有限体積マルチモーメント移流法と電磁ブラソフシミュレーション

簑島　敬（海洋研究開発機構）
松本　洋介（千葉大学）
天野　孝伸（東京大学）

プラズマ運動論的シミュレーション

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f_s + \frac{q_s}{m_s}\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c}\right) \cdot \nabla_v f_s = 0, \qquad s\text{: 粒子種}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c\nabla \times \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{j}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c\nabla \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{j} = \sum_s q_s \int \mathbf{v} f_s d\mathbf{v}.$$

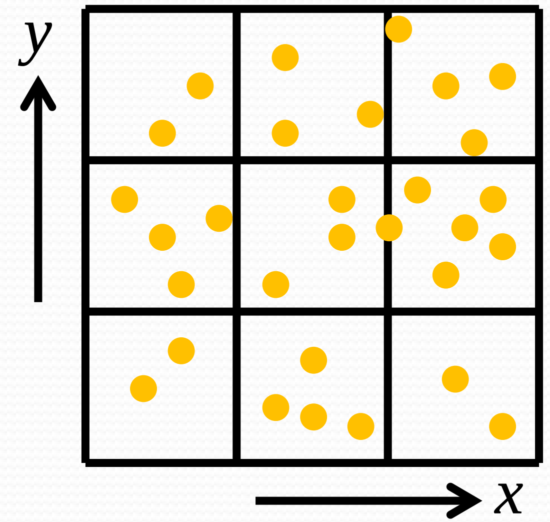
- 宇宙プラズマの第一原理である無衝突ボルツマン方程式（**ブラソフ方程式**）とマクスウェル方程式を連立して解く
- 全ての運動論的効果を含む（イオン-電子差、非マクスウェル分布）
- 電流を介して非線形相互作用

粒子法（Particle-in-Cell; PIC）

$$\frac{d\mathbf{x}_n}{dt} = \mathbf{v}_n, \qquad n\text{: 粒子インデックス}$$

$$\frac{d\mathbf{v}_n}{dt} = \frac{q_n}{m_n}\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_n \times \mathbf{B}}{c}\right),$$

$$+\ \text{Maxwell eq.}$$



- ブラソフ方程式は「**超粒子**」を用いて<u>ラグランジュ的</u>に解く
- マクスウェル方程式は<u>オイラー的</u>に解く
- **〇少計算機資源でも動く、コードがシンプルでロバスト、実績十分**
- △数値ノイズ大、並列計算の効率化に要工夫

ブラソフシミュレーション

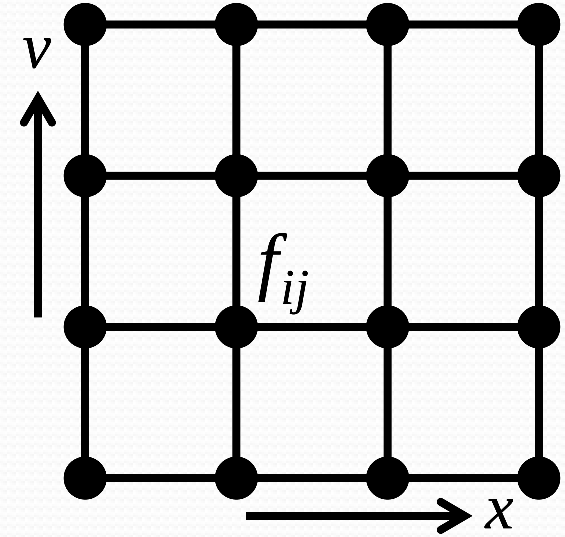
演算子分離 (Cheng & Knorr, 1976)

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f_s = 0, \qquad s\text{: 粒子種}$$

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \frac{q_s}{m_s}\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c}\right) \cdot \nabla_v f_s = 0,$$

$+$ Maxwell eq.

$$f_{ij} = f\left(x_i, v_j\right)$$



- ブラソフ方程式は**分布関数を位相空間で離散化**して<u>オイラー的</u>に解く
- マクスウェル方程式も<u>オイラー的</u>に解く
- **〇数値ノイズ無し、並列計算容易**
- △計算機コスト大、<u>計算手法</u>

ブラソフシミュレーションの難点

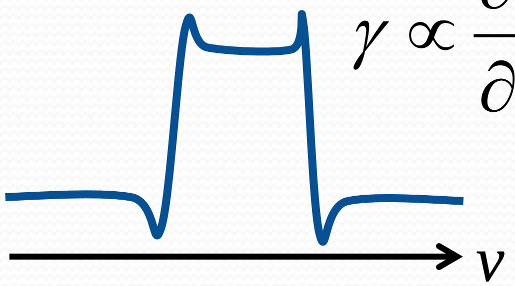
- （特に）**磁場**がある場合の速度空間の更新

移流 $$\frac{\partial f_s}{\partial t}+\frac{q_s}{m_s}\mathbf{E}\cdot\nabla_v f_s=0,$$

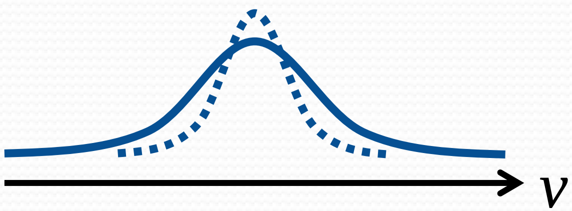
回転 $$\frac{\partial f_s}{\partial t}+\frac{q_s}{m_s}\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{B}}{c}\cdot\nabla_v f_s=0,$$

