

# HYBRID シミュレーション

杉山 徹

(地球シミュレータセンター)

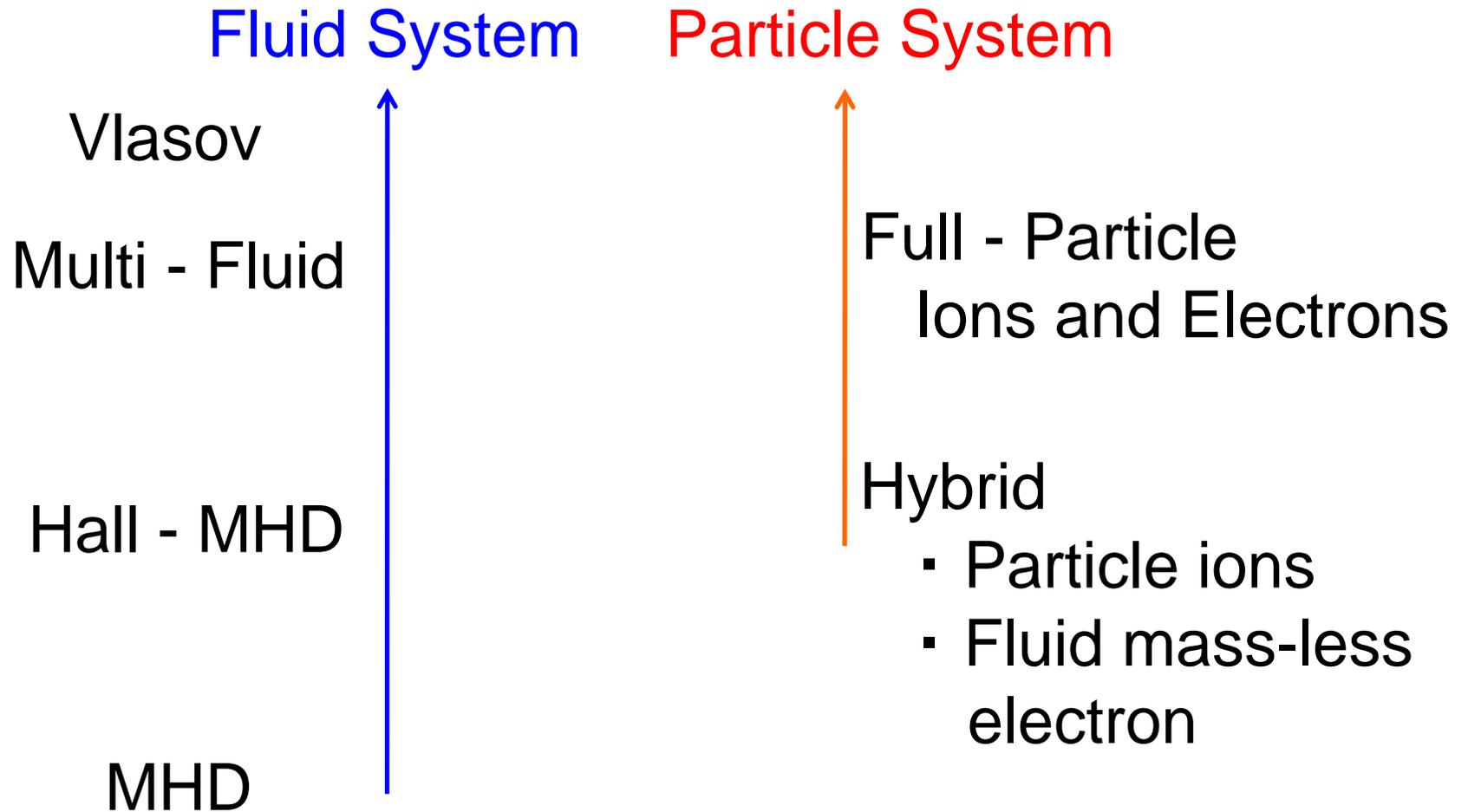
# HYBRID シミュレーション

プラズマの階層性を利用

運動論と流体

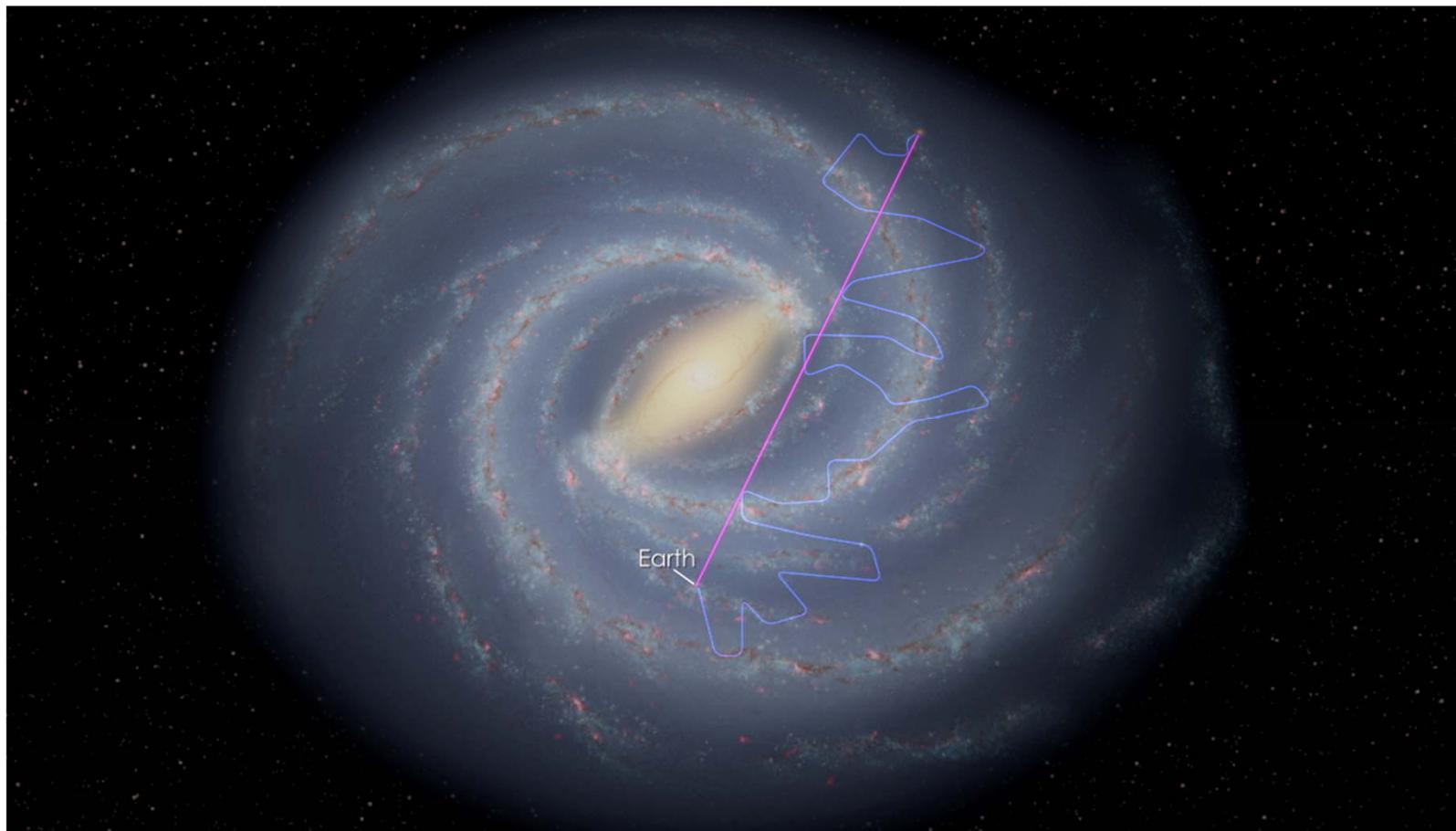
- 流体系と粒子系
  - イオン      運動論を粒子手法で扱う
  - 電子        流体(質量無、電荷中性)

