

一般相対論的な輻射流体シミュレーション (ブラックホール時空中の 光子ボルツマン・ソルバーの開発)

高橋 労太 (苫小牧高専)

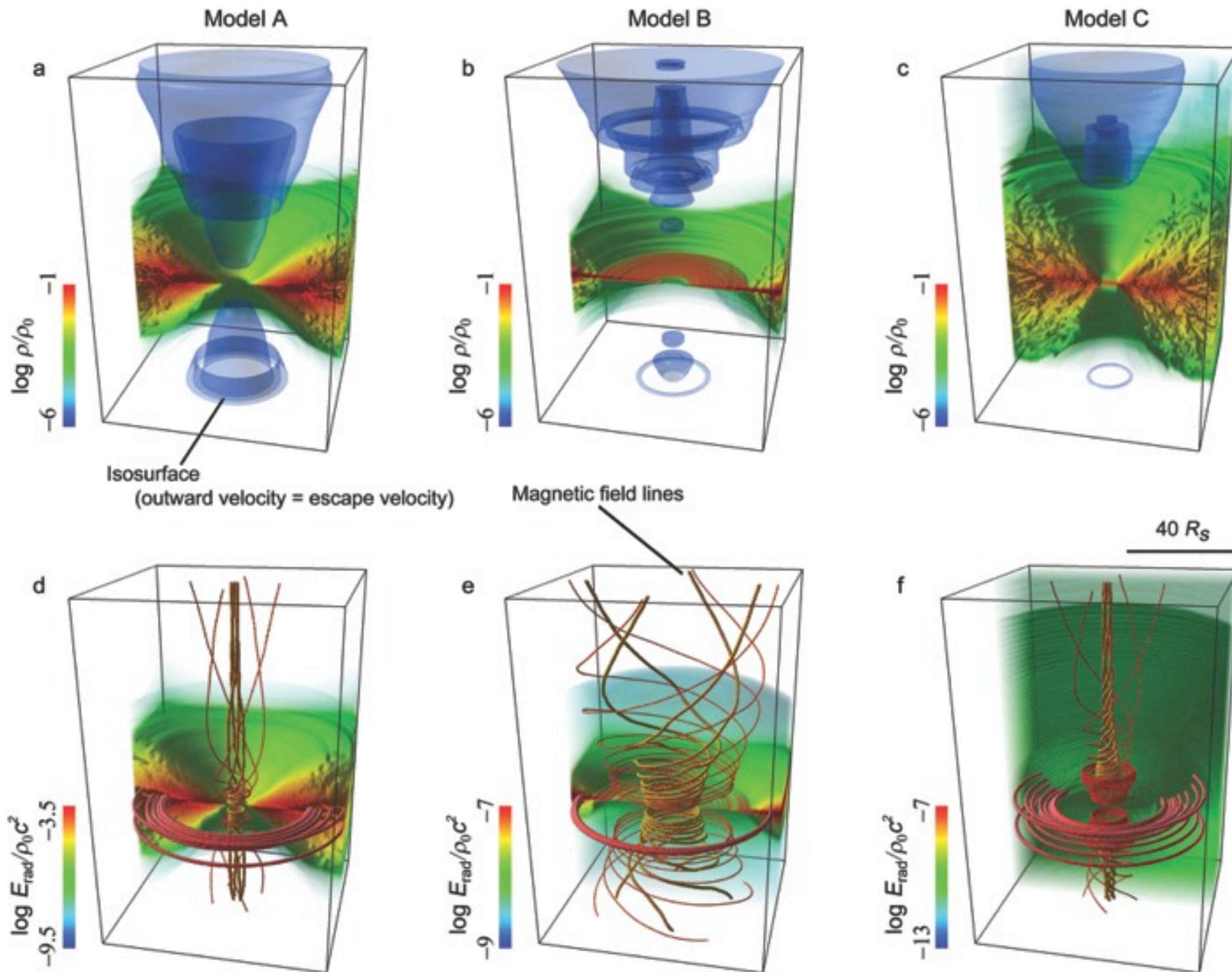
共同研究者： 梅村雅之 (筑波大学)

Radiation MHD simulation : Ohsuga+09

Slim disk type

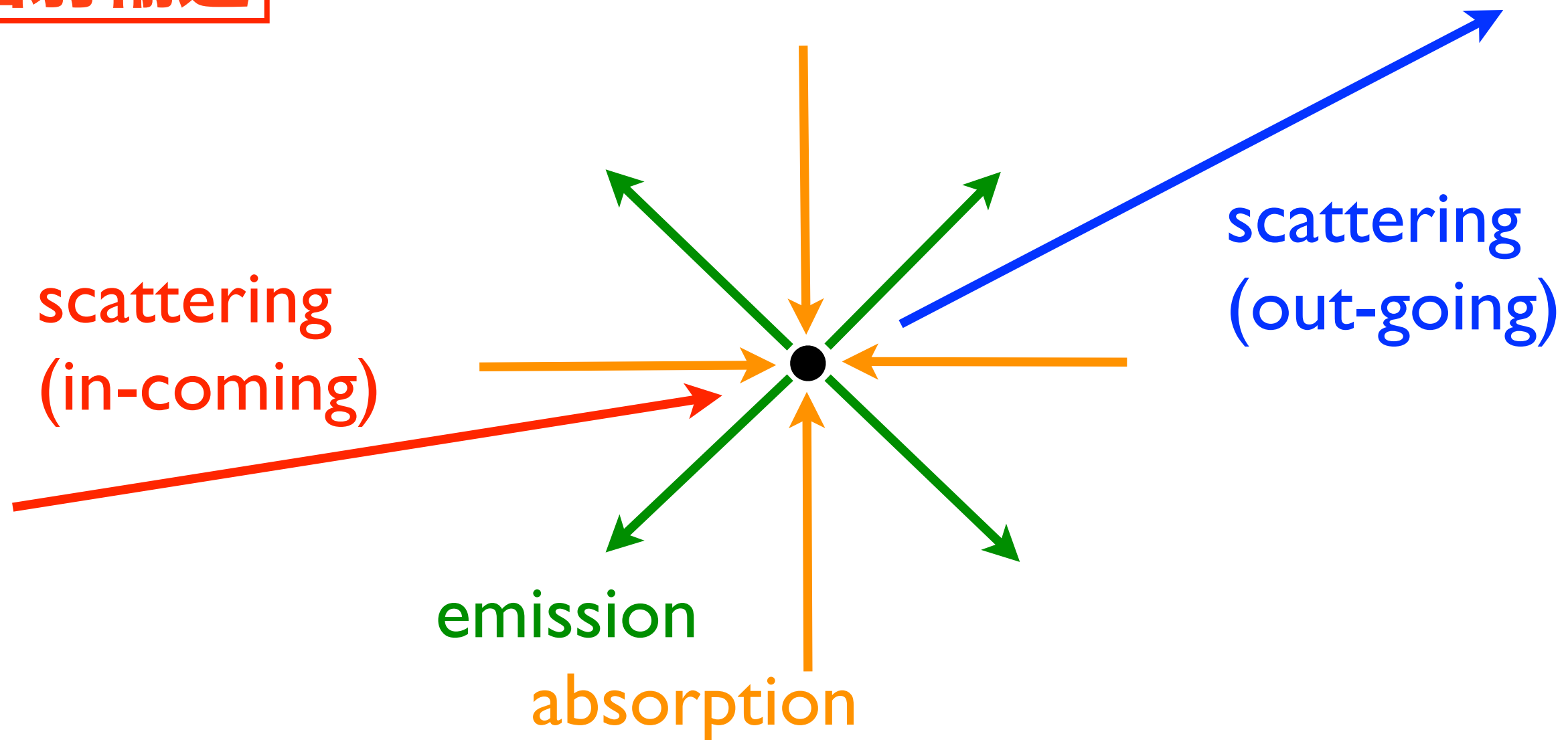
Standard-type

RIAF-type



流体＋磁場＋輻射場

輻射輸送



輻射輸送方程式 (空間 3 次元, 方向 2 次元, 振動数 1 次元の 6 次元方程式)

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu(\mathbf{n})}{\partial t} + \mathbf{n} \cdot \nabla I_\nu(\mathbf{n}) = \underbrace{\frac{\eta_\nu}{4\pi}}_{\text{emission}} - \underbrace{\kappa_\nu I_\nu(\mathbf{n})}_{\text{absorption}} - \underbrace{\sigma_\nu I_\nu(\mathbf{n})}_{\text{scattering (out-going)}} + \underbrace{\sigma_\nu \int \phi(\mathbf{n}; \mathbf{n}') I_\nu(\mathbf{n}') d\Omega'}_{\text{scattering (in-coming)}}$$

GR ray-tracing計算

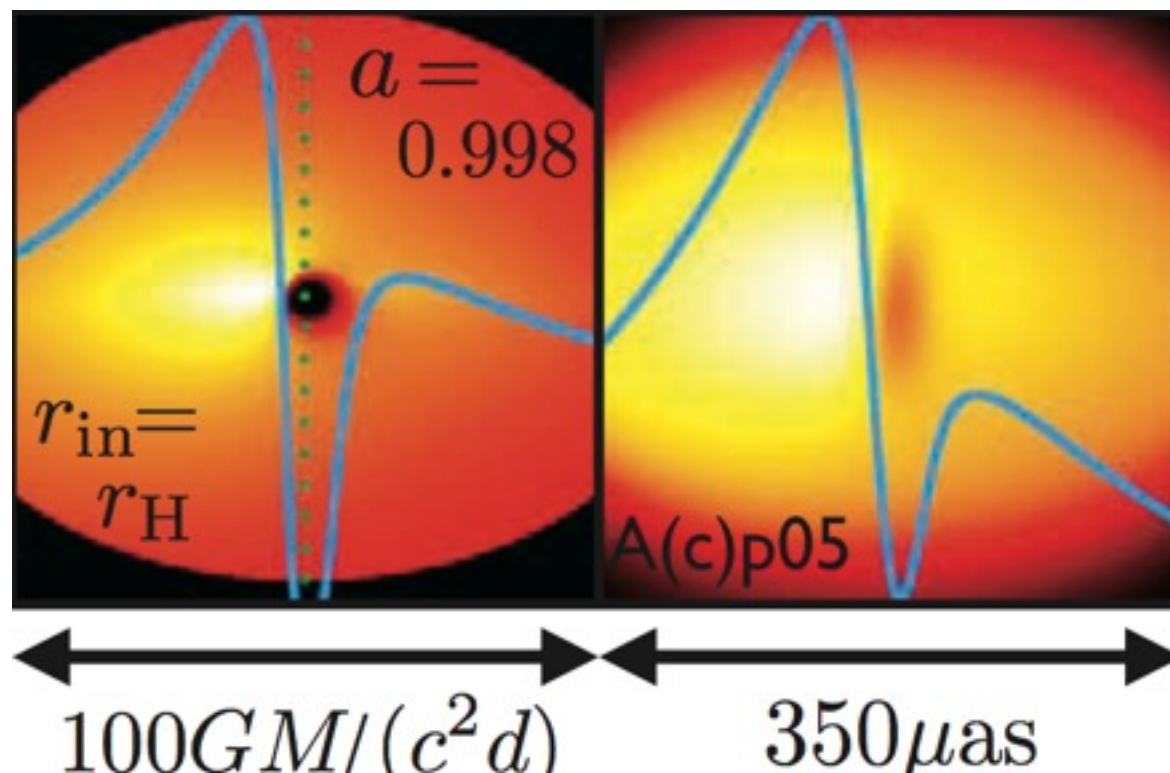
GR輻射輸送方程式 (GR光子ボルツマン方程式)

