モーメント法における相対論的(光の)輻射磁気流体の半陰的解法

高橋博之[1]
大須賀健[1]、関口雄一郎[2]、井上剛志[3]、富田賢吾[4]
1:国立天文台、2:京都大学、3:青山学院大学、4: Princeton Univ.

輻射輸送方程式

I: Intensity (単位時間、単位面積、単位立体角、単位振動数あたりのエネルギー)

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \boldsymbol{n} \cdot \nabla I = \chi(S - I)$$

輻射輸送方程式〜Boltzmann方程式

Iは空間３次元＋位相空間３次元＋時間＝７つの自由度を持つ
→これを解くのは難（Boltzmann方程式が難しいのと同じ）

立体角、振動数で積分した量を定義（モーメントをとる)

$$E_r = \frac{1}{c}\int d\nu d\Omega\ I$$ 光のエネルギー密度

$$F_r^i = \int d\nu d\Omega\ In^i$$ 光の運動量密度

$$P_r^{ij} = \frac{1}{c}\int d\nu d\Omega\ In^in^j$$ 光による応力

輻射のモーメント式

Intensityに対する輻射輸送方程式：
7個の独立変数で解くのは大変

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \boldsymbol{n}\cdot\nabla I = \chi(S - I)$$

輻射輸送方程式を振動数・立体角（運動量空間）で積分

移流（伝搬）　　**衝突項（吸収・最放射、散乱）**

$$\begin{aligned}
\partial_t E_r + \partial_j F_r^j &= \rho\gamma\kappa(4\pi \mathrm{B} - cE'_r) - \rho\gamma(\kappa+\sigma)\frac{v_j\cdot F'^j_r}{c} \\
\frac{1}{c^2}\partial_t F_r^i + \partial_j P_r^{ij} &= \rho\gamma\kappa\frac{v^i}{c}\left(\frac{4\pi}{c}\mathrm{B} - E'_r\right) \\
&\quad - \frac{\rho(\kappa+\sigma)}{\gamma+1}\frac{u^i}{c}\left(u_j F'^j_r\right) - \frac{\rho(\kappa+\sigma)}{c}F_r^i
\end{aligned}$$

κ ：吸収係数、 σ_s：散乱係数、B: 黒体放射強度

注意：左辺の輻射場は実験室系、右辺の輻射場は共動座標系
これらはローレンツ変換で結ばれている

原理的にはこれらを解けば良い。見た目にもそれほど汚くない式

数値計算の観点からは、、、
左辺は実験室、右辺は共動座標となっていて非常に汚い
ローレンツ変換して実験室系にそろえてみる

輻射のモーメント式

輻射エネルギーの式（二つの座標系が混ざった式）

$$\partial_t E_r + \partial_j F_r^j = \rho\gamma\kappa(4\pi \mathrm{B} - cE_r') - \rho\gamma(\kappa+\sigma)\frac{v_j \cdot F_r'^j}{c}$$

右辺についてローレンツ変換して実験室系にそろえてみる

右辺は基本的には
Er, Frに対して線形

輻射のエネルギー式

$$\partial_t E_r + \partial_j F_r^j = \rho\kappa\left(4\pi\gamma \mathrm{B} - c\gamma E_r + \frac{u_j F_r^j}{c}\right)$$
$$-\rho\sigma_s\left[\frac{\gamma \boldsymbol{u}^2 E_r}{c} - \frac{\gamma u_i u_j P_r^{ij}}{c} - \left(\gamma^2 + \frac{\boldsymbol{u}^2}{c^2}\right)\frac{u_j F_r^j}{c}\right]$$

輻射の運動量の式

$$\frac{1}{c^2}\partial_t F_r^i + \partial_j P_r^{ij} = \rho\kappa\left(\frac{4\pi u^i \mathrm{B}}{c^2} - \frac{\gamma F_r^i}{c} + \frac{u_k P_r^{ik}}{c}\right)$$
$$-\rho\sigma_s\left[\frac{\gamma F_r^i}{c} - \frac{\gamma^2 u^i}{c}E_r - \frac{u_k P_r^{ik}}{c} + \frac{u^i}{c}\left(\frac{2\gamma u_j F_r^j - u_j u_k P_r^{jk}}{c^2}\right)\right]$$

κ ：吸収係数、 σ_s ：散乱係数、B: 黒体放射強度

注意：輻射場は実験室系、吸収・散乱係数は共動座標系で定義

またはエネルギー運動量テンソルを用いて

$$T^{\mu\nu}_{\mathrm{rad}} = \begin{pmatrix} E_r, & \boldsymbol{F}_r \\ \boldsymbol{F}_r, & P_r^{ij} \end{pmatrix}$$

輻射方程式

$$T^{\mu\nu}_{\mathrm{rad},\ \nu} = -G^\mu$$

R2MHD基礎方程式

磁気流体方程式

◆質量保存則

$$\partial_t D + \nabla \cdot (D\boldsymbol{v}) = 0$$

◆誘導方程式

$$\partial_t \boldsymbol{B} + \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = 0$$

◆ガスのエネルギー保存

$$\partial_t E_{\mathrm{MHD}} + \nabla \cdot \boldsymbol{m}_{\mathrm{MHD}} = \boxed{G^0}$$

◆ガスの運動量保存

$$\partial_t \boldsymbol{m}_{\mathrm{MHD}} + c^2 \nabla \cdot \boldsymbol{P}_{\mathrm{MHD}} = \boxed{\boldsymbol{G}}$$

輻射４元力密度

輻射のモーメント方程式

◆輻射のエネルギー保存

$$\partial_t E_{\mathrm{r}} + \nabla \cdot \boldsymbol{F}_{\mathrm{r}} = \boxed{-G^0}$$

◆輻射の運動量保存

$$\partial_t \boldsymbol{F}_r + c^2 \nabla \cdot \boldsymbol{P}_r = \boxed{-\boldsymbol{G}}$$

$$D = \rho\gamma$$

$$E_{\mathrm{MHD}} = \rho h \gamma^2 c^2 - p_g + \frac{\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2}{8\pi}$$

$$m^i_{\mathrm{MHD}} = \rho h \gamma^2 c^2 u^i + \frac{c\varepsilon^i_{\ jk} E^j B^k}{4\pi}$$

$$P^{ij}_{\mathrm{MHD}} = \rho h \gamma^2 u^i u^j - \frac{1}{4\pi}\left[E^i E^j + B^i B^j - \frac{\delta^{ij}}{2}(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2)\right]$$

$$G^0 = -\rho\kappa\left(4\pi\gamma \mathrm{B} - c\gamma E_r + \frac{u_j F^j_r}{c}\right) + \rho\sigma\left[\frac{\gamma u^2 E_r}{c} - \frac{\gamma u_j u_k P^{jk}_r}{c} - (2\gamma^2 - 1)\frac{u_j F^j_r}{c}\right]$$

$$G^i = -\rho\kappa c\left(4\pi\frac{u^i}{c}\mathrm{B} - \gamma F^i_r + u_k P^{ik}_r\right) + \rho\sigma c\left[\gamma F^i_r - \gamma^2 u^i E_r - u_k P^{ik}_r + u^i\left(\frac{2\gamma u_j F^j_r - u_j u_k P^{kk}_r}{c^2}\right)\right]$$

