



2013年2月18日(月)-19日(火) 千葉大学理学部2号館3階308物理会議室
宇宙磁気流体・プラズマシミュレーションワークショップ

完全二流体プラズマシミュレーション

三好 隆博

広島大学大学院理学研究科

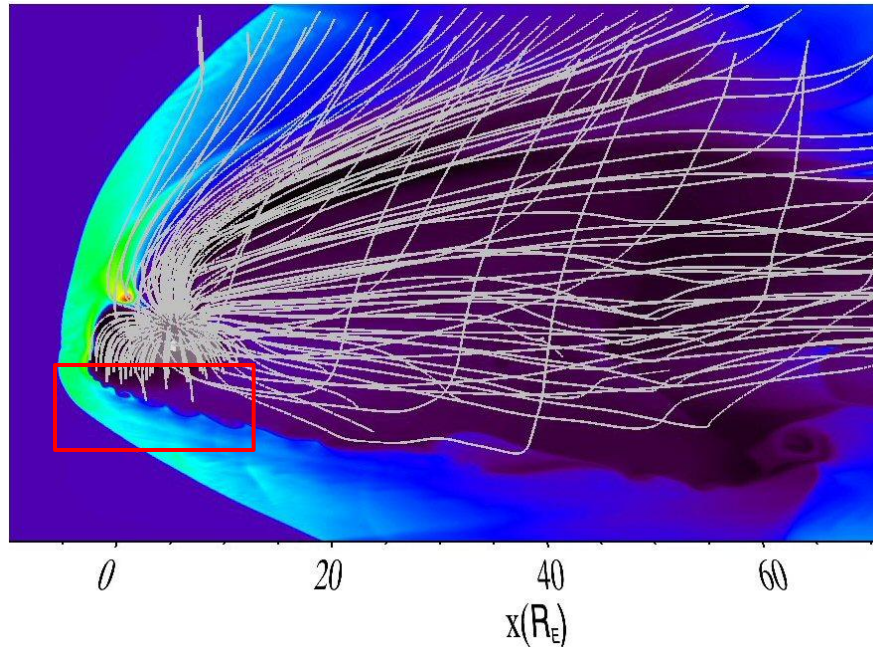


と も
□ 強敵(二流体モデルと先行研究)をよく知るために・・・

- はじめに
- 二流体方程式の導入
- 完全二流体方程式の数値解法
 - 研究開発項目の検討
 - 二流体方程式の数値解法
 - 先行研究の紹介
 - 予備的数値実験
 - 数値解法の検討
- おわりに

はじめに

□ MHDシミュレーションの高解像度化



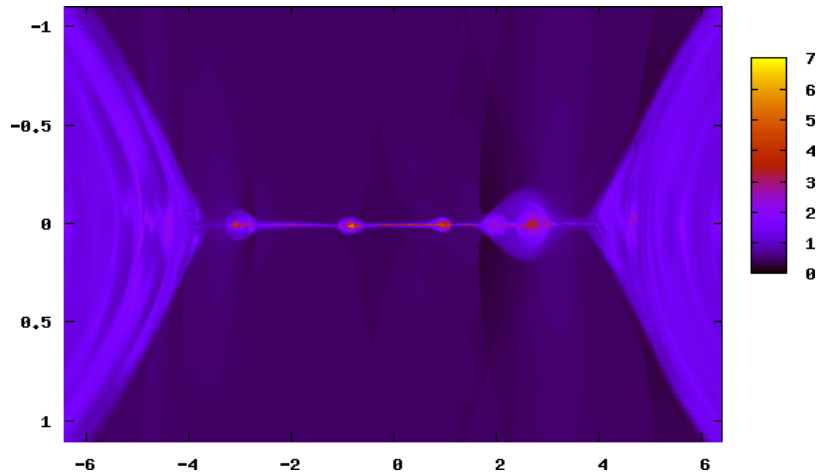
[Matsumoto+]

- 高解像度 ($\sim 0.1R_E$) グローバルシミュレーションにおいてローカルな不安定性 (KH不安定、テアリング不安定など) が再現
- MHDを超えるマクロスケールモデルの開発が急務

はじめに

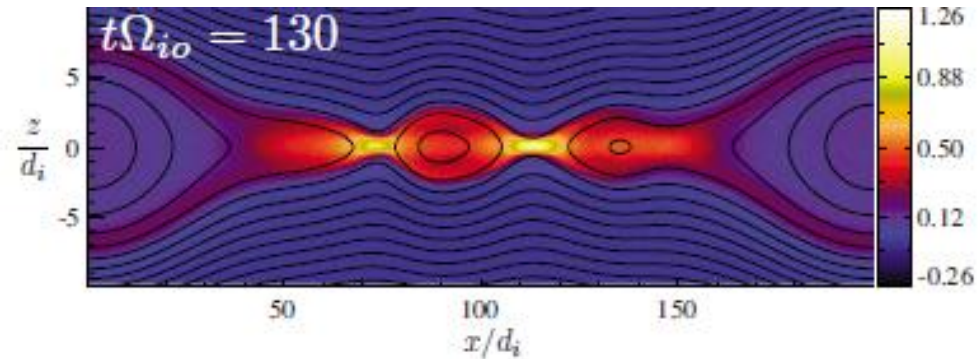
□ MHDシミュレーションの高解像度化

抵抗性MHDモデル



[Miyoshi, Kusano]

衝突性運動論的モデル



[Daughton+, 2009]

- 高解像度ローカルシミュレーションにおいてもスケール間相互作用の重要性が示唆
- マルチスケール性を内包したモデルが必要不可欠

はじめに

- MHDモデルの上位互換となるマルチスケールプラズマシミュレーションモデルの構築を目指す。特にこの講演では以下について検討を行う。
 - 二流体方程式の導入と検討
 - 数値解法の開発項目の検討
 - 先行研究の検討
 - 予備的数値実験
 - 数値解法の検討



二流体方程式の導入

□ ボルツマン方程式＋マクスウェル方程式

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_{col.} \quad s = i, e$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c^2 \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_s \int \mathbf{v} f_s(\mathbf{v}) d\mathbf{v}, & \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_s \int f_s(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

■ 分布関数のモーメント

$$\rho_s \equiv m_s \int f_s(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad \rho_s \mathbf{u}_s \equiv m_s \int \mathbf{v} f_s(\mathbf{v}) d\mathbf{v}$$

$$\mathbf{P}_s \equiv m_s \int (\mathbf{v} - \mathbf{u}_s)(\mathbf{v} - \mathbf{u}_s) f_s(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad \dots$$

とりあえずクロージャ問題はおいといて...