$$\frac{d\mathcal{I}}{d\lambda} = \mathcal{E} - \mathcal{A}\mathcal{I}$$

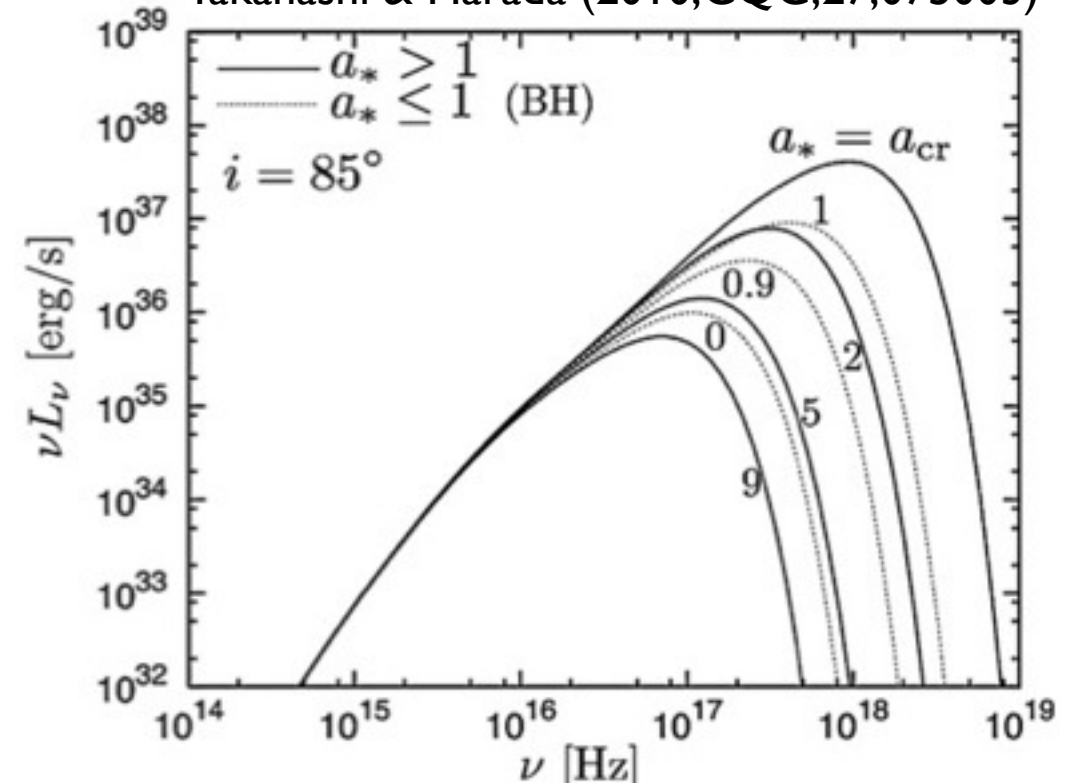
$\mathcal{I} \equiv \frac{I_\nu}{\nu^3}$: invariant specific intensity
 $\mathcal{E} \equiv \frac{j_\nu}{\nu^2}$: invariant emission coefficient
 $\mathcal{A} \equiv \nu\alpha_\nu$: invariant absorption coefficient

- ・測地線に沿って数値積分。invariant specific intensityを解く。
- ・空間3次元、方向2次元、振動数1次元の6次元空間の中で解を求める。

Takahashi & Mineshige (2011, ApJ, 729, 86)

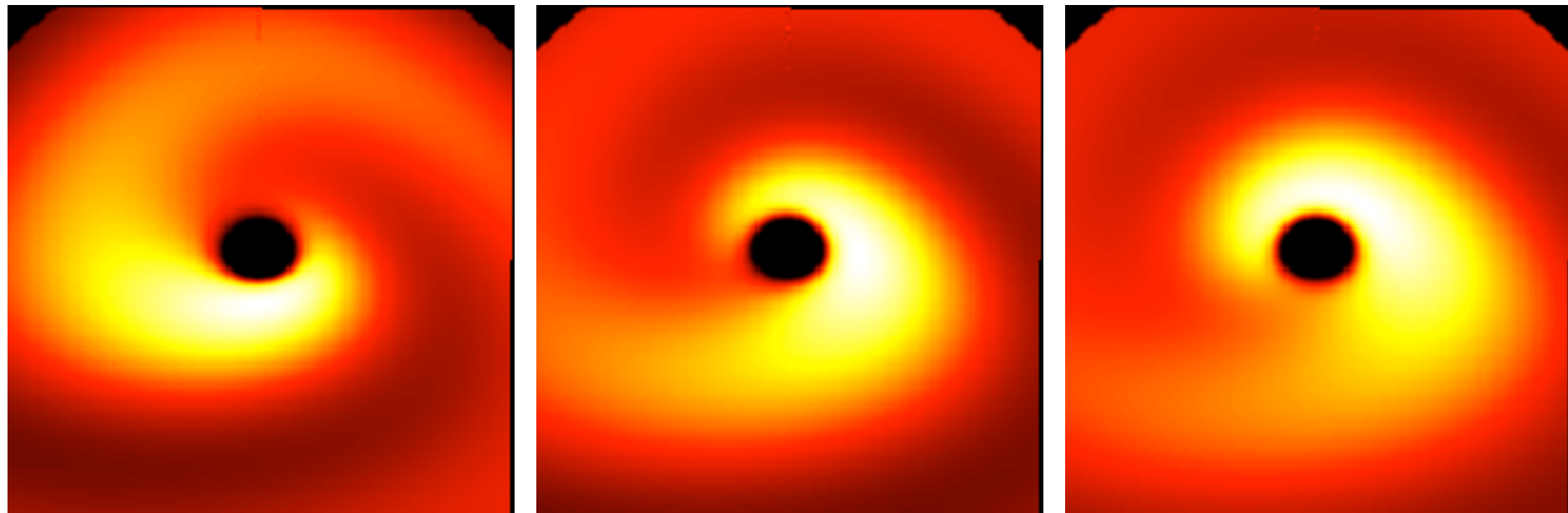


Takahashi & Harada (2010, CQG, 27, 075003)



GR ray-tracing計算の得手・不得手

- 特殊および一般相対論効果はきちんと扱える。
光子軌道の湾曲、重力赤方偏移、時間の遅れ、ドップラー効果、時空の引きずり等。
- **emission, absorption, scattering (out-going)はOK**
> 時間変動もそこそこ扱える。



disk QPO
image

• **scattering (in-coming)が苦手**

- **scattering (in-coming)が重要な問題** (e.g. Comptonization)
> **Monte-Carlo**計算がなされてきた。ただし、定常で。
> 流体シミュレーションと同時ににはなされていない。

