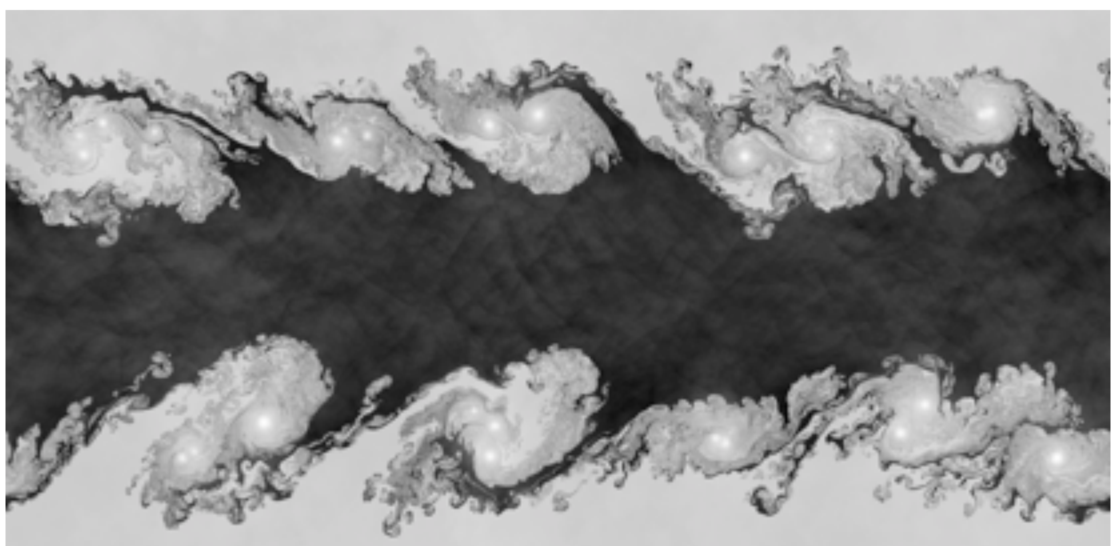
なぜ高次精度スキームが必要か？

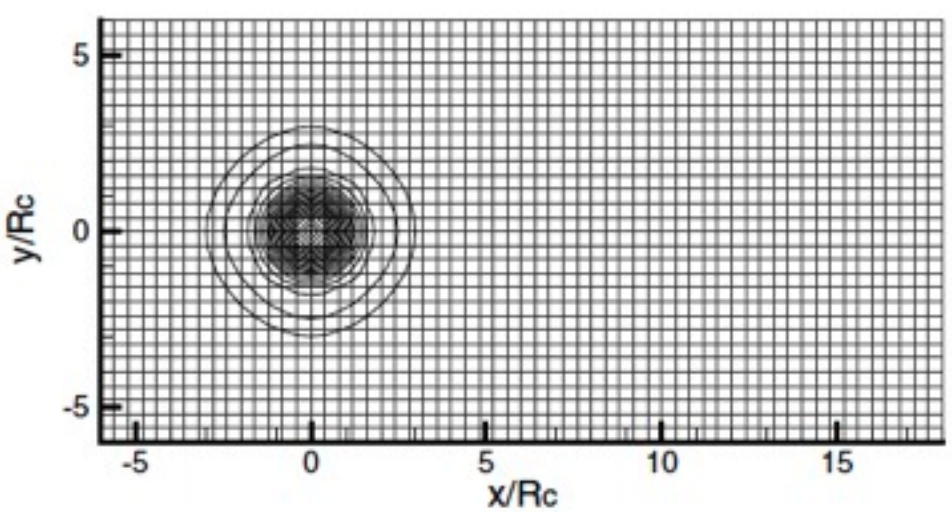
低次精度風上法（FDS, FVS, AUSM: 1970’s）

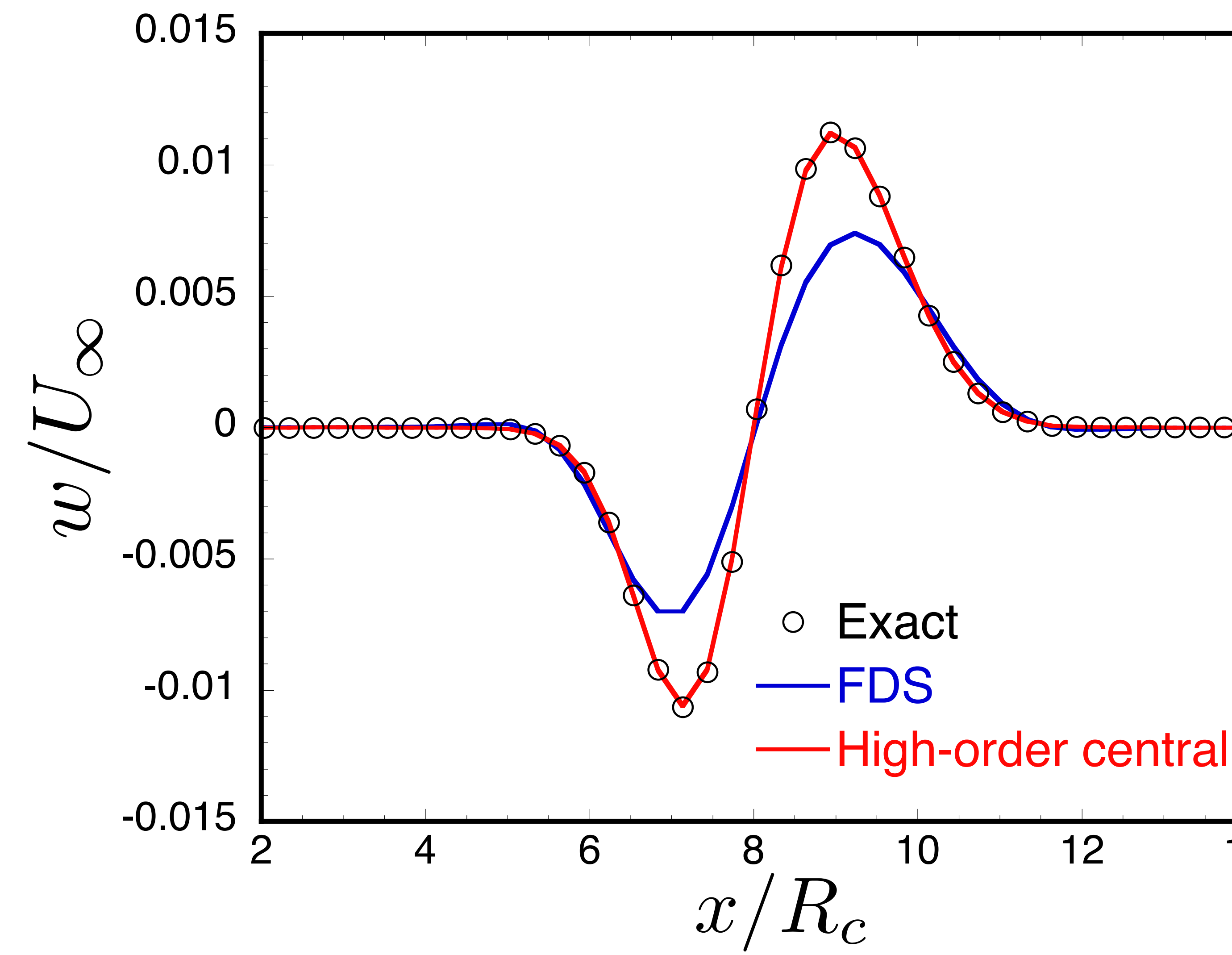
$$Q_j^{n+1} = Q_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\widetilde{E}_{j+1/2} - \widetilde{E}_{j-1/2}\right]$$

$$\widetilde{E}_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left[E_{j+1} + E_j - |A|_{\mathrm{ave}}\left(Q_{j+1} - Q_j\right)\right]$$

Turbulence: K-H instability



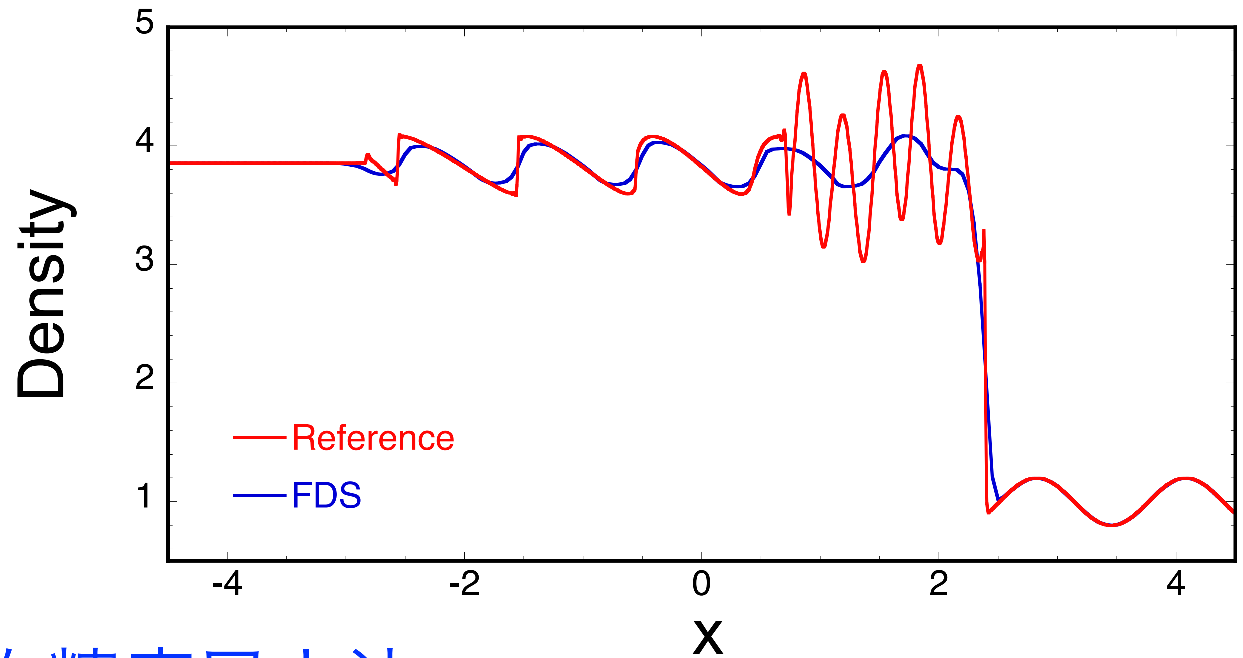


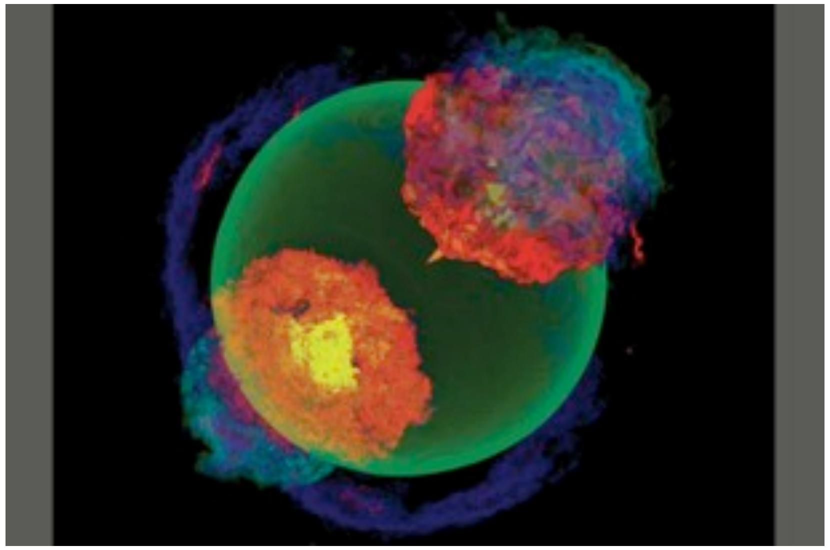


圧縮性流体シミュレーション法の課題

衝撃波や乱流が共に存在する流れをいかにして精度良く計算するか

- 乱流: 高次精度中心差分系non-dissipativeスキーム
- 衝撃波: 数値粘性必要（例： 低次精度風上法 FDS, FVS, AUSM法等）





University of Chicago

▶ 高次精度風上法

WENO法(Jiang & Shu JCP 1996)やWCNS法(Deng & Maekawa JCP 1997)