- ~数百回転以上の計算
- 数値誤差がもたらす非物理的現象
  - 振動 => プラズマ波動励起
  - 拡散 => プラズマ加熱、波動抑制

$$\gamma\propto\frac{\partial f}{\partial v}$$

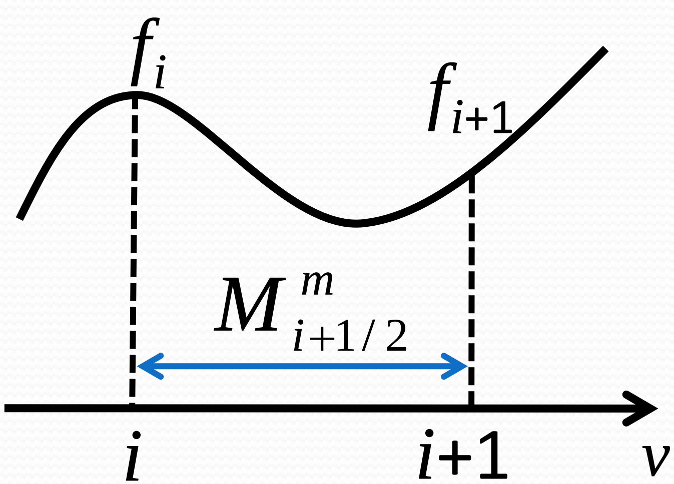


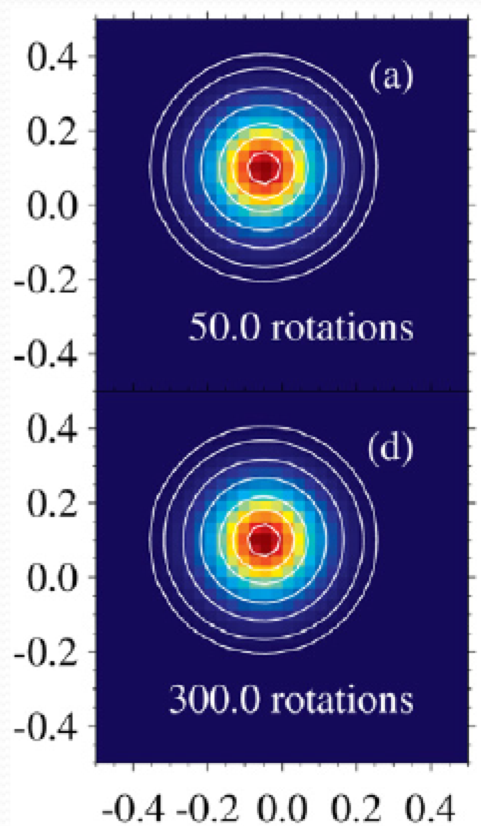
$$P\propto\int v^2 f dv$$

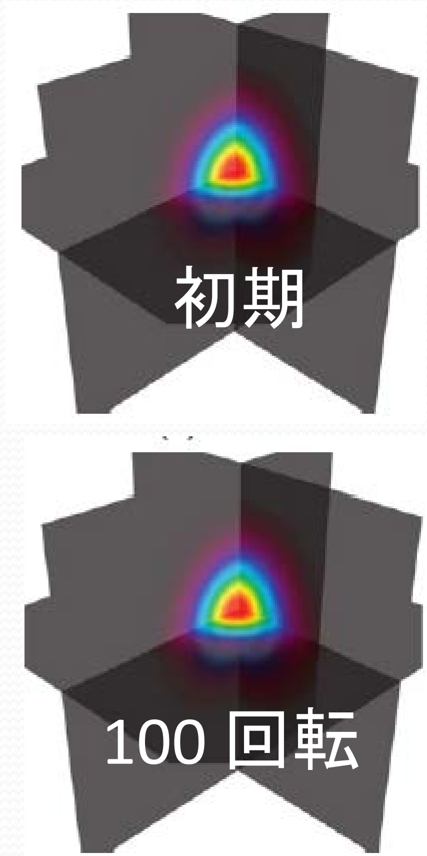


マルチモーメント移流（MMA）法

- 移流方程式ソルバ
- 物理量fと**0-2次の区分化モーメント**M^mを同時に更新
  - **質量・中心値・分散の保存**
- ブラソフシミュレーションの**速度空間更新**に適用





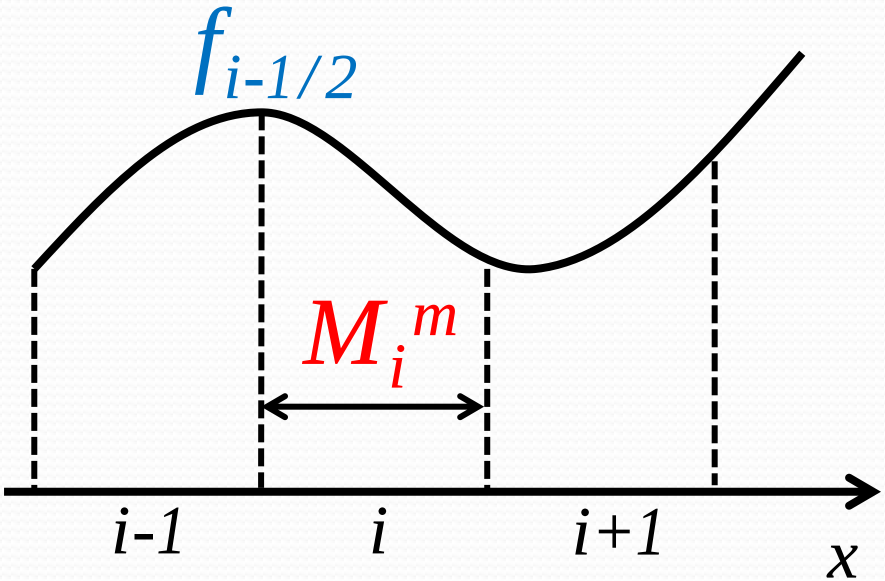


Minoshima+ (2011, 2013)

MMA法の改良

- MMA法は複雑
  - 点値とセル積分値を保持するスタガード配置
  - セミラグランジュ法を採用したため、多次元補間関数の構築とその厳密な積分
- アルゴリズムは単純であるべし
- **点値は保持しない**
  - **コロケート配置**
  - **有限体積法**。数値流束の評価は1次元補間

有限体積MMA (MMAFV)