最内不安定光子円軌道 Photon Sphere

$$\dot{r}^2 \propto R(r)$$

$$R = \frac{dR}{dr} = 0, \quad \frac{d^2 R}{dr^2} > 0 \text{ (unstable)}$$

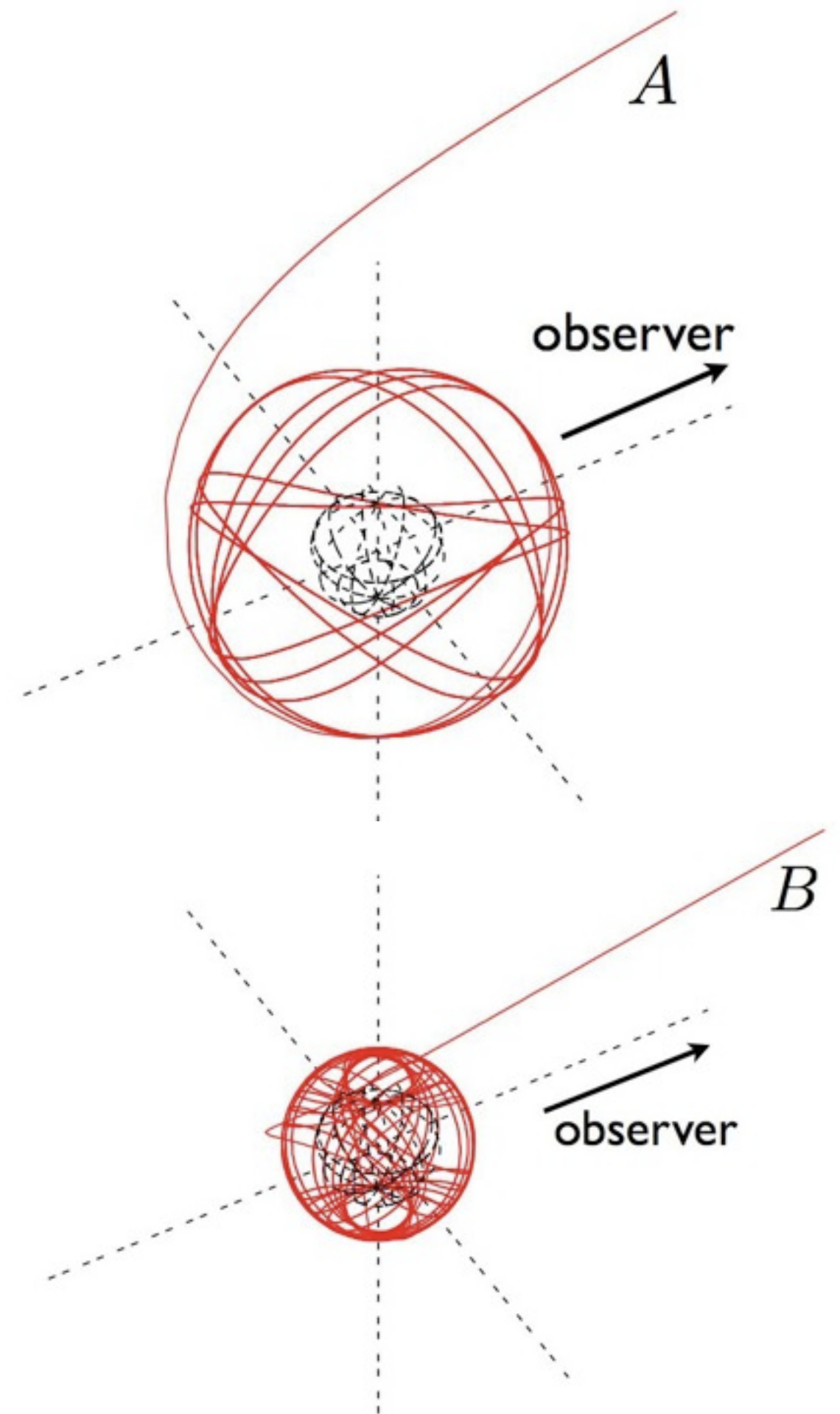
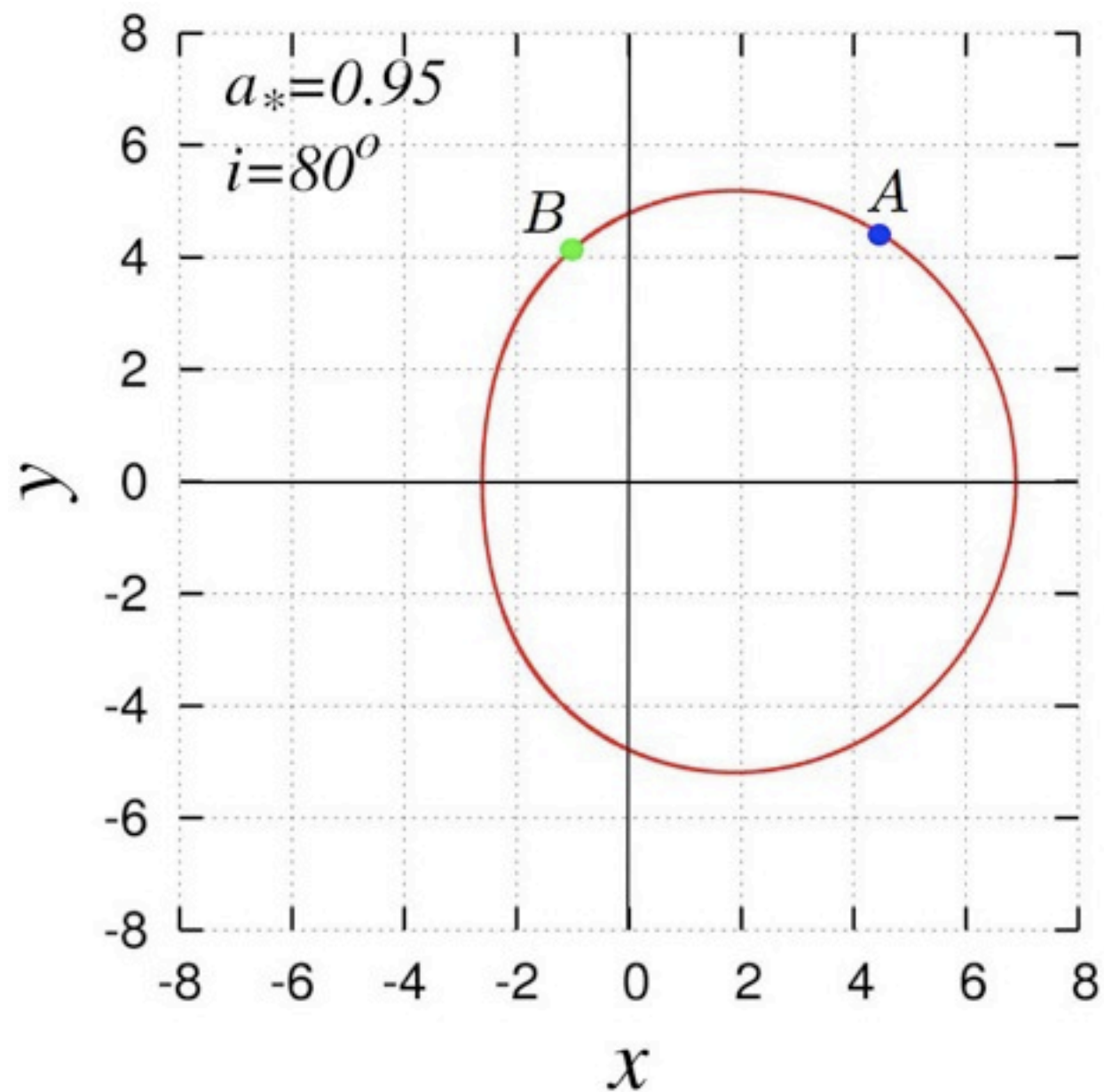


image of a standard accretion disk (1)

Dexter & Agol (2009) Fig.2

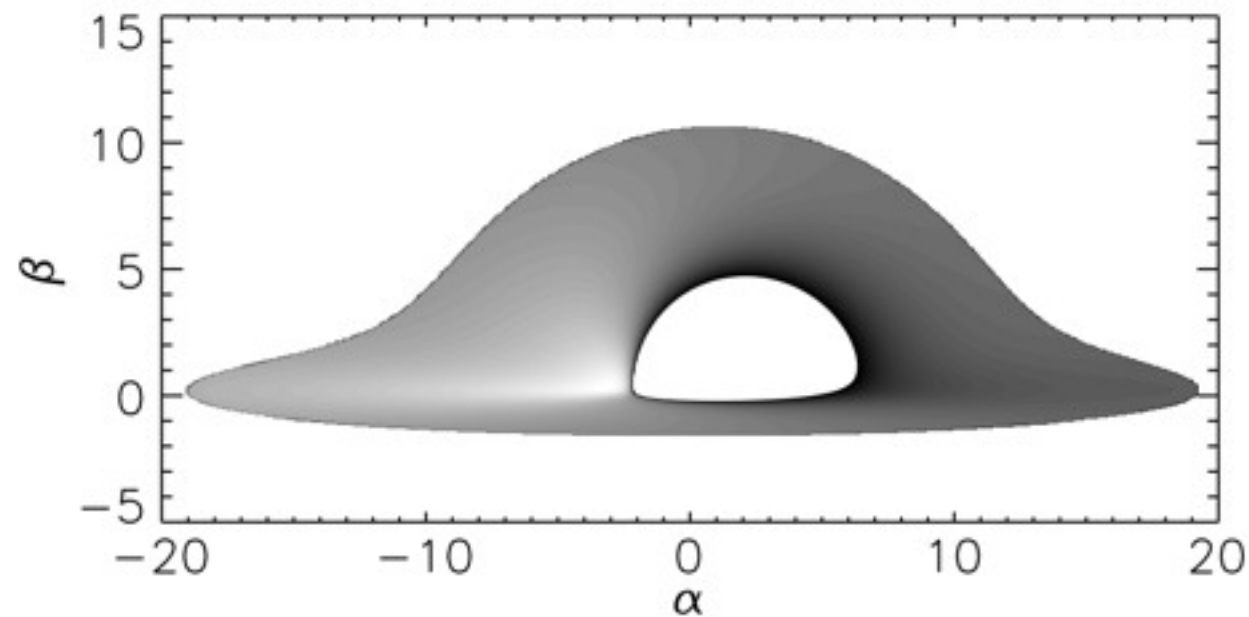


Figure 4. Image of an optically thick standard relativistic accretion disk around a near extremal black hole ($a = 0.998$). The disk has outer radius $r_{\text{out}} = 18$, and the observer's inclination is 85° .