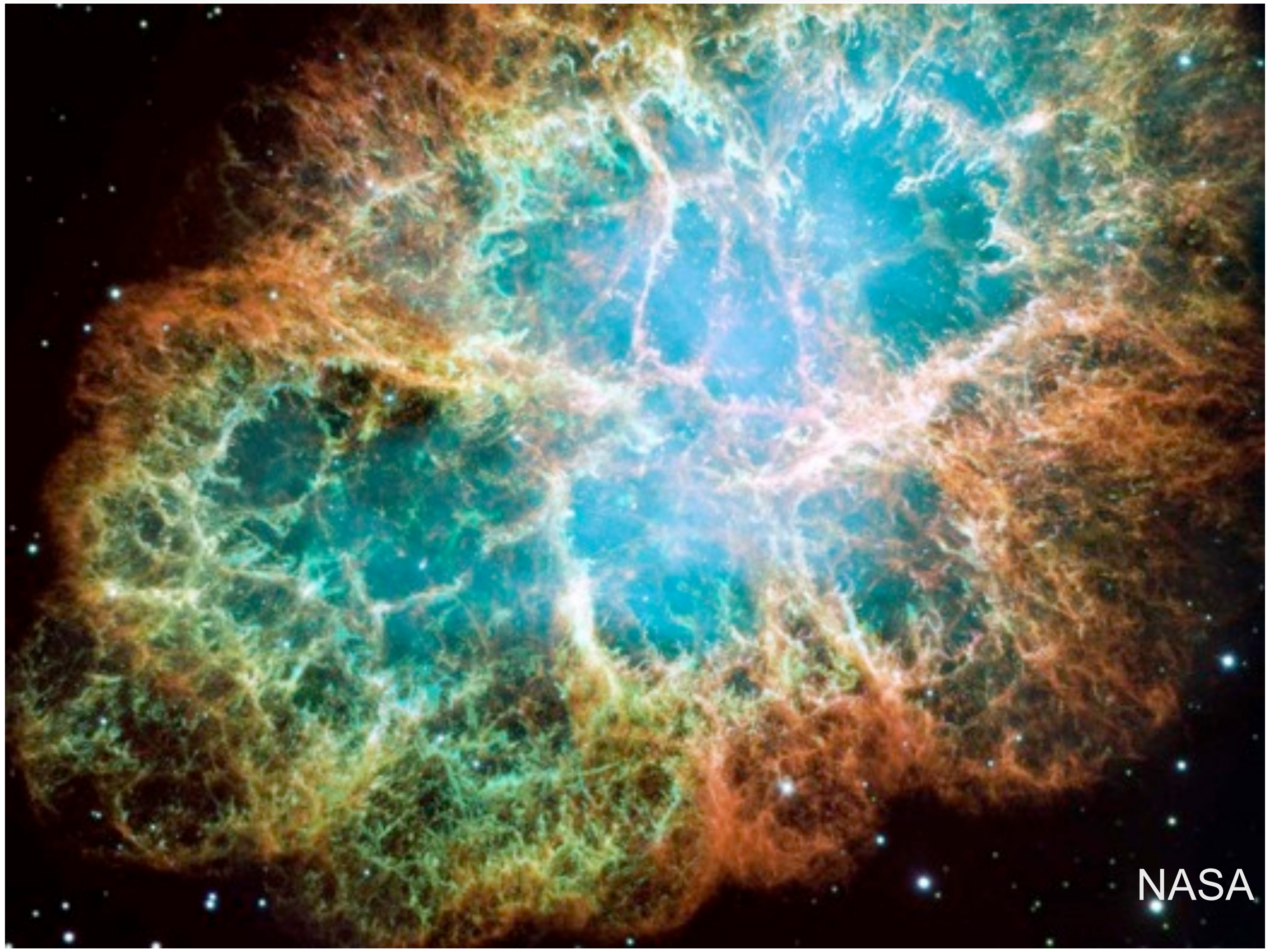
- フォーマルな精度は高次だが、実際には数値粘性過多

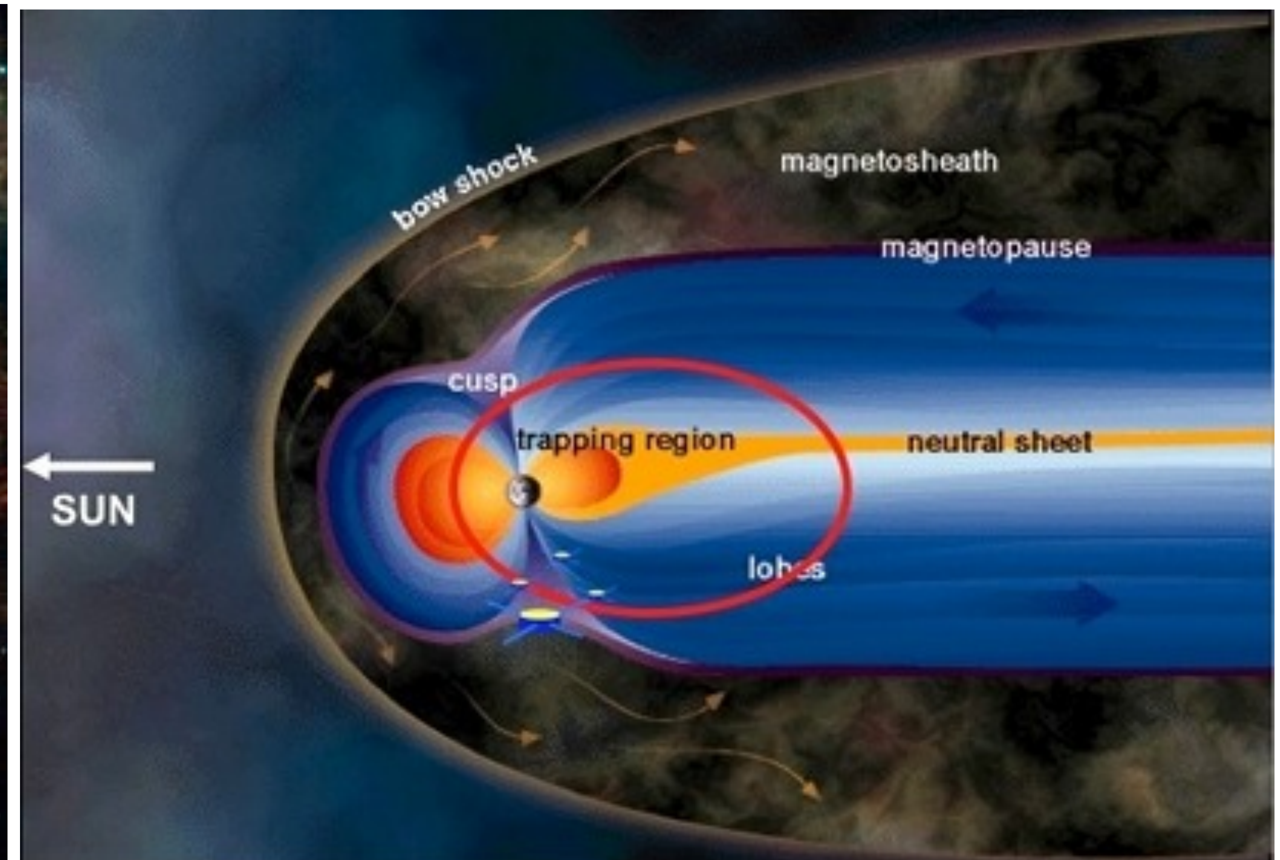
▶ 物理的な考察に基づく計算法

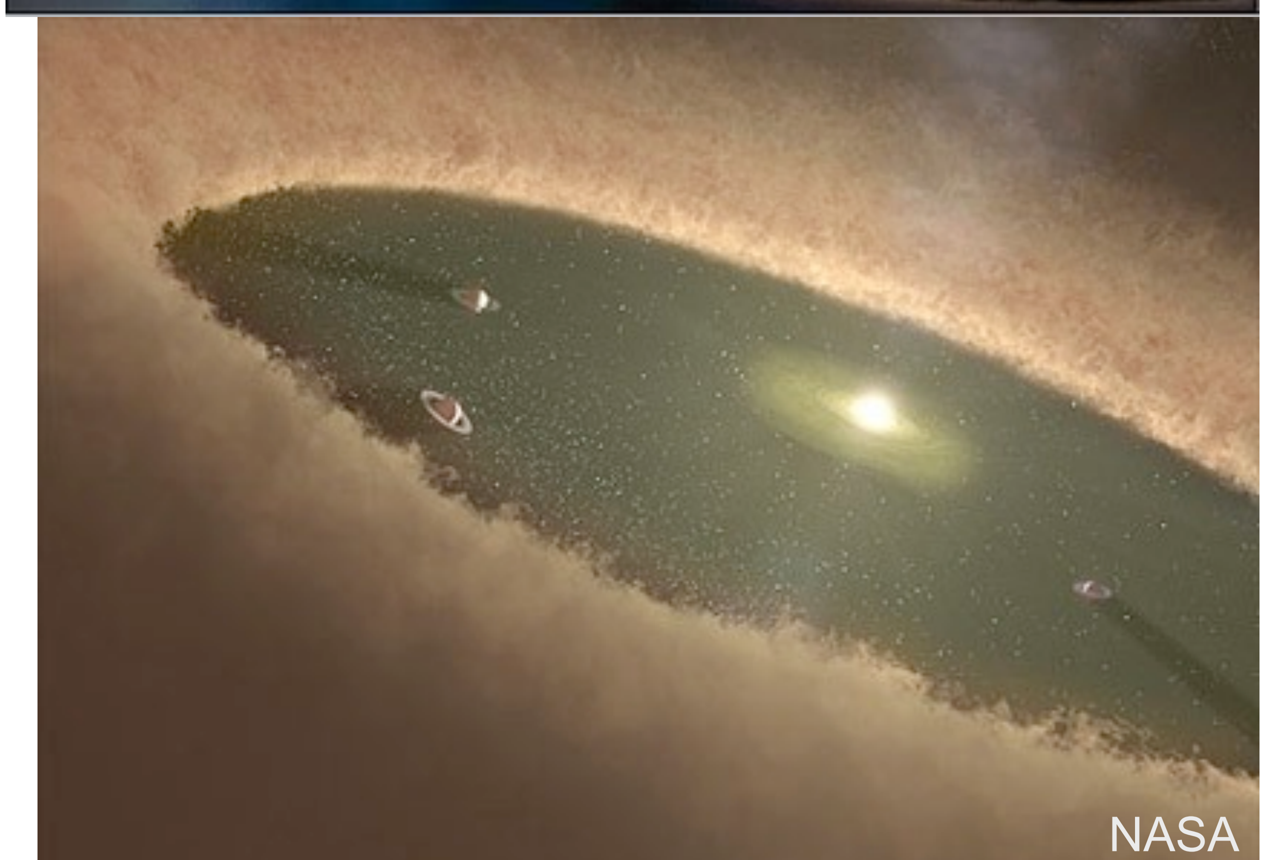
LAD法 (Kawai & Lele JCP 2008,2010)

- 高次精度中心差分法をベースに衝撃波成分にのみ数値粘性を入れて、乱流成分には数値粘性を入れない

圧縮性プラズマ流体







- 衝撃波を捕獲：数値粘性必要・低次精度

相反する

- 乱流を解像：数値粘性は天敵・高次精度

圧縮性MHD解法の現状

$\nabla \cdot \boldsymbol{B} \neq 0$

- Eight-wave formulation法 Powell NASA report (1994)
  - エラーを移流・拡散させる，非保存型（衝撃波で問題）
- Projection法 Brackbill & Barnes JCP (1980)
  - 後処理でポアソン方程式を解いて磁場を補正，計算効率悪い

$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$

- Constrained Transport法 Evans & Hawley APJ (1988)
  - 磁場にスタガード格子，2次精度

全て同時に満たす計算法は存在しない！

- 衝撃波を捕獲：数値粘性必要・低次精度

相反する

- 乱流を解像：数値粘性は天敵・高次精度
- 磁場のソレノイダル：$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$

提案する計算法のコンセプト

物理的な考察に基づく計算法

流体の衝撃波捕獲スキーム：LAD法 Kawai et al. JCP (2008, 2010)

$$\frac{\partial \rho \boldsymbol{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \boldsymbol{u}\boldsymbol{u} + p\underline{\boldsymbol{\delta}} - \beta_{\mathrm{art}} \left(\nabla \cdot \boldsymbol{u} \right) \underline{\boldsymbol{\delta}} \right) = 0$$