# プラズマ計算での階層性

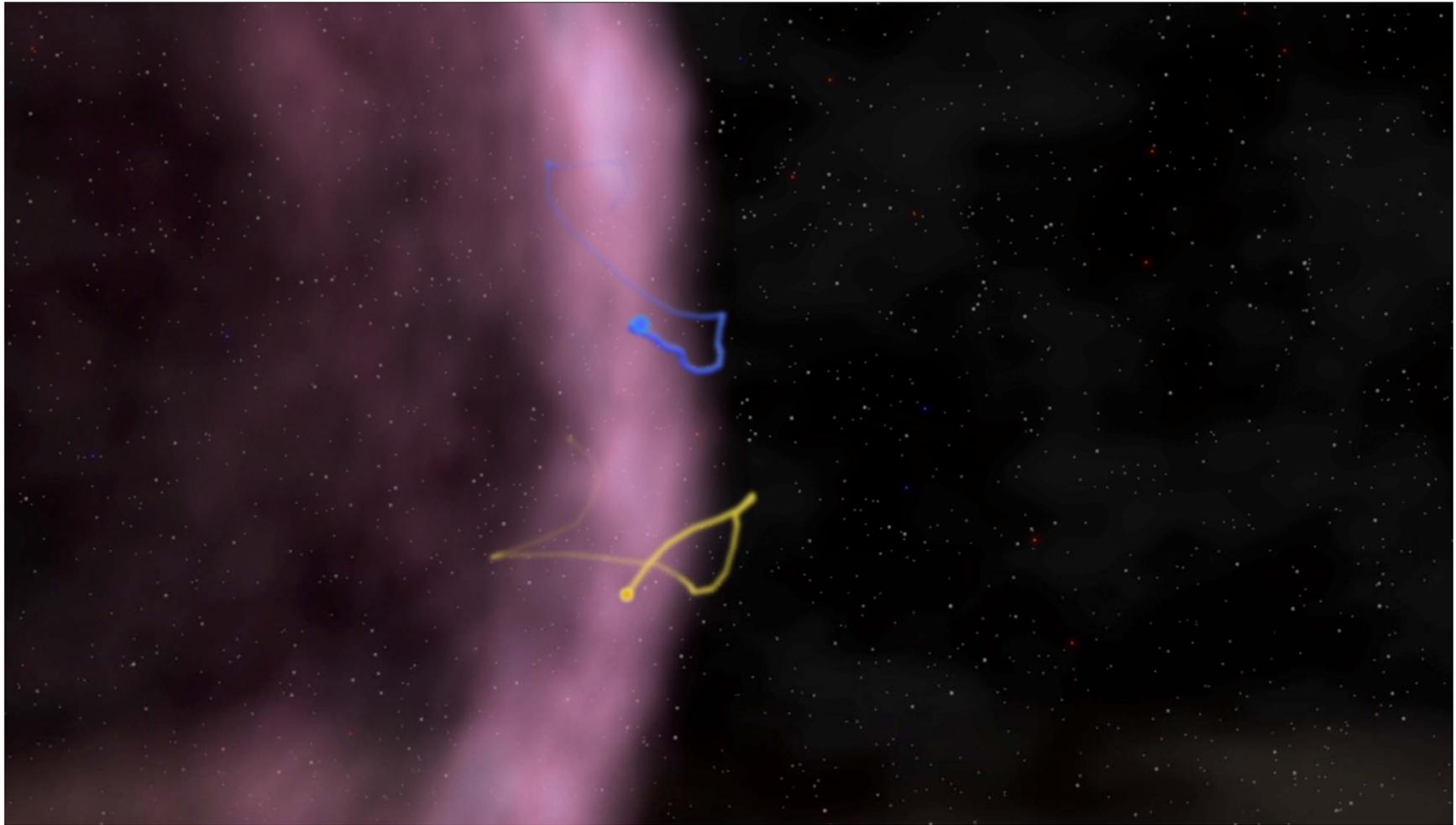


# Fermi Proves Supernova Remnants Produce Cosmic Rays

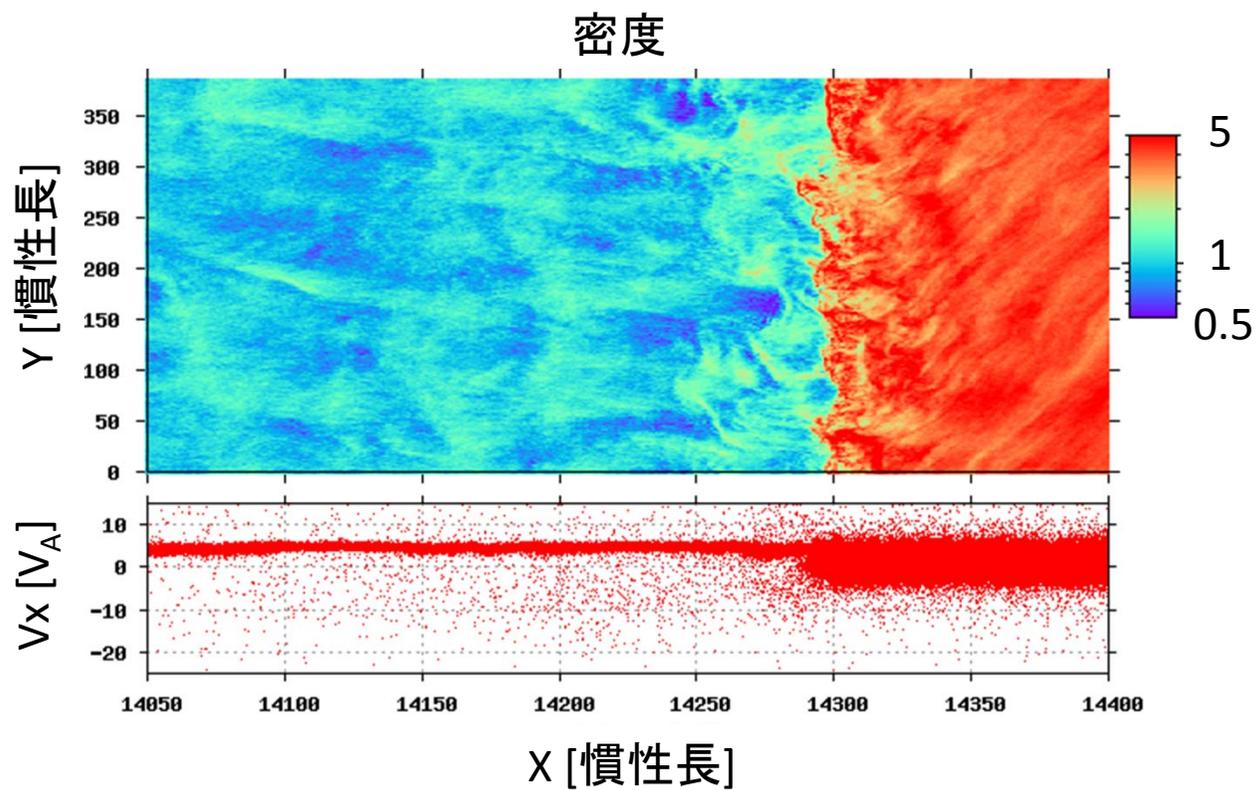
<http://svs.gsfc.nasa.gov/vis/a010000/a011200/a011209/>



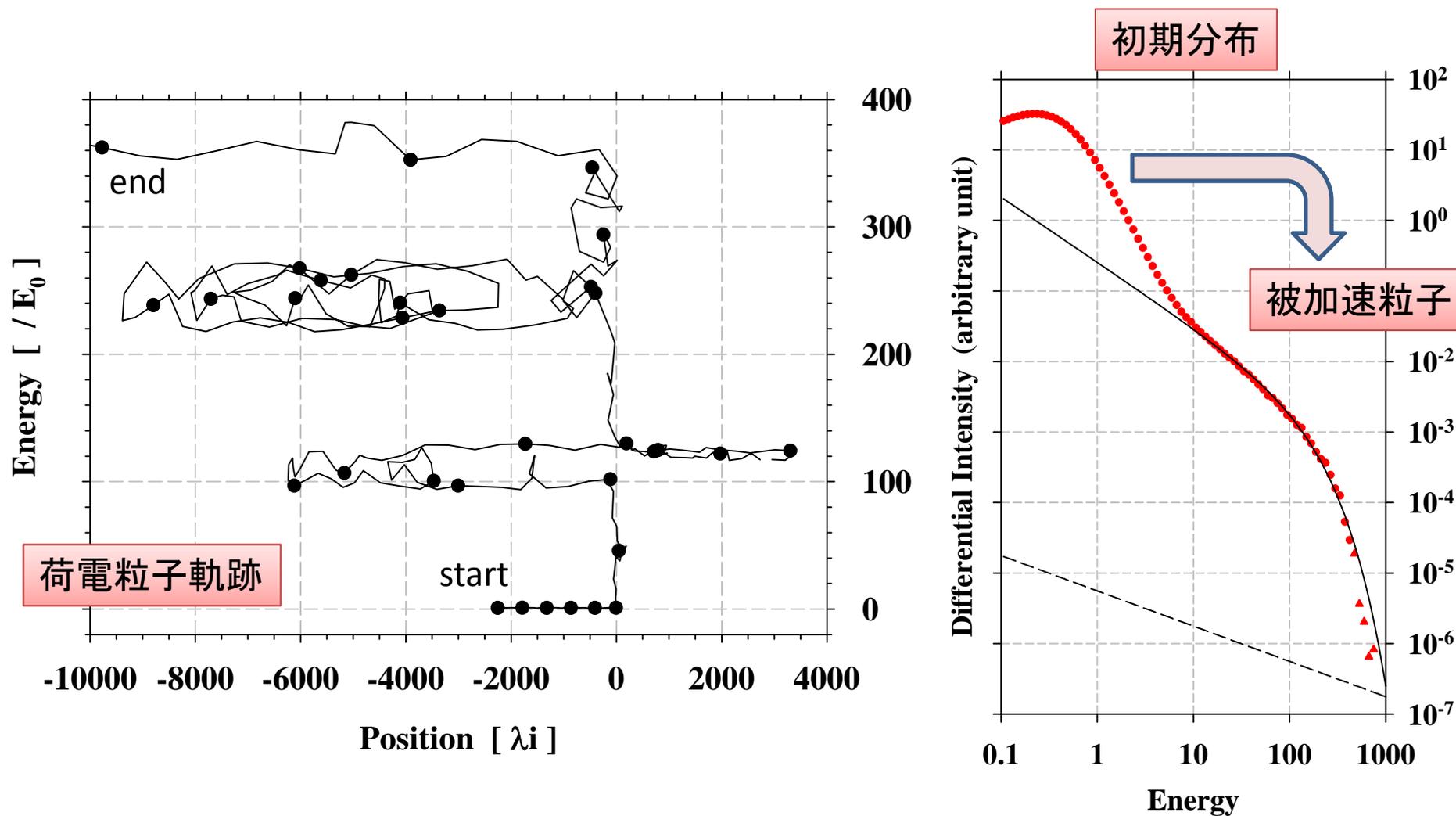
# Fermi Proves Supernova Remnants Produce Cosmic Rays



# 無衝突衝擊波計算



# 衝撃波形成と荷電粒子加速



# 支配方程式群

- MHD Equations

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{V})$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} - \frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{\rho} \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{V} \times \mathbf{B}$$

- PIC Equations

$$\frac{d\mathbf{v}^\#}{dt} = \frac{q^\#}{m^\#} (\mathbf{E} + \mathbf{v}^\# \times \mathbf{B})$$

$$\frac{d\mathbf{r}^\#}{dt} = \mathbf{v}^\#$$

$$\mathbf{J} = \sum_{\#} q^\# \mathbf{v}^\# S(\mathbf{r}^\# - \mathbf{r})$$

$$\rho = \sum_{\#} q^\# S(\mathbf{r}^\# - \mathbf{r})$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

- # ナンバー記号 ハッシュマーク、スクエア
- # 音楽の臨時記号 シャープ
- ♭ 音楽の臨時記号 フラット

# 特性物理量

	HYBRID	PIC
特性長	慣性長 $\lambda_i$	Debye 長 $\lambda_d$
特性速度	アルフヴェン速 $V_A$	光速 $c$
特性時間	イオンサイクロトロン 周波数 $\Omega_{ci}$	プラズマ振動数 $\omega_{pe}$
電荷分布	中性	準中性
質量比 $m_e/M_i$	0	1836
速度比 $c/V_A$	$\infty$	$(\omega_{pe}/\Omega_{ce}) (M_i/m_e)^{1/2}$

# 支配方程式の導出(1)

## HYBRID 階層にする本質式

電子の流体方程式 (Ohmの式)

$$m_e N_e \frac{d\mathbf{V}_e}{dt} = -e N_e (\mathbf{E} + \mathbf{V}_e \times \mathbf{B}) + \nabla \cdot \mathbf{P}_e$$

$$\frac{d\mathbf{V}_e}{dt} = - \left( \frac{M_p}{m_e} \right) \left( \mathbf{E} + \mathbf{V}_e \times \mathbf{B} + \frac{1}{2N_e} \nabla \cdot \mathbf{P}_e \right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{E} = -\mathbf{V}_e \times \mathbf{B} - \frac{1}{2N_e} \nabla \cdot \mathbf{P}_e$$

規格化後

Maxwell 方程式

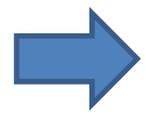
$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

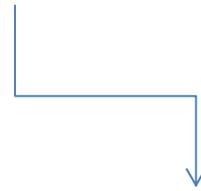
$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \left( \frac{c}{V_A} \right)^2 (\nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{J})$$

$$\Rightarrow \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$$

# 支配方程式の導出(2)

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_i + \mathbf{J}_e$$
$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$$
$$\mathbf{J}_e = -N_e \mathbf{V}_e$$
$$N_e = N_i = \sum_{\#} S(\mathbf{r}^{\#} - \mathbf{r}_g)$$
$$\mathbf{J}_i = N_i \mathbf{V}_i = \sum_{\#} \mathbf{V}^{\#} S(\mathbf{r}^{\#} - \mathbf{r}_g)$$


$$\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_i - \nabla \times \mathbf{B} / N_i$$


$$\mathbf{E} = -\mathbf{V}_e \times \mathbf{B} - \frac{1}{2N_e} \nabla \cdot \mathbf{P}_e$$