Beckwith & Done (2005) Fig.7

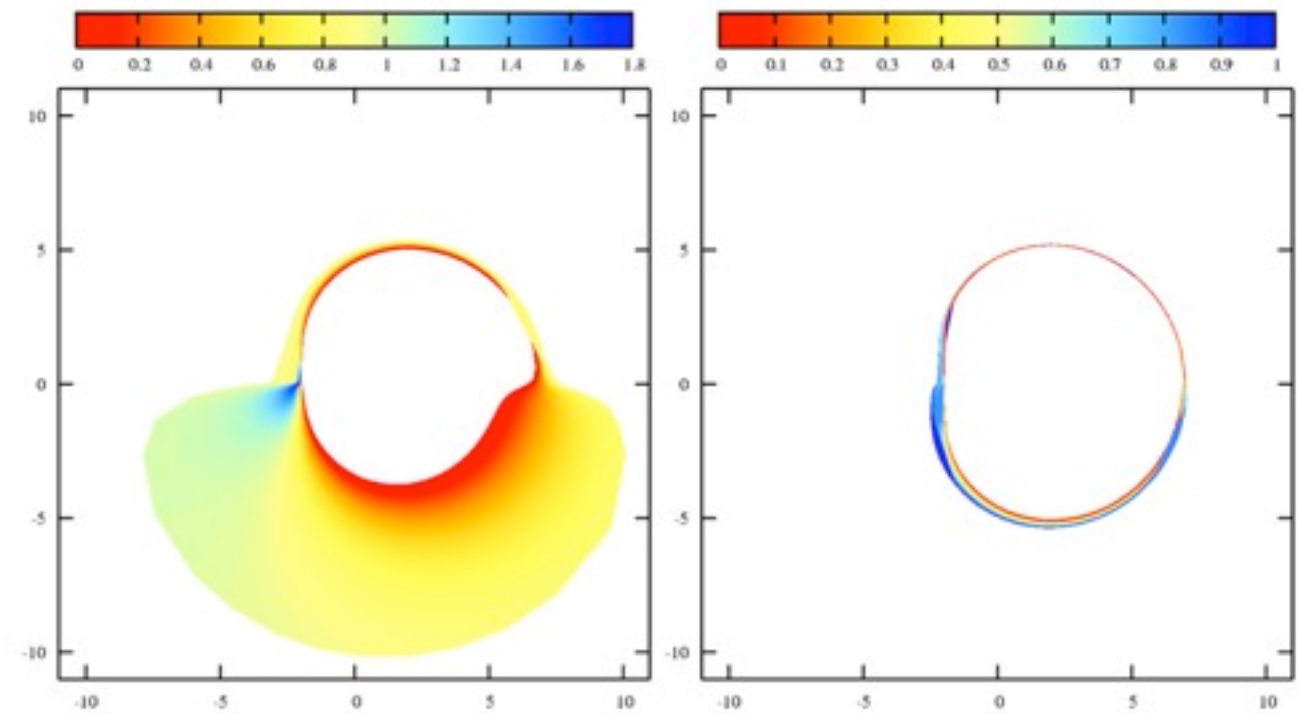
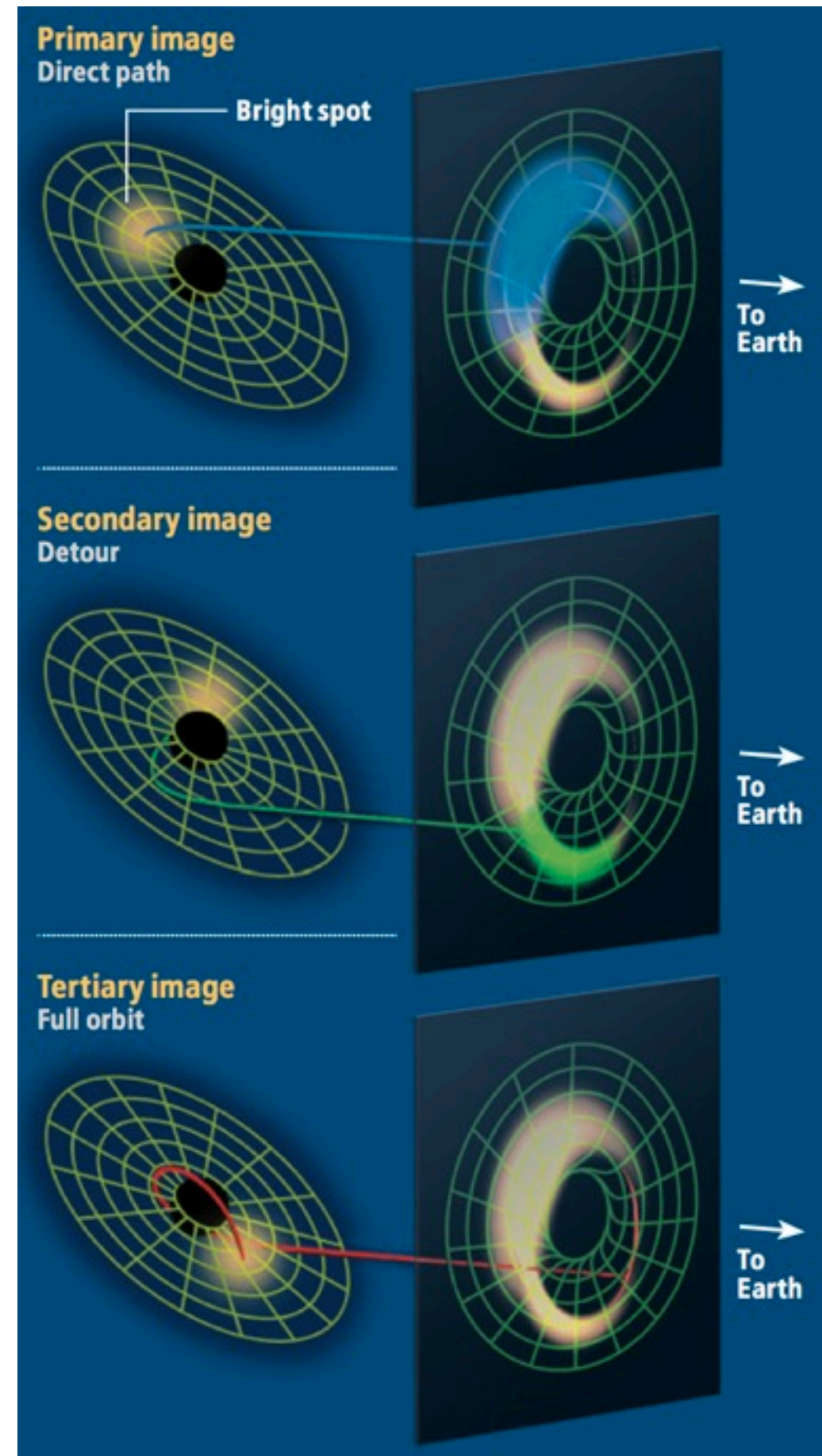
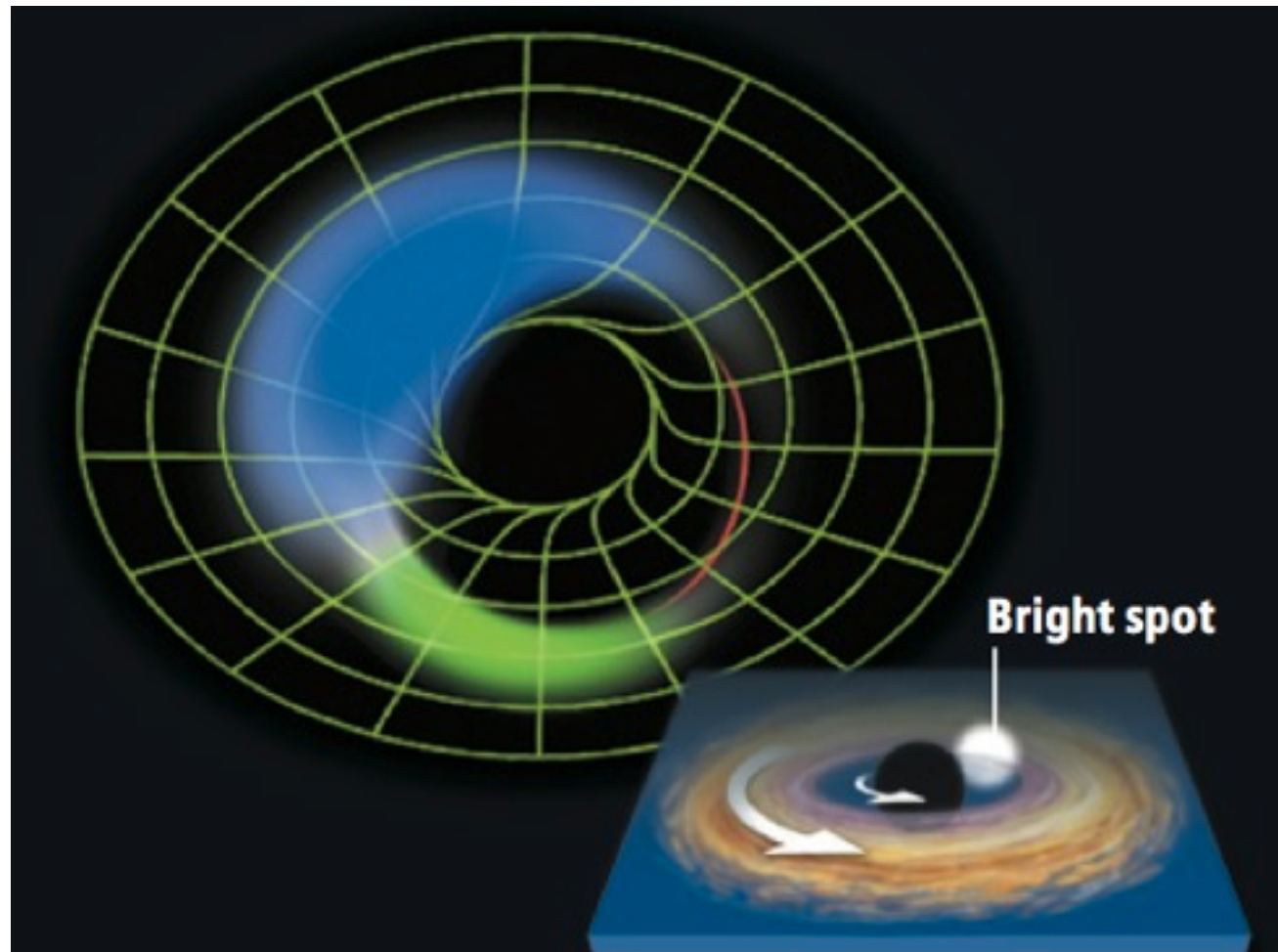