二流体方程式の導入

□ 完全二流体方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_s \mathbf{u}_s = \left(\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \right)_c \\ \frac{\partial \rho_s \mathbf{u}_s}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_s \mathbf{u}_s \mathbf{u}_s = -\nabla p_s + \frac{q_s \rho_s}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) + \left(\frac{\partial \rho_s \mathbf{u}_s}{\partial t} \right)_c \\ \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_s + p_s) \mathbf{u}_s = \frac{q_s \rho_s}{m_s} \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{E} + \left(\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} \right)_c \\ p_s = (\gamma - 1) \left(\varepsilon_s - \frac{1}{2} \rho_s u_s^2 \right) \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c^2 \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{e,i} \frac{q_s \rho_s \mathbf{u}_s}{m_s}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{e,i} \frac{q_s \rho_s}{m_s} \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{array} \right.$$

簡単化のため圧力等方



二流体方程式の導入

□ 拡張された一流体方程式

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0 \\
 \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \\
 \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\
 \frac{\partial p_e}{\partial t} + \mathbf{u}_e \cdot \nabla p_e + \gamma p_e \nabla \cdot \mathbf{u}_e = (\gamma - 1) \eta J^2 \\
 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\
 \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \\
 \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} + \frac{m_e}{ne^2} \left[\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{J} \mathbf{u} + \mathbf{u} \mathbf{J}) \right] - \frac{1}{ne} \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \frac{1}{ne} \nabla p_e = \eta \mathbf{J}
 \end{array} \right.$$

$$n_e \approx n_i \equiv n, \quad m_e \ll m_i$$

$$\rho \equiv \rho_i + \rho_e$$

$$\rho \mathbf{u} \equiv \rho_i \mathbf{u}_i + \rho_e \mathbf{u}_e$$

$$p \equiv p_i + p_e$$

$$\mathbf{j} = en(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e)$$



二流体方程式の導入

□ Hall-MHD方程式

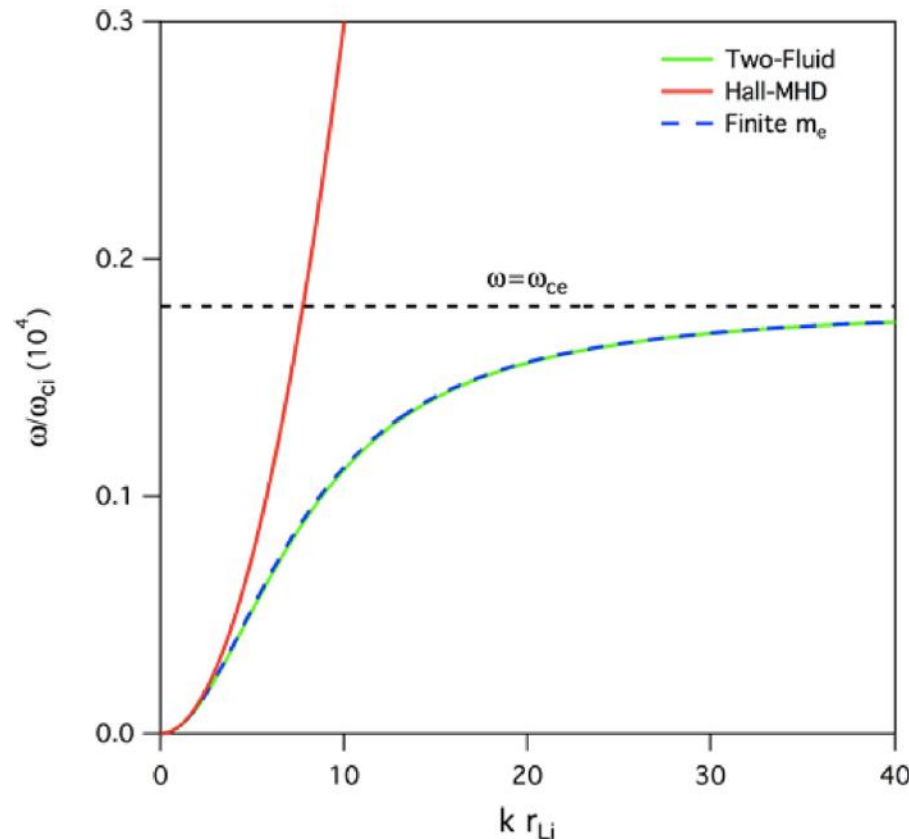
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} = (\gamma - 1) \eta j^2 \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \\ \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{1}{ne} \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} \end{array} \right.$$

$$L \gg c / \omega_{pe} , \quad v_T / \omega_{ce}$$



二流体方程式の導入

□ ホイッスラー波の分散関係



[Srinivasan+, 2011]

- Hall-MHDではホイッスラー波は非有界 $v_W = kv_A^2/\omega_{ci}$
- 数値計算において**有限の電子慣性**は重要！



二流体方程式の導入

□ 有限電子慣性モデルの比較

■ 拡張された一流体方程式

□ 一流体(MHD)の保存則

□ 楕円型方程式を解くことで光速の制限を緩和

□ MHD解法の拡張

■ 完全二流体方程式

□ イオン流体および電子流体の保存則

□ 非相対論的モデルにおいても光速による制限

□ 中性流体解法の拡張

□ 物理モデル(相対論化、多種イオンなど)の拡張性、数値解法の豊富な選択肢から完全二流体方程式を採用



二流体方程式の導入

□ 無次元化された完全二流体方程式

■ イオン流体方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot n_i \mathbf{u}_i = 0 \\ \frac{\partial n_i \mathbf{u}_i}{\partial t} + \nabla \cdot n_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i = -\nabla p_i + \frac{n_i}{d} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}) \\ \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_i + p_i) \mathbf{u}_i = n_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{E} \end{array} \right. \quad p_i = (\gamma - 1) \left(\varepsilon_i - \frac{1}{2} n_i u_i^2 \right)$$

■ 電子流体方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot n_e \mathbf{u}_e = 0 \\ \frac{\partial n_e \mathbf{u}_e}{\partial t} + \nabla \cdot n_e \mathbf{u}_e \mathbf{u}_e = \mu \left[-\nabla p_e - \frac{n_e}{d} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) \right] \\ \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_e + p_e) \mathbf{u}_e = n_e \mathbf{u}_e \cdot \mathbf{E} \end{array} \right. \quad \mu = \frac{m_i}{m_e} \quad p_e = (\gamma - 1) \left(\varepsilon_e - \frac{1}{2\mu} n_e u_e^2 \right)$$



二流体方程式の導入

□ 無次元化された完全二流体方程式

■ マクスウェル方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c^2 \left[\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{d} (n_i \mathbf{u}_i - n_e \mathbf{u}_e) \right] \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \end{cases}$$

■ イオンの物理量で規格化

$$u_0 = v_A \Rightarrow d \leftarrow d_i / L_0, c \leftarrow c / v_A = \omega_{pi} / \omega_{ci}$$

$$u_0 = c_s \Rightarrow d \leftarrow r_{ci} / L_0, c \leftarrow c / c_s$$

□ $c \rightarrow \infty$: 拡張されたMHD方程式

□ $c \rightarrow \infty, \mu \rightarrow \infty$: Hall-MHD方程式

完全二流体方程式の数値解法

□ 研究開発項目の検討

■ 基礎解法

□ **双曲型釣合則** (hyperbolic balance laws) :