12本の双曲型方程式
＋状態方程式を数値的に解く

輻射とガスはソース項のみで繋がっていて、
それ以外は完全に分離されている。

クロージャー関係: 輻射の状態方程式

[流体]

Boltzmann方程式から流体近似を行うと方程式が閉じない

->状態方程式を仮定

バロトロピック近似

$$p_g = p_g(\rho)$$

[輻射]

輻射輸送方程式から流体近似を行うと方程式が閉じない

->光の状態方程式を仮定

$$P_r = P_r(E_r)$$

でも、、、ガスはガス同士で衝突して等方圧力になりやすいけど

光同士は衝突しないので、、、

$$P_r^{ij} = P_r^{ij}(E_r, \boldsymbol{F}_r) = D^{ij}(E_r, \boldsymbol{F}_r)E_r$$

$$D_r^{ij} = D_r(E_r, \boldsymbol{F}_r)$$ エディントンテンソル

クロージャー関係: 輻射の状態方程式

状態方程式を仮定する

＝エディントンテンソルD^{ij}を仮定する

$$P^{ij} = D^{ij}(E_r, \boldsymbol{F}_r)E_r$$

◆**エディントン近似**

輻射は等方的（e.g.,光学的に厚い場合）

$$P'^{ij} = \frac{\delta^{ij}}{3}E'_r$$

相対論的プラズマと等価

→光は常にc/√3の速度で伝わる

◆**M-1 closure**

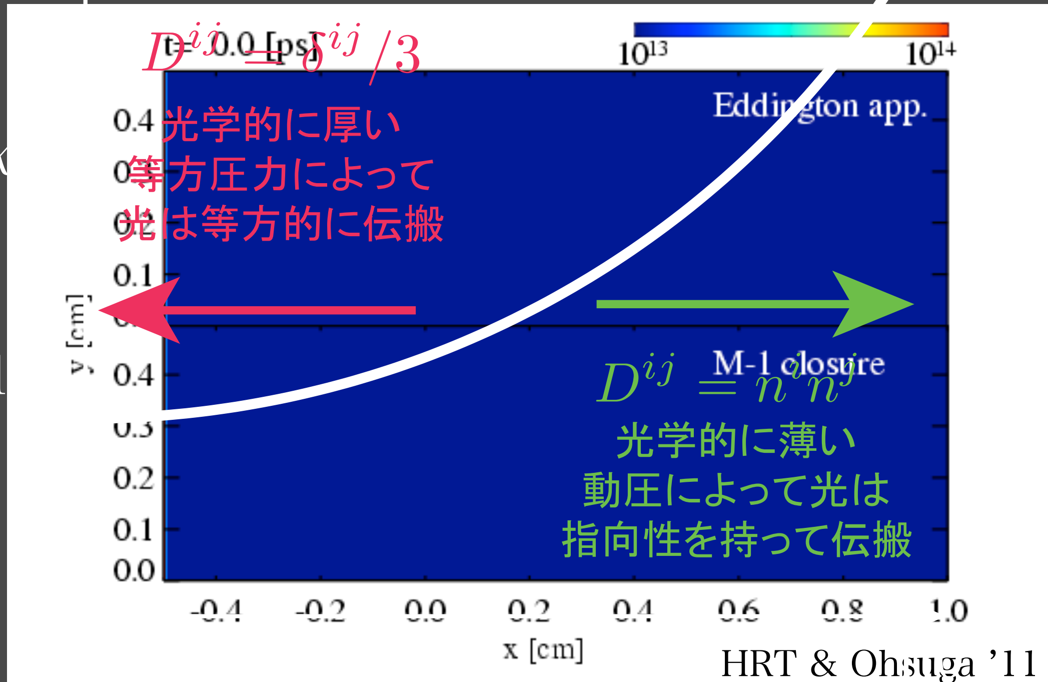
輻射の非等方性を考慮　(Levermore '84)

$$P^{ij} = \left[\underbrace{\frac{3(1-\chi)}{2}\frac{\delta^{ij}}{3}}_{\text{等方成分}} + \underbrace{\frac{3\chi-1}{2}n^i n^j}_{\text{非等方成分}}\right]E_r$$

$$\chi = \frac{3+4|\boldsymbol{f}|^2}{5+2\sqrt{4-3|\boldsymbol{f}|^2}},\quad \boldsymbol{f} = \frac{\boldsymbol{F}_r}{cE_r} \qquad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{F}_r}{|\boldsymbol{F}_r|}$$

日陰問題

原点付近に光学的に厚いクランプをおく



M-1では光は指向性を持って伝搬できる

注）エディントンテンソルの値は必ず1より小さい

R2MHD基礎方程式

別々に解くか、まとめて解くか

VS.

◆**ガスのエネルギー保存**

$$\partial_t E_{\mathrm{MHD}} + \nabla \cdot \boldsymbol{m}_{\mathrm{MHD}} = G^0$$

◆**ガスの運動量保存**

$$\partial_t \boldsymbol{m}_{\mathrm{MHD}} + \nabla \cdot \boldsymbol{P}_{\mathrm{MHD}} = \boldsymbol{G}$$

◆**輻射のエネルギー保存**

$$\partial_t E_{\mathrm{r}} + \nabla \cdot \boldsymbol{F}_{\mathrm{r}} = -G^0$$

◆**輻射の運動量保存**

$$\partial_t \boldsymbol{F}_{\mathrm{r}} + \nabla \cdot \boldsymbol{P}_{\mathrm{r}} = -\boldsymbol{G}$$

◆**全エネルギー保存**

$$\partial_t E_{\mathrm{tot}} + \nabla \cdot \boldsymbol{m}_{\mathrm{tot}} = 0$$

◆**全運動量保存**

$$\partial_t \boldsymbol{m}_{\mathrm{tot}} + \nabla \cdot \boldsymbol{P}_{\mathrm{tot}} = 0$$

◆**輻射のエネルギー保存**

$$\partial_t E_{\mathrm{r}} + \nabla \cdot \boldsymbol{F}_{\mathrm{r}} = -G^0$$

◆**輻射の運動量保存**

$$\partial_t \boldsymbol{F}_{\mathrm{r}} + \nabla \cdot \boldsymbol{P}_{\mathrm{r}} = -\boldsymbol{G}$$