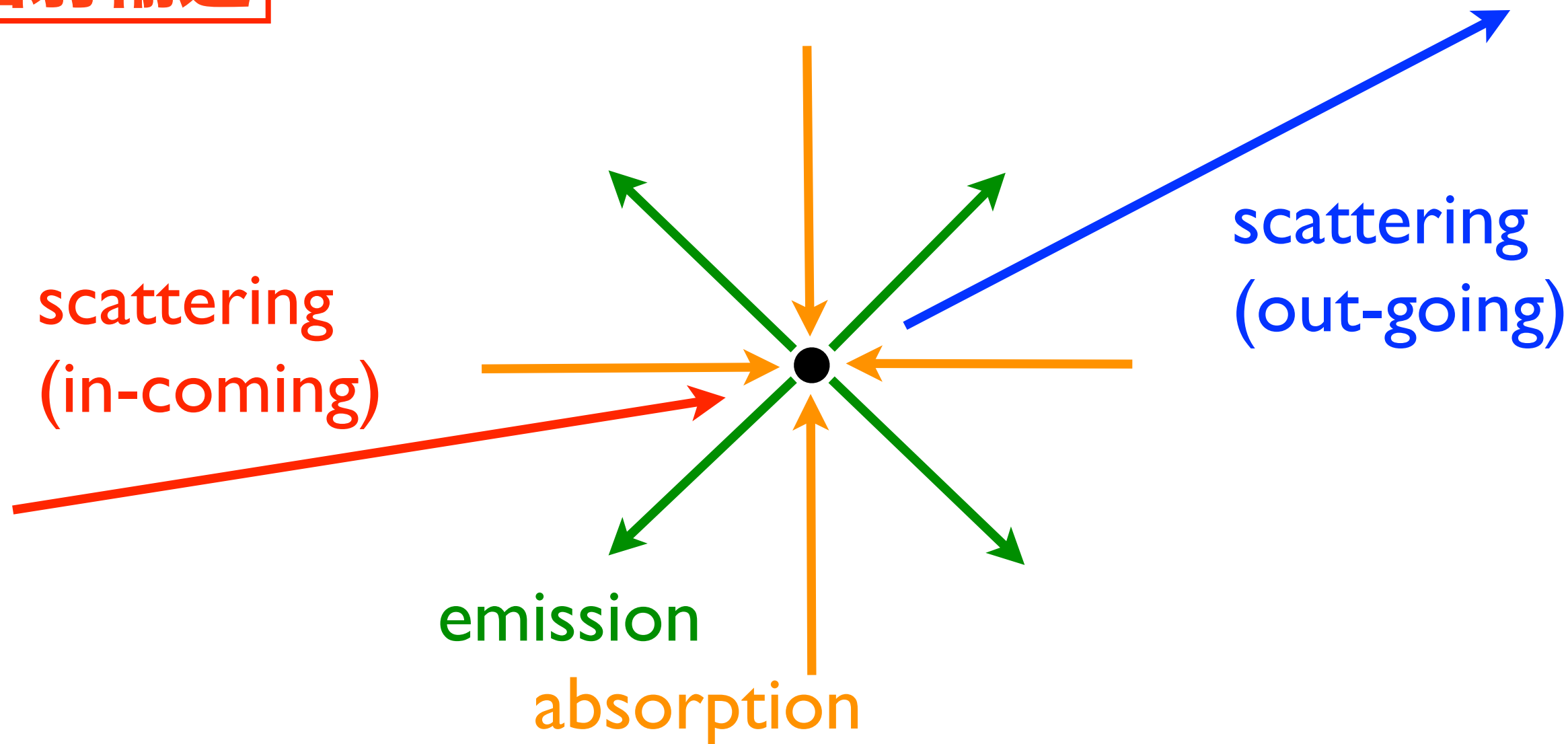
Figure 7. Unobscured $N = 1$ (left-hand panel) and $N = 2$ (right-hand panel) images of a thin, Keplerian accretion disc around an extreme Kerr black hole, with the disc extending from r_{ms} to $20r_g$. The observer is located at radial infinity with an inclination of $\theta_o = 87.5^\circ$. The images are highly asymmetric, indicating the strong coupling of these photons to the black hole spin

hot spot (image, light curve, SED)(1)

Broderick & Loeb (2009)



輻射輸送



輻射輸送方程式 (空間 3 次元, 方向 2 次元, 振動数 1 次元の 6 次元方程式)

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu(\mathbf{n})}{\partial t} + \mathbf{n} \cdot \nabla I_\nu(\mathbf{n}) = \underbrace{\frac{\eta_\nu}{4\pi}}_{\text{emission}} - \underbrace{\kappa_\nu I_\nu(\mathbf{n})}_{\text{absorption}} - \underbrace{\sigma_\nu I_\nu(\mathbf{n})}_{\text{scattering (out-going)}} + \underbrace{\sigma_\nu \int \phi(\mathbf{n}; \mathbf{n}') I_\nu(\mathbf{n}') d\Omega'}_{\text{scattering (in-coming)}}$$

非相対論的輻射流体シミュレーション

Cosmological Radiative Transfer Comparison Project II: The Radiation-Hydrodynamic Tests

h.COJ 18 May 2009

Ilian T. Iliev^{1,2,3*}, Daniel Whalen⁴, Garrelt Mellema⁵, Kyungjin Ahn^{6,7}, Sunghye Baek⁸, Nickolay Y. Gnedin⁹, Andrey V. Kravtsov¹⁰, Michael Norman¹¹, Milan Raicevic¹², Daniel R. Reynolds¹³, Daisuke Sato¹⁴, Paul R. Shapiro⁶, Benoit Semelin⁷, Joseph Smidt¹⁵, Hajime Susa¹⁶, Tom Theuns^{12,17}, Masayuki Umemura¹⁴

¹ Astronomy Centre, Department of Physics & Astronomy, Pevensey II Building, University of Sussex, Falmer, Brighton BN1 9QH, United Kingdom

² Universität Zürich, Institut für Theoretische Physik, Winterthurerstrasse 190, CH-8057 Zürich, Switzerland

³ Canadian Institute for Theoretical Astrophysics, University of Toronto, 60 St. George Street, Toronto, ON M5S 3H8, Canada

⁴ T-2 Nuclear and Particle Physics, Astrophysics, and Cosmology, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, NM 87545, U.S.A.

⁵ Dept. of Astronomy and Oskar Klein Centre, AlbaNova, Stockholm University, SE-10691 Stockholm, Sweden

⁶ Department of Earth Science Education, Chosun University, Gwangju 501-759, Korea

⁷ Department of Astronomy, University of Texas, Austin, TX 78712-1083, U.S.A.

⁸ LERMA, Observatoire de Paris, 77 av Denfert Rochereau, 75014 Paris, France

⁹ Department of Physics, University of Michigan, 4810-1063, U.S.A.

Iliev+2009(MNRAS,400,1283)

Code	Grid	Parallelization	hydro method	rad. transfer method
Capreole+C ² -Ray	fixed	shared/distributed	Eulerian, Riemann solver	short-characteristics ray-tracing
TVD+C ² -Ray	fixed	shared/distributed	Eulerian, TVD solver	short-characteristics ray-tracing
HART	AMR	shared/distributed	Eulerian, Riemann solver	Eddington tensor moment
RSPH	particle-based	distributed	SPH	long-characteristics ray-tracing
ZEUS-MP	fixed	distributed	Eulerian	3-D ray-tracing
RH1D	sph. Lagrangian	no	Lagrangian	1-D ray-tracing
Coral	AMR	no	Eulerian, flux-vector splitting	short-characteristics ray tracing
LICORICE	AMR	shared	SPH	Monte-Carlo ray-tracing
Flash-HC	AMR	distributed	Eulerian, PPM	Hybrid characteristics ray-tracing
Enzo-RT	fixed	distributed	Eulerian, PPM	Flux-limited diffusion