双曲型保存則の非同次形

⇒ 双曲型保存則の解法が基本

□ ソース項の取り扱い

■ 多次元化

□ **ガウスの法則** : $\nabla \cdot \mathbf{E} = \sigma / \varepsilon_0$, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

■ 高次精度化

■ 高精度・安定時間積分法

完全二流体方程式の数値解法

□ 双曲型釣合則 (hyperbolic balance laws)

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}(\mathbf{U})$$

■ 散逸性 (緩和型) のソース項

- 摩擦力、化学反応など
- $\partial \mathbf{S} / \partial \mathbf{U}$ の固有値はreal
- 平衡解に収束

■ 分散性のソース項

- ローレンツ力など
 - $\partial \mathbf{S} / \partial \mathbf{U}$ の固有値はimaginary
 - 平衡解周りに振動
- ⇒ 完全二流体方程式

完全二流体方程式の数値解法

□ Roe-type Riemann solver [Shumlak+, 2003]

■ (2次精度) Roe型リーマン解法

$$F_{j+1/2} = \frac{1}{2}(F_{j+1} + F_j) - \frac{1}{2}|A|_{j+1/2}(U_{j+1} - U_j)$$

■ ソース項は陰解法

$$\begin{aligned} \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} &= -\frac{\Delta F^n}{\Delta x} + S^{n+1} \\ \Rightarrow \left[\frac{1}{\Delta t} - \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)^k \right] \Delta U &= -\frac{U^k - U^n}{\Delta t} - \frac{\Delta F^n}{\Delta x} + S^k, \quad \Delta U = U^{n+1} - U^k \end{aligned}$$

□ $|\Delta U| \rightarrow 0$ の繰り返し計算

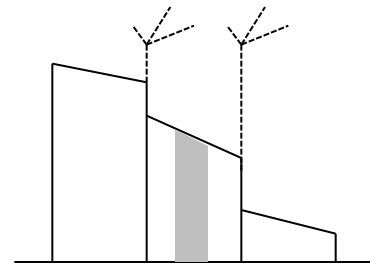
□ $(\partial S / \partial U)^k$ は局所的

完全二流体方程式の数値解法

□ Wave propagation scheme [Hakim+, 2005]

■ 2次精度Wave propagationスキーム

$$\mathbf{F}_{j+1/2} = \mathbf{F}_{j+1/2}^G + \frac{1}{2} |\mathbf{A}|_{j+1/2} \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} |\mathbf{A}|_{j+1/2} \right) \Delta \mathbf{U}_{j+1/2}$$

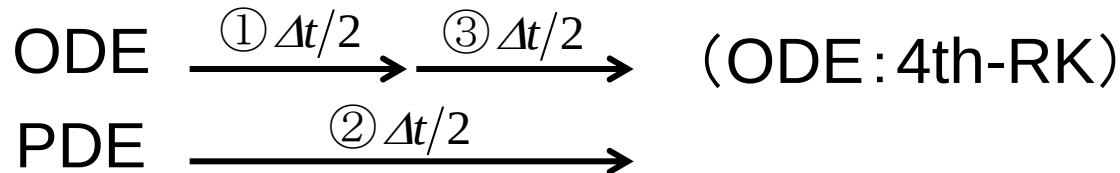


□ 補正項の特性変数に制限関数を適用

■ ソース項は2つのアプローチ

□ Wave propagationの数値流束に組み込み

□ ODEとして演算分離 (Strang splitting)



■ perfectly hyperbolic Maxwell eqs. (PHM)

完全二流体方程式の数値解法

□ Discontinuous Galerkin method [Loverich+, 2011]

■ RKDG法

$$U \equiv \sum_r v_r U^{(r)}, \quad U^{(r)} = \int v_r U dx / \int v_r^2 dx$$

$$\begin{aligned} \frac{dU_j^{(r)}}{dt} = & - \frac{F_{j+1/2}^G v_r(x_{i+1/2}) - F_{j-1/2}^G v_r(x_{i-1/2})}{\Delta x} \\ & + \frac{1}{\Delta x} \int \frac{dv_r(x)}{dx} F dx + \frac{1}{\Delta x} \int v_r(x) S dx \end{aligned}$$

□ 局所的基底関数 v_r で展開し高次精度化
(2次～8次精度[Srinivasan+, 2011])

□ 時間精度の次数を r とすると $CFL \leq 1/(2r-1)$

□ 制限関数は色々検討

完全二流体方程式の数値解法

□ Entropy stable scheme [Kumar+, 2012]

- Entropy conservative scheme + numerical diffusion [Tadmor, 1987, 2004; Ismail+, 2009]

□・・・こういう差分法があると思ってください・・・

- 時間積分法は2つのアプローチ

□ Strong-stability-RK法 (SSP-RK)

□ Implicit-Explicit-RK法 (IMEX-RK)

$$U^{(m+1)} = U^{(m)} - \Delta t \frac{\Delta F^{(m)}}{\Delta x} + \Delta t S^{(m+1)}$$