- 0-2次までのセル平均モーメント(3個)を保持
- 風下1セル+風上2セルの9個の物理量からセル境界値を求める
- 有限体積+ルンゲクッタ

$$M_i^m = \frac{1}{m!\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} x^m f dx.$$

$$(m = 0,1,2)$$

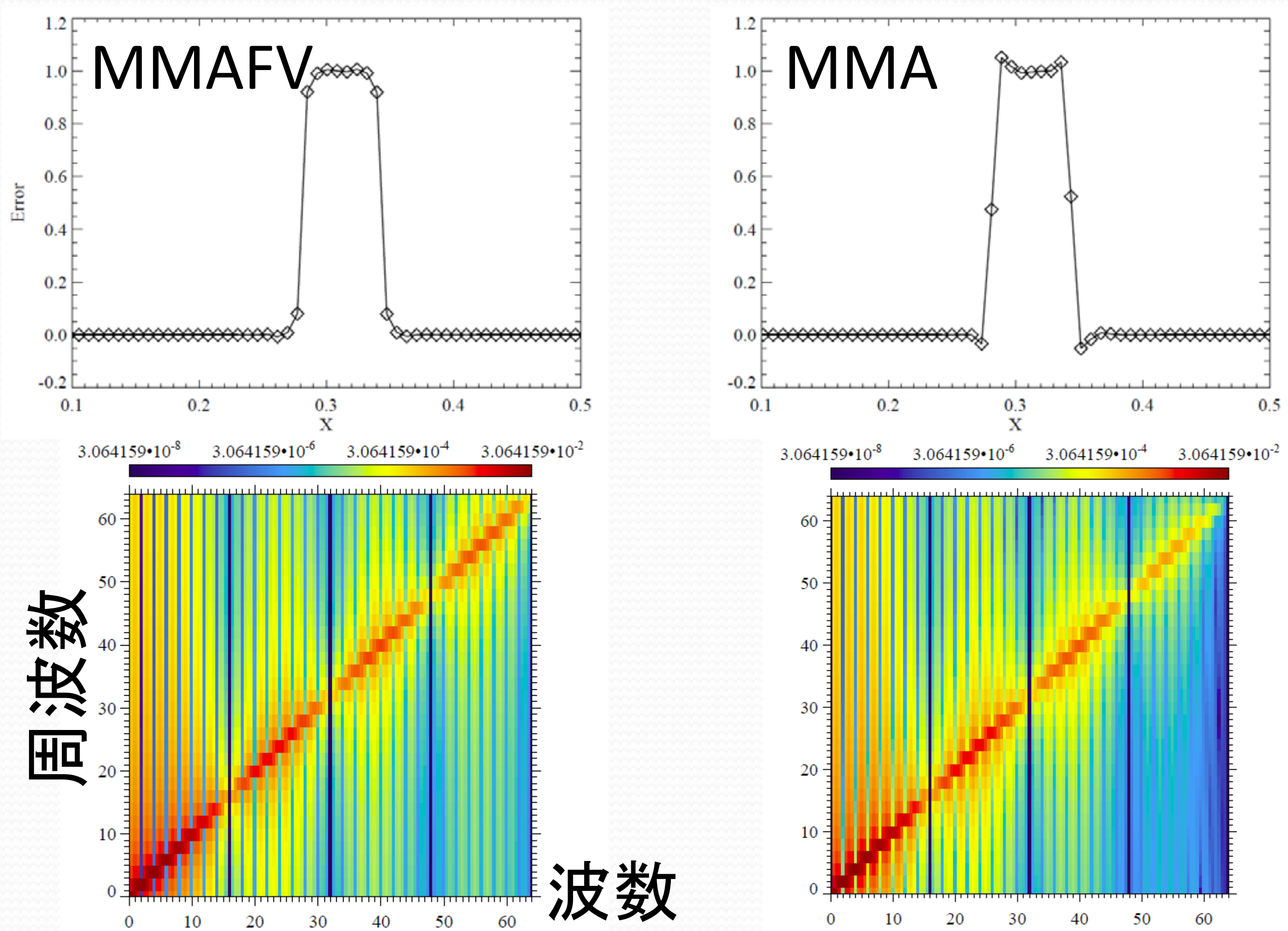
$$\frac{\partial M_i^0}{\partial t} = -u\frac{f_{i+1/2} - f_{i-1/2}}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial M_i^m}{\partial t} = -u\frac{\left(x^m f\right)_{i+1/2} - \left(x^m f\right)_{i-1/2}}{m!\Delta x} + uM_i^{m-1}.$$