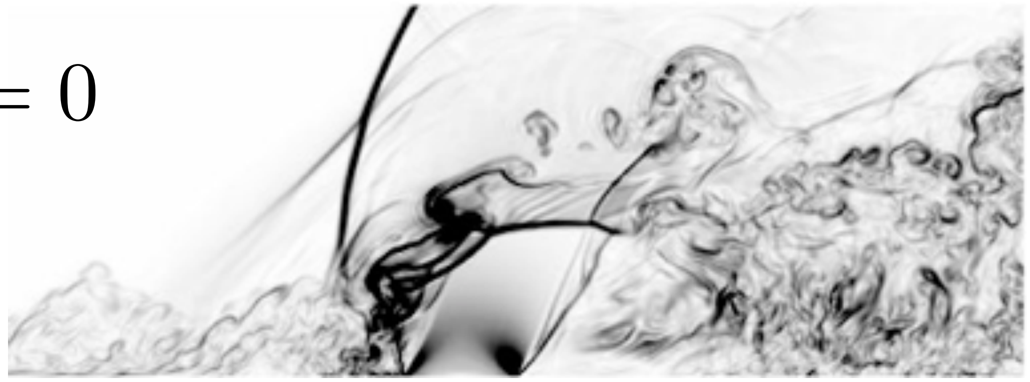
- 流体の衝撃波 $\nabla \cdot \boldsymbol{u}$ に数値粘性を作用させて衝撃波を捕獲する
- 渦度 $\nabla \times \boldsymbol{u}$ には数値粘性の効果を入れない

提案する計算法のコンセプト

物理的な考察に基づく計算法

流体の衝撃波捕獲スキーム：LAD法 Kawai et al. JCP (2008, 2010)

$$\frac{\partial \rho \boldsymbol{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \boldsymbol{u}\boldsymbol{u} + p\underline{\boldsymbol{\delta}} - \beta_{\text{art}} \left(\nabla \cdot \boldsymbol{u} \right) \underline{\boldsymbol{\delta}} \right) = 0$$



Kawai & Lele AIAA J. (2010)

- 流体の衝撃波 $\nabla \cdot \boldsymbol{u}$ に数値粘性を作用させて衝撃波を捕獲する
- 渦度 $\nabla \times \boldsymbol{u}$ には数値粘性の効果を入れない

基本概念

- 磁場の発散 $\nabla \cdot \boldsymbol{B}$ は乱さない
- 磁場の衝撃波 $\nabla \times \boldsymbol{B}$ の不連続を捕える
- 数値粘性は衝撃波近傍のみに入れる

$\nabla \cdot \boldsymbol{B}$ には数値粘性の効果を入れない

$\nabla \times \boldsymbol{B}$ に効果的に数値粘性を入れる

衝撃波付近以外は高次精度を保持

提案する新しい計算法

基本概念

- 磁場の発散 $\nabla \cdot \boldsymbol{B}$ は乱さない
- 磁場の衝撃波 $\nabla \times \boldsymbol{B}$ の不連続を捕える
- 数値粘性は衝撃波近傍のみに入れる

$\nabla \cdot \boldsymbol{B}$ には数値粘性の効果を入れない
$\nabla \times \boldsymbol{B}$ に効果的に数値粘性を入れる
衝撃波付近以外は高次精度を保持

全ての衝撃波捕獲スキームは，線型（中心）差分＋非線形数値粘性と書ける

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = RHS_{\mathrm{phyB}} + \text{非線形数値粘性}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \eta_{\mathrm{art}} \nabla \times \boldsymbol{B} = \eta_{\mathrm{art}} \boldsymbol{J}$$

数値粘性効果の解析

基本概念

- 磁場の発散 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}$ は乱さない
- 磁場の衝撃波 $\nabla\times\boldsymbol{B}$ の不連続を捕える
- 数値粘性は衝撃波近傍のみに入れる

$\nabla\cdot\boldsymbol{B}$ には数値粘性の効果を入れない

$\nabla\times\boldsymbol{B}$ に効果的に数値粘性を入れる

衝撃波付近以外は高次精度を保持

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = RHS_{\mathrm{phyB}} + \nabla\cdot\begin{bmatrix} 0 & A_z & -A_y \\ -A_z & 0 & A_x \\ A_y & -A_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \eta_{\mathrm{art}}\nabla\times\boldsymbol{B} = \eta_{\mathrm{art}}\boldsymbol{J}$$

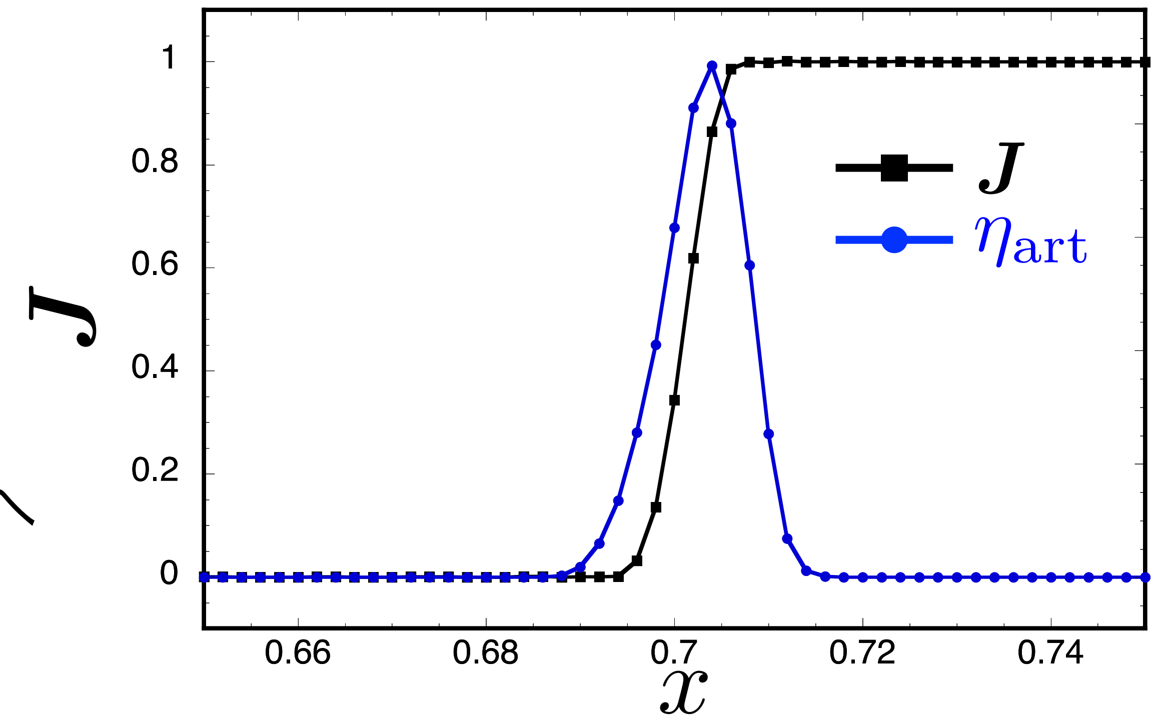
発散方程式: $$\frac{\partial\left(\nabla\cdot\boldsymbol{B}\right)}{\partial t} = \frac{\partial^2\left(A_z - A_z\right)}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\left(A_y - A_y\right)}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\left(A_x - A_x\right)}{\partial y\partial z}$$

回転方程式: $$\frac{\partial\left(\nabla\times\boldsymbol{B}\right)}{\partial t} = \frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t} = RHS_{\mathrm{phyJ}} + \nabla^2\left(\boldsymbol{A}\right) - \nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}\right)$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t} = RHS_{\mathrm{phyJ}} + \boxed{\nabla^2\left(\eta_{\mathrm{art}}\boldsymbol{J}\right)}$$

数値粘性の局所化

$$\eta_{\mathrm{art}} = C_\eta \frac{1}{\rho a} \overline{\left| \frac{\partial^r |\boldsymbol{J}|^2}{\partial x^r} \Delta x^{r+3} \right|}$$



$$\eta_{\mathrm{art}} \propto \frac{\partial^4 \boldsymbol{J}}{\partial x^4}$$ 自動的に衝撃波近傍へ

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = RHS_{\mathrm{phyB}} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} 0 & A_z & -A_y \\ -A_z & 0 & A_x \\ A_y & -A_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \eta_{\mathrm{art}} \nabla \times \boldsymbol{B} = \eta_{\mathrm{art}} \boldsymbol{J}$$

PDEレベルで真＝離散化後も真か？？？

$$\frac{\partial (\nabla \cdot \boldsymbol{B})}{\partial t} = 0$$ $$(\mathcal{D} \cdot \boldsymbol{B})^{n+1}_{(i,j,k)} = (\mathcal{D} \cdot \boldsymbol{B})^{n}_{(i,j,k)} = 0 \quad ???$$

どんな差分オペレータを使えば良いか？

数学的に真 = 離散化後も真？？？

離散化後の $\nabla \cdot \boldsymbol{B}$ (時間ステップn, 格子点[i,j,k])

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{B})^n_{(i,j,k)} = \frac{1}{\Delta x} D^{\mathcal{L}_{B_x},i}_{(i,j,k)} [B_x] + \frac{1}{\Delta y} D^{\mathcal{L}_{B_y},j}_{(i,j,k)} [B_y] + \frac{1}{\Delta z} D^{\mathcal{L}_{B_z},k}_{(i,j,k)} [B_z]$$

離散化後の B_x 式 (時間ステップn, 格子点[i,j,k])

$$B^{n+1}_{x,(i,j,k)} = B^n_{x,(i,j,k)} - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(D^{\mathcal{L}_{RHS},j}_{(i,j,k)} [RHS] + D^{\mathcal{L}_{A_z},j}_{(i,j,k)} [A_z] \right) + \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(D^{\mathcal{L}_{RHS},k}_{(i,j,k)} [RHS] + D^{\mathcal{L}_{A_y},k}_{(i,j,k)} [A_y] \right)$$

$$\frac{1}{\Delta x} D^{\mathcal{L}_{B_x},i}_{(i,j,k)}$$

Induction eqs.: $\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = RHS_{\mathrm{phyB}} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} 0 & A_z & -A_y \\ -A_z & 0 & A_x \\ A_y & -A_x & 0 \end{bmatrix}$

$$\frac{1}{\Delta x} D^{\mathcal{L}_{B_x},i}_{(i,j,k)} \left[B^{n+1}_{x,(i,j,k)} \right] = \frac{1}{\Delta x} D^{\mathcal{L}_{B_x},i}_{(i,j,k)} \left[B^{n}_{x,(i,j,k)} \right] - \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y} D^{\mathcal{L}_{B_x},i}_{(i,j,k)} \left(D^{\mathcal{L}_{RHS},j}_{(i,j,k)} [RHS] + D^{\mathcal{L}_{A_z},j}_{(i,j,k)} [A_z] \right) + \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta z} D^{\mathcal{L}_{B_x},i}_{(i,j,k)} \left(D^{\mathcal{L}_{RHS},k}_{(i,j,k)} [RHS] + D^{\mathcal{L}_{A_y},k}_{(i,j,k)} [A_y] \right)$$

数学的に真 ＝ 離散化後も真？？？

離散化後の $\nabla \cdot \boldsymbol{B}$ 時間発展式 (時間ステップn, 格子点[i,j,k])

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{B})^{n+1}_{(i,j,k)} = (\nabla \cdot \boldsymbol{B})^{n}_{(i,j,k)} + \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y}\{F_{xy}\} + \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta z}\{F_{xz}\} + \frac{\Delta t}{\Delta y \Delta z}\{F_{yz}\}$$

if $F_{xy} = F_{xz} = F_{yz} = 0$

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{B})^{n+1}_{(i,j,k)} = (\nabla \cdot \boldsymbol{B})^{n}_{(i,j,k)} = (\nabla \cdot \boldsymbol{B})^{0}_{(i,j,k)}$$

離散化後も磁場のソレノイダル条件が満たされる！

$$\begin{aligned} F_{xy} = &-D^{\mathcal{L}_{B_x},i}_{(i,j,k)} \left(D^{\mathcal{L}_{RHS},j}_{(i,j,k)} [RHS] + D^{\mathcal{L}_{A_z},j}_{(i,j,k)} [A_z] \right) \\ &+ D^{\mathcal{L}_{B_y},j}_{(i,j,k)} \left(D^{\mathcal{L}_{RHS},i}_{(i,j,k)} [RHS] + D^{\mathcal{L}_{A_z},i}_{(i,j,k)} [A_z] \right) \end{aligned}$$

if $D^{\mathcal{L}_{B_x},i}_{(i,j,k)} D^{\mathcal{L}_{A_z},j}_{(i,j,k)} = D^{\mathcal{L}_{B_y},j}_{(i,j,k)} D^{\mathcal{L}_{A_z},i}_{(i,j,k)}$

$$F_{xy} = F_{xz} = F_{yz} = 0$$

どんな差分オペレータを使えば良いか？

$$D^{\mathcal{L}_{B_x},i}_{(i,j,k)} D^{\mathcal{L}_{A_z},j}_{(i,j,k)} = D^{\mathcal{L}_{B_y},j}_{(i,j,k)} D^{\mathcal{L}_{A_z},i}_{(i,j,k)}$$

$$D^{\mathcal{L}_{B_x},i}_{(i,j,k)} \left[f_{(i,j,k)}\right] = \sum_{p=M_{a,(i,j,k)}}^{N_{a,(i,j,k)}} a_{p,(i,j,k)} \left[f_{(i+p+1,j,k)} - f_{(i+p,j,k)}\right]$$

$$D^{\mathcal{L}_{A_z},j}_{(i,j,k)} \left[f_{(i,j,k)}\right] = \sum_{q=M_{b,(i,j,k)}}^{N_{b,(i,j,k)}} b_{q,(i,j,k)} \left[f_{(i,j+q+1,k)} - f_{(i,j+q,k)}\right]$$