$$W_1^{(m+1)} = G_1(U^{(m)})$$

$$W_2^{(m+1)} = G_2(U^{(m)}) + A_{S_2}(W_1^{(m+1)})W_2^{(m+1)}$$

$$W_3^{(m+1)} = G_3(U^{(m)}) + H(W_1^{(m+1)}, W_2^{(m+1)})$$

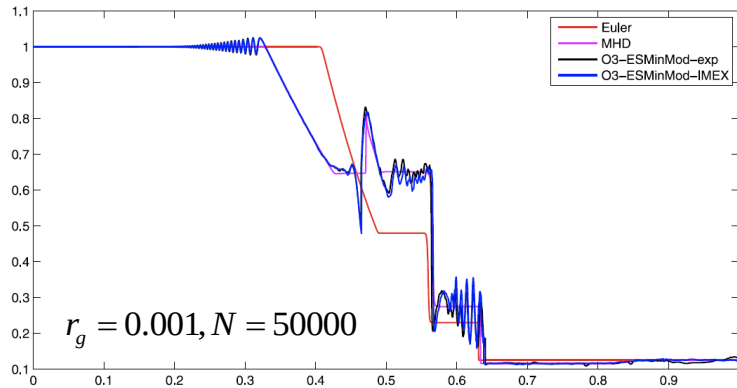
$$W_1 = \{n_s, B\}$$

$$W_2 = \{n_s u_s, E\}$$

$$W_3 = \{\varepsilon_s\}$$

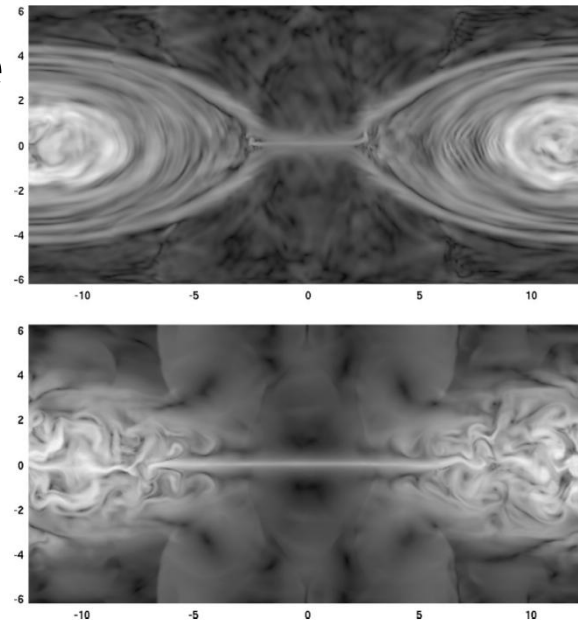
完全二流体方程式の数値解法

Shock tube

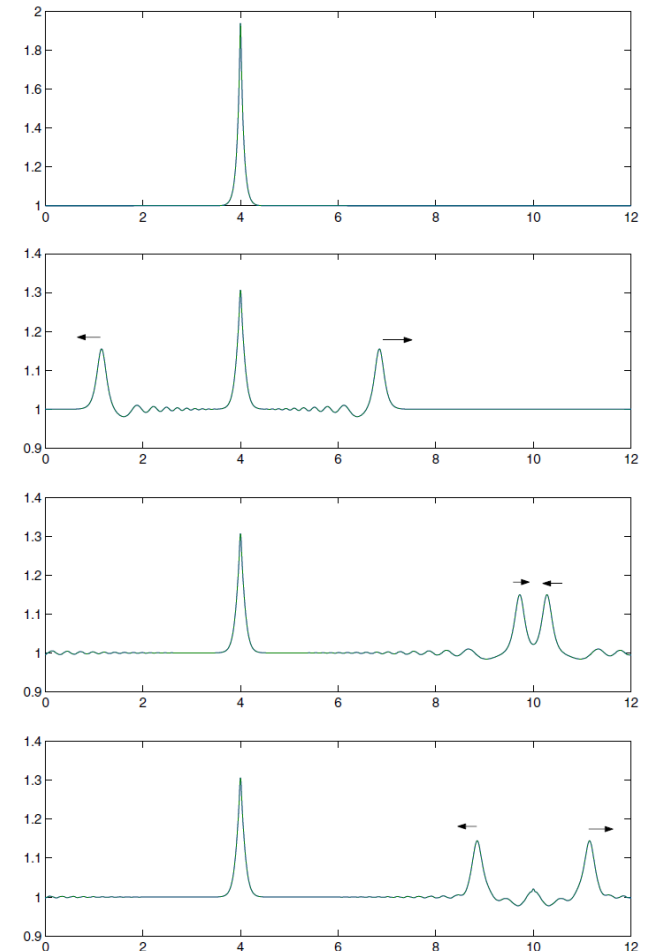


[Kumar+, 2012]

GEM challenge



Soliton



[Hakim+, 2005]

完全二流体方程式の数値解法

□ 標準的な数値解法による予備的な数値実験

- Lax法

- local Lax–Friedrichs (LLF) 法

 - 速度選択#1: 全システム共通 ($\lambda_{\max} = c$)

 - 速度選択#2: 各システム個別

- HLL法

- HLLC法

- 空間1次精度、時間1次精度 (陽的Euler法)

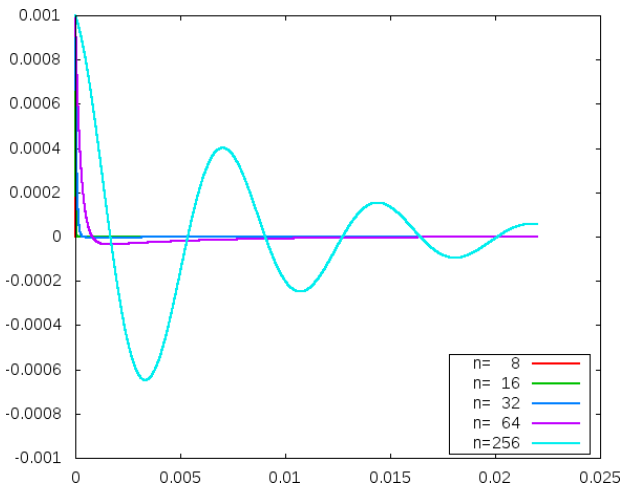
□ 数値実験課題

- 電子プラズマ振動 $c = 20.0$, $d_i = 1.0$

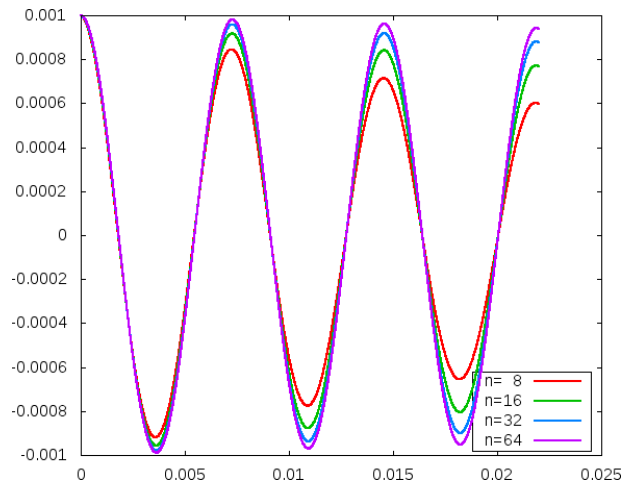
- 衝撃波管問題 $c = 100.0$, $d_i = 1.0, 0.5, 0.1, 0.05$

完全二流体方程式の数値解法

電子プラズマ振動

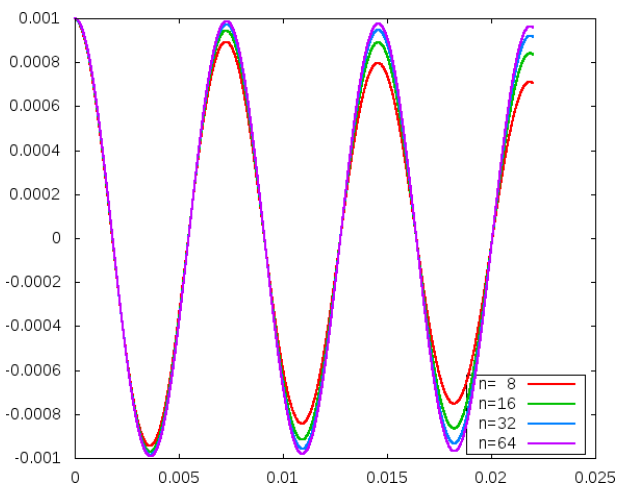


(Lax法)