または輻射の代わりにガスでもよい。

別々に解いた方が簡単

R1MHDコードの資産をそのまま使える

保存性は？

R2MHD: 変数

解くべき方程式

$$\partial_t U + \partial_x F^x = S$$

基本量 / 保存量 / フラックス / ソース項

ソース項がつく

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \rho \\ u^x \\ u^y \\ u^z \\ p_g \\ B^x \\ B^y \\ B^z \\ E_r \\ F_r^x \\ F_r^y \\ F_r^z \end{pmatrix} \quad \mathcal{U} = \begin{pmatrix} D \\ m^x_{\rm MHD} \\ m^y_{\rm MHD} \\ m^z_{\rm MHD} \\ E_{\rm MHD} \\ B^x \\ B^y \\ B^z \\ E_r \\ F_r^x \\ F_r^y \\ F_r^z \end{pmatrix} \quad \mathcal{F}^x = \begin{pmatrix} Dv^x \\ P^{xx}_{\rm MHD} \\ P^{xy}_{\rm MHD} \\ P^{xz}_{\rm MHD} \\ m^x_{\rm MHD} \\ 0 \\ -E^z \\ E^y \\ F_r^x \\ P_r^{xx} \\ P_r^{xy} \\ P_r^{xz} \end{pmatrix} \quad \mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ -S_E \\ -S_F^x \\ -S_F^y \\ -S_F^z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ S_E \\ S_F^x \\ S_F^y \\ S_F^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ G^0 \\ G^x \\ G^y \\ G^z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -G^0 \\ -G^x \\ -G^y \\ -G^z \end{pmatrix}$$

輻射場４つ分変数が増える

輻射場は基本量と保存量が同じになる（同じにした）

R2MHD陽解法の手順

解くべき方程式

$$\partial_t U + \partial_x F^x = S$$

1. 基本量Pの補完（空間高次精度化）

$$\mathcal{P}_i^n \rightarrow \mathcal{P}_{i\pm1/2,L}^n, \mathcal{P}_{i\pm1/2,R}^n$$

2. 数値フラックスの計算

$$\mathcal{P}_{i\pm1/2,L}^n, \mathcal{P}_{i\pm1/2,R}^n \rightarrow f_{\mathrm{i}\pm1/2}^n$$

3. 移流項の積分

$$\mathcal{U}_i^{n+1} = \mathcal{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n\right) + \mathcal{S}^n \Delta t$$

4. 保存量から基本量への変換

$$\mathcal{U}_i^{n+1} \rightarrow \mathcal{P}_i^{n+1}$$

R2MHDのタイムスケール

解くべき方程式

$$\partial_t U + \partial_x F^x = S$$

operator splitting

移流項 **陽解法**

$$\partial_t U + \partial_x F^x = 0$$

タイムスケール〜L/(U/F)

力学的時間 $t_{dyn} = L/v$

波の横断時間 $t_w = L/\lambda, L/c$

相対論的な場合にはt_{dyn}~t_w

ソース項 **陰解法**

$$\partial_t U = S$$

タイムスケール~U/S

吸収・放射の時間 $t_{abs} = 1/(\rho\kappa c)$

散乱の時間 $t_{sc} = 1/(\rho\sigma c)$

$$\frac{\text{力学的時間（v~c)}}{\text{吸収（散乱）の時間}} = \rho\kappa L = \tau$$ (光学的厚み)

光学的に厚い場合は吸収・散乱のタイムスケール＜＜力学的時間

力学的時間をシミュレーションすることが難しくなる

note: 非相対論的現象を追う場合は輻射の移流も陰的に積分する必要がある

R2MHD陽・陰的解法の手順

解くべき方程式

$$\partial_t U + \partial_x F^x = S$$

1. 基本量Pの補完（空間高次精度化）

$$\mathcal{P}_i^n \rightarrow \mathcal{P}_{i\pm1/2,L}^n, \mathcal{P}_{i\pm1/2,R}^n$$

2. 数値フラックスの計算

$$\mathcal{P}_{i\pm1/2,L}^n, \mathcal{P}_{i\pm1/2,R}^n \rightarrow f_{\mathrm{i}\pm1/2}^n$$

3. 移流項の積分

$$\mathcal{U}_i^* = \mathcal{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n\right)$$

4. ソース項の積分

$$\mathcal{U}_i^{n+1} = \mathcal{U}_i^n + \Delta t \mathcal{S}^{n+1}$$

5. 保存量から基本量への変換

$$\mathcal{U}_i^{n+1} \rightarrow \mathcal{P}_i^{n+1}$$

step 2: 輻射場双曲項の陽的積分

双曲項 **陽解法**

$$\partial_t U + \partial_x F^x = 0$$

González ’07

HLL フラックス

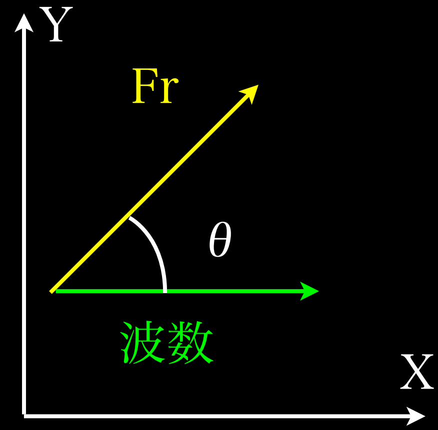
$$\boldsymbol{F}_{HLL} = \frac{\lambda_R \boldsymbol{F}_L - \lambda_L \boldsymbol{F}_R + \lambda_L \lambda_R (\boldsymbol{U}_R - \boldsymbol{U}_L)}{\lambda_R - \lambda_L}$$