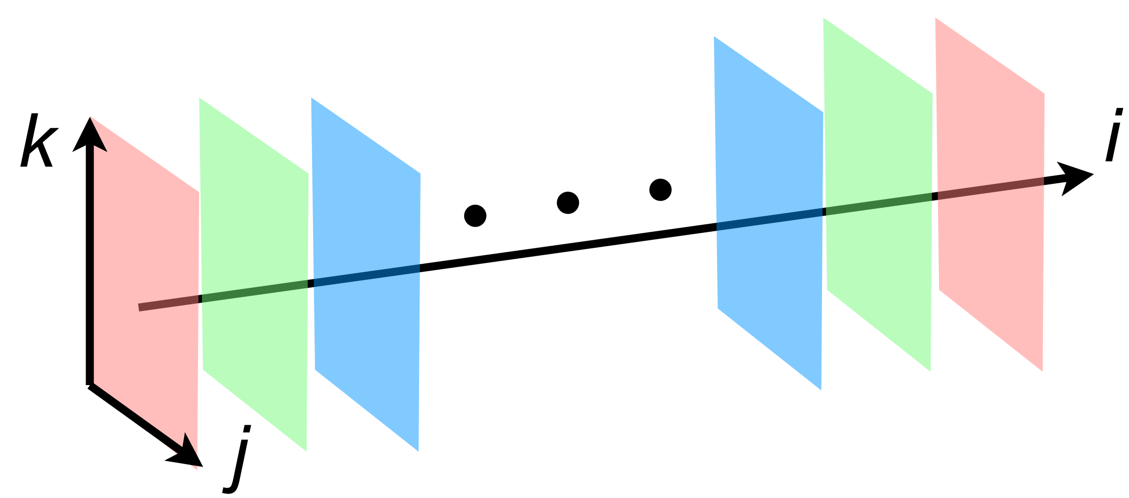
$$D^{\mathcal{L}_{B_y},j}_{(i,j,k)} \left[f_{(i,j,k)}\right] = \sum_{q=M_{c,(i,j,k)}}^{N_{c,(i,j,k)}} c_{q,(i,j,k)} \left[f_{(i,j+q+1,k)} - f_{(i,j+q,k)}\right]$$

$$D^{\mathcal{L}_{A_z},i}_{(i,j,k)} \left[f_{(i,j,k)}\right] = \sum_{p=M_{d,(i,j,k)}}^{N_{d,(i,j,k)}} d_{p,(i,j,k)} \left[f_{(i+p+1,j,k)} - f_{(i+p,j,k)}\right]$$

$$D^{\mathcal{L}_{B_x},i}_{(i,j,k)} D^{\mathcal{L}_{A_z},j}_{(i,j,k)} \left[f_{(i,j,k)}\right] = \sum_{p=M_{a,(i,j,k)}}^{N_{a,(i,j,k)}} \sum_{q=M_{b,(i+p+1,j,k)}}^{N_{b,(i+p+1,j,k)}} a_{p,(i,j,k)} b_{q,(i+p+1,j,k)} \left[f_{(i+p+1,j+q+1,k)} - f_{(i+p+1,j+q,k)}\right] \cdots$$

$$D^{\mathcal{L}_{B_y},j}_{(i,j,k)} D^{\mathcal{L}_{A_z},i}_{(i,j,k)} \left[f_{(i,j,k)}\right] = \sum_{q=M_{c,(i,j,k)}}^{N_{c,(i,j,k)}} \sum_{p=M_{d,(i,j+q+1,k)}}^{N_{d,(i,j+q+1,k)}} c_{q,(i,j,k)} d_{p,(i,j+q+1,k)} \left[f_{(i+p+1,j+q+1,k)} - f_{(i+p,j+q+1,k)}\right] \cdots$$

$$a_{m,(i,j,k)} = d_{m,(i,j+n,k)}$$



$$\frac{\partial f}{\partial \xi_i}$$

コロケート格子で任意の精度の任意のスキーム(境界スキームもOK!)を用いる事が可能

- 6次精度コンパクト差分法

提案する新しい計算法のまとめ

数値拡散項を物理的考察からPDEレベルで入れる

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = RHS_{\mathrm{phyB}} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} 0 & A_z & -A_y \\ -A_z & 0 & A_x \\ A_y & -A_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \eta_{\mathrm{art}} \nabla \times \boldsymbol{B} = \eta_{\mathrm{art}} \boldsymbol{J}$$

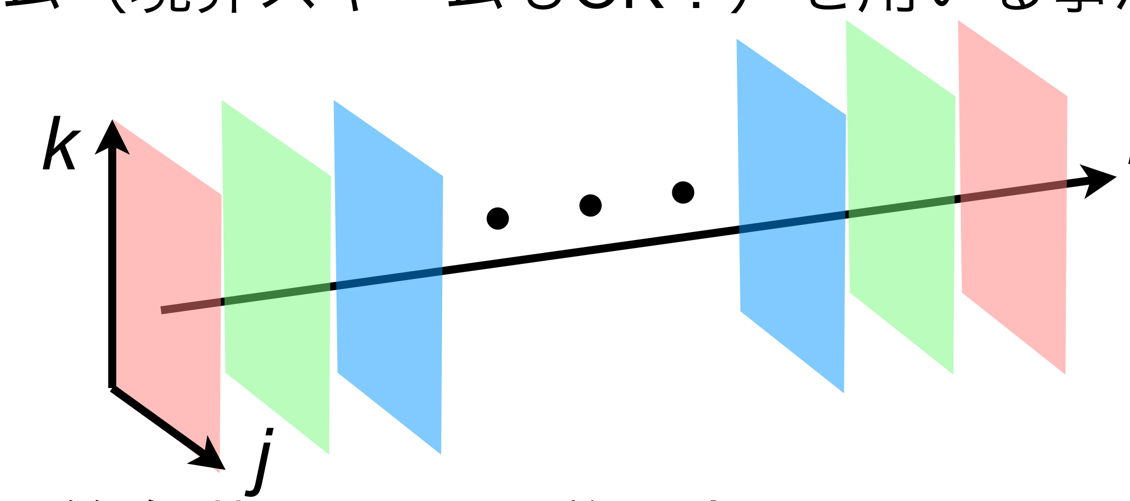
$$\eta_{\mathrm{art}} \propto \frac{\partial^4 \boldsymbol{J}}{\partial x^4}$$ → 自動的に衝撃波近傍へ

PDEレベルで効果的に衝撃波捕獲し，自動的に磁場のソレノイダルを満たす

物理的性質を乱さないよう矛盾無く離散化する

良い性質：任意の精度の任意のスキーム（境界スキームもOK！）を用いる事が可能

- 6次精度コンパクト差分法



$$\frac{\partial f}{\partial \xi_i}$$

- 衝撃波以外では高次精度
- 完全保存型，コロケート格子，計算負荷少ない，導入容易

数値実験: アイディアの立証

1) 無次元定数 C_η の評価

$$\eta_{\mathrm{art}} = {\color{red}C_\eta} \sqrt{\frac{1}{\rho a} \left| \frac{\partial^r \left|\boldsymbol{J}\right|^2}{\partial x^r} \Delta x^{r+3} \right|}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = RHS_{\mathrm{phyB}} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} 0 & A_z & -A_y \\ -A_z & 0 & A_x \\ A_y & -A_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \eta_{\mathrm{art}} \nabla \times \boldsymbol{B} = \eta_{\mathrm{art}} \boldsymbol{J}$$