3セル用いるのは安定性とCFL条件向上のため

1次元移流テスト

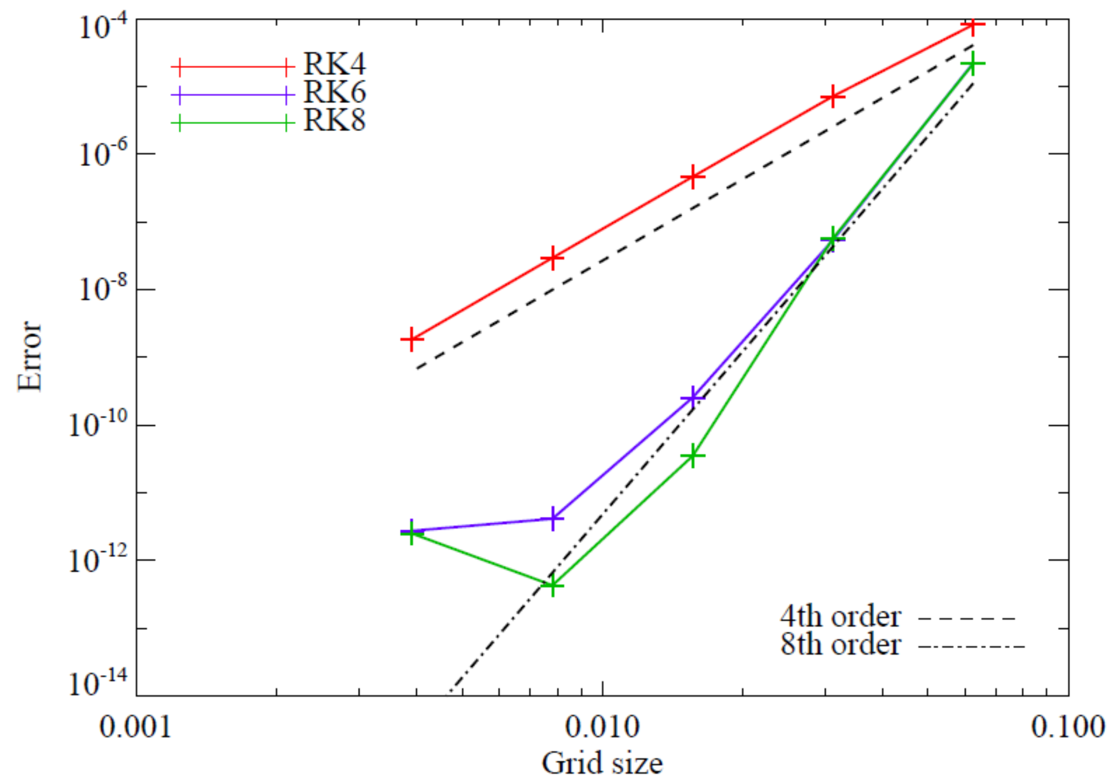
- 矩形波：MMAFVは短波長の解像度が上昇



1次元移流テスト

- ガウス分布：MMAFVの誤差・精度はRKの次数に依存
  - 実用上は4次でOK

スキーム	誤差
MMAFV(RK4)	2e-6
MMA	5e-8
MMAFV(RK8)	5e-11



多次元化

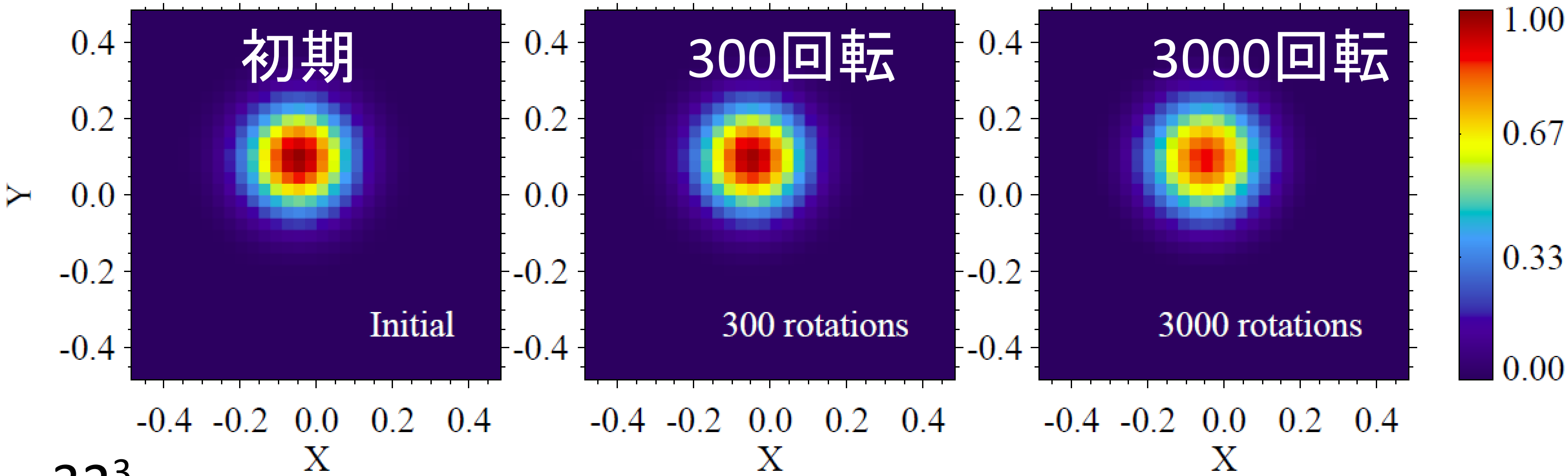
$$M_{i,j}^{m,n} = \frac{1}{m!n!\Delta x \Delta y} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{y+1/2}} x^m y^n f dxdy$$

fdy	$M_{i,j}^{0,0}$,	$M_{i,j}^{1,0}$,	$M_{i,j}^{2,0}$
$yfdy$	$M_{i,j}^{0,1}$,	$M_{i,j}^{1,1}$,	$M_{i,j}^{2,1}$
$y^2fdy/2$	$M_{i,j}^{0,2}$,	$M_{i,j}^{1,2}$,	$M_{i,j}^{2,2}$
	fdx	$xfdx$	$x^2fdx/2$