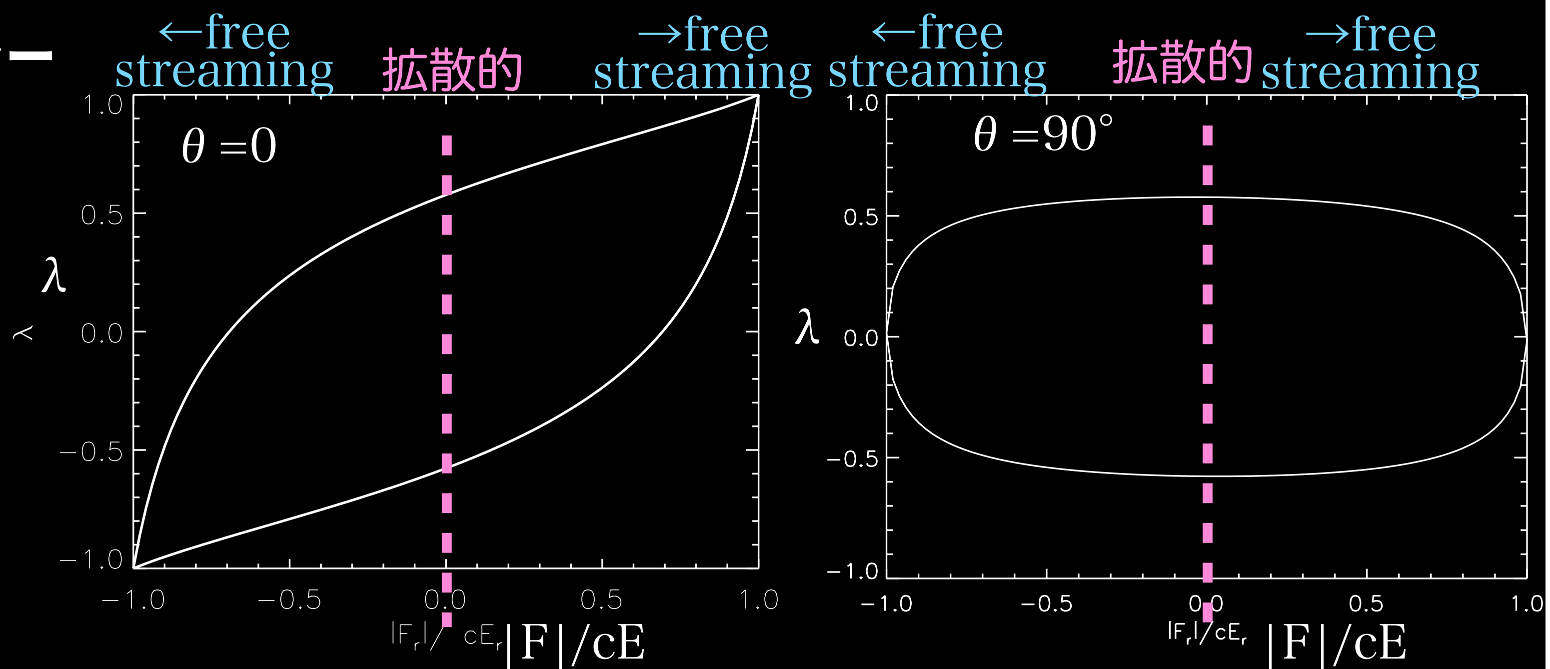
輻射場の特性速度

- 単純な方法: $\lambda_{R,L}=\pm c$ (Lax Friedrichに帰着)
- ちゃんとした方法：固有値を解く(mathematicaで行列要素を計算)

(数十)^{2}グリッドでテーブルを作って2次補完

例）M-1クロージャー





step 3: 移流項の積分

$$\mathcal{U}_i^* = \mathcal{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n\right)$$

※ソース項を無視して時間積分しているので、U^{n+1}はまだ求まっていない

次に解くべき式

$$\partial_t U = S$$

ソース項を持つ式は４つ

$$\frac{\partial E_r}{\partial t} = S_E \qquad \frac{\partial F_r^i}{\partial t} = S_F^i$$

$$\frac{\partial E_{\mathrm{MHD}}}{\partial t} = -S_E \qquad \frac{\partial m_{\mathrm{MHD}}^i}{\partial t} = -S_F^i$$

n+1ステップ目の全エネルギー運動量

$$E_{\mathrm{tot}}^{n+1} = E_{\mathrm{MHD}}^* + E_r^*$$

$$m_{\mathrm{tot}}^{n+1,i} = m_{\mathrm{MHD}}^{*,i} + F_r^{*,i}$$

あとは

$(E_r, F_r^i), (E_{\mathrm{MHD}}, F_{\mathrm{MHD}}^i)$

のどちらかの組をとけばよい

step 4: ソース項の時間積分

エネルギーの式(これと一緒にフラックスの式もとくので合計４本の方程式)

$$\partial_t E_r = \rho\kappa\left(4\pi\gamma\mathrm{B} - c\gamma E_r + \frac{u_j F_r^j}{c}\right) - \rho\sigma_s\left[\frac{\gamma u^2 E_r}{c} - \frac{\gamma u_i u_j P_r^{ij}}{c} - \left(\gamma^2 + \frac{u^2}{c^2}\right)\frac{u_j F_r^j}{c}\right]$$

symbolicに書くと

$$\boxed{\partial_t E_r = S_E(\rho, u^j, T_g, E_r, F_r^j, D^{j,k})}$$

陰的解法を使いたいので希望としては

$$\frac{E_r^{n+1} - E_r^*}{\Delta t} = S_E[\rho^{n+1}, u^{j,n+1}, T_g^{n+1}, E_r^{n+1}, F_r^{j,n+1}, D^{jk,n+1}]$$

右辺：Er, Frは陰的に評価（今、従属変数はErとFr^{i}の４つ）

- DはErとFr について非常に非線形な関数

  線形化するのはめんどくさい

  とりあえずnステップ目で評価

- 密度、速度、温度は？のn+1ステップ目はわかっていない

step 4: ソース項の時間積分

$$\frac{E_r^{n+1}-E_r^*}{\Delta t}=S_E[\rho^{n+1},u^{j,n+1},T_g^{n+1},E_r^{n+1},F_r^{j,n+1},D^{jk,n+1}]$$

非相対論的な場合: 温度、速度は未知量

$\rho^{n+1},B^{j,n+1},m_t^{j,n+1},E_t^{n+1}$ は既知量　→温度、速度をEr, Frjの関数としてかけるはず

$$v^i=v^i(E_r,F_r^j)=\frac{m_t^{j,n_1}}{\rho^{n+1}}-F_r^i$$

$$p_g=p_g(E_r,F_r^j)=E_t-\frac{1}{2}\rho^{n+1}\left(\frac{m_t^{j,n+1}}{\rho^{n+1}}-F_r^j\right)^2-\frac{(\boldsymbol{B}^{n+1})^2}{2}-E_r$$

基本量をすべてEr, Frの関数としてかける

$$\boxed{\frac{E_r^{n+1}-E_r^*}{\Delta t}=S_E[E_r^{n+1},F_r^{j,n+1},D^{jk,n}]}$$

Dさえ陽的に評価すれば単純な4x4行列の反転でとける

←解析的に行列反転可能

step 4: ソース項の時間積分

$$\frac{E_r^{n+1}-E_r^*}{\Delta t}=S_E[\rho^{n+1},u^{j,n+1},T_g^{n+1},E_r^{n+1},F_r^{j,n+1},D^{jk,n+1}]$$

相対論的流体の場合: 密度、温度、速度は未知量

$$D=\rho\gamma$$

$$B^j$$

$$E_t=\rho h b^2\gamma^2-(b^0)^2-\left(p_g+\frac{b^2}{2}\right)+E_r$$

$$m_t^j=(\rho h+b^2)\gamma u^j-b^0 b^j+F_r^j$$

は既知量

密度、速度、温度をEr, Frの式として書くのは大変->(primitive recovery)

ErとFrだけn+1ステップで評価する(Takahashi+'13)

　m_t^jを使ってu^jを作るのをやめてしまう->u^jだけは陽的に評価

$$\rho^{n+1}=\frac{D^{n+1}}{\gamma^n},$$

$$p_g^{n+1}=\frac{1}{\Gamma_1-1}\left[E_t^{n+1}-D^{n+1}\gamma^n-\frac{(1+(\boldsymbol{v}^n)^2)(\boldsymbol{B}^{n+1})^2-(\boldsymbol{v}^n\cdot\boldsymbol{B}^{n+1})^2}{2}\right]$$