# 解くべき方程式群

$$\frac{d\mathbf{v}^\#}{dt} = \frac{q^\#}{m^\#} (\mathbf{E} + \mathbf{v}^\# \times \mathbf{B})$$

$$\frac{d\mathbf{r}^\#}{dt} = \mathbf{v}^\#$$

$$N_i \mathbf{V}_i = \sum_{\#} \mathbf{v}^\# S(\mathbf{r}^\# - \mathbf{r})$$

$$N_i = \sum_{\#} S(\mathbf{r}^\# - \mathbf{r})$$

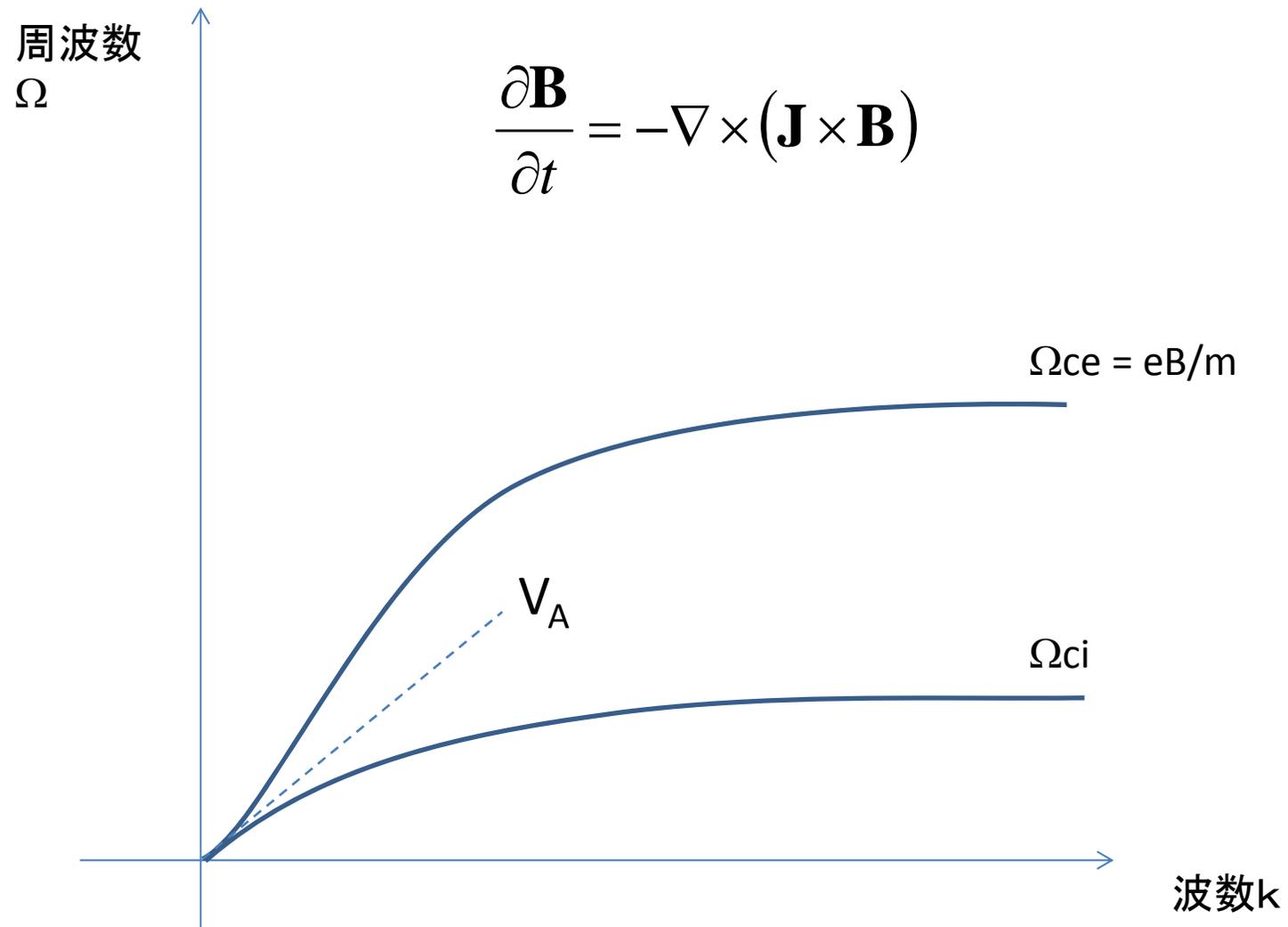
$$\mathbf{E} = -\mathbf{V}_i \times \mathbf{B} + \frac{1}{N_e} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \frac{1}{2N_e} \nabla \cdot \mathbf{P}_e$$

$$N_e = N_i$$

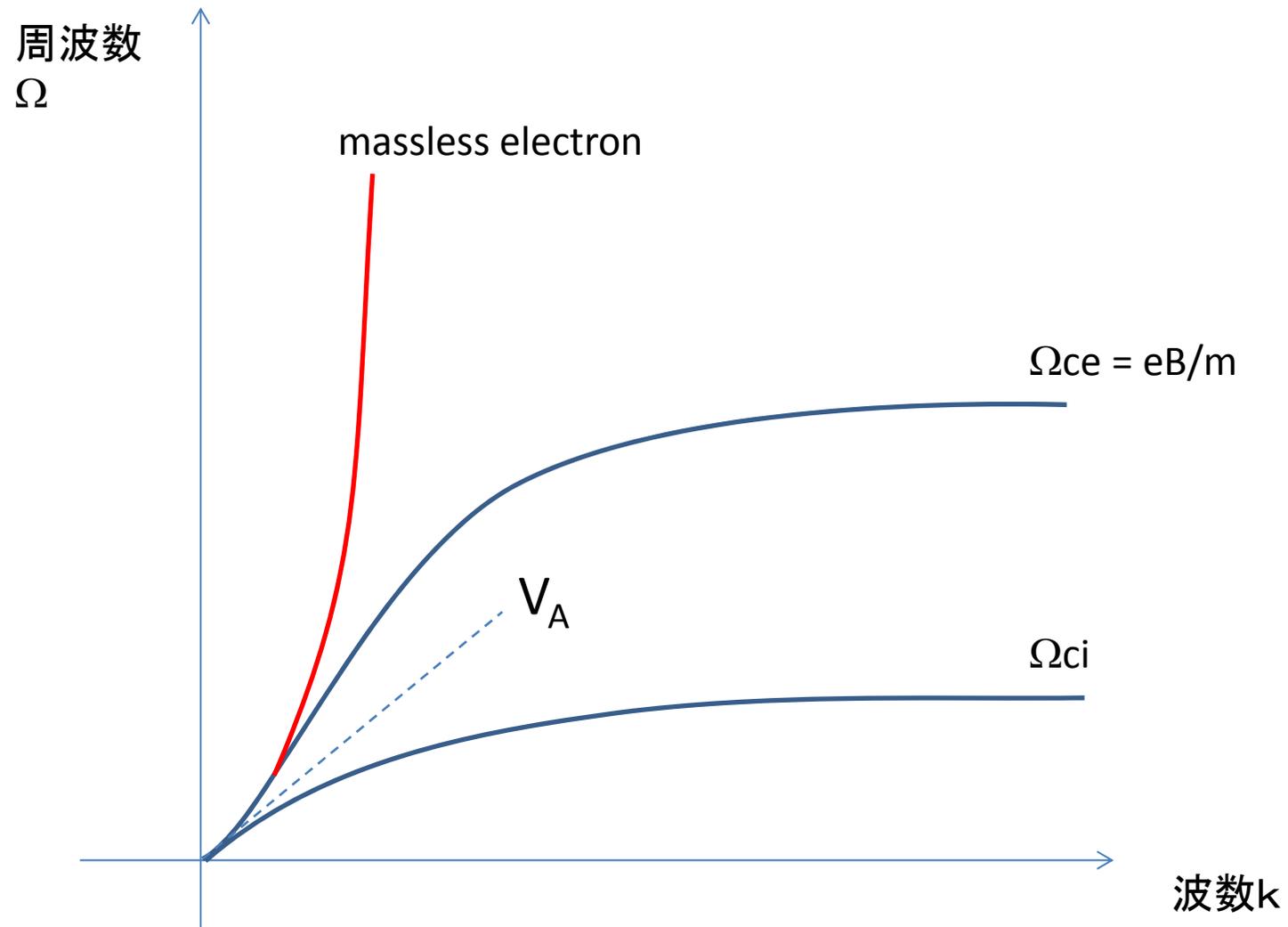
$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