輻射輸送数値解法

散乱の効果を正確に取入れられる数値解法

Tree 法

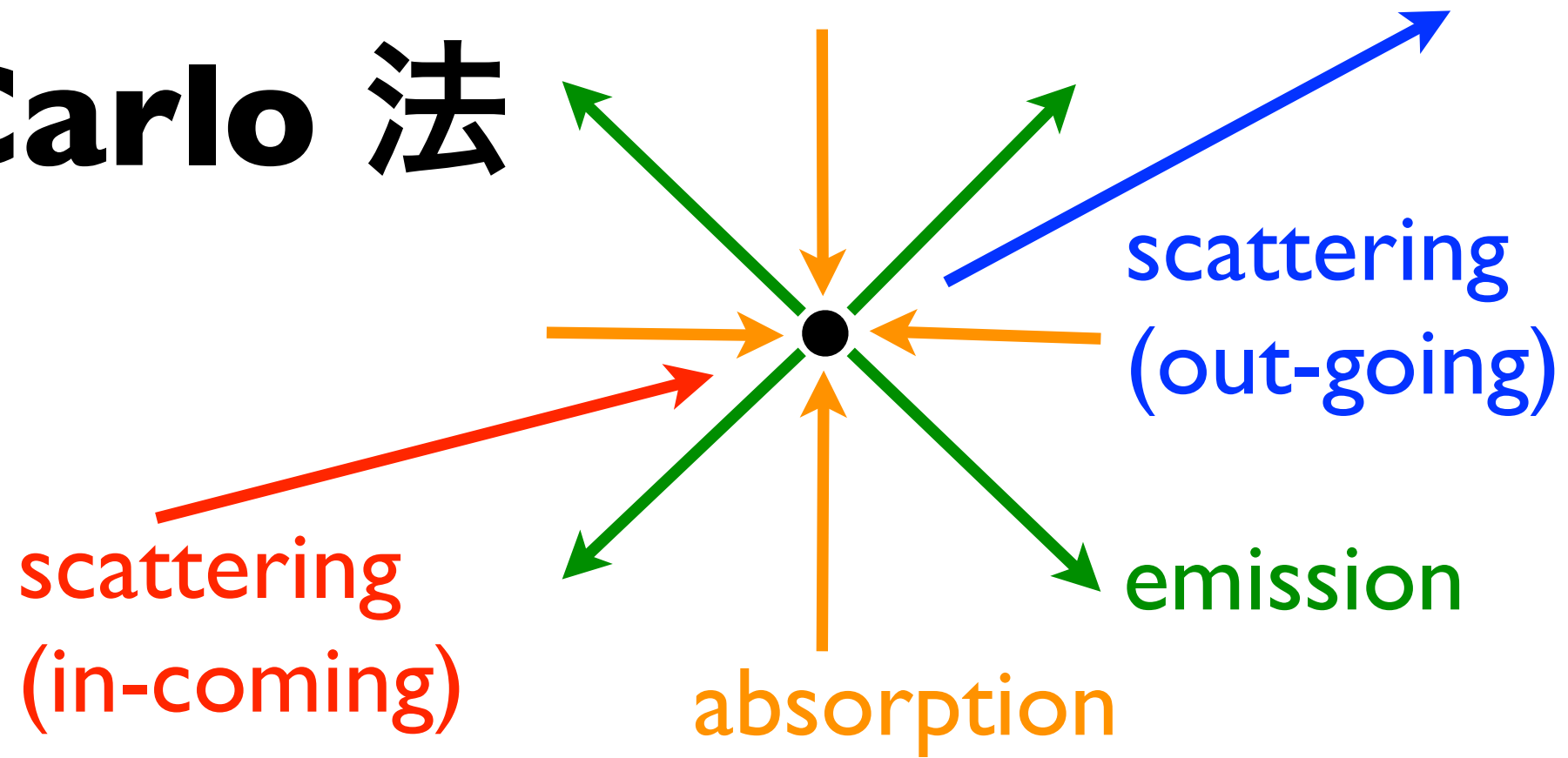
Short Characteristic 法

ART 法

Long Characteristic 法

Monte Carlo 法

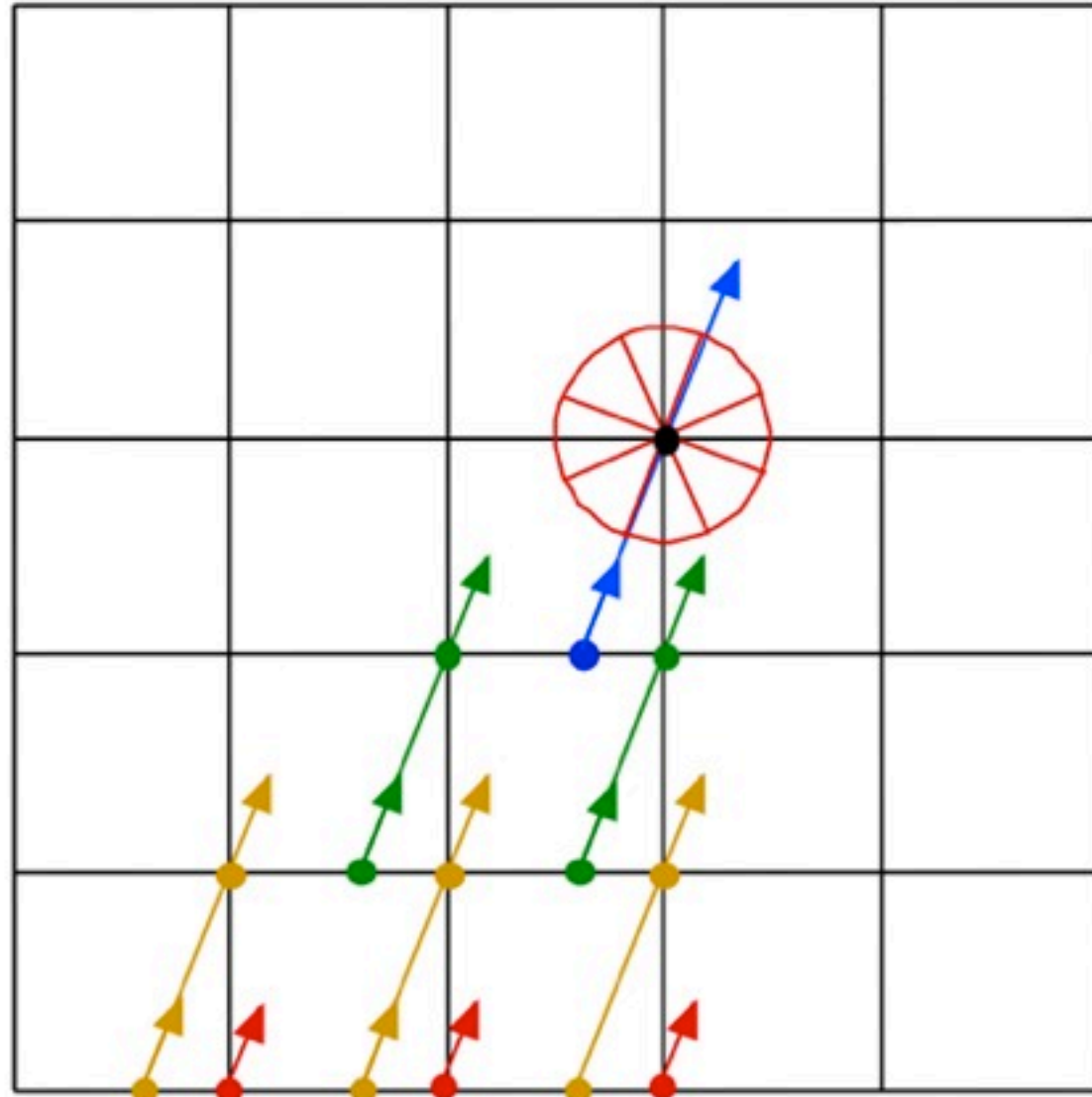
計算量大



Short Characteristics 法

(Kunasz&Auer1988)

隣のセルに達するまでの光線のみに沿って計算する.



各セル境界での初期値は,
周囲の値から補間により求める.

- 特徴
- ・ 演算量 小
 - ・ 単純
 - ・ 数値拡散が大きい

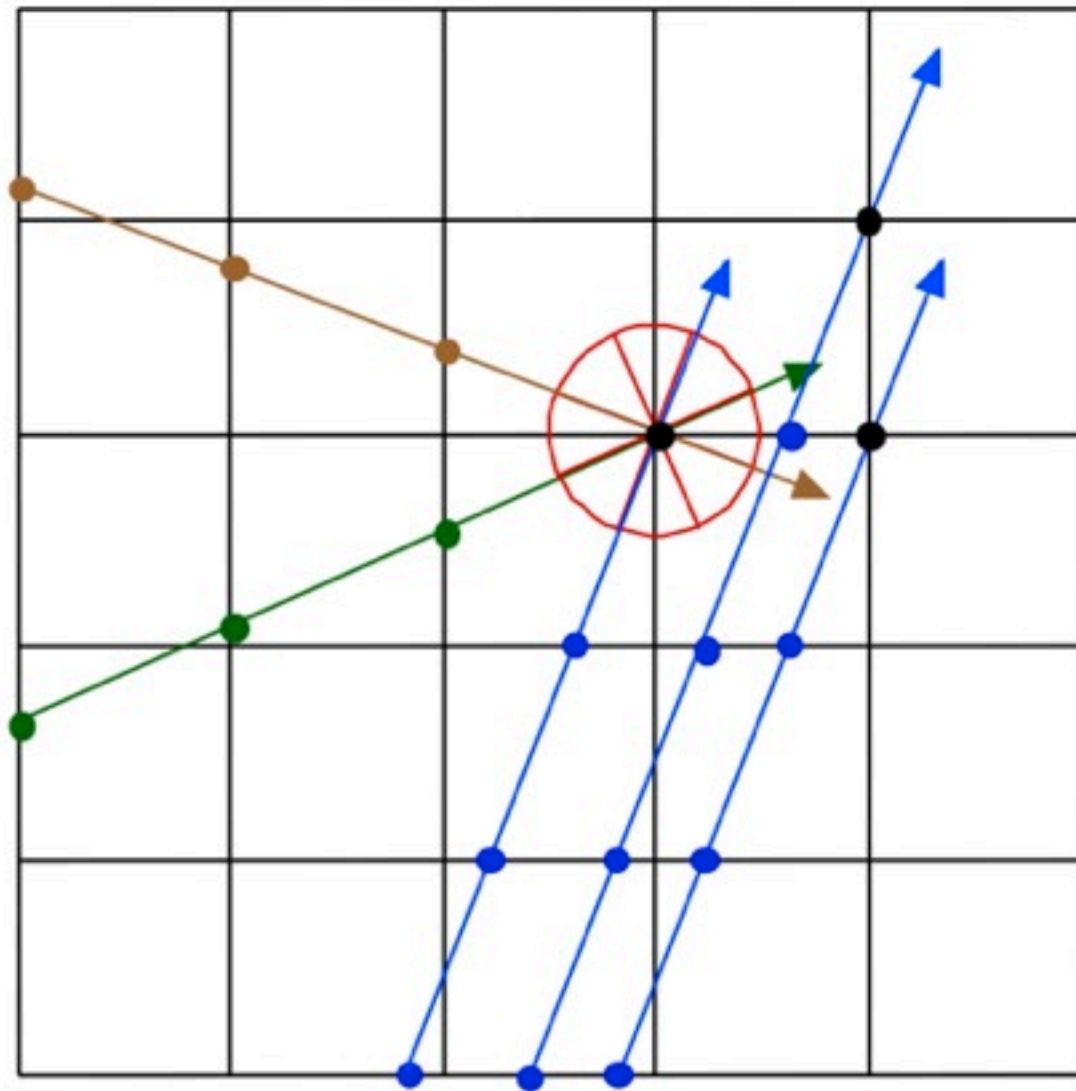
演算量

$$N_x N_y N_z \cdot N_\theta N_\phi \cdot N_\nu$$

計算量が比較的少ないため, 大規模計算に利用できる.
しかし, 高い精度が必要な計算には不向き.

Long Characteristics 法 (Ray Tracing法)

各格子点を通るすべての光線に沿って計算する.