正確にはρとp_gはn+1で評価していない。気持ちとしては輻射による温度の急激な変化が起こりえるので温度や密度は陰的な心を取り入れたい。

step 4: ソース項の時間積分

$$\frac{E_r^{n+1}-E_r^{*}}{\Delta t} = S_E\left[\rho^{n+1}, T_g^{n+1}, \kappa^{n+1}, \sigma^{n+1}, E_r^{n+1}, F_r^{j,n+1}, D^{jk,n}, u^{j,n}\right]$$

$$\frac{F_r^{i,n+1}-F_r^{i,*}}{\Delta t} = S_F^i\left[\rho^{n+1}, T_g^{n+1}, \kappa^{n+1}, \sigma^{n+1}, E_r^{n+1}, F_r^{j,n+1}, D^{jk,n}, u^{j,n}\right]$$

uを陽的に評価してm_t^{n+1}, E_t^{n+1}から えられる陰的な気持ちが入った箇所

陰的に評価

陽的に評価

左辺を線形化

$$\delta E_r = E_r^{n+1} - E_r^{n}$$

$$\delta F_r^i = F_r^{i,n+1} - F_r^{i,n}$$

$$C\begin{pmatrix} \delta E_r \\ \delta F_r^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r^{*} - E_r^{n} + \Delta t S_E^{n} \\ F_r^{j,*} - F_r^{j,n} + \Delta t S_F^{j,n} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1-\Delta t\left[\frac{\partial S_E}{\partial E_r} + \frac{\partial T_g}{\partial E_r}\left(\frac{\partial S_E}{\partial \mathrm{B}}\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial T_g} + \frac{\partial S_E}{\partial \kappa}\frac{\partial \kappa}{\partial T_g} + \frac{\partial S_E}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial T_g}\right)\right], & -\Delta t\frac{\partial S_E}{\partial F_r^k} \\ -\Delta t\left[\frac{\partial S_F^j}{\partial E_r} + \frac{\partial T_g}{\partial E_r}\left(\frac{\partial S_F^j}{\partial \mathrm{B}}\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial T_g} + \frac{\partial S_F^j}{\partial \kappa}\frac{\partial \kappa}{\partial T_g} + \frac{\partial S_F^j}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial T_g}\right)\right], & 1-\Delta t\frac{\partial S_F^j}{\partial F_r^k} \end{pmatrix}$$

行列C(4x4行列)を反転することでEr, Frが求まる

step 5: 基本量への変換

後は磁気流体のエネルギー運動量を求め、基本量に変換する

保存量 $(D, m^i_{\rm MHD}, E_{\rm MHD}, B^i, E_r, F^i_r)$

基本量 $\longrightarrow (\rho, u^i, p_g, B^i, E_r, F^i_r)$

$$E^{n+1}_{\rm MHD} = E^{n+1}_{\rm tot} - E^{n+1}_r \qquad (\rho\gamma, \boldsymbol{m}_{\rm MHD}, \boldsymbol{B}, E_{\rm MHD})$$

$$\boldsymbol{m}^{n+1}_{\rm MHD} = \boldsymbol{m}^{n+1}_{\rm tot} - \boldsymbol{F}^{n+1}_r \qquad \longrightarrow (\rho, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{B}, p_g)$$

輻射はもうわかっているので輻射なしの
primitive recoveryをそのまま使える

(輻射については基本量と保存量が同じになるようにしたおかげ)

注意) Er, Frを求めるときに速度は陽的に評価していた。
→十分に収束した答えが得られるとは限らない
→ここで求まった速度場を用いてもう一度ソース項を解き直す

R2MHD陽・陰解法のまとめ

解くべき方程式

$$\partial_t U + \partial_x F^x = S$$

移流項

$$\partial_t U + \partial_x F^x = 0$$

ソース項

$$\partial_t U = S$$

1. 基本量Pの補完（空間高次精度化） $\mathcal{P}^{i+1/2} = \mathcal{P}^{i+} + \dfrac{\Delta \mathcal{P}^i}{2}\Delta x$

2. 数値フラックスの計算 $\mathcal{P}^{i+1/2} \rightarrow f^{i+1/2}$

3. 移流項の積分 $\mathcal{U}^{*,i} = \mathcal{U}^{n,i} - \dfrac{\Delta t}{\Delta x}\left(f^{i+1/2} - f^{i-1/2}\right)$

4. ソース項の積分（4x4行列の反転）$\begin{pmatrix} E_r^{(m+1)} \\ F_r^{(m+1),i} \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}^{-1}\begin{pmatrix} E_r^{*} + 4\pi\rho\kappa\gamma \mathrm{B} \\ F_r^{*,i} + 4\pi\rho\kappa u^j \mathrm{B} \end{pmatrix}$

5. 保存量から基本量への変換

$$(\rho\gamma, \boldsymbol{B}, E_{\mathrm{MHD}}, \boldsymbol{m}_{\mathrm{MHD}}, E_r, \boldsymbol{F}_r) \rightarrow (\rho, \boldsymbol{B}, p_g, \boldsymbol{u}, E_r, \boldsymbol{F}_r)$$