電場を時間発展させる式が無い

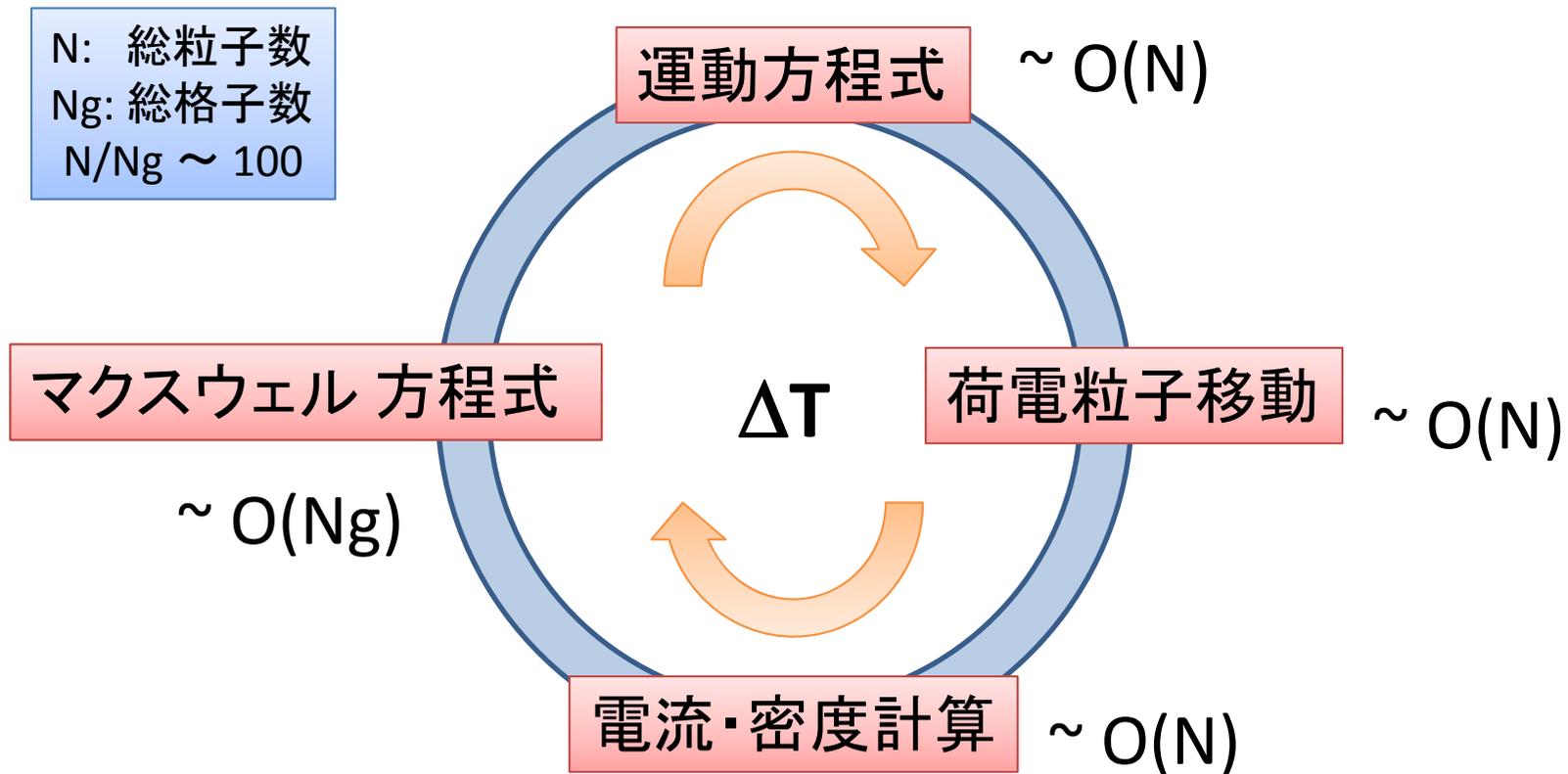
# Whistler Wave



# Whistler Wave



# Particle-In-Cell (PIC) プラズマシミュレーション



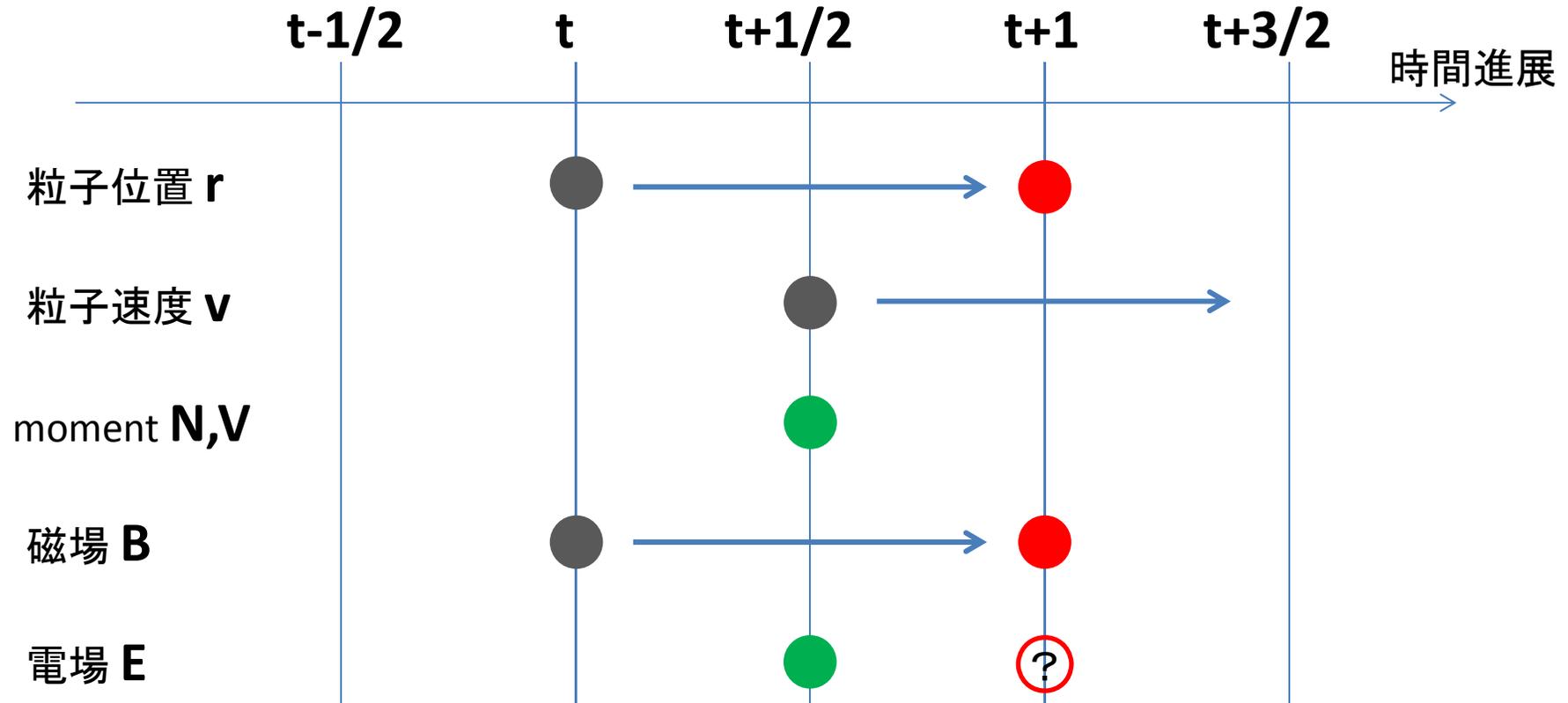
# タイムステップチャート

- Predictor-Corrector Scheme
- ISAS Scheme (Adams-Bashforth)
- KEMHO (Kyoto Electro Magnetic Hybrid cOde)
- CAM-CL (Current Advance Method and Cyclic Leapfrog)
- ...

粒子位置・速度更新 : Leapfrog

電場を時間発展させる式が無いため  
スキームが異なる

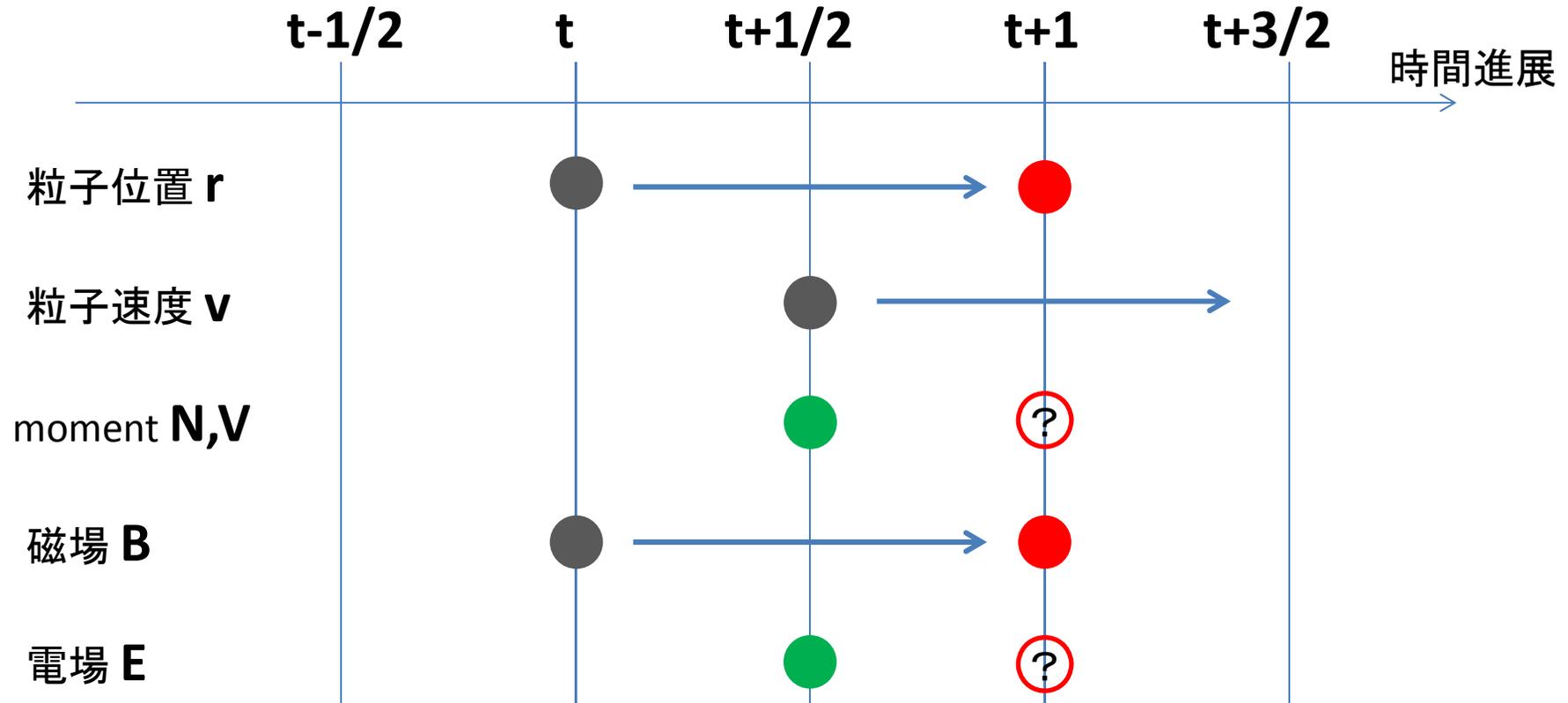
# タイムステップチャート



$$\mathbf{E} = -\mathbf{V}_i \times \mathbf{B} + \frac{1}{N_i} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

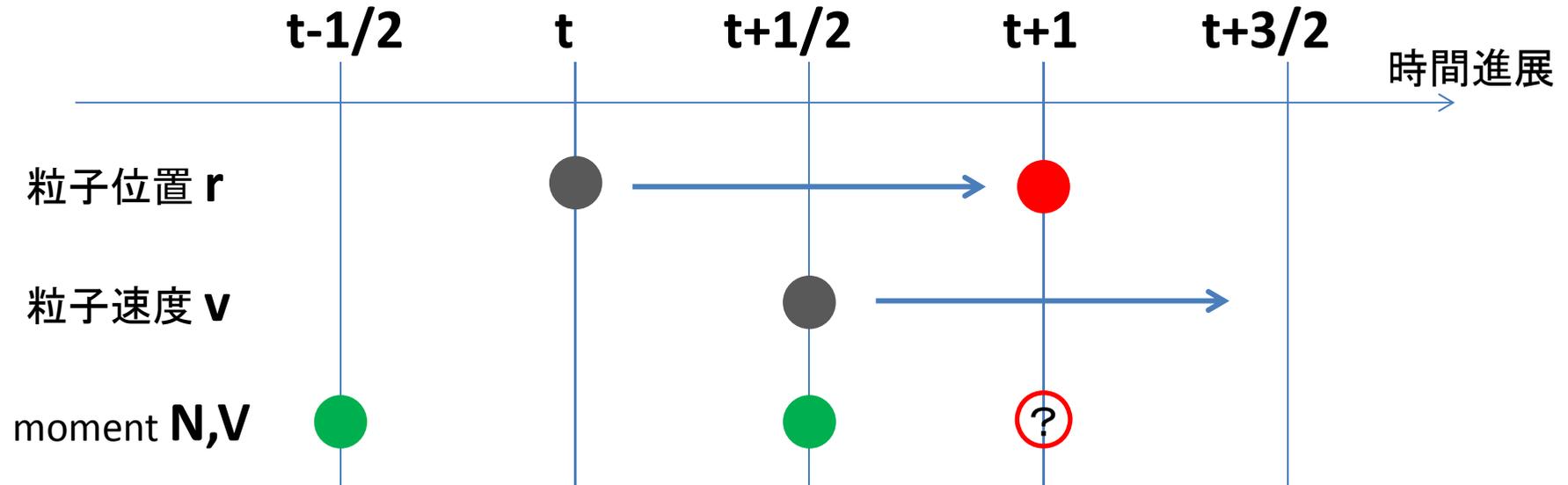
# タイムステップチャート



$$\mathbf{E} = -\mathbf{V}_i \times \mathbf{B} + \frac{1}{N_i} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