2) 滑らかな流れ（精度の検証）: Alfven波の伝播

3) 不連続を含む流れ（衝撃波捕獲性の検証）: 衝撃波管問題

4) 多次元流れ: Orszag-Tang 衝撃波ー渦干渉問題

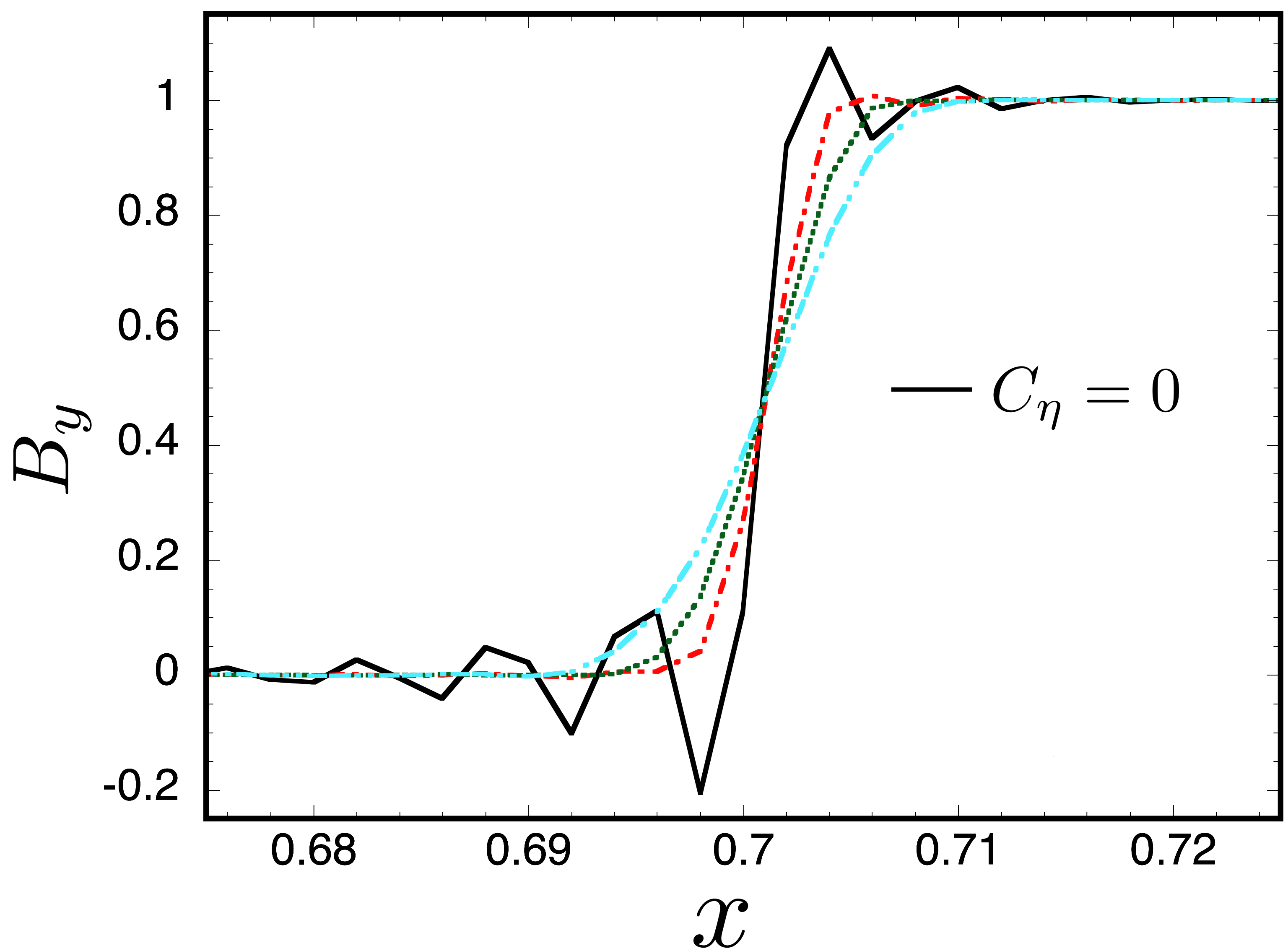
無次元定数 C_η の評価

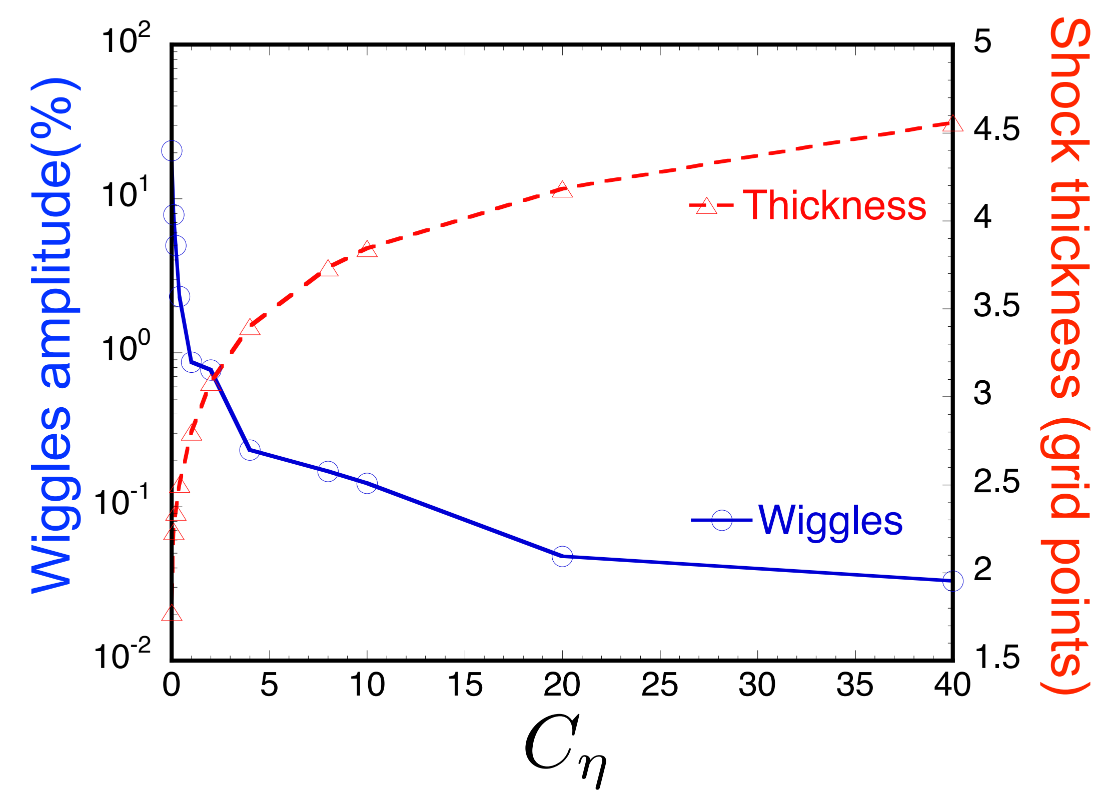
1D slow switch-off shock problem

Falle et al. MNRAS (1998)

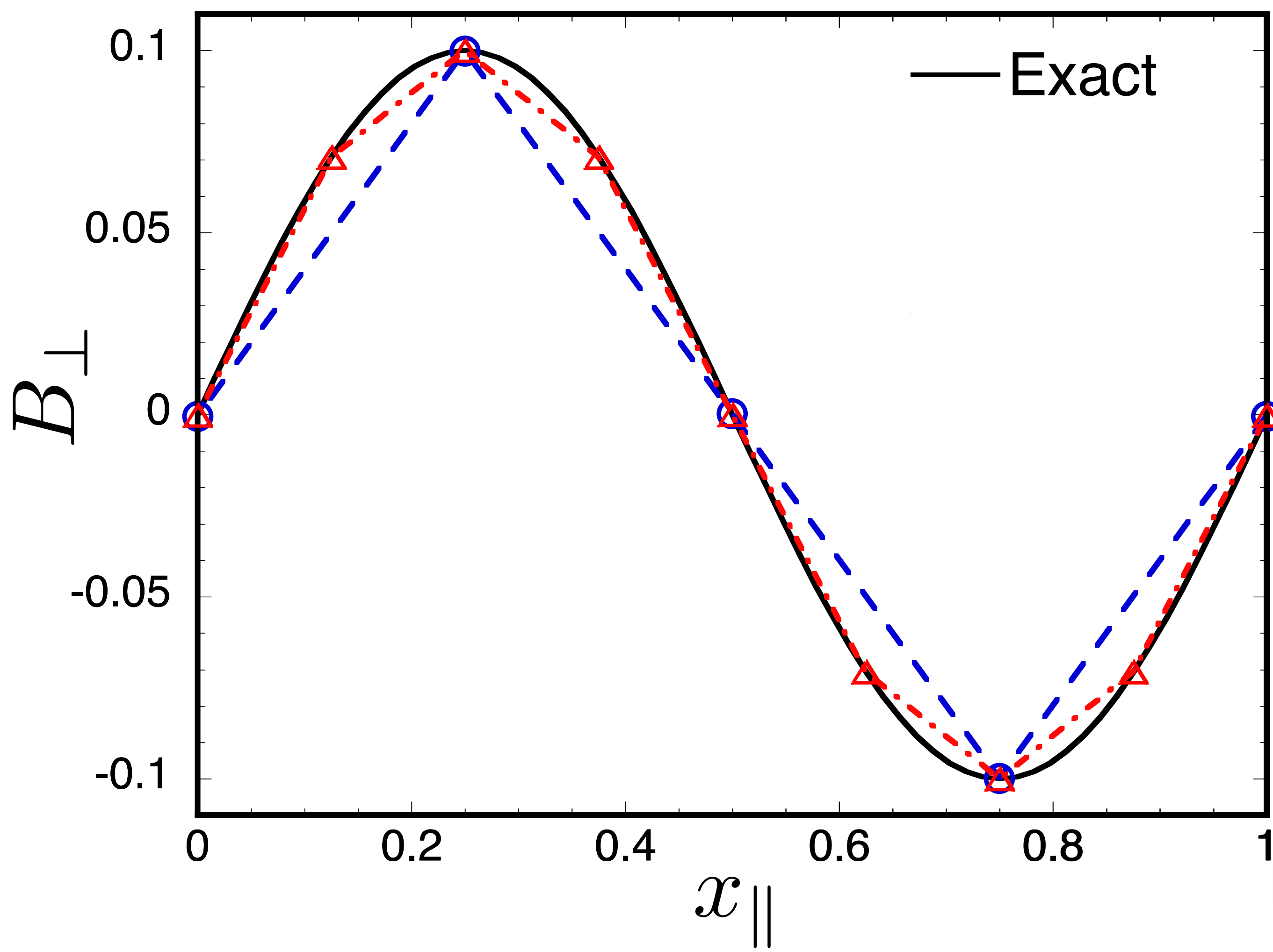
$$\eta_{\mathrm{art}} = C_\eta \overline{\frac{1}{\rho a}\left|\frac{\partial^r |\boldsymbol{J}|^2}{\partial x^r}\Delta x^{r+3}\right|}$$

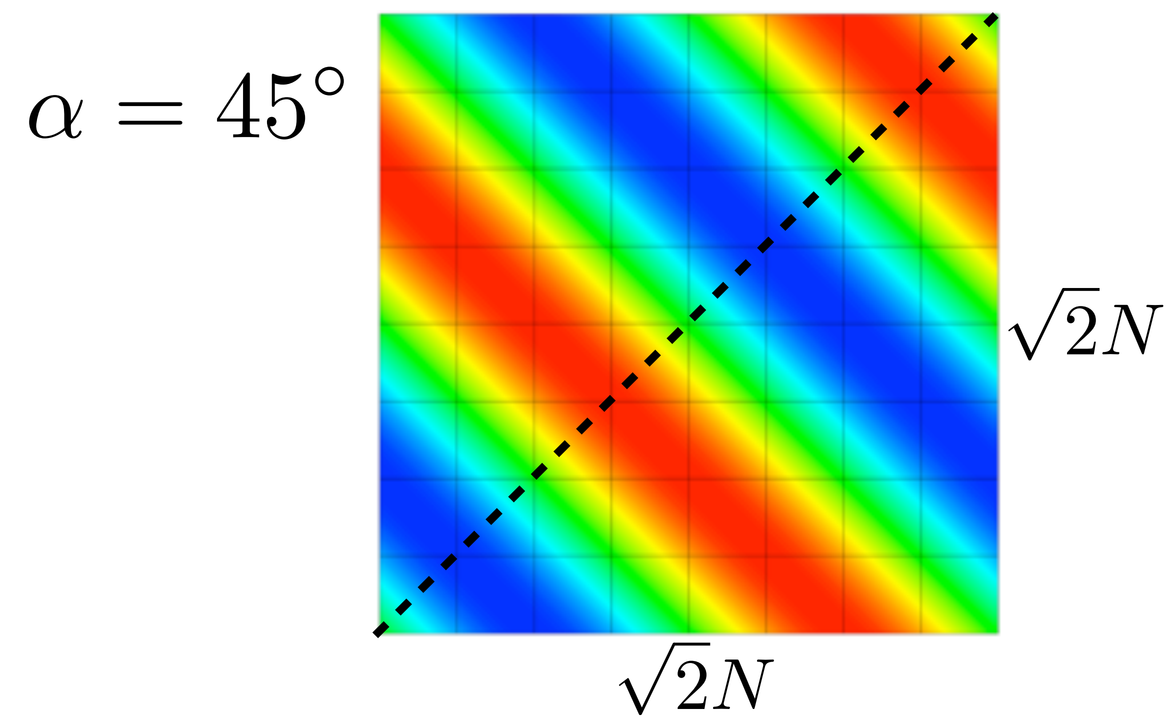
$$\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} = RHS_{\mathrm{phyJ}} + \nabla^2 \left(\eta_{\mathrm{art}} \boldsymbol{J}\right)$$