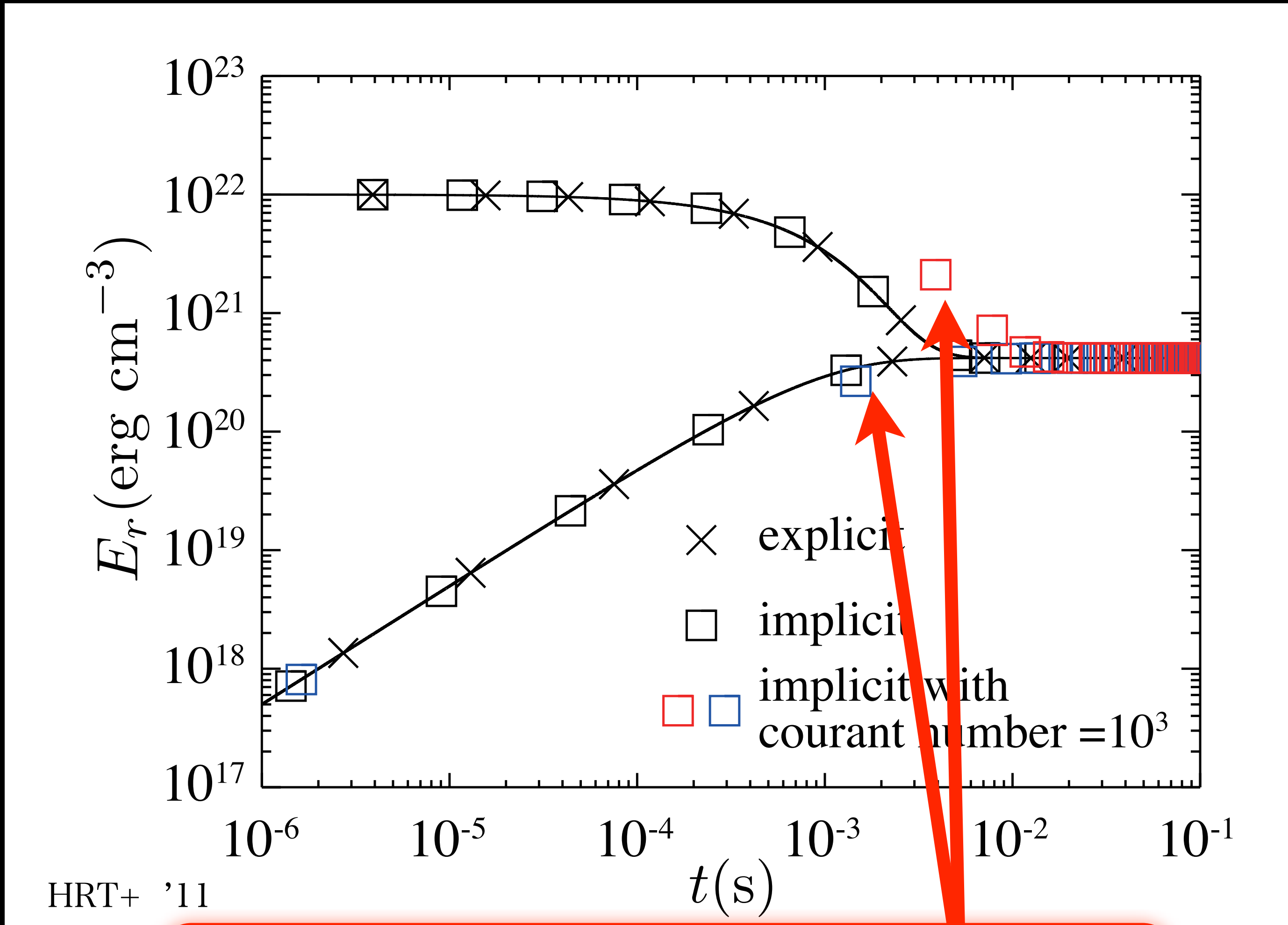
6. 収束していなければ4へ

陰解法のチェック

熱平衡への遷移

初期に非熱平衡にある流体と輻射が吸収・放射過程を通して熱平衡状態に遷移して行く様子

$$\partial_t E_r = \rho\kappa(4\pi B - E_r)$$



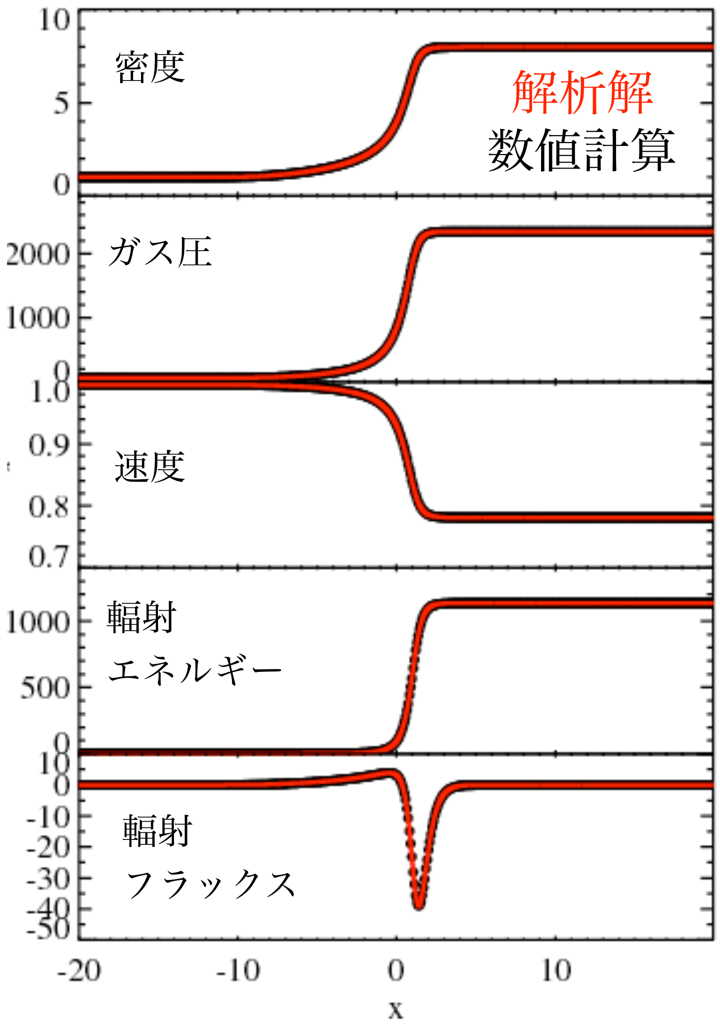
陰解法のおかげで大きなタイムステップでも安定にとける

相対論的輻射流体の衝撃波管問題

上流と下流で熱平衡にあるプラズマ同士が衝突した際の衝撃波 (Farris ’09)