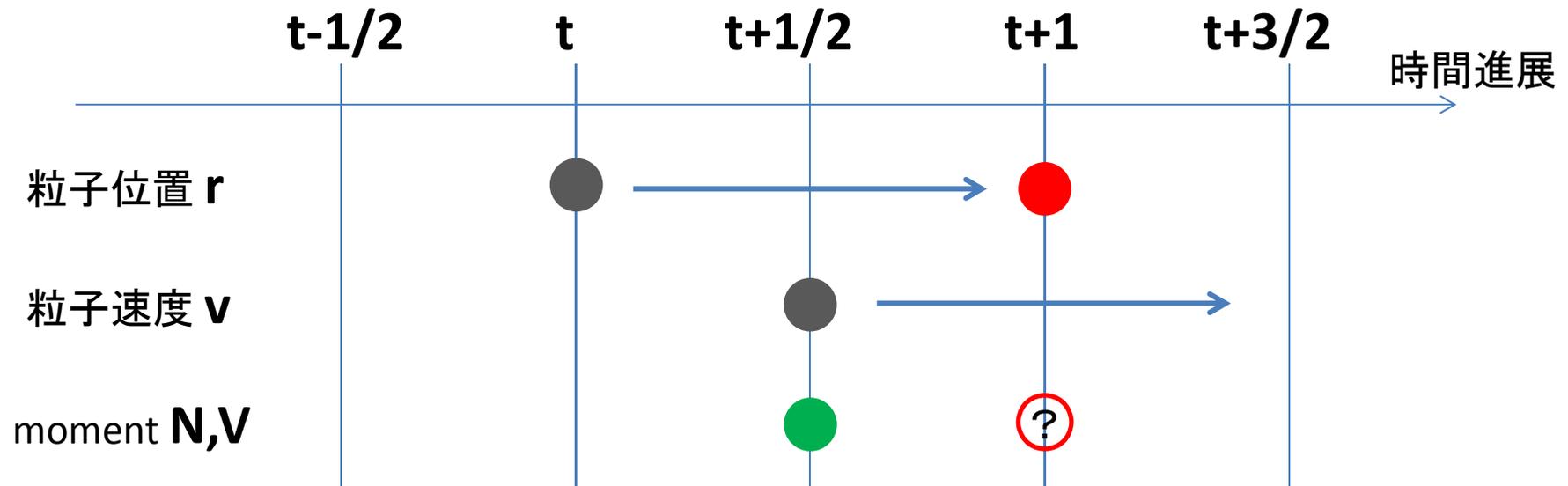
# ISAS Scheme



Adams-Bashforth で外挿

$$\mathbf{V}_i(t+1) = \frac{55}{24} \mathbf{V}_i(t+1/2) - \frac{59}{24} \mathbf{V}_i(t-1/2) + \frac{37}{24} \mathbf{V}_i(t-3/2) - \frac{9}{24} \mathbf{V}_i(t-5/2)$$

# CAM-CL Scheme (Current Advance Method)

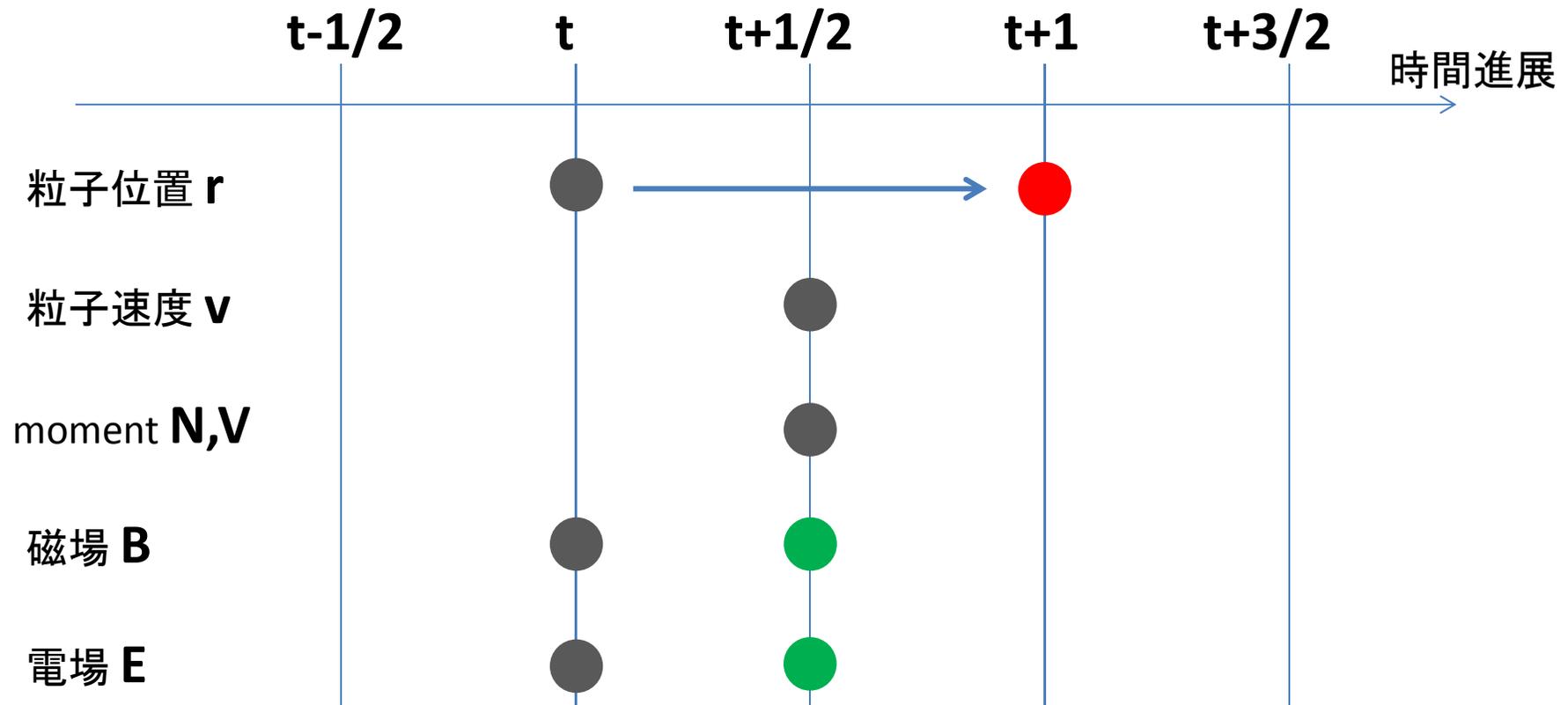


$$\mathbf{v}^{\#}(t+1) = \mathbf{v}^{\#}(t+1/2) + \frac{q^{\#}}{m^{\#}} (\mathbf{E} + \mathbf{v}^{\#}(t+1/2) \times \mathbf{B}) \frac{\Delta t}{2}$$

$$\mathbf{J}_i = \sum_{\#} q^{\#} \mathbf{v}^{\#} S(\mathbf{r}^{\#} - \mathbf{r}) \quad \rho = \sum_{\#} q^{\#} S(\mathbf{r}^{\#} - \mathbf{r})$$

$$\mathbf{J}(t+1) = \mathbf{J}(t+1/2) + \left( \sum_{\#} \frac{q^{\#}}{m^{\#}} S(\mathbf{r}^{\#} - \mathbf{r}) \mathbf{E} + \mathbf{J}(t+1/2) \times \mathbf{B} \right) \frac{\Delta t}{2}$$

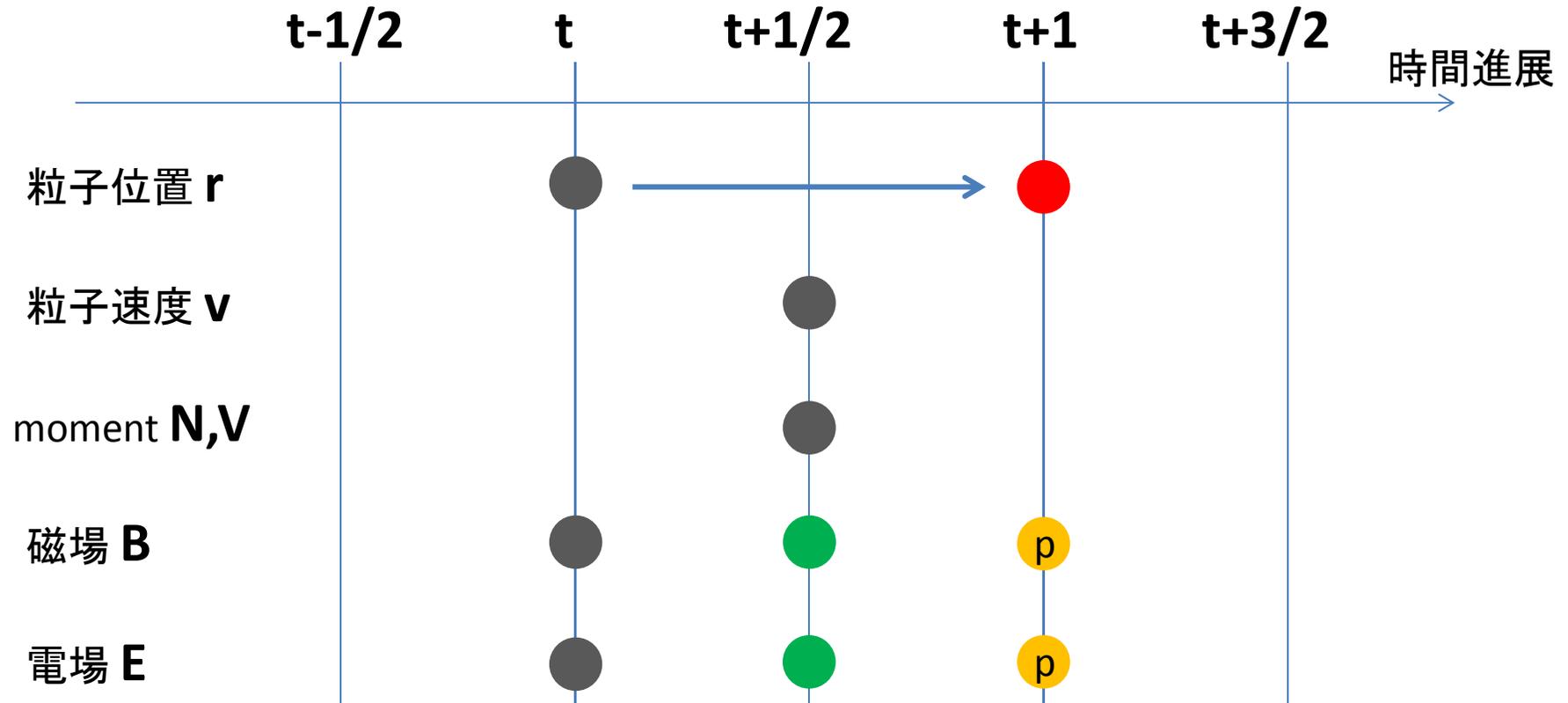
# Predictor - Corrector



$$\mathbf{E} = -\mathbf{V}_i \times \mathbf{B} + \frac{1}{N_i} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$$