特徴

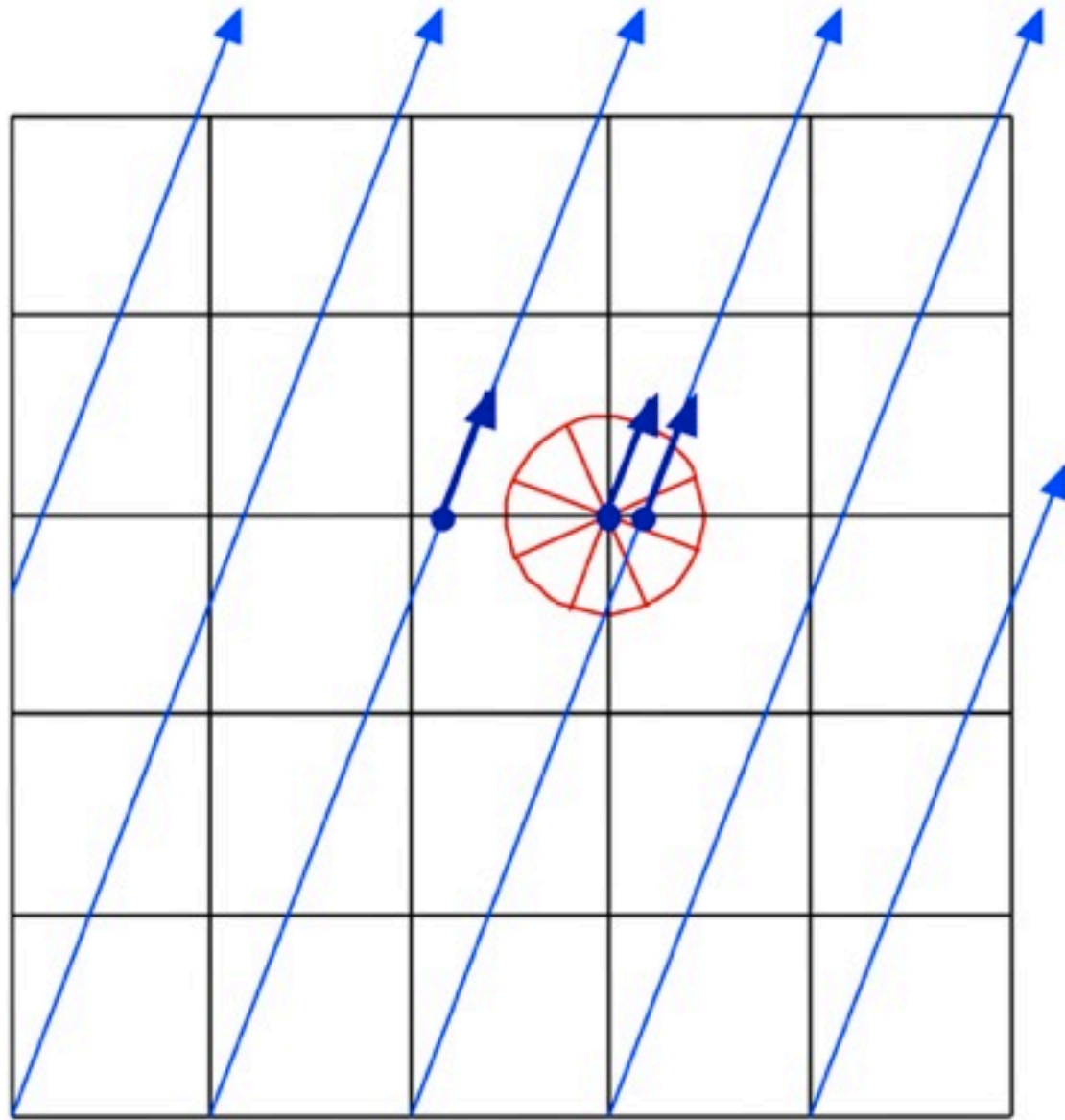
- ・ 正確
- ・ 演算量 大
- ・ 複雑

演算量

$$N \cdot N_x N_y N_z \cdot N_\theta N_\phi \cdot N_v$$

計算量が多く計算時間が長いため, 大規模計算には向かない

Authentic Radiative Transfer (ART) 法



長い直線で構成する**輻射用格子**を張り，その上で輻射輸送を計算する。
流体格子上的の値は，近傍の輻射格子上的の値から補間により求める。

特徴

- ・ 演算量はShortと同等
- ・ やや複雑
- ・ 精度はLongに近い

演算量

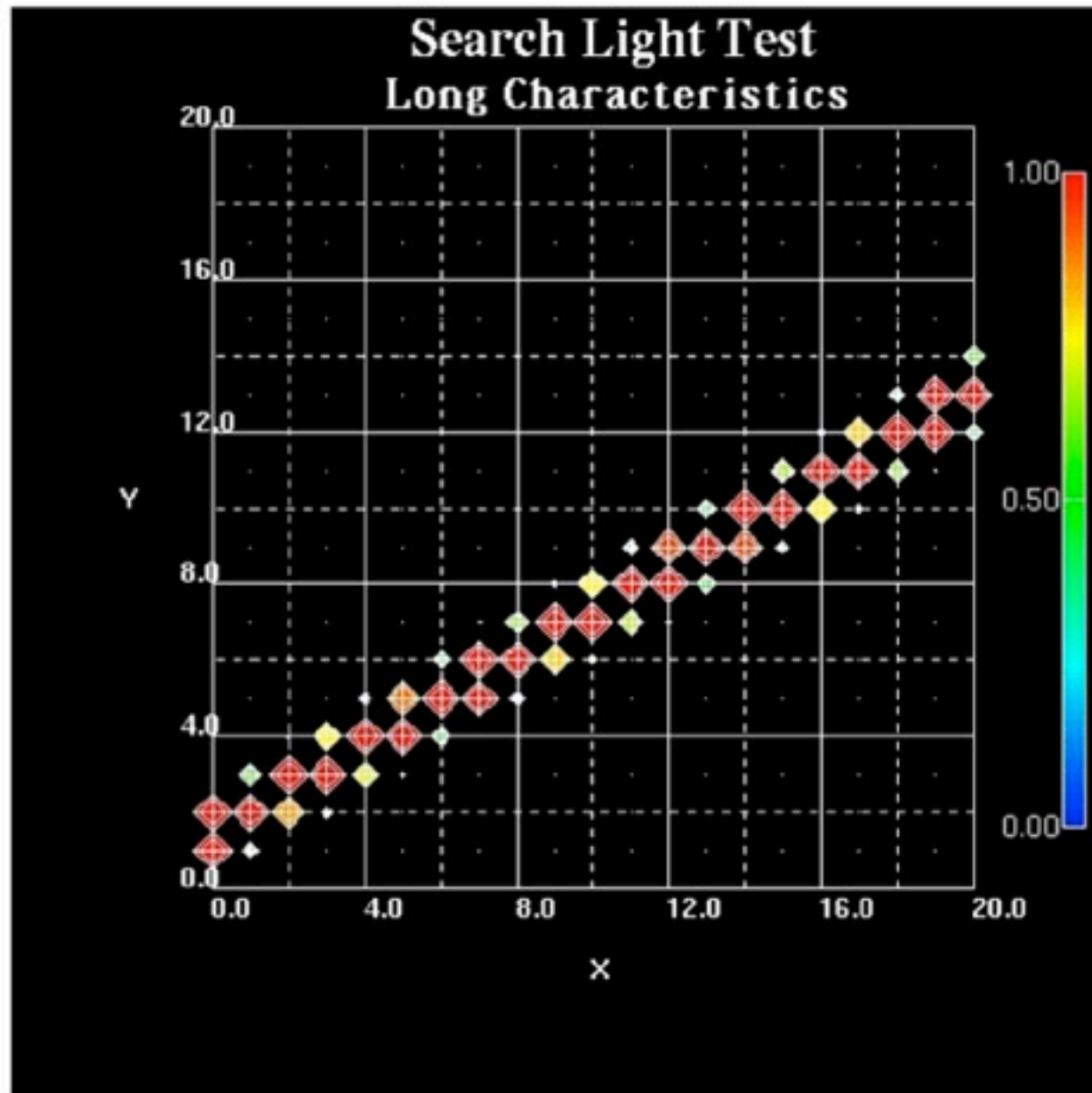
$$N_x N_y N_z \cdot N_\theta N_\phi \cdot N_\nu$$