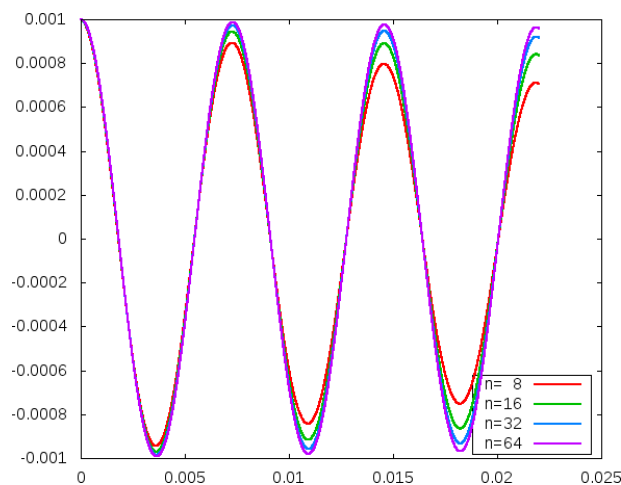


(LLF法 #1)

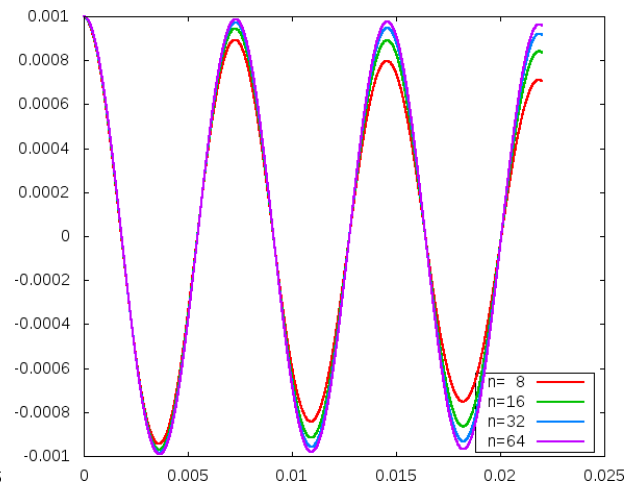
$$\begin{aligned}\partial_t \delta n_e + n_{e0} \partial_x \delta u_e &= 0 \\ \partial_t \delta u_e &= -(\mu/d_i) \delta E_x \\ \partial_t \delta E_x &= (n_{e0} c^2 / d_i) \delta u_e\end{aligned}$$



(LLF法 #2)



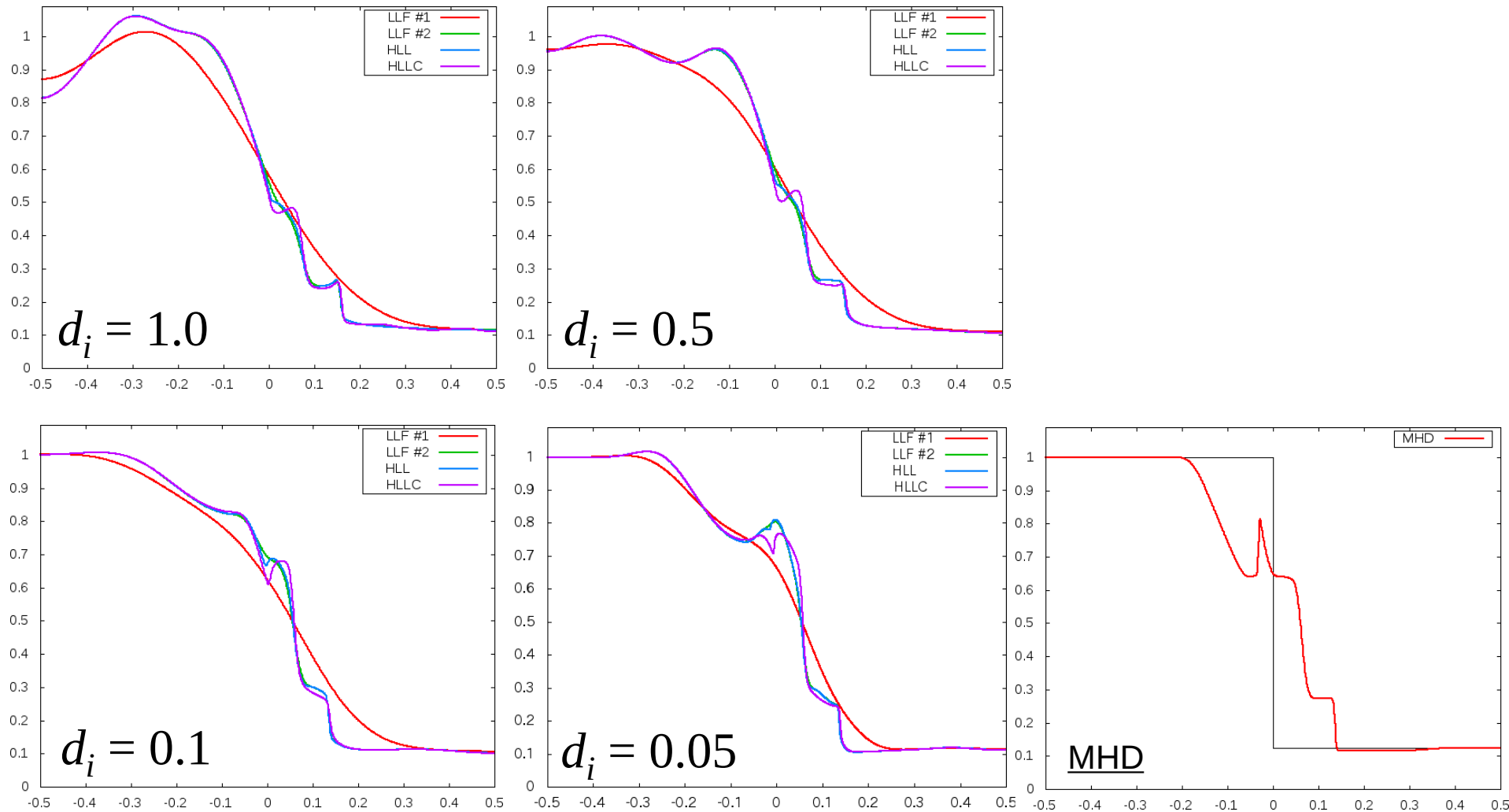
(HLL法)



(HLLC法)