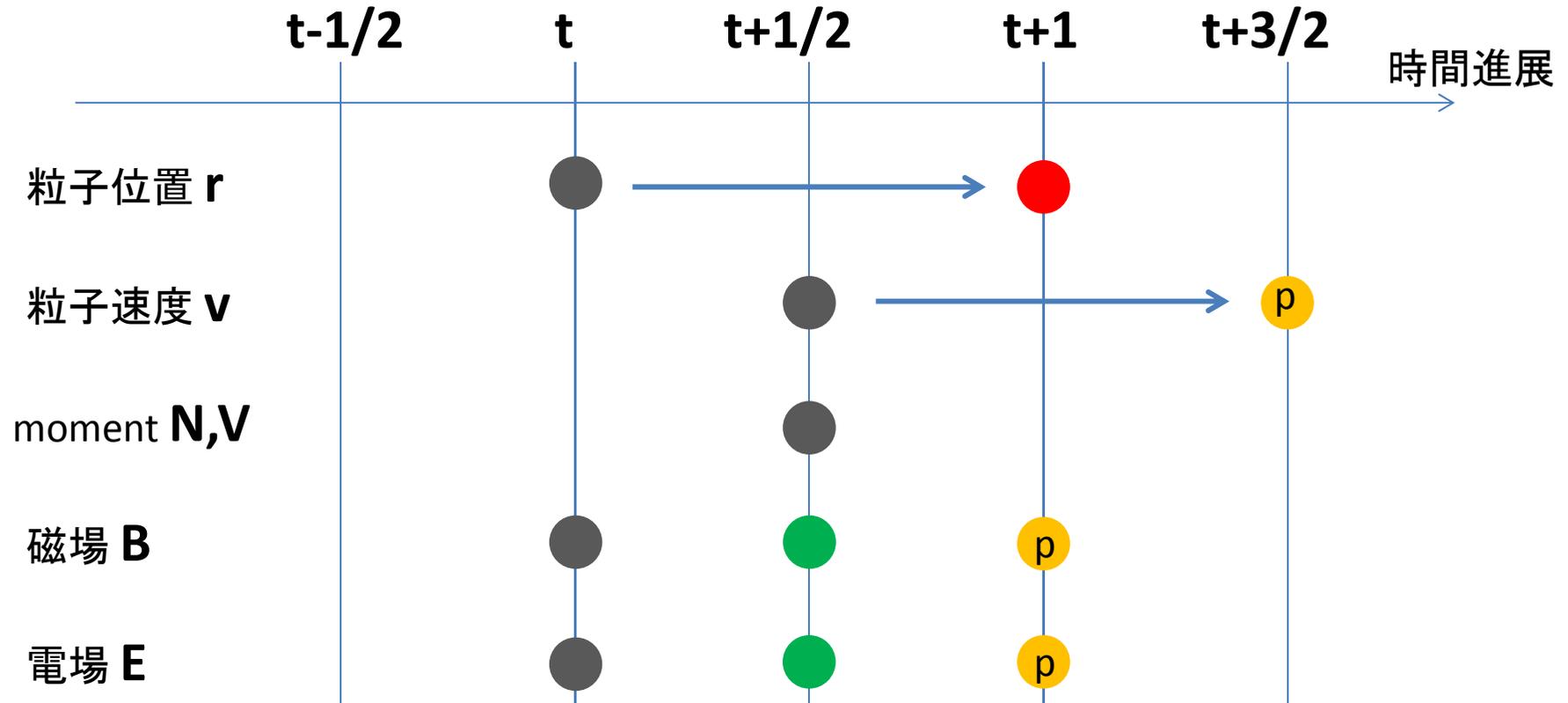
$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

# Predictor - Corrector



$$\frac{\mathbf{E}(t+1) + \mathbf{E}(t)}{2} = \mathbf{E}(t+1/2)$$
$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

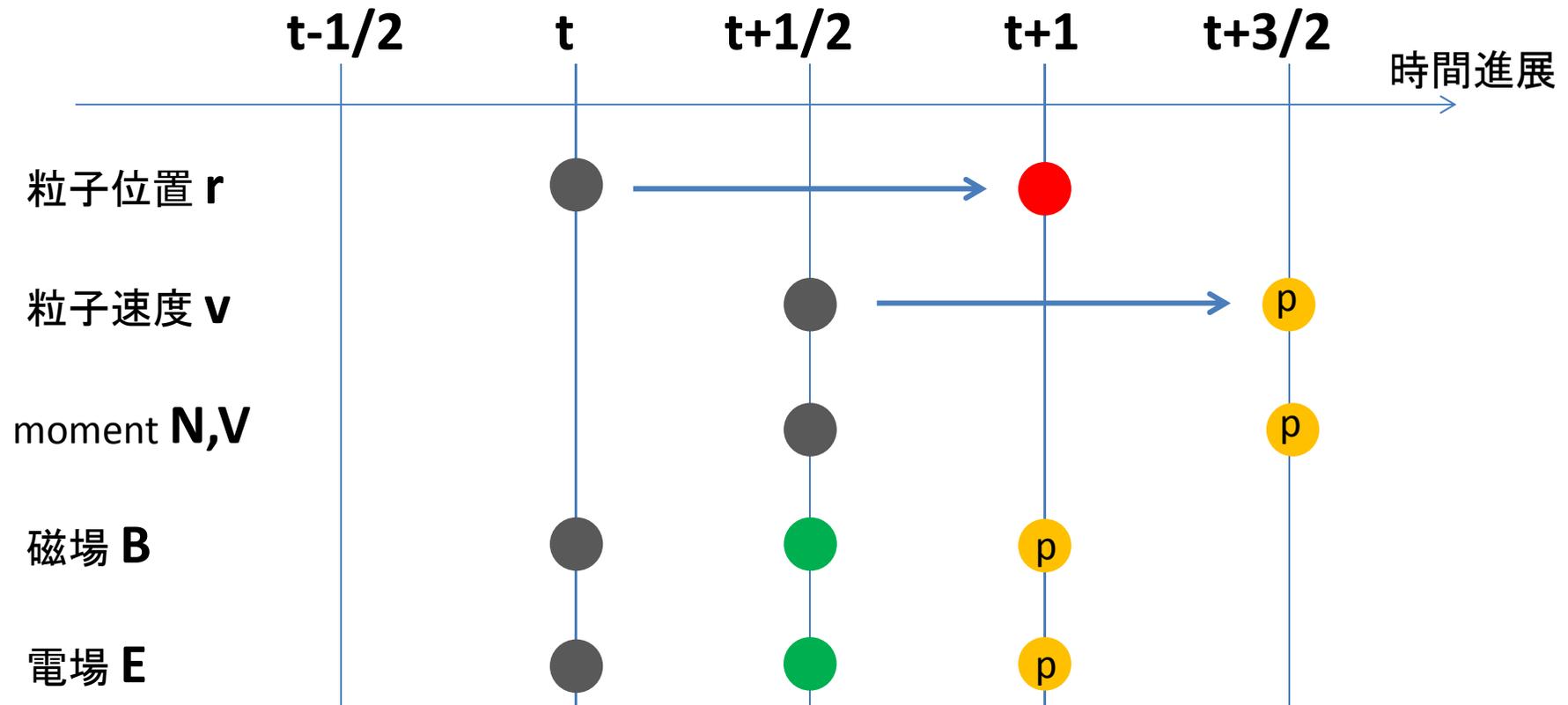
# Predictor - Corrector



$$\frac{\mathbf{E}(t+1) + \mathbf{E}(t)}{2} = \mathbf{E}(t+1/2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

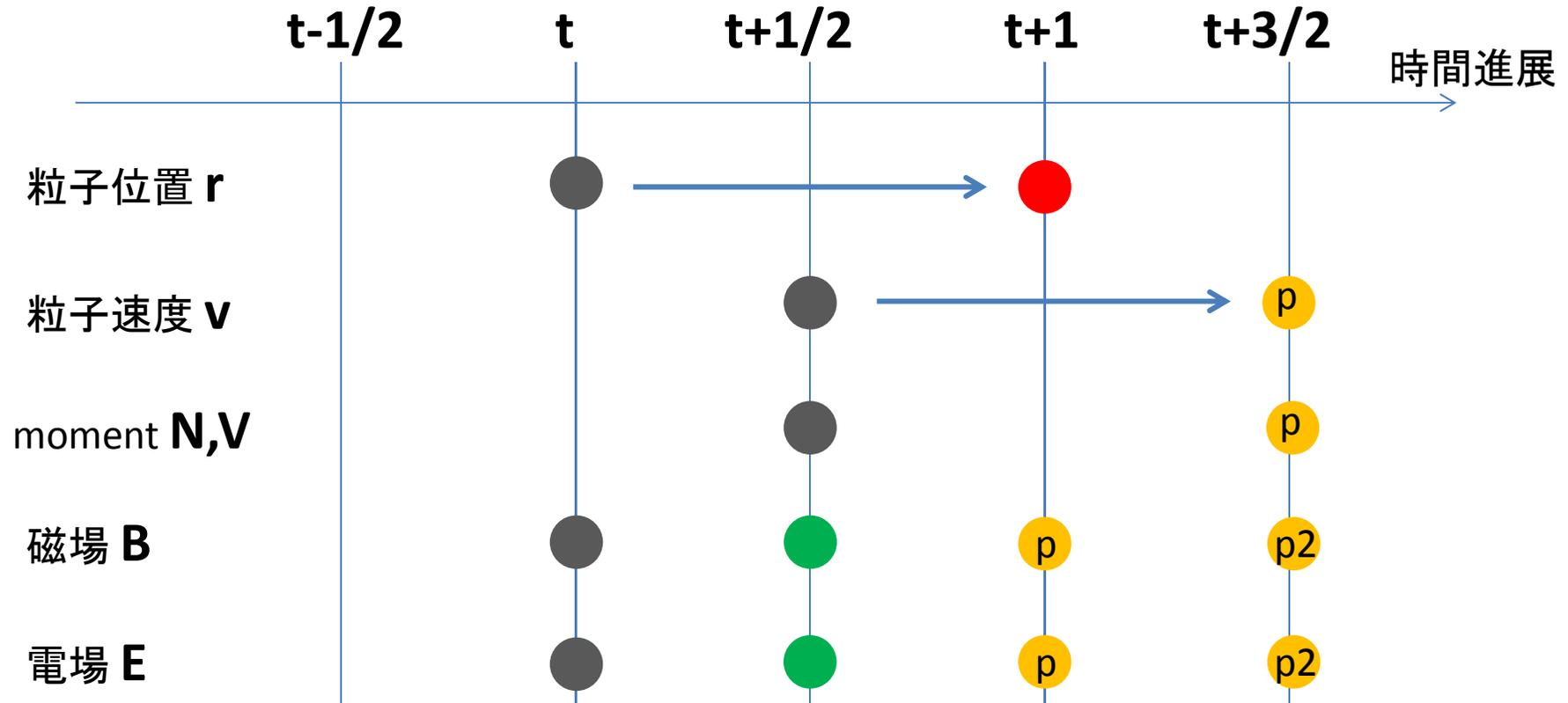
# Predictor - Corrector



$$\frac{\mathbf{E}(t+1) + \mathbf{E}(t)}{2} = \mathbf{E}(t+1/2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

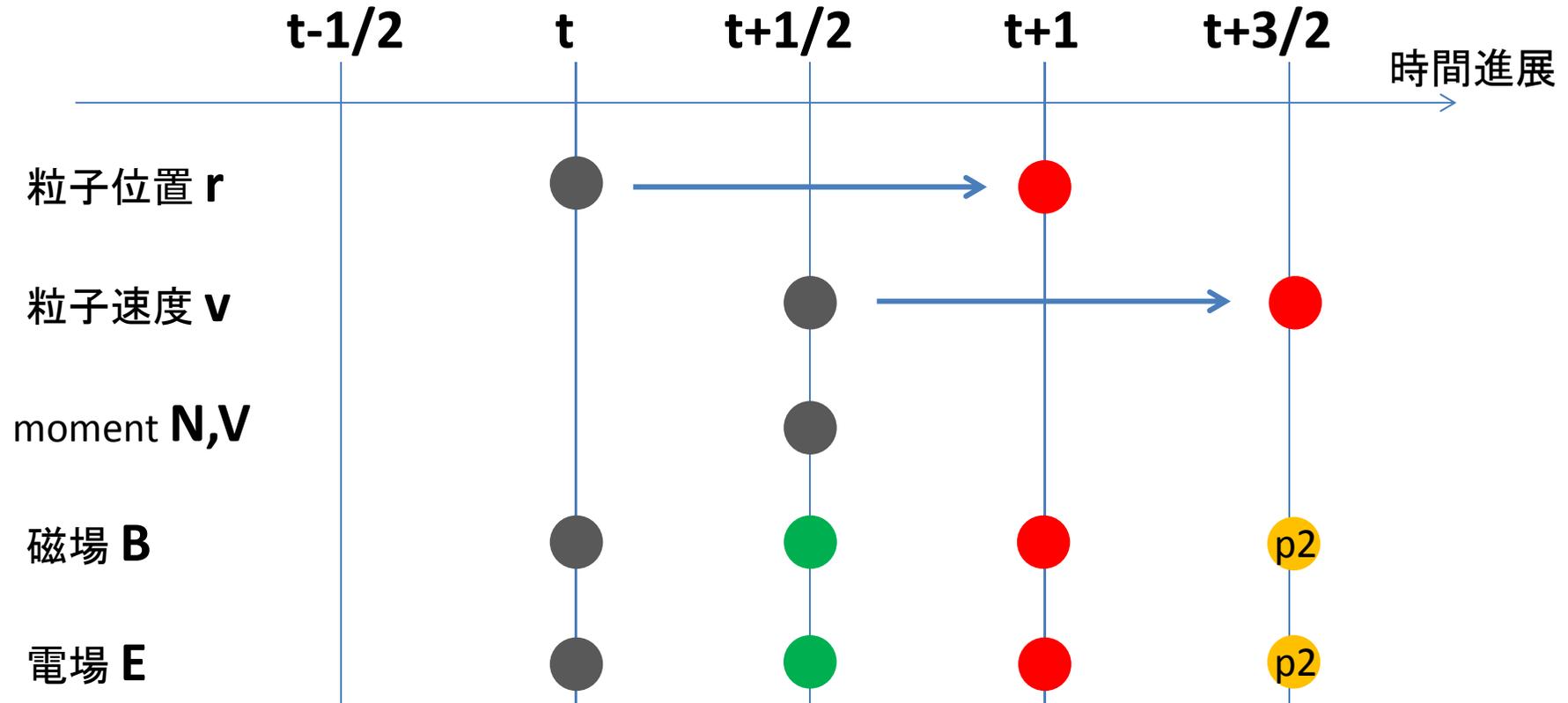
# Predictor - Corrector



$$\mathbf{E} = -\mathbf{V}_i \times \mathbf{B} + \frac{1}{N_i} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