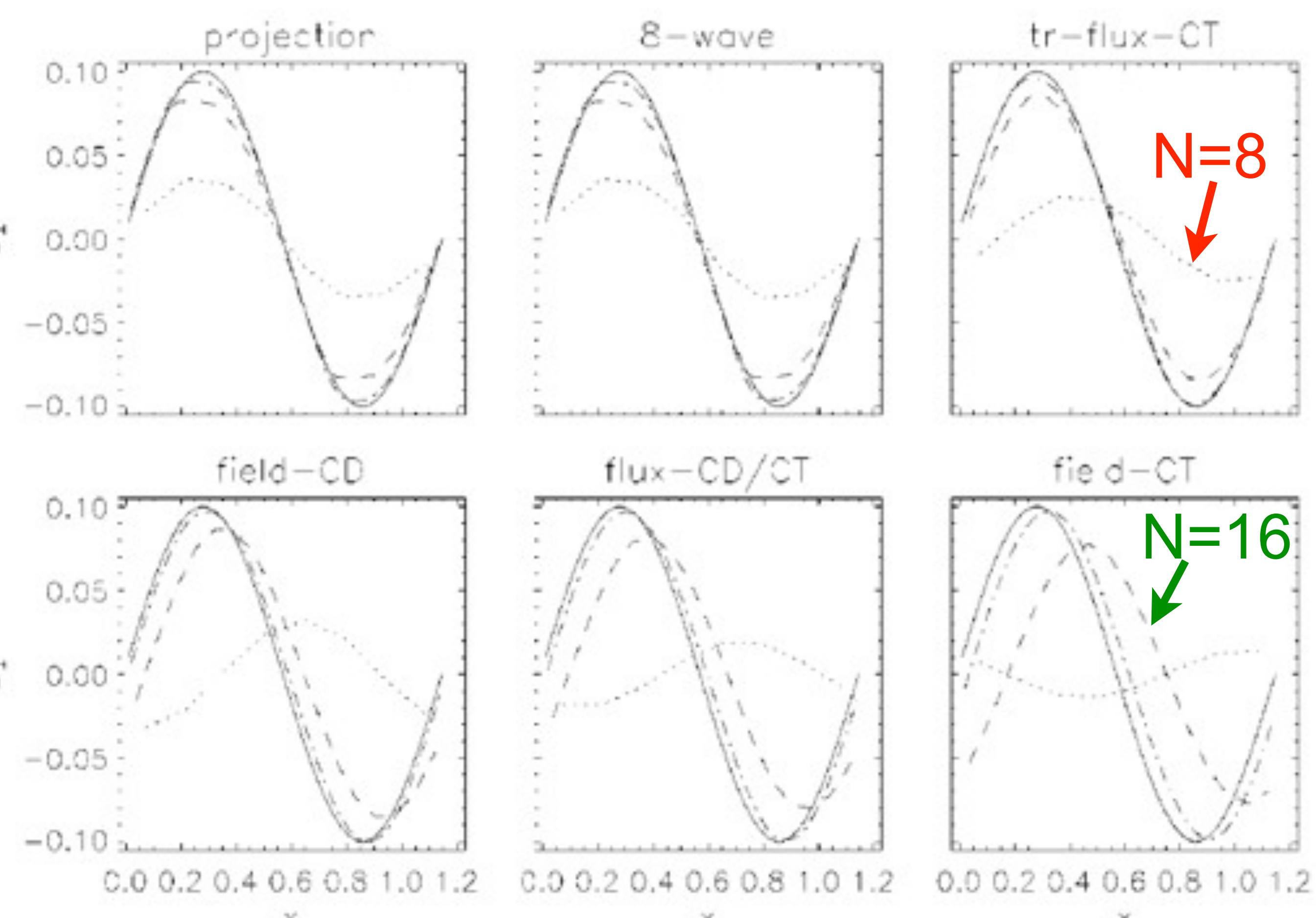


滑らかな流れ：Alfven波の伝播



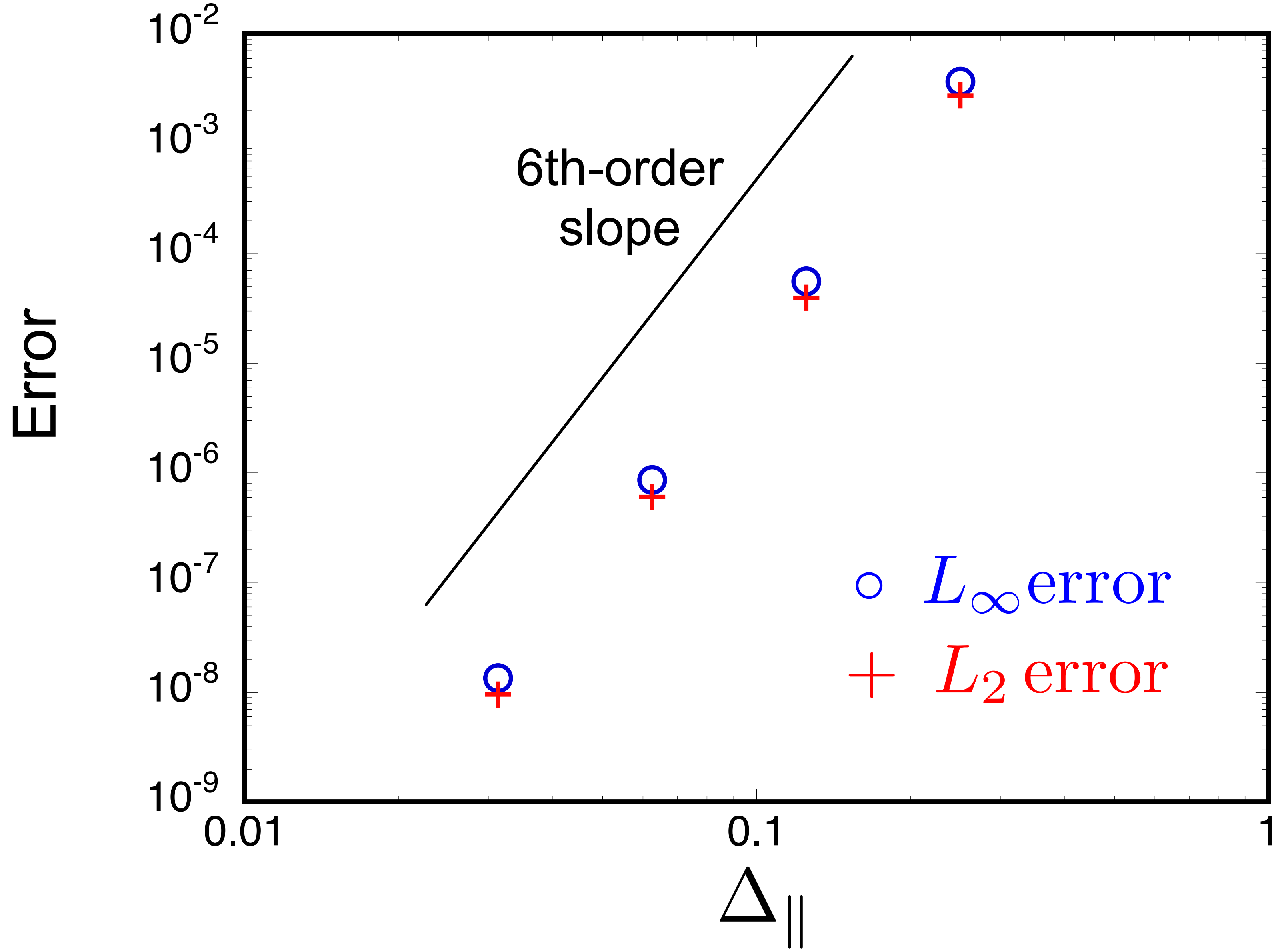


$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 10^{-12}$$



Toth JCP (2000)

滑らかな流れ：精度



Error
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
10^{-8}
10^{-9}
0.01
0.1
1
$\Delta_{||}$
6th-order slope
L_∞ error
L_2 error

不連続流れ：衝撃波管問題

Dai-Woodward 衝撃波管問題

Dai & Woodward JCP (1994)

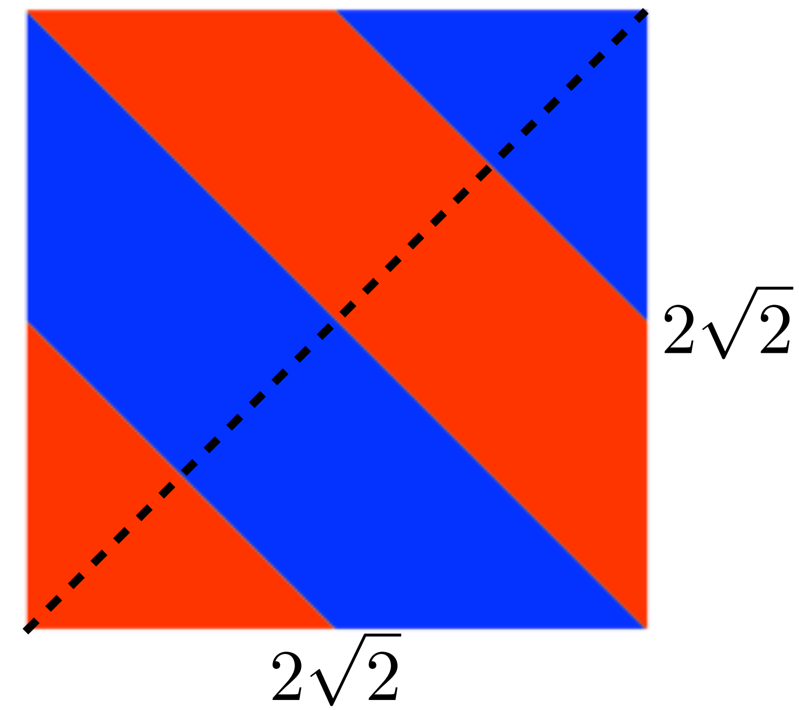
$\alpha = 45^\circ$

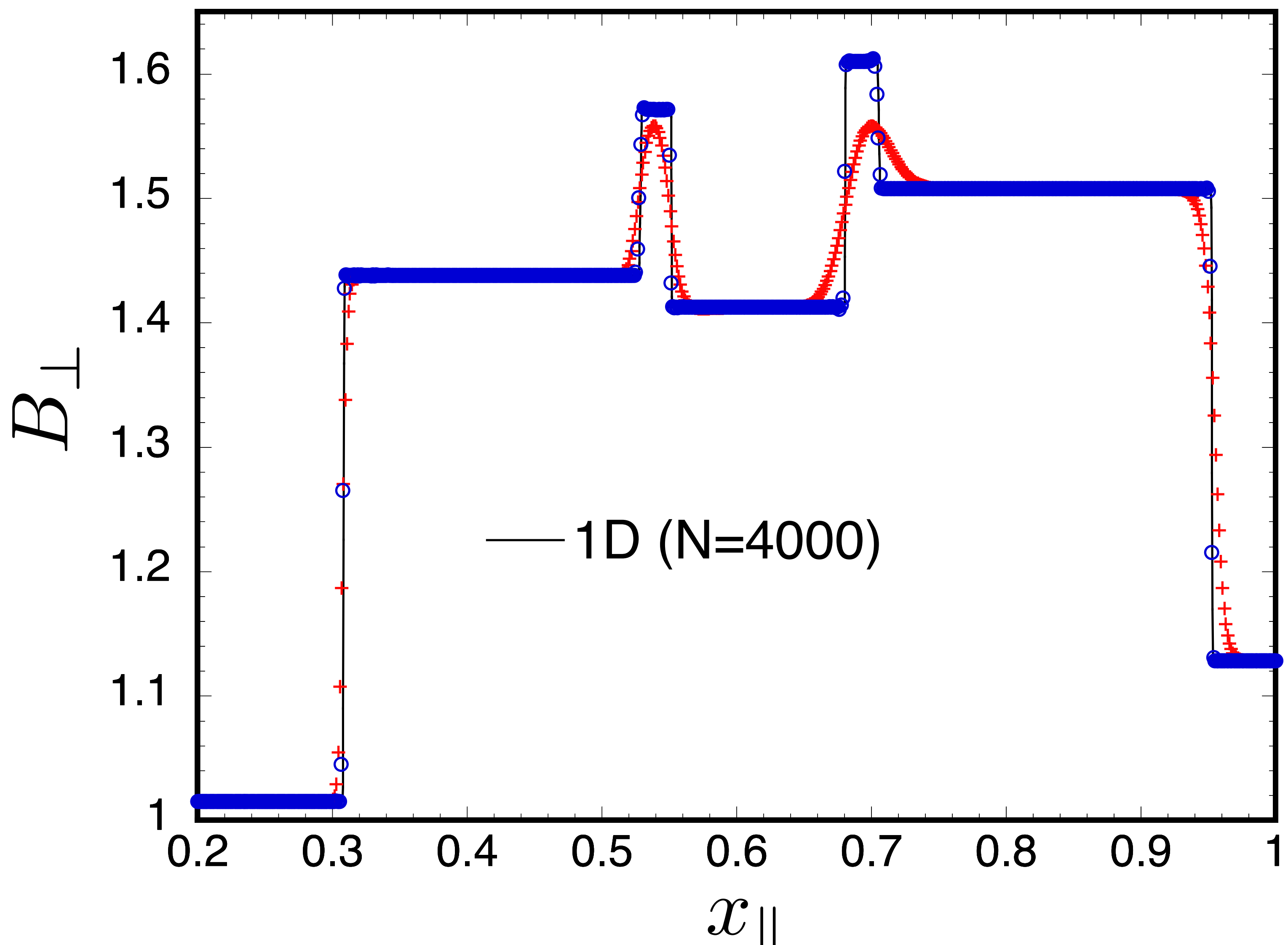
Left conditions

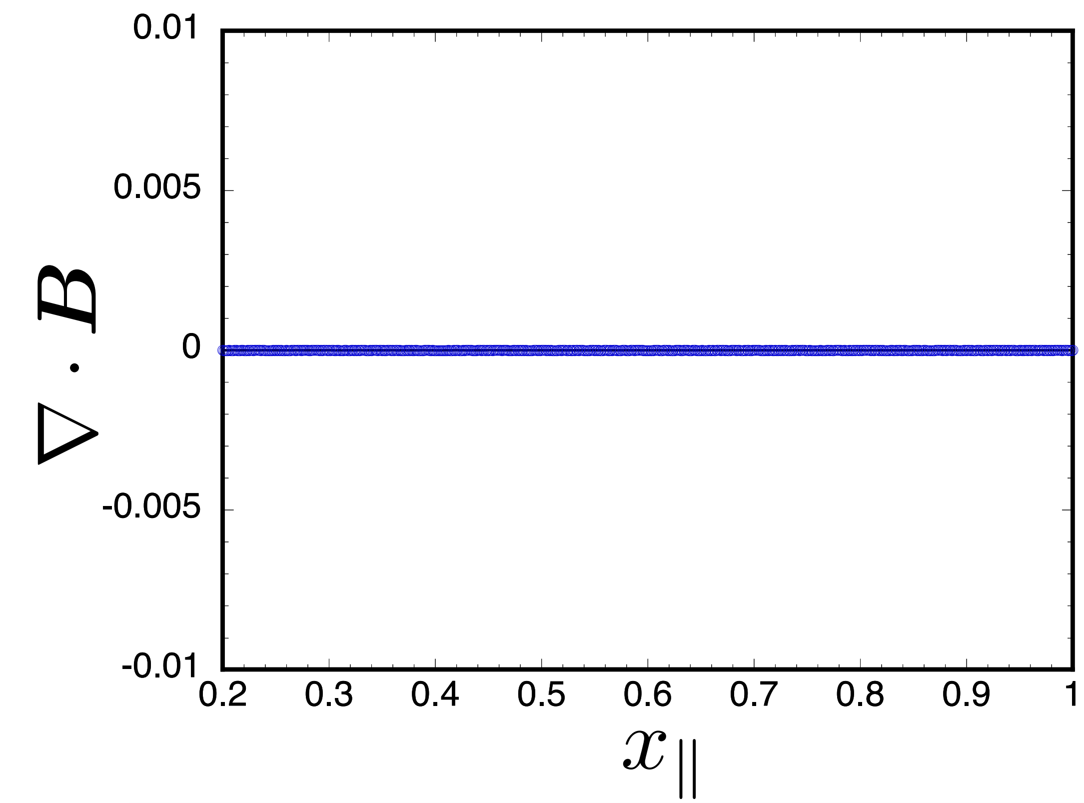
$$(\rho, u_\parallel, u_\perp, u_z, p, B_\parallel, B_\perp, B_z)_L = (1.08, 1.2, 0.01, 0.5, 0.95, 2/\sqrt{4\pi}, 3.6/\sqrt{4\pi}, 2/\sqrt{4\pi})$$