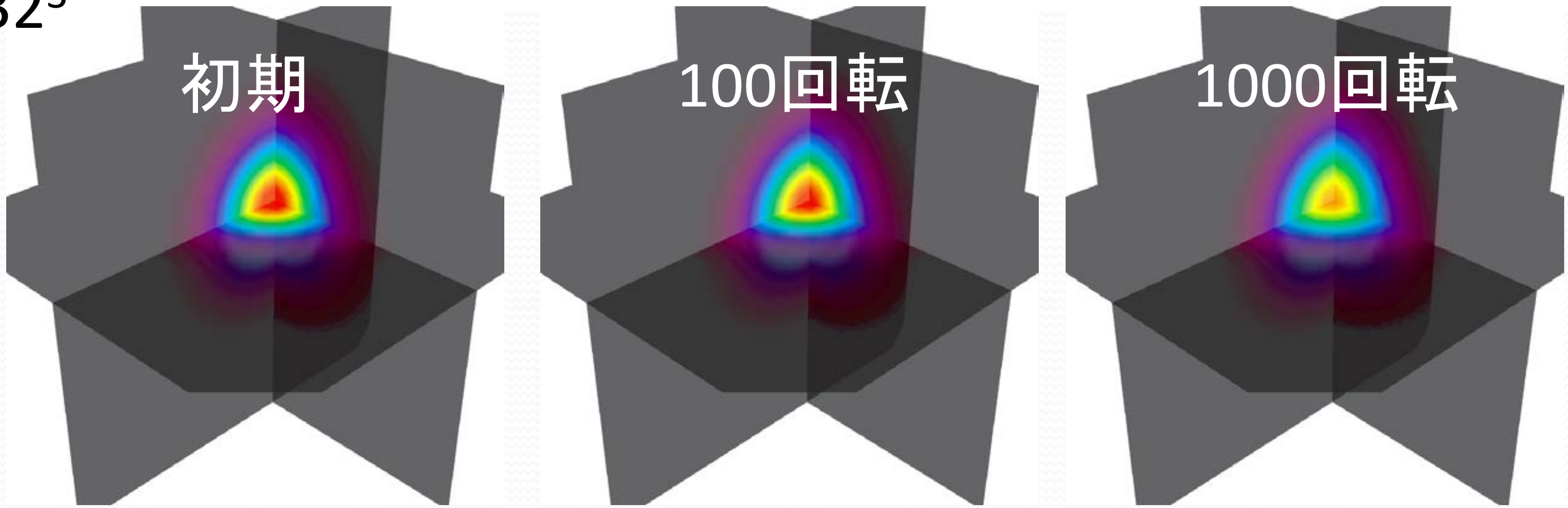
- 保持する更新量6個
- 単一セル内の2次元補間で評価するセル平均量
- 1次元補間で評価するセル表面量
- FV+RKで更新
- 3次元も同様（更新量10個）

多次元移流回転テスト

32^2



32^3



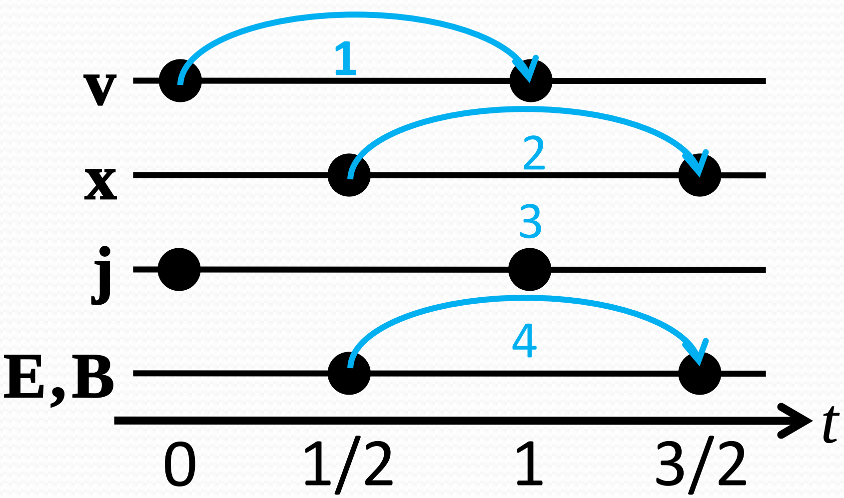
ブラソフシミュレーション

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f_s = 0,$$

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \frac{q_s}{m_s}\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c}\right) \cdot \nabla_v f_s = 0,$$

Maxwell eq.

粒子法で用いられる2次リープフロッグ法
実空間と速度空間の定義時間を半ステップずらす



1. **速度空間をMMAFVで更新**
2. 実空間を保存型セミラグランジュ法で更新
3. 電荷保存法により電流を計算
4. 電磁場を更新（FDTD）

(cf., Ghizzo+ 2003; Umeda+ 2009, 2010)

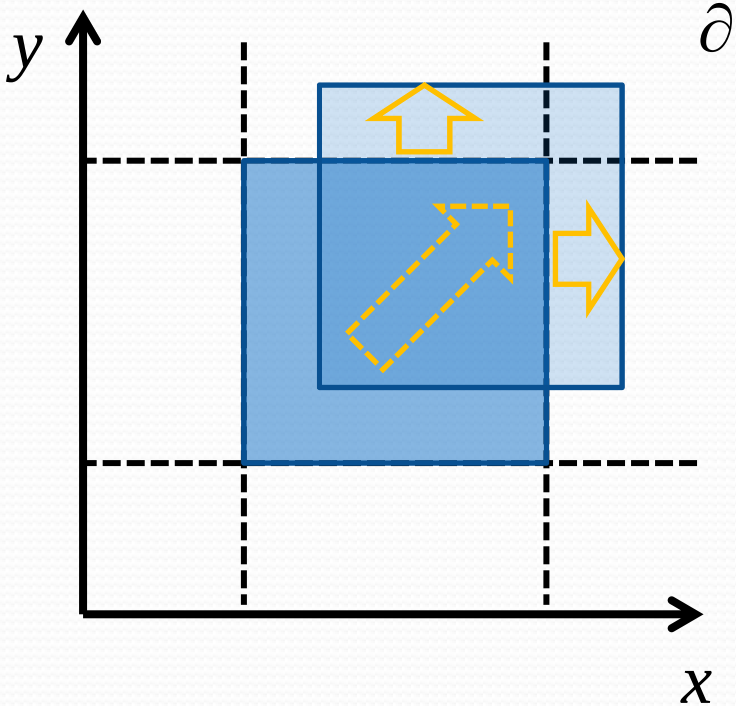
電荷保存法

Umeda+ (2009)

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla f_s = 0 \quad \xrightarrow{\sum_s q_s \int d\mathbf{v}} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j} = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{E} = -4\pi\nabla\cdot\mathbf{j}$$