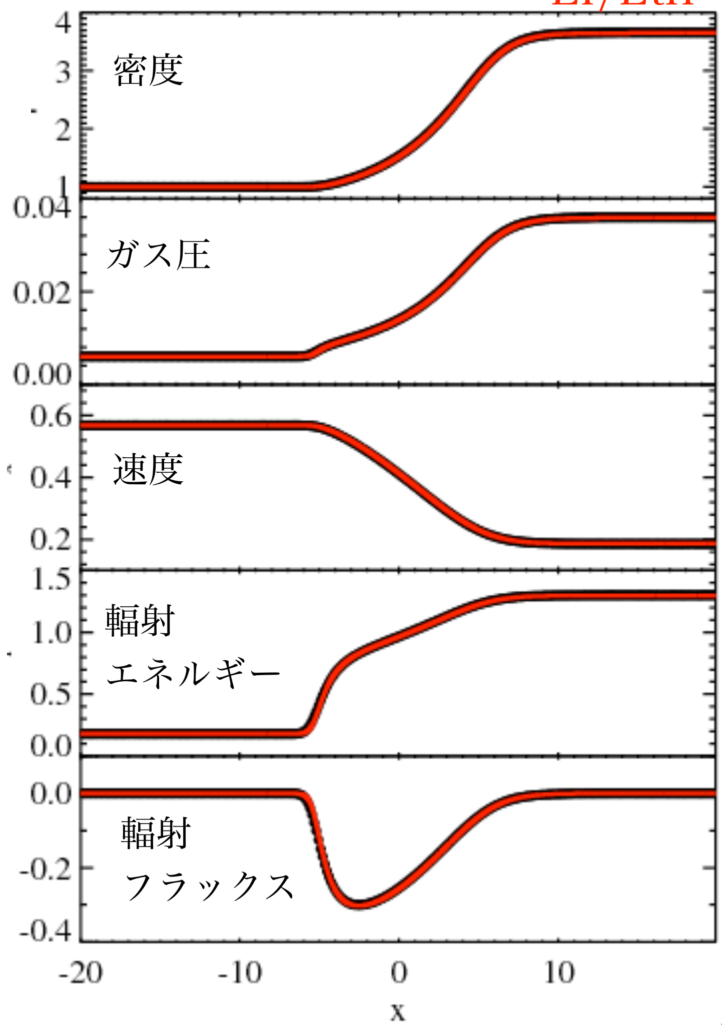
エディントン近似を仮定

相対論的（γ～10)衝撃波



輻射エネルギー優勢衝撃波

Er/Eth=20



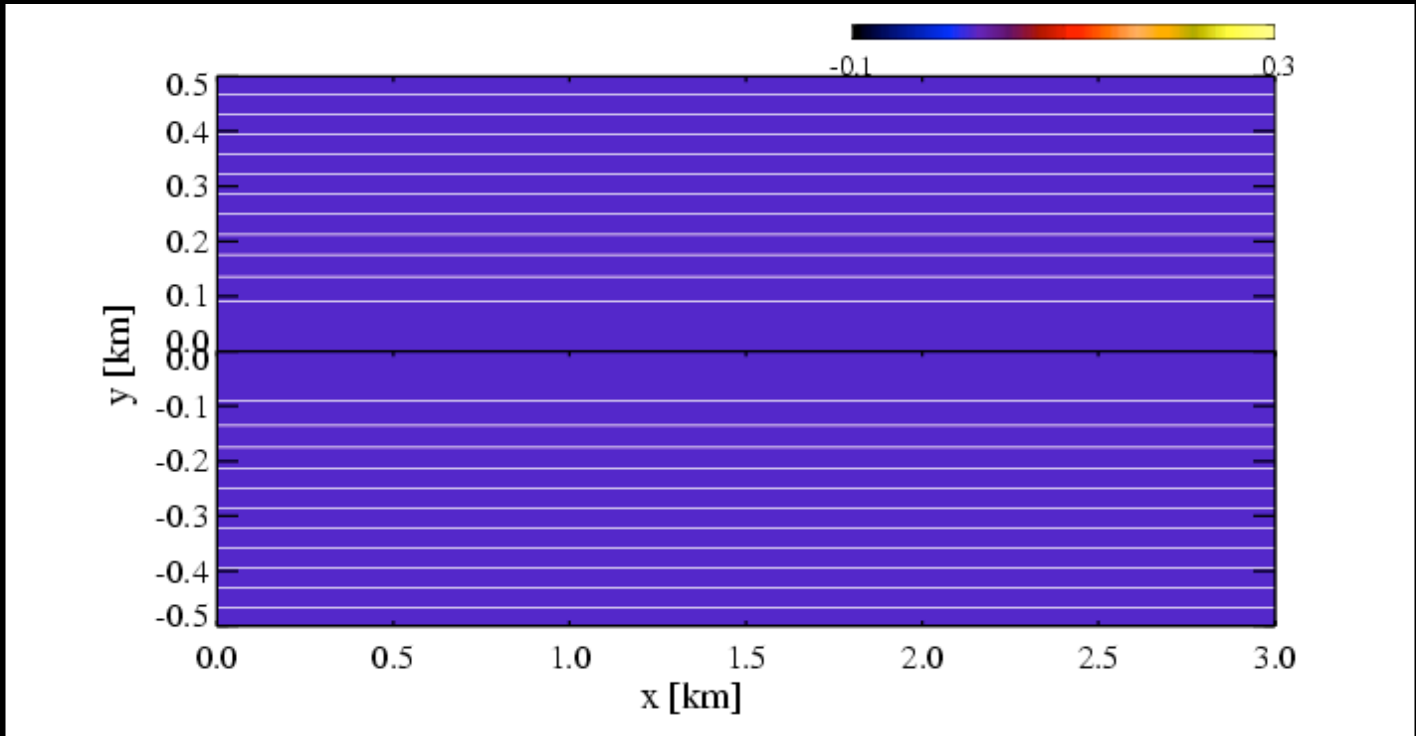
HRT+

相対論的磁気リコネクション

光学的に厚いガス中で磁気リコネクションがおきたらどうなるか？
(e.g., 降着円盤内での磁気拡散)

$$\rho = 10^{-2},\ T_g = T_r = 10^8\ \mathrm{K},\ B = 10^{10}\ \mathrm{G}$$

$$E_{th} = 2.8 \times 10^{14}\ \mathrm{erg},\ E_{mag} = 4.0 \times 10^{18}\ \mathrm{erg},\ E_{rad} = 7.5 \times 10^{17}\ \mathrm{erg},$$



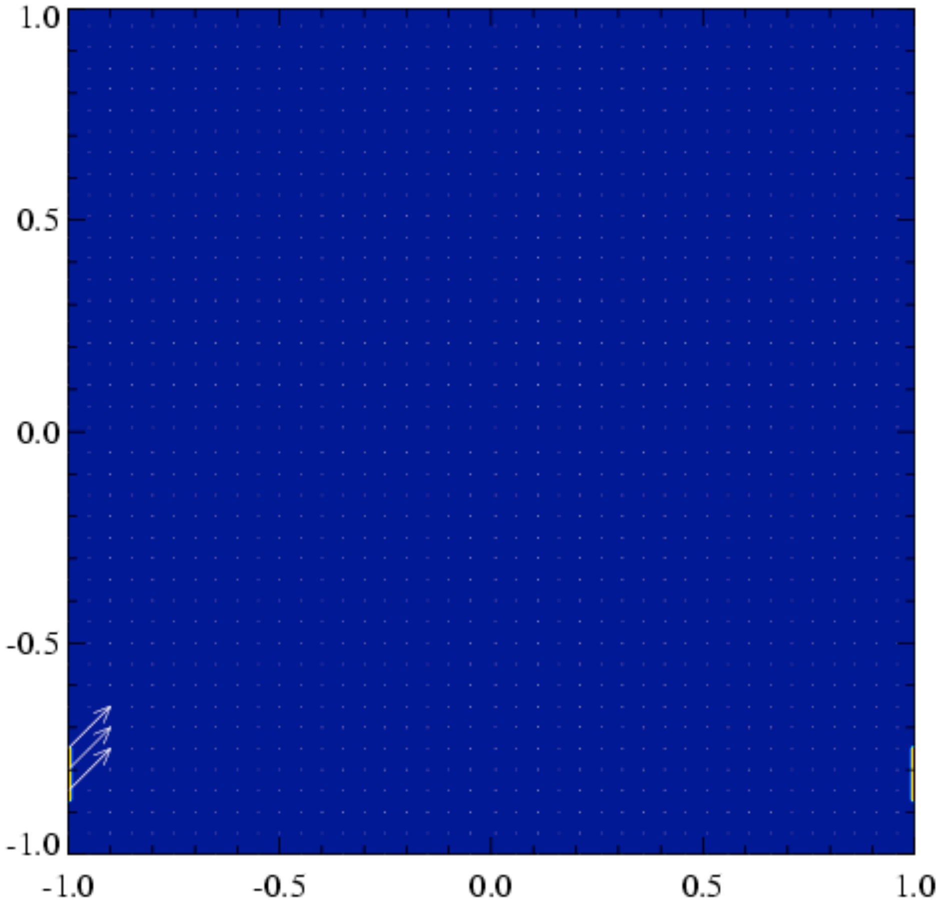
運動方程式 $\rho h \gamma^2 \frac{\mathrm{D}v^i}{\mathrm{D}t} = -\nabla p_g - \frac{v^i}{c^2}\frac{\partial p_g}{\partial t} + f^i_{\mathrm{mag}} + f^i_{\mathrm{rad}}$

$$\frac{|\boldsymbol{f}_{\mathrm{rad}}|}{|\boldsymbol{f}_{\mathrm{mag}}|} \simeq \frac{\frac{4E_r \rho \sigma v}{3c}}{|\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}/c|} \simeq \tau \frac{v}{c}\frac{E_r}{E_{\mathrm{mag}}}$$