完全二流体方程式の数値解法

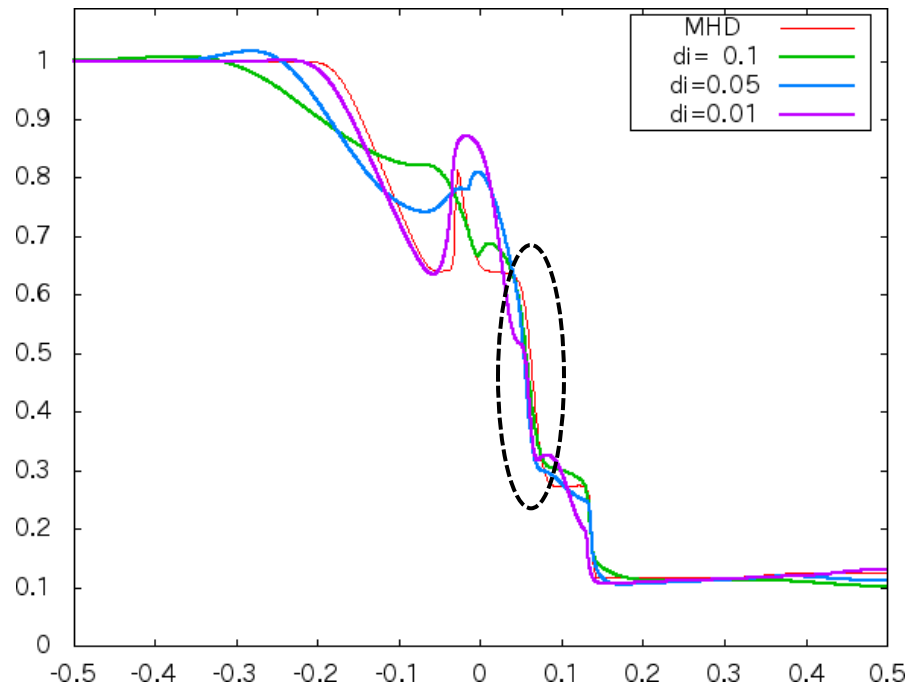
□ 衝撃波管問題 (BW88)



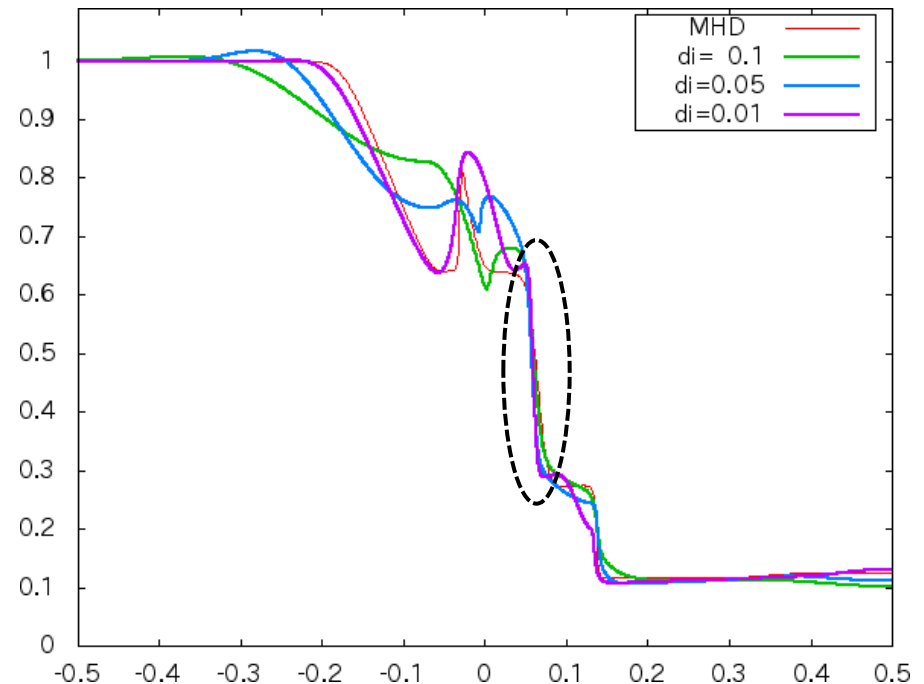
完全二流体方程式の数値解法

□ 衝撃波管問題(BW88)

(HLL法)



(HLLC法)



完全二流体方程式の数値解法

□ 多次元化その前に...

■ 1次元磁場のガウスの保存則: $B_x = \text{const.}$

■ 1次元電場のガウスの保存則: 非自明

⇒ ソース項(電流項)の評価に依存

case 1: 物理量のセル平均値

$$J_j = (n_i u_i)_j - (n_e u_e)_j$$

case 2: 数値流束の平均値

$$J_j = \frac{(n_i u_i)_{j+1/2} + (n_i u_i)_{j-1/2} - (n_e u_e)_{j+1/2} - (n_e u_e)_{j-1/2}}{2}$$

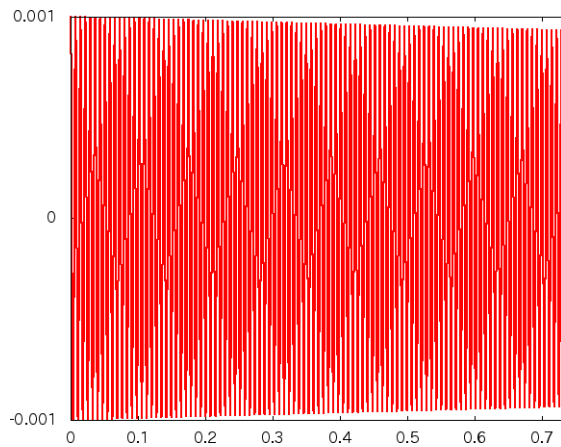
case 3: 数値流束(スタガード格子)

$$J_{j+1/2} = (n_i u_i)_{j+1/2} - (n_e u_e)_{j+1/2}$$

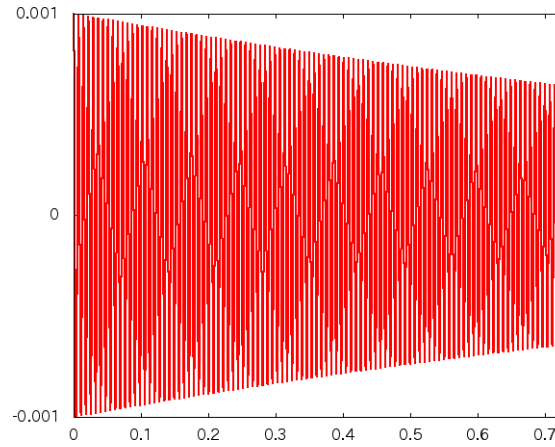
完全二流体方程式の数値解法

□ 電子プラズマ振動(小振幅問題)