Right conditions

$$(\rho, u_\parallel, u_\perp, u_z, p, B_\parallel, B_\perp, B_z)_R = (1, 0, 0, 0, 1, 2/\sqrt{4\pi}, 4/\sqrt{4\pi}, 2/\sqrt{4\pi})$$

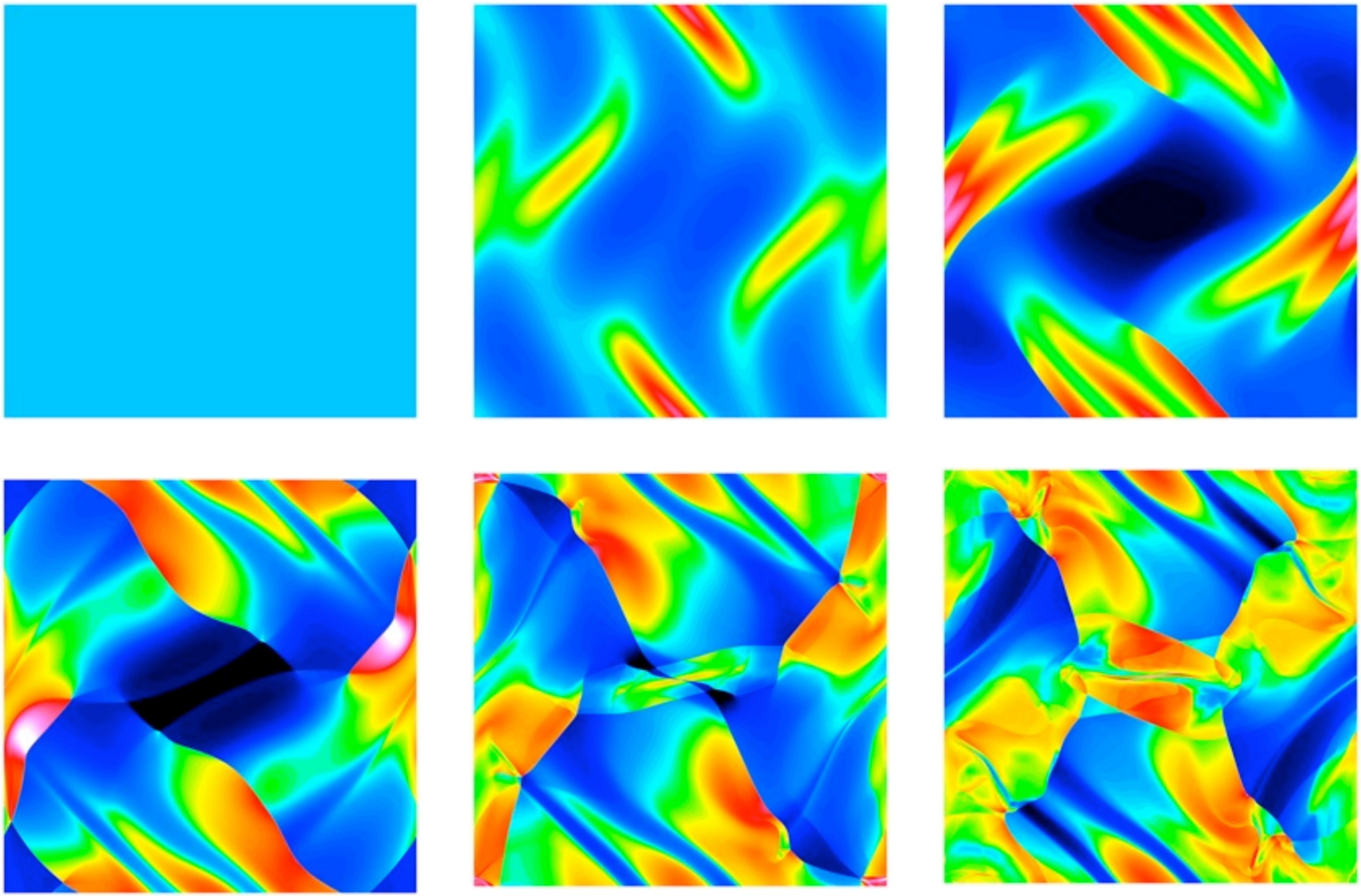






多次元問題：衝撃波ー渦干渉問題

Orszag-Tang 衝撃波ー渦干渉問題 Orszag & Tang JFM (1979)

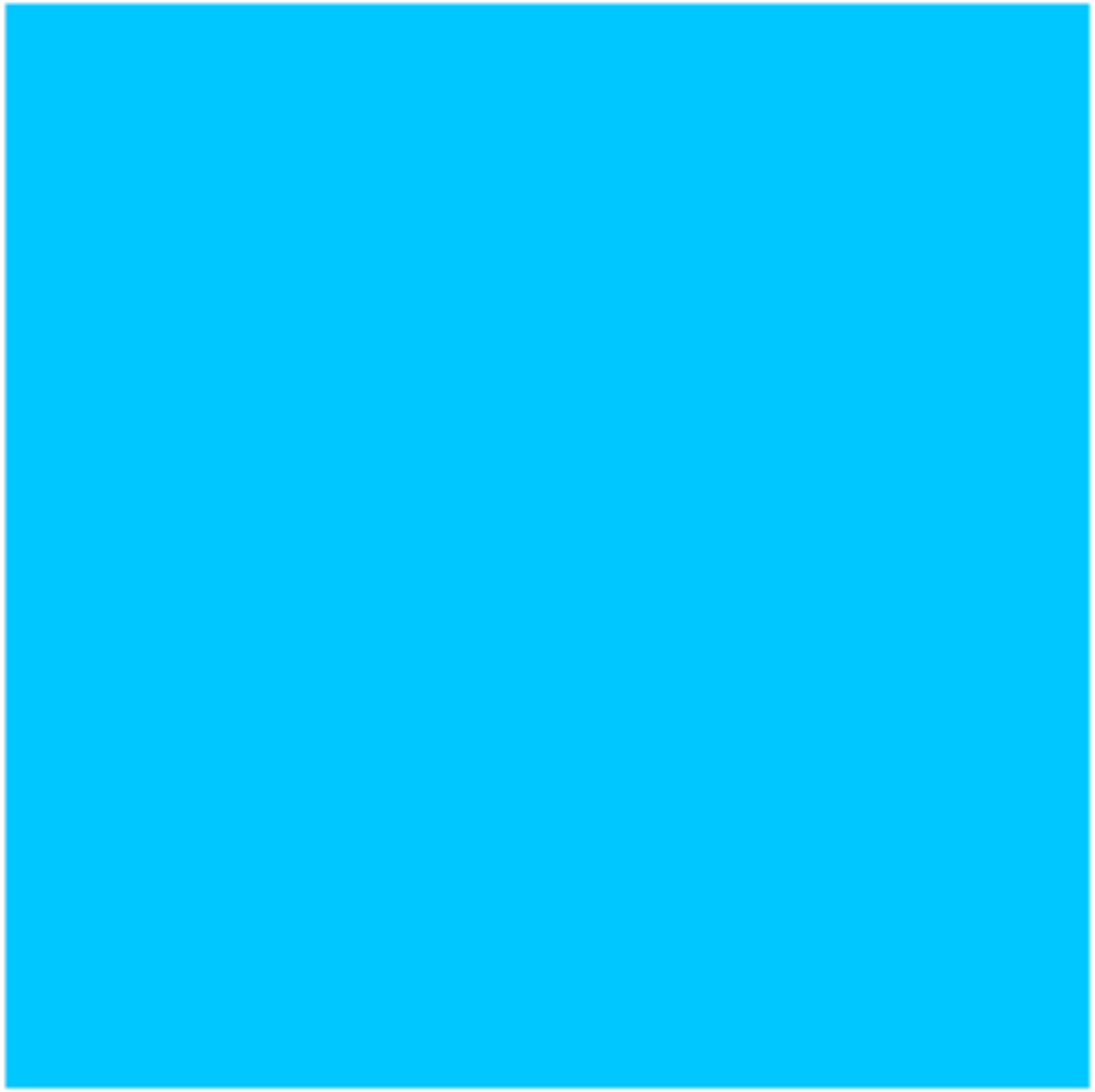


Temprature

多次元問題：衝撃波ー渦干渉問題

Orszag-Tang 衝撃波ー渦干渉問題 Orszag & Tang JFM (1979)