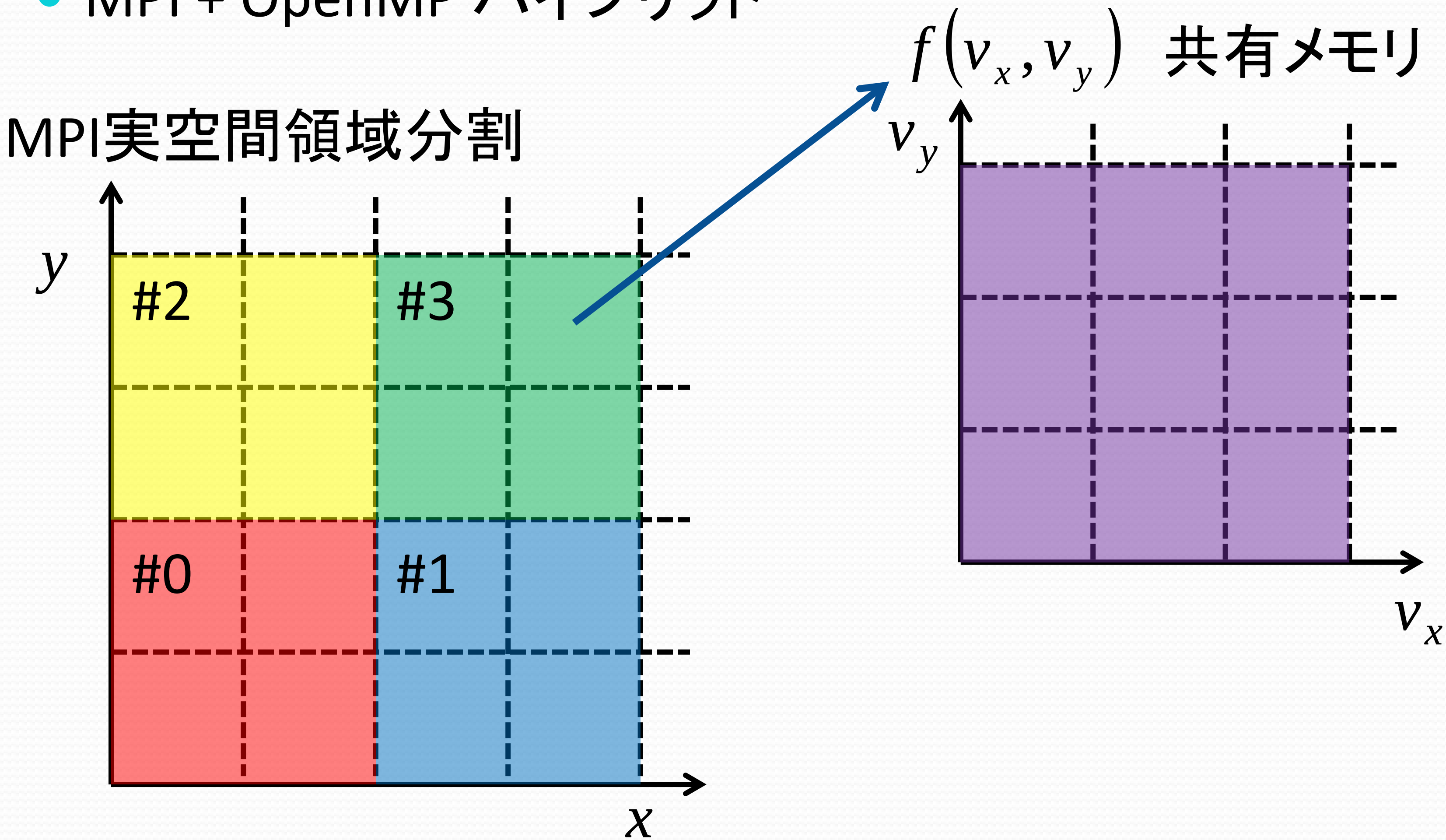
$$\Rightarrow \nabla\cdot\mathbf{E} = 4\pi\rho$$