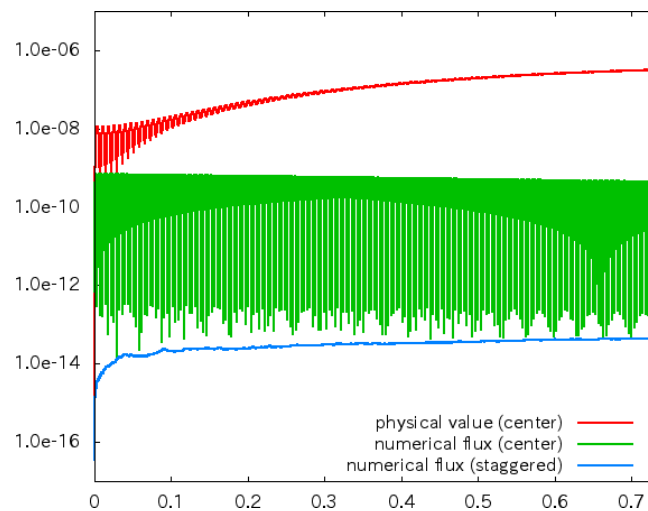
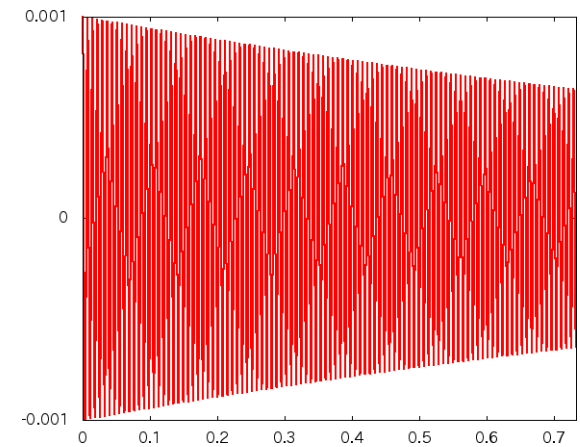
case 1



case 2



case 3

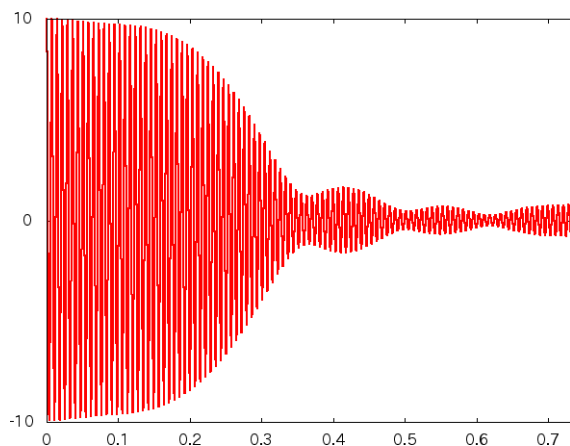


$$err = \frac{\sum |\nabla \cdot E - n_{ij} + n_e|}{N}$$

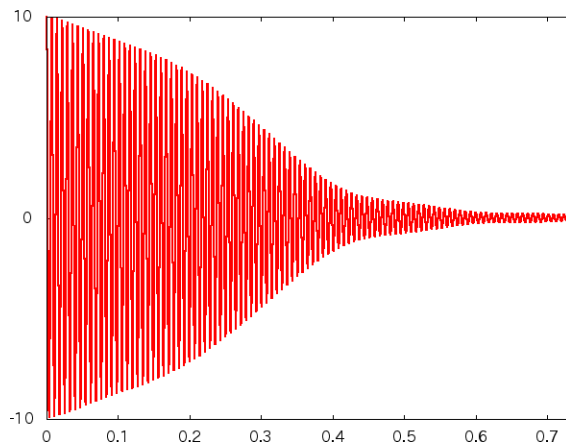
完全二流体方程式の数値解法

□ 電子プラズマ振動(大振幅問題)

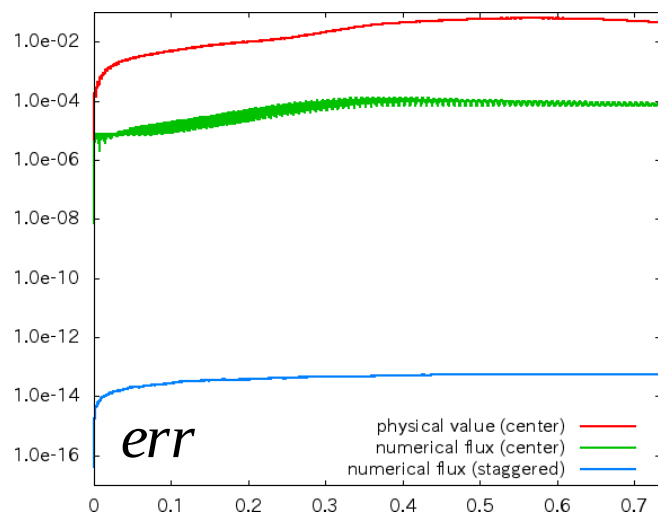
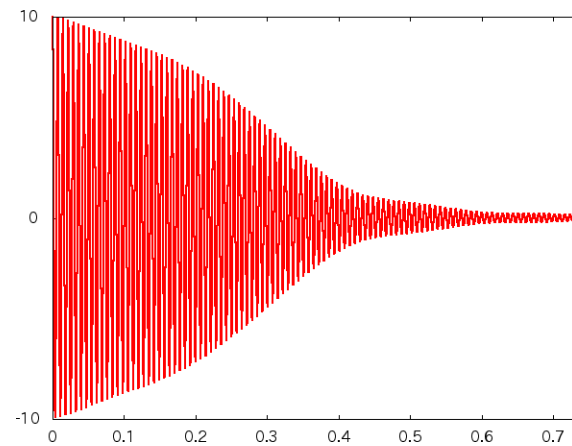
case 1



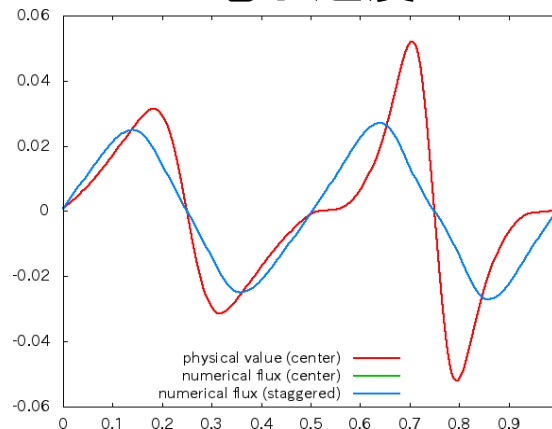
case 2



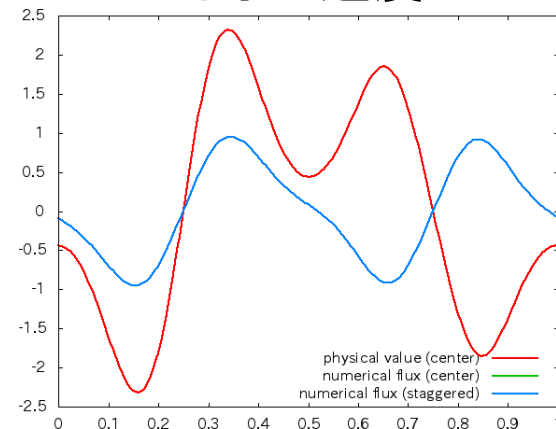
case 3



電子速度



イオン速度



完全二流体方程式の数値解法

□ MHD数値解法の多次元化の課題

- 高次精度化
- 衝撃波不安定性(カーバンクル現象など)
- 数値的な磁場発散

□ 数値的な磁場発散の除去技法

- プロジェクション法
- 移流法
 - 7-wave移流法 [Powell, 1994]
 - 8-wave移流法 [Dedner+, 2002]
- CT法
- 中心差分法