輻射抵抗が効くために
磁気拡散は遅くなる

光の衝突

左右から光を同じ強さで注入



HRT & Ohsuga '11

エディントンテンソル

$$P^{ij} = D^{ij}(E_r, \boldsymbol{F}_r)E_r$$

DはErとFrの関数

光学的厚みには陽にはよらない

光学的に厚いとき → Fr = 0

光学的に薄いとき → Fr = cEr

この逆は普通は成り立たないが、、、

M-1ではあたかも成り立っているように

定式化されている

光が重なった所でFx=0になるのであたかも光学的に厚くなったかのように

定式化されているため、光は拡散する

→住吉さん、高橋（労太）さん

Negative Pressure in R2MHD

数値計算を行うと不圧になることはよくある

流体のエネルギー・運動量

$$E_h = E_{tot} - E_{em} - E_r,$$
$$m_h^i = m_{tot}^i - m_{em}^i - F_r^i,$$

流体のエネルギー＝

全エネルギー(既知)　ー　磁気エネルギー(既知/未知)　ー　輻射エネルギー(既知)

low ベータだけでなく輻射エネルギー優勢でも流体のエネルギーは負になりうる

負になったエネルギーは非物理的な解←何らかのズルが必要

その場合はエネルギー保存をあきらめてエントロピー保存の式を解く

Entropy Solver in R2MHD

エントロピー保存の式

$$\partial_t \sigma + \nabla \cdot (\sigma \boldsymbol{v}) = -\frac{\Gamma - 1}{\rho^{\Gamma-1}} \rho \kappa (4\pi \mathrm{B} - cE'_r)$$

where $\sigma = \frac{\gamma p_g}{\rho^{\Gamma-1}}$

左辺：エントロピーの移流

右辺：吸収／再放射によるガスと輻射の熱のやり取り(散乱係数によらない)

右辺はopacity大で硬い方程式→陰的時間積分が必要

移流方程式: $\partial_t \sigma + \nabla \cdot (\sigma \boldsymbol{v}) = 0$

陰的時間積分: $\partial_t \sigma = -\frac{\Gamma - 1}{\rho^{\Gamma-1}} \rho \kappa (4\pi \mathrm{B} - cE'_r)$

エントロピー式の半陰的解法

$\delta\sigma \equiv \sigma^{n+1} - \sigma^n$ 　について解く

$$\delta\sigma = \sigma^* - \sigma^n - \frac{(\Gamma-1)(\gamma^n)^{\Gamma-2}(D^{n+1})^{2-\Gamma}\kappa\delta t(\mathrm{B} - E_r'^{n+1})}{1 + (\Gamma-1)(\gamma^n)^{\Gamma-2}(D^{n+1})^{2-\Gamma}\Delta t\left[\kappa \left.\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \sigma}\right|_{D,\gamma} + \left.\frac{\kappa}{\sigma}\right|_{D,\gamma}(\mathrm{B} - E_r'^{n+1})\right]}$$

注意:B=B(T)=B(D, σ ,u), κ = κ (ρ ,T)= κ (D, σ ,u)と変換

Entropy Solver: 基本量への変換

エネルギー保存

$$D = \rho\gamma$$
$$\boldsymbol{B}$$
$$\boldsymbol{m}_{\rm MHD} = (\rho h\gamma^2 + \boldsymbol{B}^2)\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}$$
$$E_{\rm MHD} = \rho h\gamma^2 - p_g + \frac{(1+\boldsymbol{v}^2)\boldsymbol{B}^2 - (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B})^2}{2}$$

D, B, $m_{\rm MHD}$, **$E_{\rm MHD}$** → ρ, B, u, p_g

$W=\rho h\gamma^2$について1次元Newton法

$W = \rho h\gamma^2$! initial guess

$S = \boldsymbol{m}_{\rm MHD}\cdot\boldsymbol{B}$

do i = 1, $\mathrm{N_{iter}}$

$$\gamma = \left[1 - \frac{S^2(2W+\boldsymbol{B}^2) + \boldsymbol{m}^2_{\rm MHD}W^2}{W^2(W+\boldsymbol{B}^2)^2}\right]$$
$$p_g = \frac{W - D\gamma}{\Gamma_1\gamma^2}$$
$$f(W) = W - p_g + \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2}\right)\boldsymbol{B}^2 - \frac{S^2}{2W} - E_{\rm MHD}$$
$$\frac{d\gamma}{dW} = -\frac{\gamma^3}{W^3(W+\boldsymbol{B}^2)^3}\left(\boldsymbol{m}^2_{\rm MHD}W^3 + 3S^2W^2 + 3S^2\boldsymbol{B}^2W + S^2\boldsymbol{B}^4\right)$$
$$\frac{dp_g}{dW} = \frac{\gamma + (D\gamma - 2W)\frac{d\gamma}{dW}}{\Gamma_1\gamma^3}$$
$$\frac{df}{dW} = 1 - \frac{dp_g}{dW} + \frac{\boldsymbol{B}^2}{\gamma^3} + \frac{S^2}{W^3}$$
$$W^{\rm new} = W - f\left(\frac{df}{dW}\right)^{-1}$$

end do

エントロピー保存

$$D = \rho\gamma$$
$$\boldsymbol{B}$$
$$\boldsymbol{m}_{\rm MHD} = (\rho h\gamma^2 + \boldsymbol{B}^2)\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}$$
$$\sigma = \rho\gamma s = \frac{p_g\gamma}{\rho^{\Gamma-1}}$$

D, B, $m_{\rm MHD}$, **σ** → ρ, B, u, p_g

v^2について1次元Newton法

v^2 ! initial guess

$S = \boldsymbol{m}_{\rm MHD}\cdot\boldsymbol{B}$

do i = 1, $\mathrm{N_{iter}}$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$
$$\rho = \frac{D}{\gamma}$$
$$h = 1 + \gamma_1\sigma\frac{\rho^{\Gamma-1}}{D}$$
$$W = Dh\gamma$$
$$f(v^2) = v^2 - \frac{\boldsymbol{m}^2_{\rm MHD}W^2 + (2W+\boldsymbol{B}^2)S^2}{W^2(W+\boldsymbol{B}^2)^2}$$
$$\frac{dW}{d\gamma} = (\Gamma-1)D + (2-\Gamma)\frac{W}{\gamma}$$
$$\frac{dg}{d\gamma} = -\frac{S^2\left[3W(W+\boldsymbol{B}^2) + \boldsymbol{B}^4\right] + \boldsymbol{m}^2_{\rm MHD}W^3}{W^3(W+\boldsymbol{B}^2)^3}$$
$$\frac{df}{dv^2} = 1 - \frac{\gamma^3}{2}\frac{dW}{d\gamma}\frac{dg}{dW}$$
$$(v^{\rm new})^2 = v^2 - \left(\frac{df}{dv^2}\right)^{-1}$$

end do

まとめ

M-1クロージャーを用いた相対論的輻射磁気流体コードを構築

- 移流項(双極項)は近似リーマン解法を用いた陽的時間積分

- 相互作用(ソース項)は近似リーマン解法を用いた陽的時間積分

- 不圧に対処するためエントロピー保存も解く
  合計8+1+4+1 = 14本の方程式

- エディントンテンソルを変更することは容易