- 実空間移流を保存型スキームで解く
- その際の数値フラックスを速度空間で積分 = 電流
- ガウス則を自動的に満たす

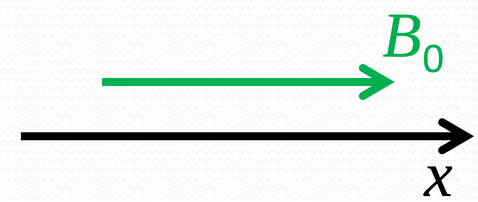
並列化

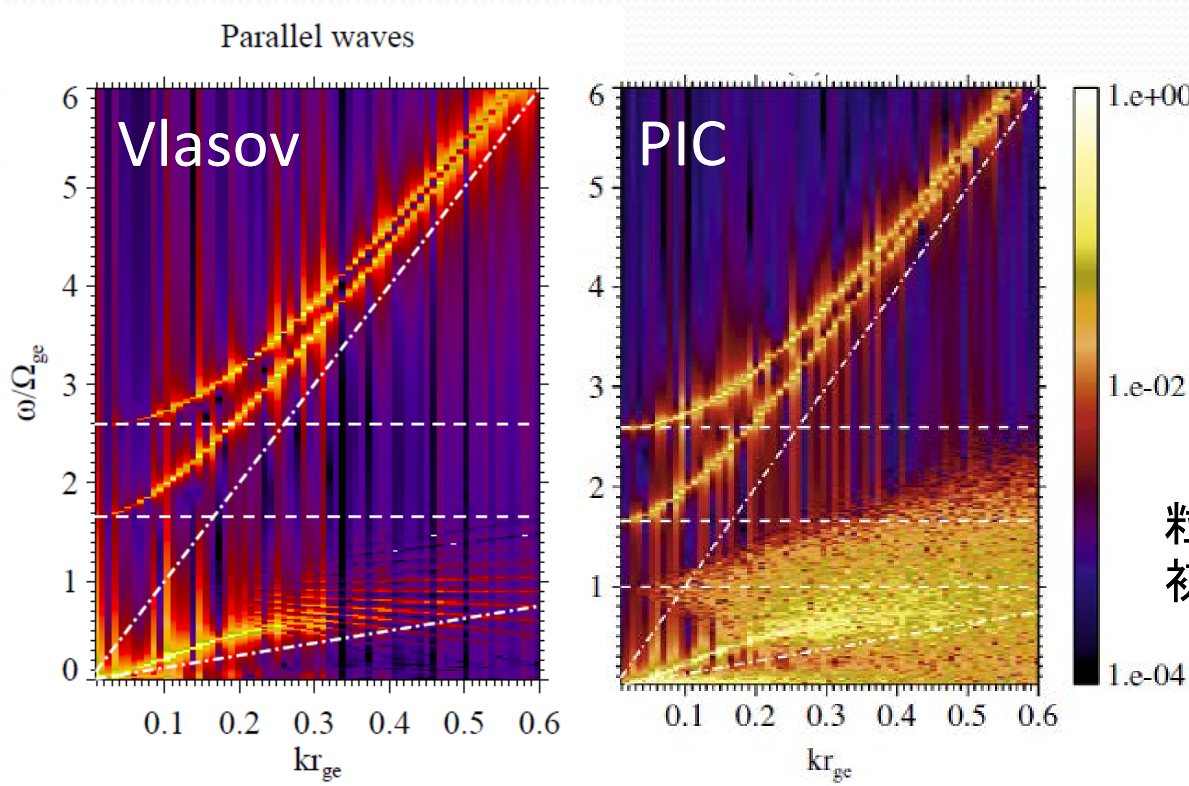
- MPI + OpenMP ハイブリッド



平行伝播線形波動

- **1X3V**, 512x32^3 grids
- m_p/m_e=16, ω_{pe}/ω_{ge}=2, β_e=β_p=0.04, Δx=4λ_D
- PICと**同じメモリ使用量**で比較