完全二流体方程式の数値解法

- 完全二流体数値解法の多次元化の課題
 - 高次精度化
 - 衝撃波不安定性(カーバンクル現象など)
 - 数値的な電場発散と磁場発散
- 数値的電場・磁場発散の除去技法
 - プロジェクション法
 - 移流法
 - スタガード格子法
 - 中心差分法

ここから先は単なる言いつぱなし

完全二流体方程式の数値解法

□ プロジェクション法

(ステップ1)

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^* &= \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \psi = \mathbf{B}^n + \Delta t \mathbf{G}(\mathbf{U}^n) \\ \mathbf{E}^* &= \nabla \times \mathbf{D} + \nabla \phi = \mathbf{E}^n + \Delta t \mathbf{H}(\mathbf{U}^n) \end{aligned}$$

(ステップ2)

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{n+1} &= \mathbf{B}^* - \nabla \psi, \quad \nabla^2 \psi = \nabla \cdot \mathbf{B}^* \\ \mathbf{E}^{n+1} &= \mathbf{E}^* - \nabla \phi, \quad \nabla^2 \phi = \nabla \cdot \mathbf{E}^* - \rho_c \end{aligned}$$

■ 他のプロジェクション系の技法も利用可能

完全二流体方程式の数値解法

□ 移流法

■ PHM方程式 [Munz, 2000]

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \psi = 0$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{B} + \nabla \phi = -\mathbf{J}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \alpha^2 \nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{\alpha^2}{\chi^2} \psi$$

$$\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_c - \frac{\phi}{\xi^2}$$

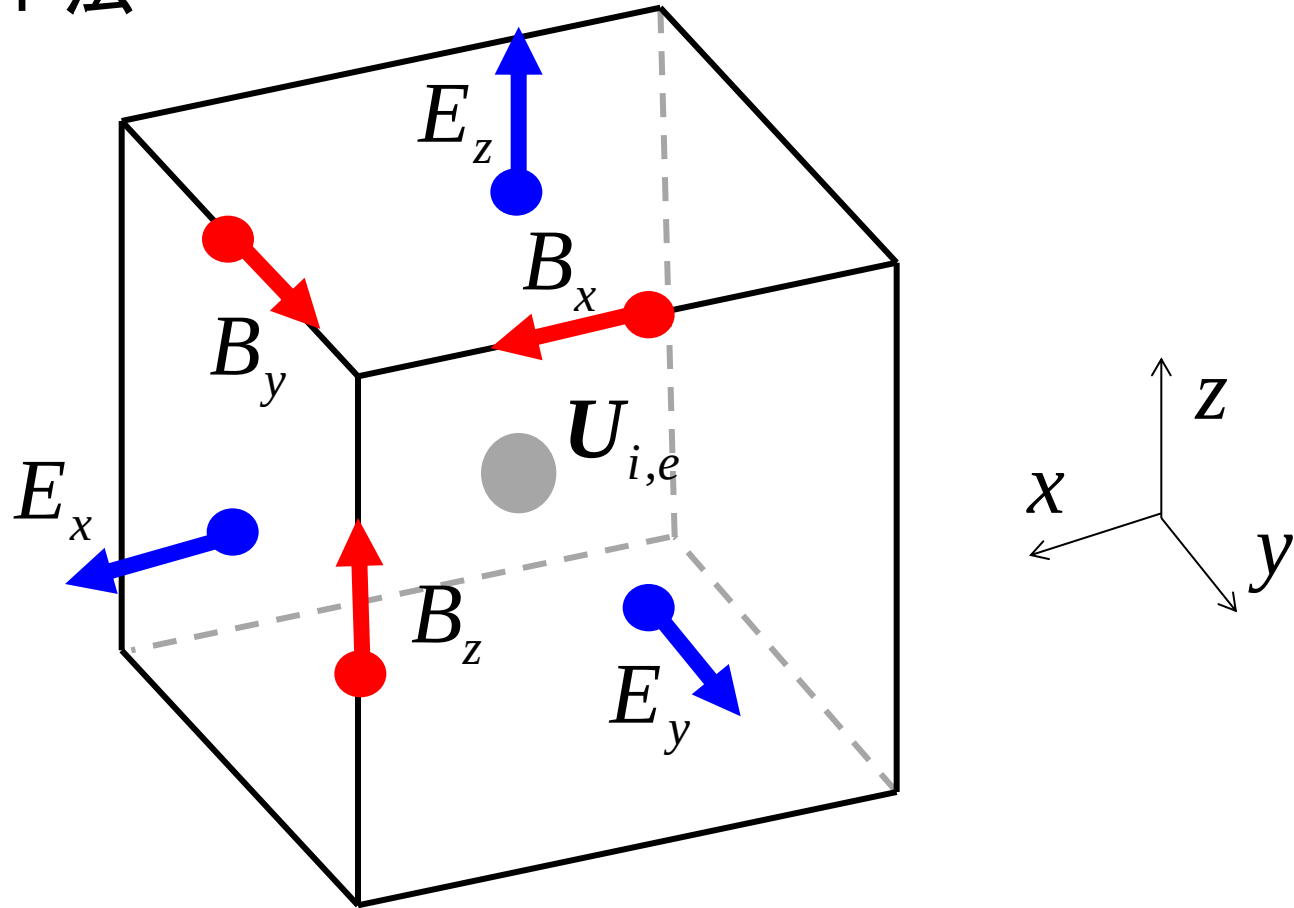
$$\Rightarrow \partial^2 \psi / \partial t^2 + (\alpha^2 / \chi^2) \partial \psi / \partial t - \alpha^2 \nabla^2 \psi = 0$$

$$\partial^2 \phi / \partial t^2 + (\beta^2 / \xi^2) \partial \phi / \partial t - \beta^2 \nabla^2 \phi = 0$$

□ 多分、ソース項をつけても大丈夫なはず

完全二流体方程式の数値解法

□ スタガード法



- 数値質量流束を利用できるように電場を配置

おわりに

- 次世代プラズママルチスケールシミュレーションモデル構築に向けて、完全二流体プラズマ方程式の数値解法について検討した。
- 今後の課題は満載である。
 - 双曲型釣合則の数値解法
 - 分散性ソース項
 - 高次精度化
 - 多次元化
 - 高安定時間積分法
 - 実用上の課題(境界条件など)
- 友は強敵であり、強敵は友であることがわかった！