Temperature

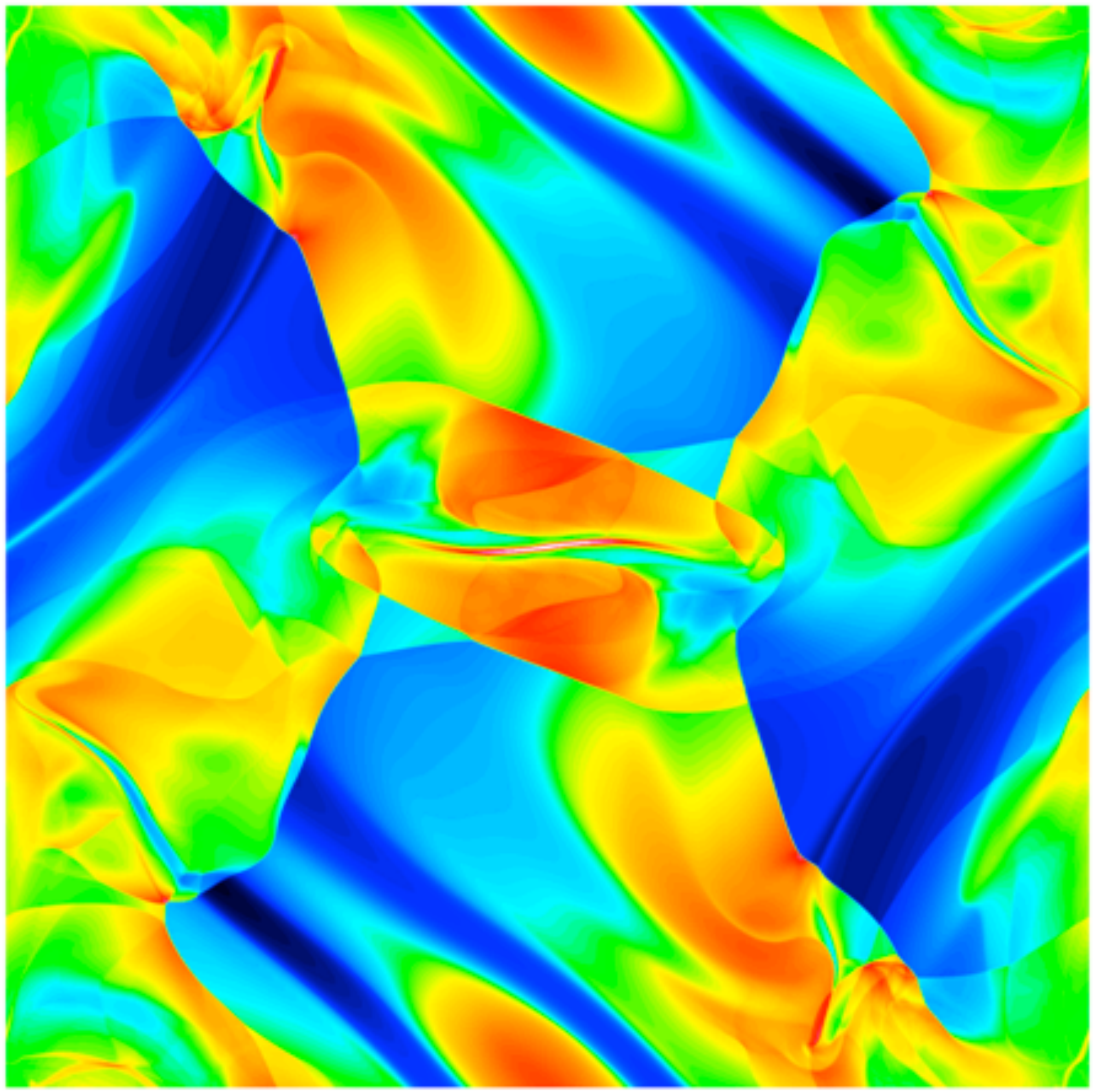


Artificial diffusion : $\boldsymbol{A} = \eta_{\mathrm{art}} \boldsymbol{J}$

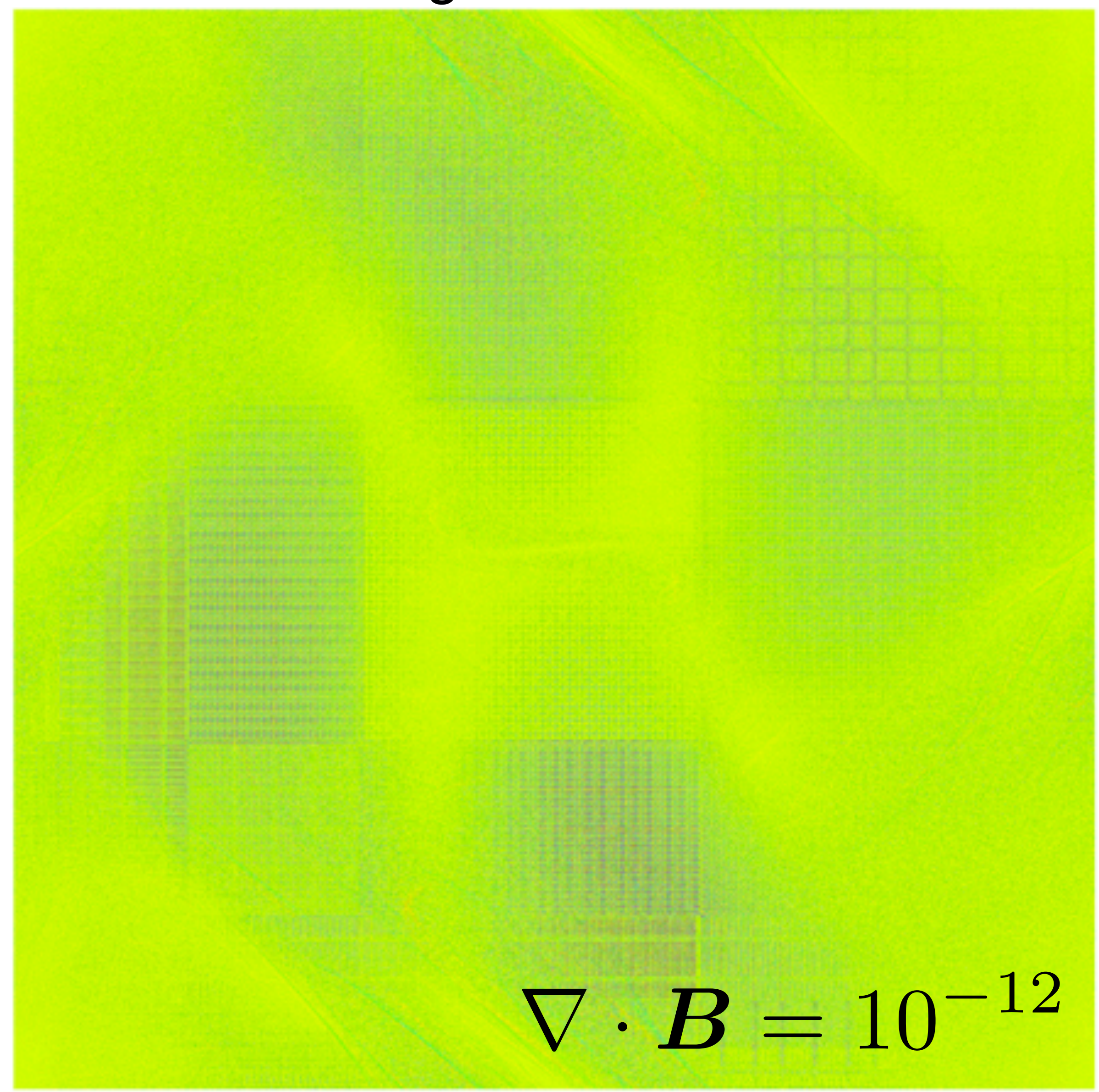
多次元問題：衝撃波ー渦干渉問題

Orszag-Tang 衝撃波ー渦干渉問題 Orszag & Tang JFM (1979)

Temperature

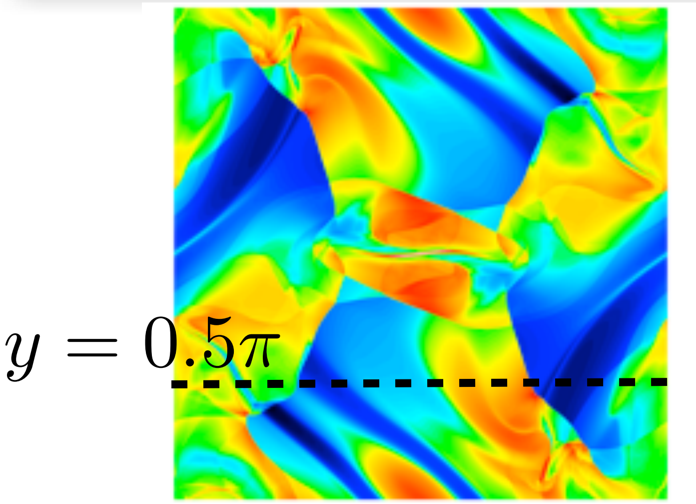


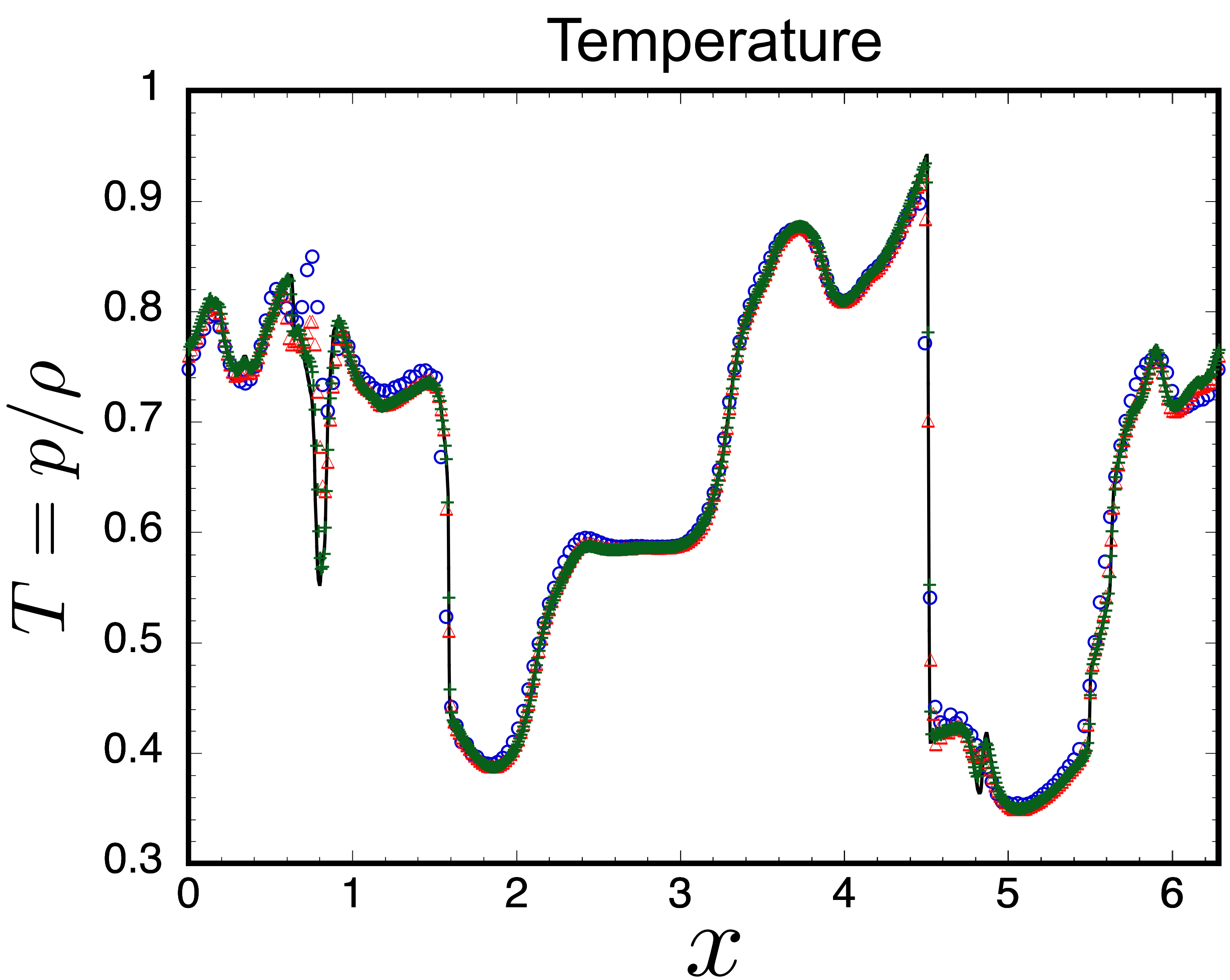
Divergence B field

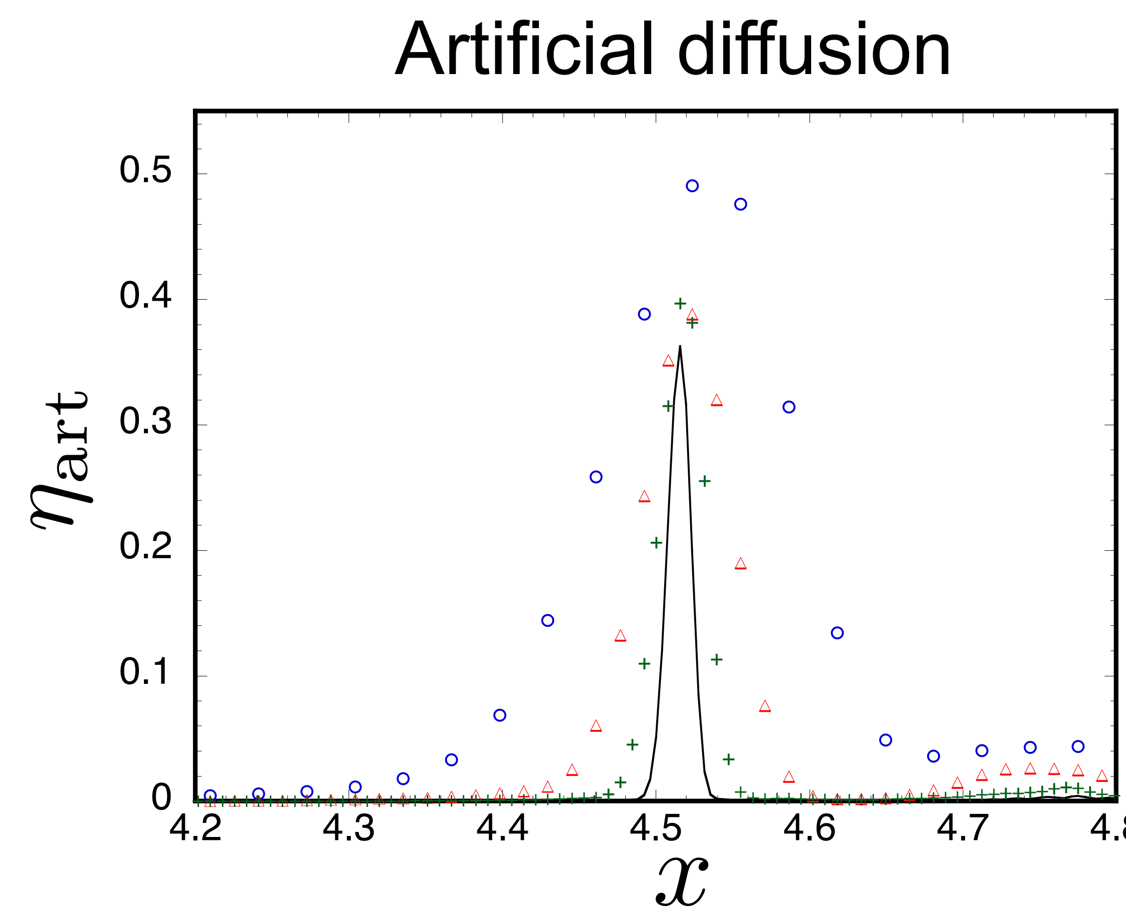


$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 10^{-12}$

多次元問題：衝撃波ー渦干渉問題







まとめ

物理的な解析に基づき，磁場のソレノイダル条件，衝撃波捕獲，高次精度を自動的に満たす，シンプルな圧縮性MHD計算法を提案した.

- コロケート格子を用いた完全保存型で，導入も容易，計算負荷も少ない
- 任意の精度の任意のスキームを用いることが可能
  - 衝撃波がなければ自動的に全領域で高次精度，磁場のソレノイダル条件を満たす
  - 磁場のソレノイダル条件は，PDEレベル及び離散化レベル両方で満たされる
  - 電気抵抗ある無し，衝撃波ある無し，全てで磁場のソレノイダル条件を満たす

宇宙プラズマダイナミクスを記述する究極の体系のひとつとして，「運動論的効果を取り込んだ高精度MHDコード」ということが考えられる.