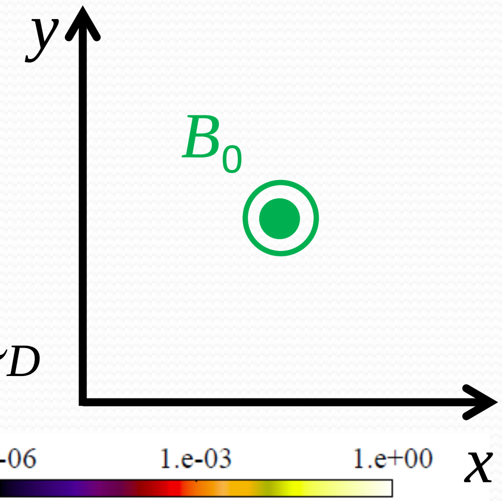


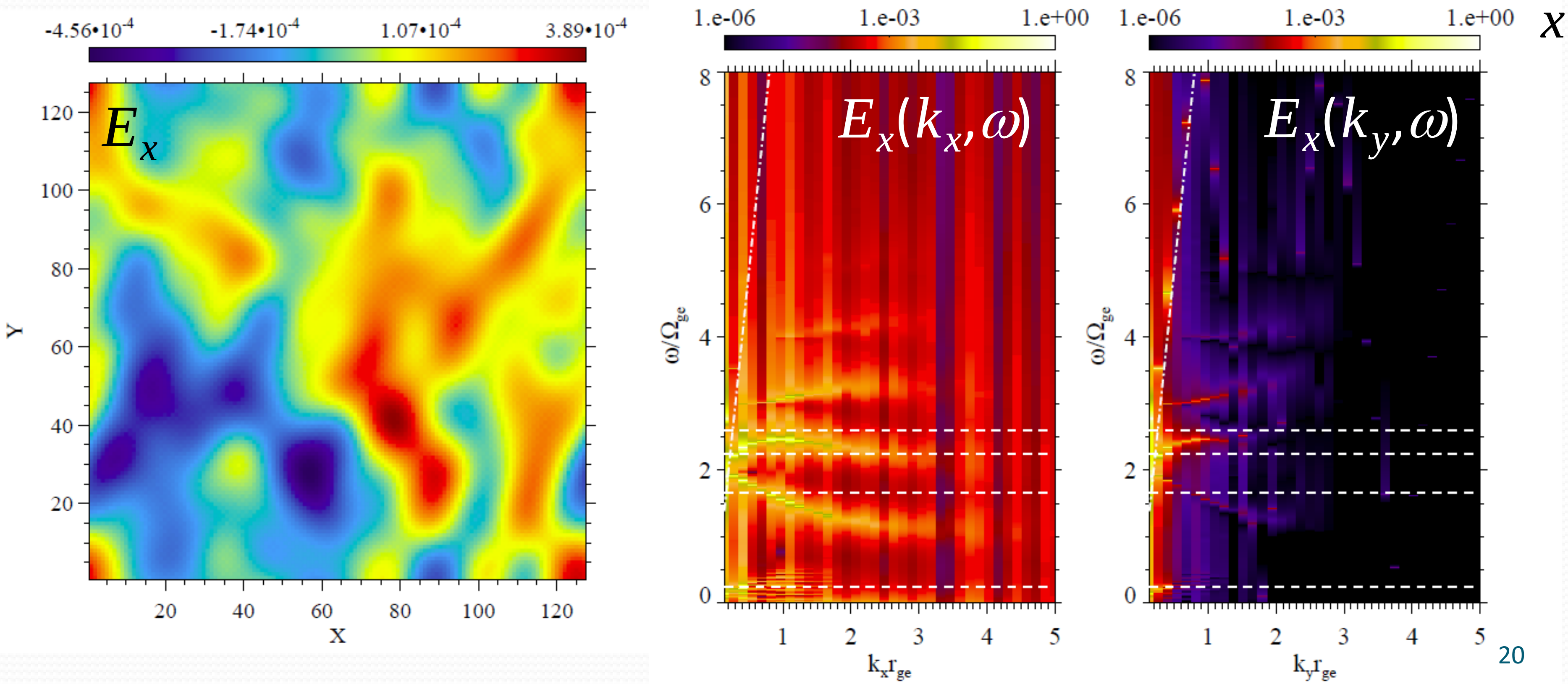


粒子法: 12,500 ptcl/cell, Δx=λ_D
初期ノイズの与え方は異なる

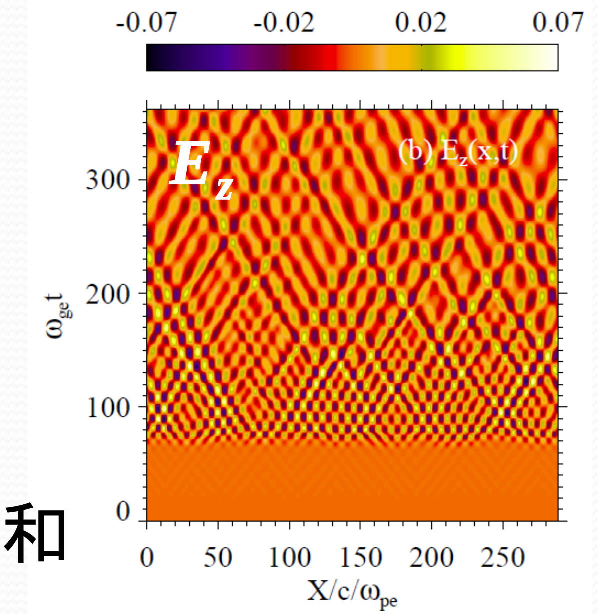
垂直伝播線形波動

- **2X2V**, 128^2x32^2
- m_p/m_e=16, ω_{pe}/ω_{ge}=2, β_e=β_p=0.04, Δx=1λ_D

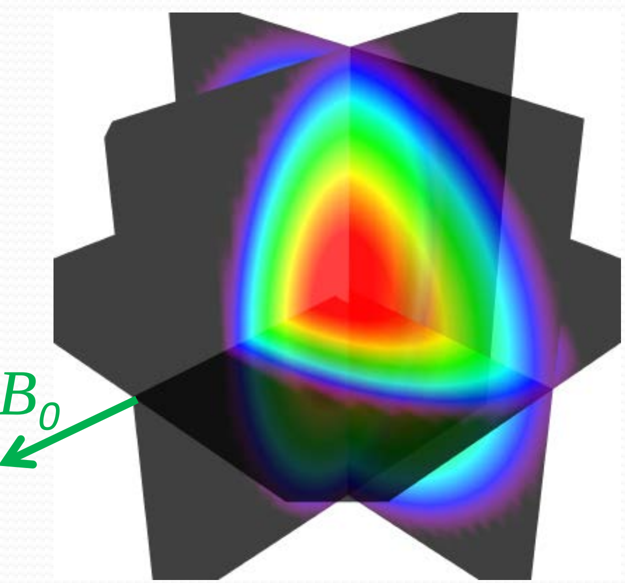


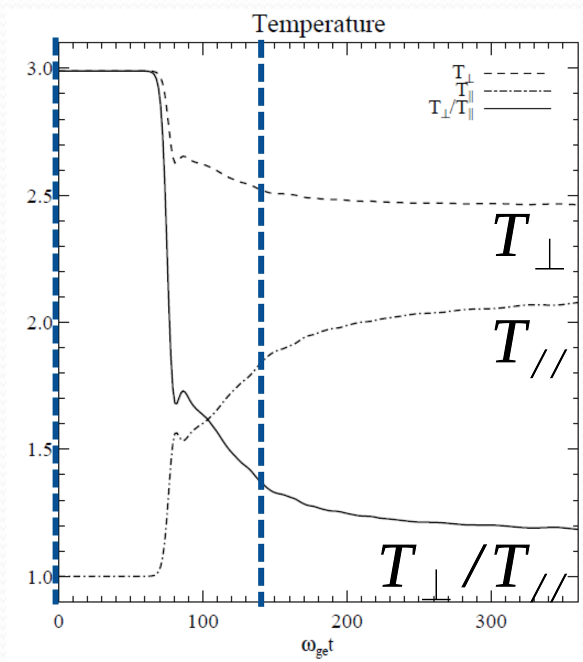


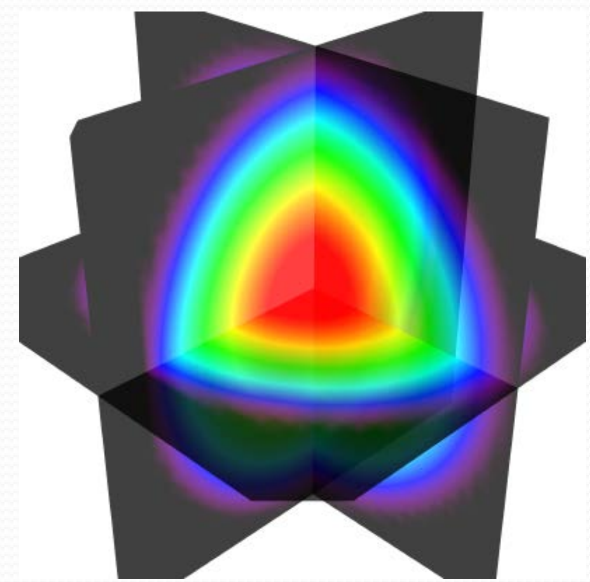
非線形波動



- 電子温度異方性不安定(Sydora+ 2007)
  - **1X3V**, 512x32^3 grids
  - ω_{pe}/ω_{ge}=5, β_e=β_p=1, $T_\perp/T_{//}$=3, Δx=4λ_D
- ホイッスラー波動励起 => 温度異方性緩和







まとめ

- **有限体積MMA法**：MMA法を簡略化
  - セル平均値のみの**コロケート配置**
  - **1次元補間を用いる有限体積法**
- 性能
  - 従来より少しだけ拡散的だが、十分実用的
  - **コーディングは非常に単純で、デバッグ・メンテナンスも楽**
- ブラソフシミュレーションに適用
  - 従来よりロバストで、安定性向上