# Predictor - Corrector



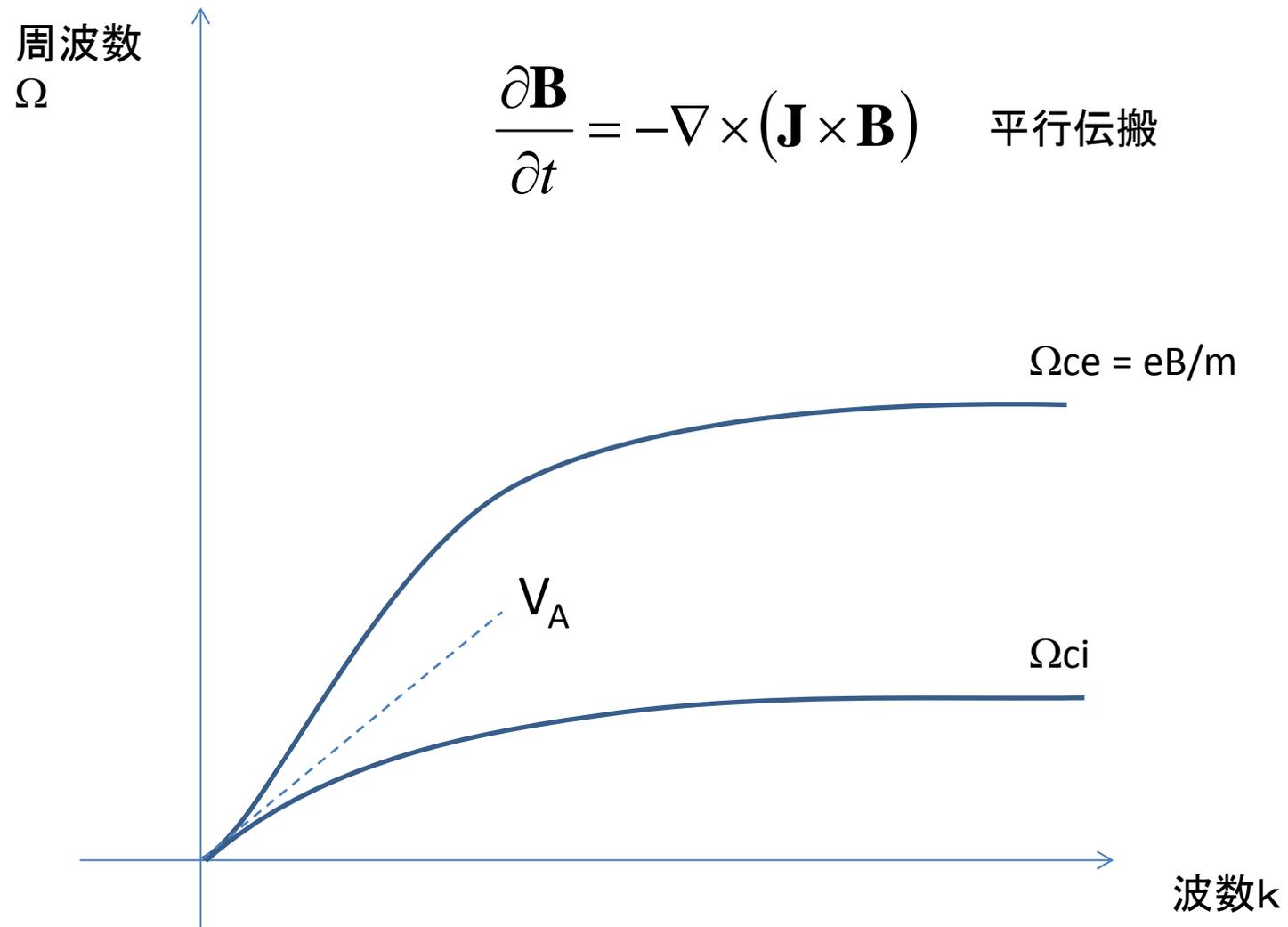
$$\frac{\mathbf{E}(t+1/2) + \mathbf{E}(t+3/2)}{2} = \mathbf{E}(t+1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

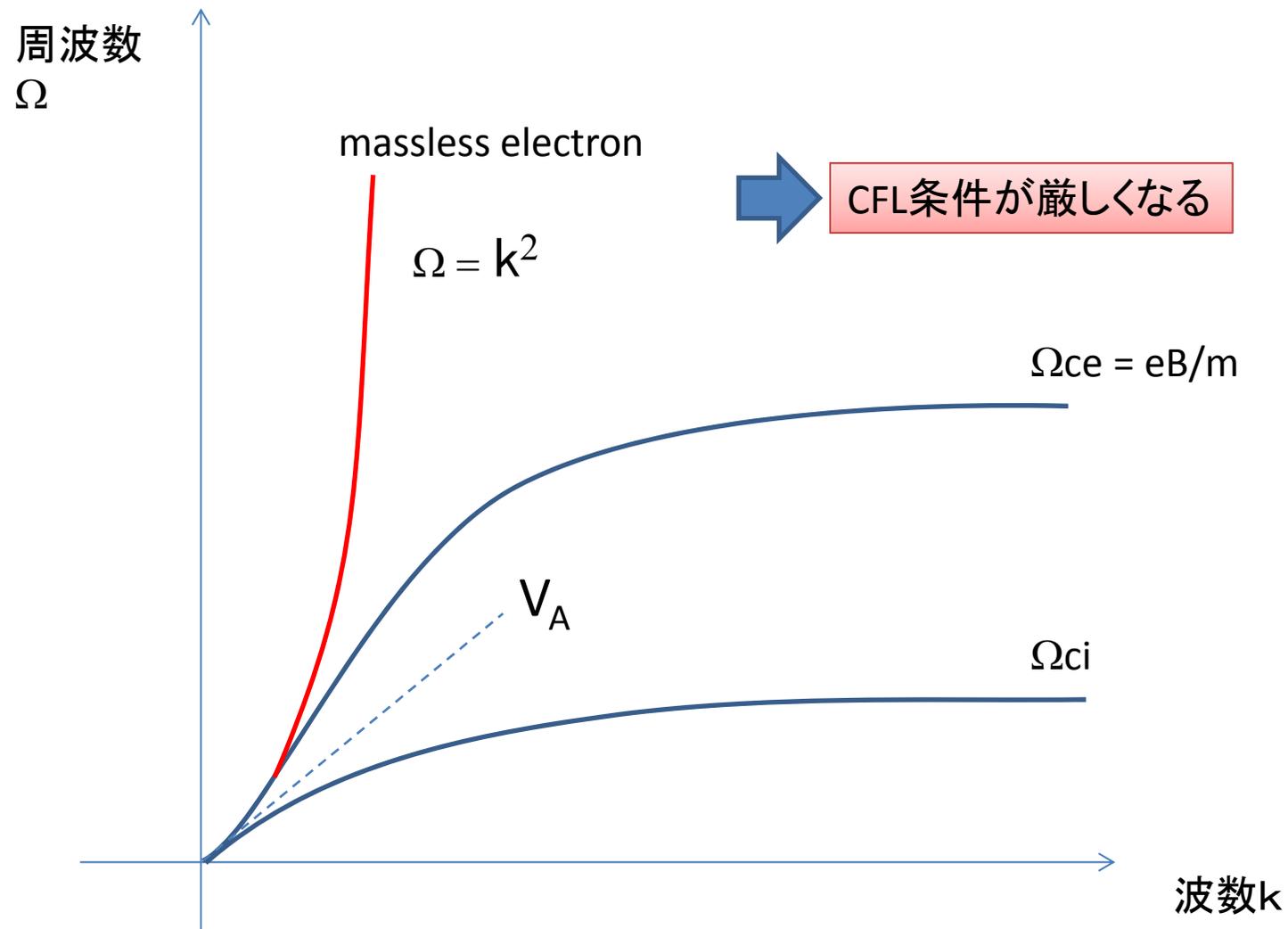
# タイムステップチャート

- Predictor-Corrector Scheme
  - 粒子モーメント計算を多用するため高負荷
  - sharp gradient で発散: smoothing が必要
  - 時間ステップを長く出来る  $\Delta t > 2/\Omega_{ci}$
- ISAS Scheme (Adams-Bashforth)
  - 負荷が最少
  - sharp gradient が鈍る傾向
- CAM-CL (Current Advance Method and Cyclic Leapfrog)
  - sharp gradient が鈍らない

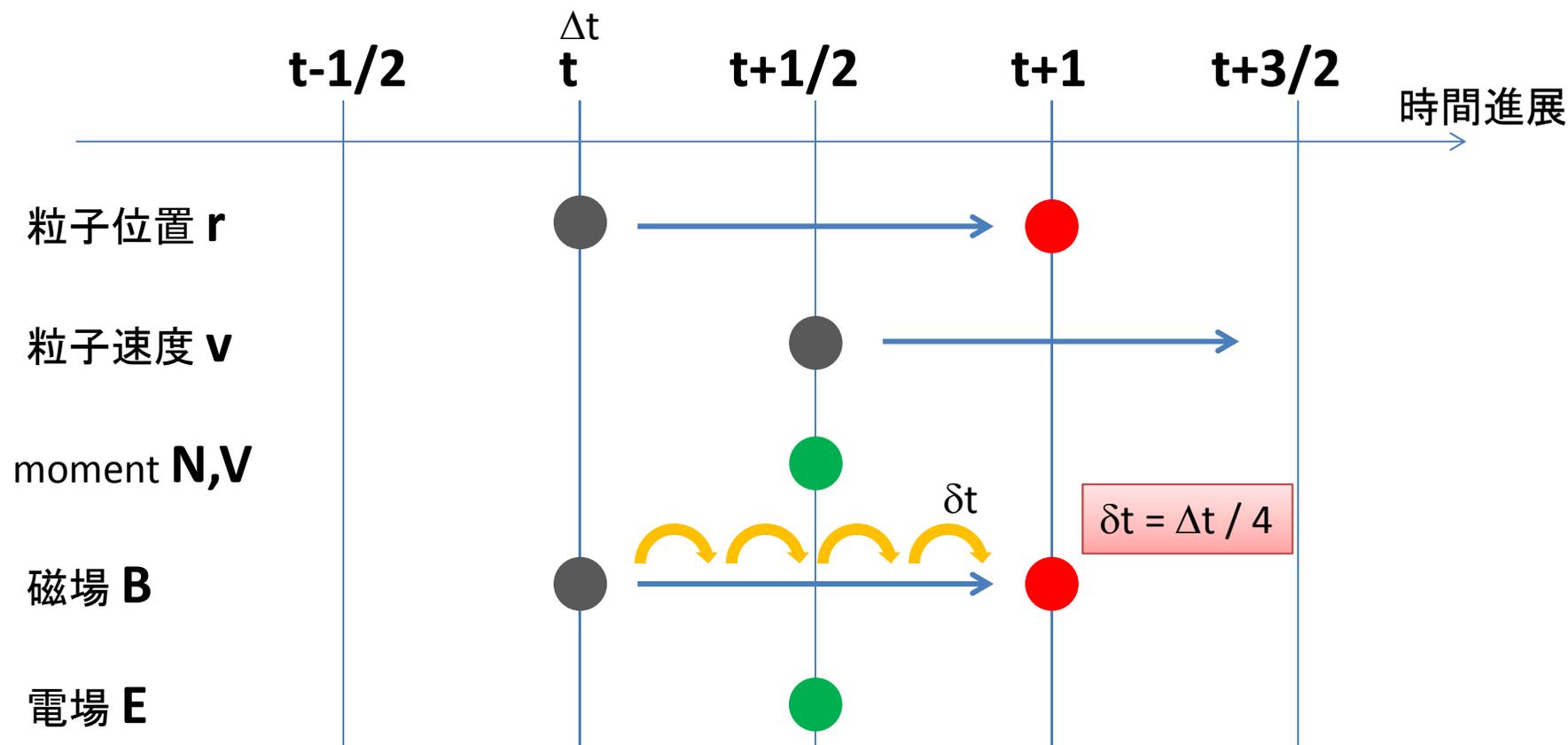
# Whistler Wave の取り扱い



# Whistler Wave の取り扱い



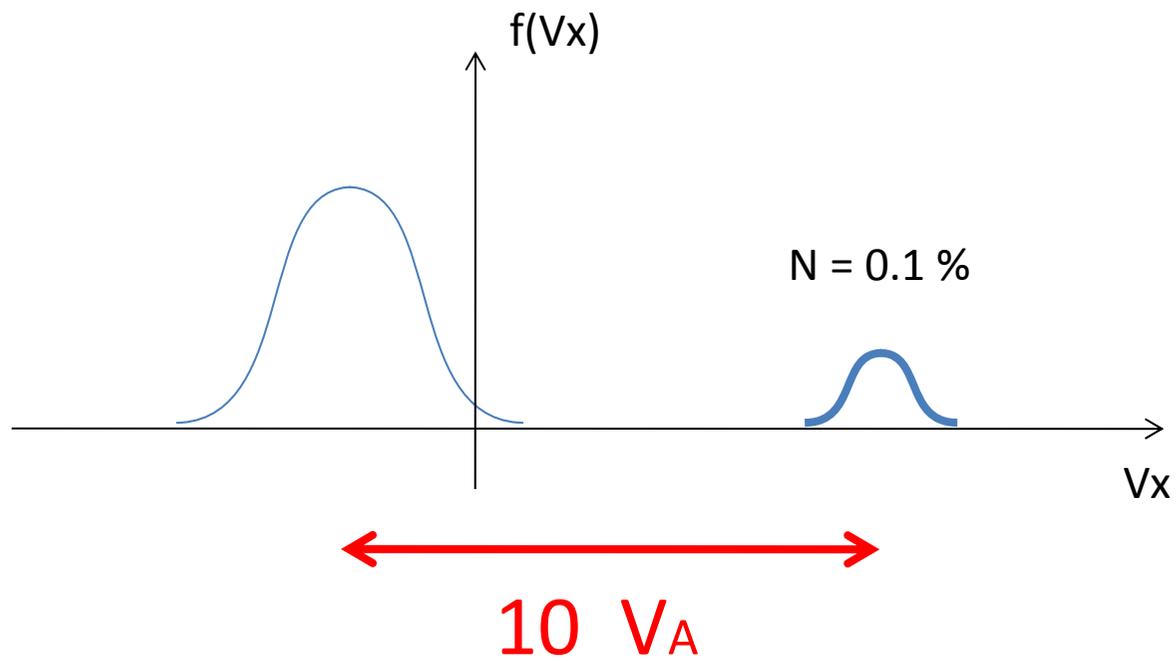
# 磁場更新: サブサイクル化



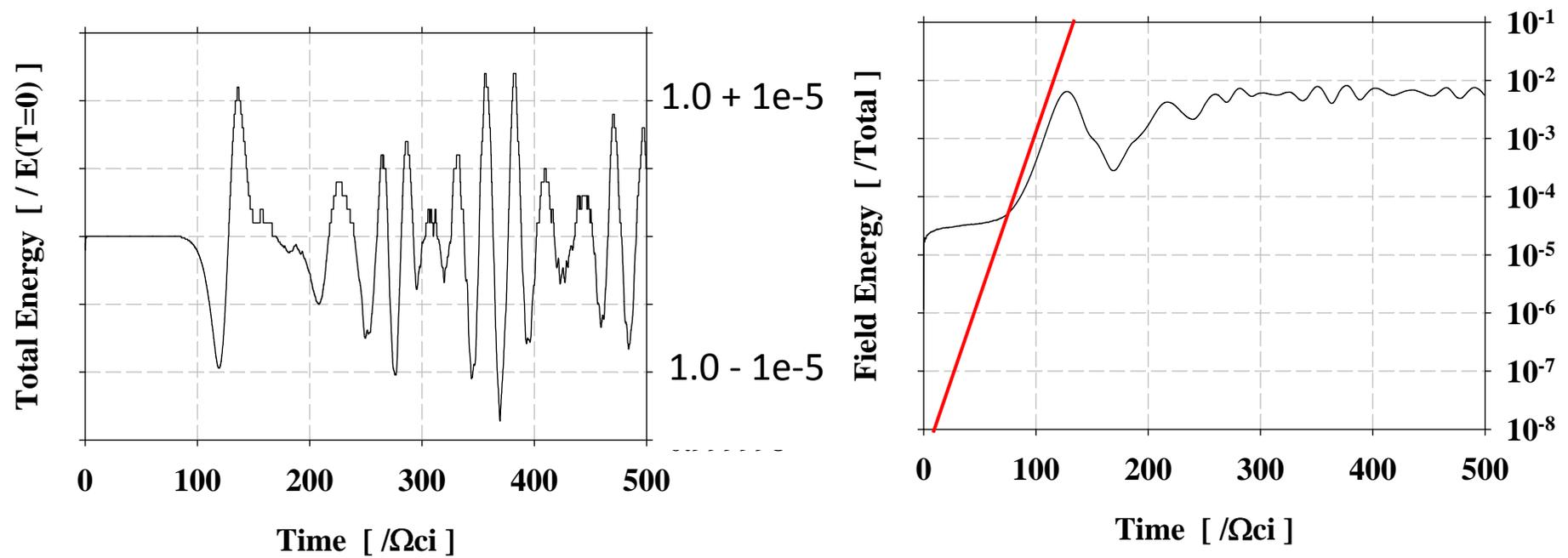
$$\mathbf{E} = -\mathbf{V}_i \times \mathbf{B} + \frac{1}{N_i} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

# Ion beam instability

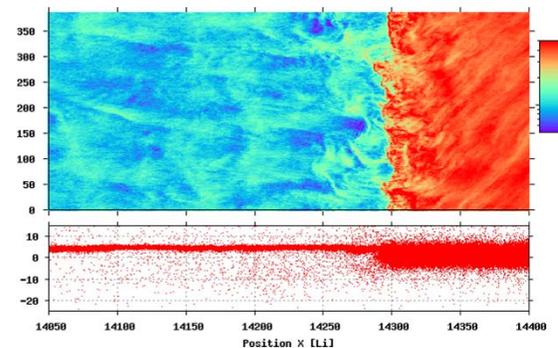


# エネルギー保存



# まとめ

- イオンスケールの運動論
- 3次元 (メモリ < 100 TB )
  - 地球磁気圏
  - Bow Shock (平行・垂直衝撃波の相互作用)



## 4.1 電荷保存法の概念

変位電流の式 (1.4) の  $\nabla \cdot$  をとると、

$$\nabla \cdot \frac{d\mathbf{E}}{dt} = c^2 \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{J} \quad (4.1)$$

右辺第1項は0となり、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{E}) = -\frac{1}{\epsilon_0}(\nabla \cdot \mathbf{J}) \quad (4.2)$$

を得る。連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (4.3)$$

より、電流を置き換えると、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (4.4)$$

よって、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0}) = 0 \quad (4.5)$$

Poisson 方程式 (1.5) が初期条件として満たされていれば、その後もいつでも満たされる。

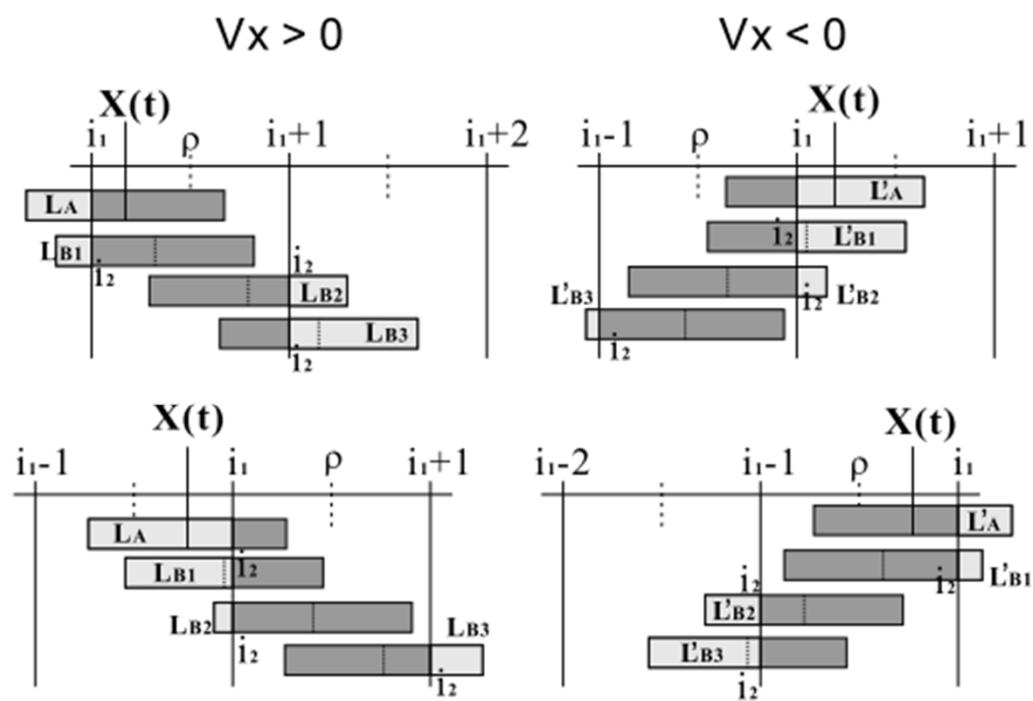


図 4.1: 1次元計算での電荷保存法。密度は、Half Grid で定義されているので、守備範囲 (Full Grid で挟まれた領域) に流れ込む電荷量を電流とする。よって、 $J_x$  は、Full Grid で定義される。