Long Char. 法と Short Char.法の長所を兼ね備えている。

テスト結果：計算精度

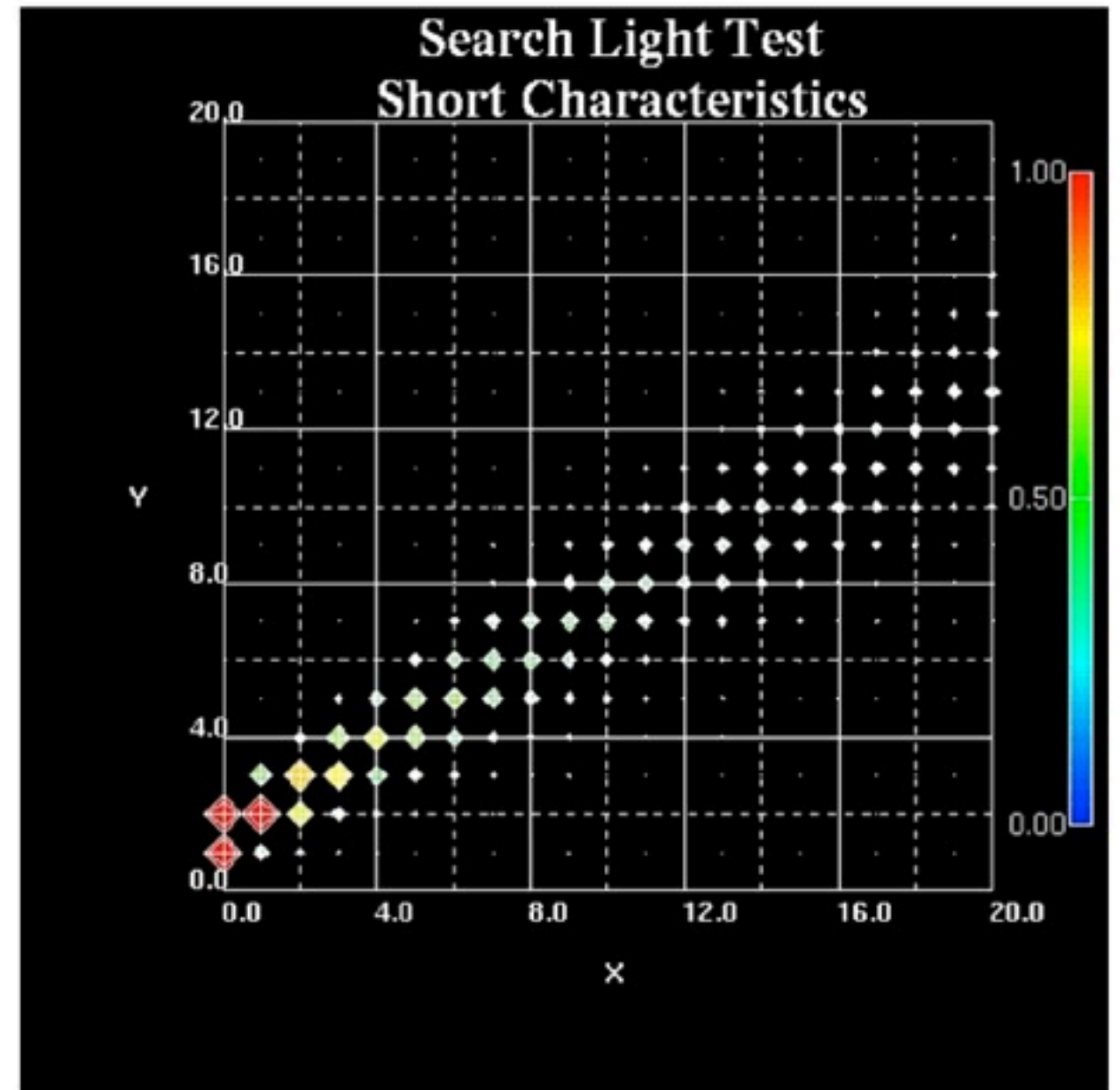
by 中本

Long Char. 法



正確な値が得られている。

Short Char. 法

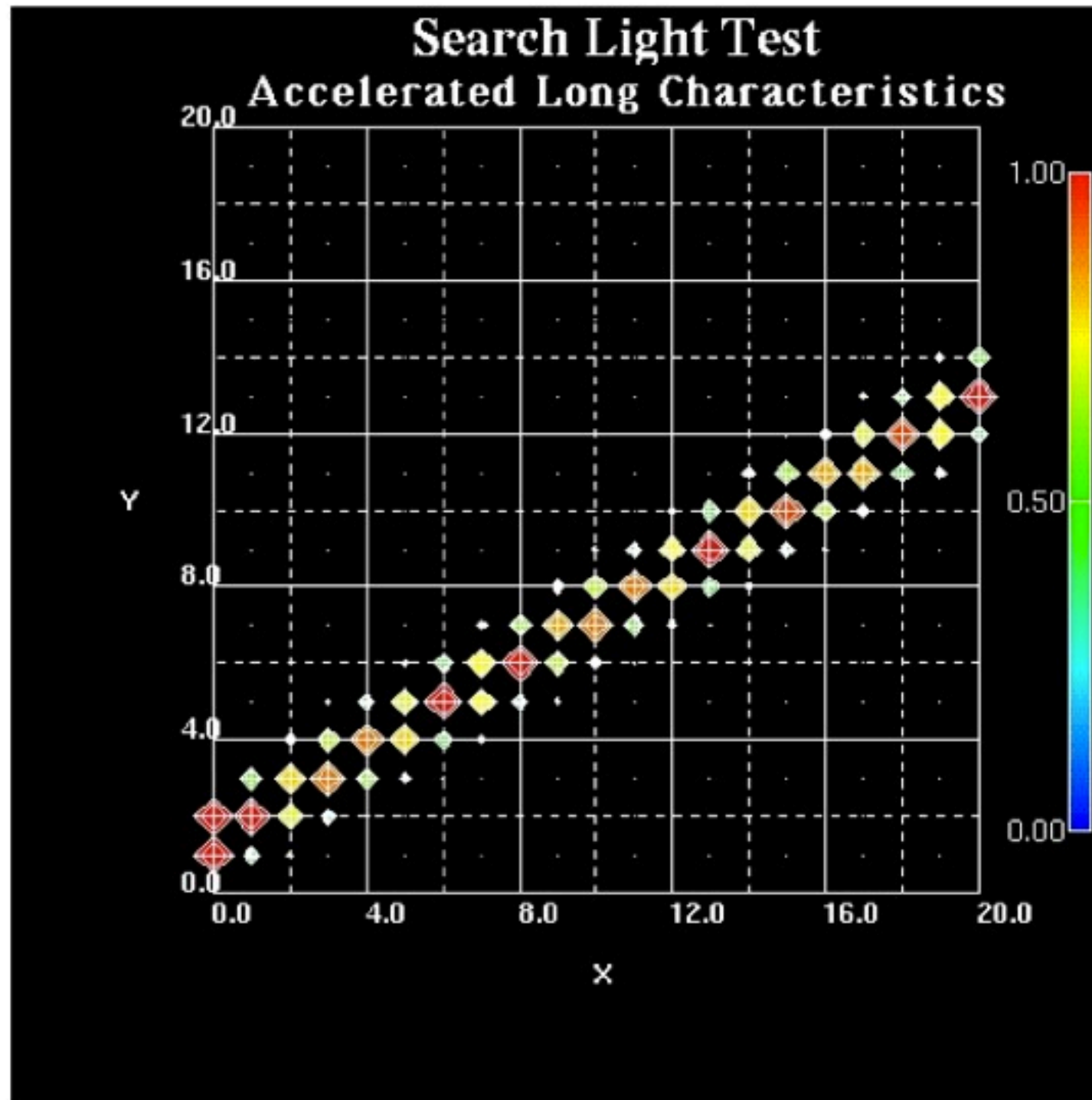


数値拡散が見られる。

梅村雅之氏のプレゼンファイルより

ART 法

by 中本



補間は流体格子上的への
mapping の際の 1 回だ
けなので、数値拡散が
小さい。

Long Char.法の結果に近い
結果が得られている。

GR輻射流体

- 保存則

連続の式 $\nabla_{\alpha}(\rho u^{\alpha}) = 0$

エネルギー・運動量保存則 $\nabla_{\beta}(T_{\text{fluid}}^{\alpha\beta} + R^{\alpha\beta}) = 0$

流体 $T_{\text{fluid}}^{\alpha\beta} = \rho h u^{\alpha} u^{\beta} + p g^{\alpha\beta}$

輻射 $R^{\alpha\beta} = \int F p^{\alpha} p^{\beta} dP$ (輻射テンソル)
 F : 分布関数

- 輻射テンソルをある特定のフレームで分解

$$R^{\alpha\beta} \Longrightarrow E, F^i, P^{ij}$$

$$R^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} R^{00} & R^{0i} \\ R^{i0} & R^{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F^i \\ F^i & P^{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F^1 & F^2 & F^3 \\ F^1 & P^{11} & P^{12} & P^{13} \\ F^2 & P^{21} & P^{22} & P^{23} \\ F^3 & P^{31} & P^{32} & P^{33} \end{pmatrix}$$

輻射力

エネルギー・運動量保存則 $\nabla_{\beta}(T_{\text{fluid}}^{\alpha\beta} + R^{\alpha\beta}) = 0$

- 流体と輻射の相互作用を輻射力ベクトル G^{α} を用いて表すと

流体の式

$$\nabla_{\beta} T_{\text{fluid}}^{\alpha\beta} = G^{\alpha}$$

輻射の式

$$\nabla_{\beta} R^{\alpha\beta} = -G^{\alpha}$$

- specific intensity を用いて書くと

$$R^{\alpha\beta} = \int \int I(\mathbf{n}, \nu) n^{\alpha} n^{\beta} d\nu d\Omega$$

χ_{ν} : opacity
 η_{ν} : emissivity

$$G^{\alpha} = \frac{1}{c} \int \int [\chi_{\nu} I(\mathbf{n}, \nu) - \eta_{\nu}] n^{\alpha} d\nu d\Omega$$

GR radiation MHD simulation

GR MHD simulation [by many authors]

**Koide + 1999, Hawley + 2000, Gammie + 2003,
Komissarov 2005, Duez+2005, Shibata & Sekiguchi 2005,
Nagataki 2009 etc.**

GR radiation MHD simulation

**Farris+ 2008 (FLD), Zanotti+2011(FLD),
Shibata+ 2012 (MI closure), Fragile+2012(FLD),
Sadowski+ 2012 (MI closure) etc.**

$$R^{\alpha\beta} = \int F p^{\alpha} p^{\beta} dP$$

(輻射テンソル)
 F : 分布関数

closure relation

(輻射テンソル) $R^{\alpha\beta} = \int F p^\alpha p^\beta dP$

- 輻射テンソルをある特定のフレームで分解 F : 分布関数

$$R^{\alpha\beta} \implies E, F^i, P^{ij}$$

$$R^{(\alpha)(\beta)} = \begin{pmatrix} E & F^1 & F^2 & F^3 \\ F^1 & P^{11} & P^{12} & P^{13} \\ F^2 & P^{21} & P^{22} & P^{23} \\ F^3 & P^{31} & P^{32} & P^{33} \end{pmatrix}$$

球面調和関数 $l = 0$ $l = 1$ $l > 2$

closure relation FLD M I closure
(Levermore 1984, etc.)

「 E, F^i を時間発展させて、 P^{ij} を closure relation より決定」
 $\Leftrightarrow$ 「 $l = 0, 1$ の成分を時間発展させて、高次成分 ($l > 2$) は、closure relation より決定」

Mixed-frame-approach

大局的な運動

👉 大局的な座標系で記述

物質と輻射場の相互作用

👉 局所正規直交系で記述

$R^{\alpha\beta}$

G^{α}



テトラドで変換

$$R^{\alpha\beta} = e_{\hat{\mu}}^{\alpha} e_{\hat{\nu}}^{\beta} R^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$$

$$G^{\alpha} = e_{\hat{\mu}}^{\alpha} G^{\hat{\mu}}$$

$R^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$

$G^{\hat{\mu}}$

- 発展方程式などは省略

ref.

D. Miharas, 1980, ApJ, 237, 574 (はじめて提案した論文)

M. G. Park, 2006, MNRAS, 367, 1739 (Schwarzschild 時空)

RT, 2007, MNRAS, 382, 1041 (Kerr 時空, Park 2006をKerrにしたもの)

RT, 2008, MNRAS, 383, 1155 (Kerr 時空, Horizon-penetrating coordinate)

放射・吸収・放射

- 観測されているようなブラックホール天体では、
(相互作用のスケール) $\ll$ (時空湾曲の曲率半径)

- テトラドによる変換 $G^\alpha = e^\alpha_{\hat{\beta}} G^{\hat{\beta}}$
曲がった時空 $\Leftrightarrow$ 局所ミンコフスキー時空

- 相互作用 Hamiltonian H_{int}

例：電子・電磁場相互作用 (non-relativistic) [Heitler 1954]

$$H_{\text{int}} = - \sum_k \left(\frac{e_k}{\mu_k} \mathbf{p}_k \cdot \mathbf{A} - \frac{e_k^2}{2\mu_k} A^2 \right) + \sum_{i>k} \frac{e_i e_k}{r_{ik}}$$

電子運動量とベクトル・ポテンシャルの相互作用項

(ベクトル・ポテンシャル)²の項

吸収

放射

散乱

既存の輻射輸送数値計算手法

①非相対論的輻射輸送

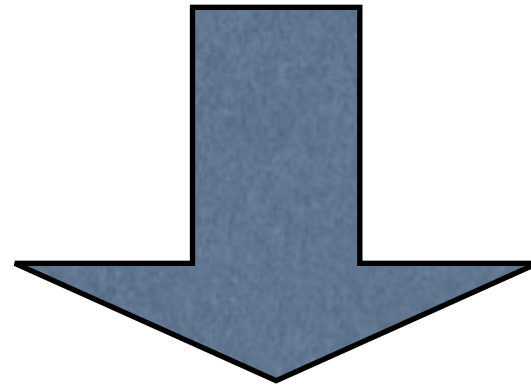
(Tree, SC, ART, LC, MC等)

- ＊ 光子の放射・吸収・散乱を完全に解ける
- ＊ 輻射流体シミュレーション
- ＊ 大規模並列計算

②GR輻射輸送

(GR ray-tracing計算)

- ＊ 特殊・一般相対論効果を正確に考慮
- ＊ 6次元位相空間で積分
- ＊ 散乱が苦手



融合・発展

一般相対論的輻射流体の新しい数値計算手法

- ＊ 6次元位相空間でGR光子ボルツマン方程式を解くことによる計算
- ＊ 放射・吸収・散乱と一般・特殊相対論効果を完全に解く

GR化する際の困難

困難A) 相対論的流体では流体速度が光速に近い状況が起こるので、光子の伝搬時間を無視できない。

[過去のLC法などでは光速を無限大として扱う]

困難B) 光子の情報は厳密に光速で伝わるように解く必要がある。 [そうでないと、情報伝搬の順序が正しくなく、計算結果が非物理的になる]

困難C) 時空の歪みのために光線が湾曲する。

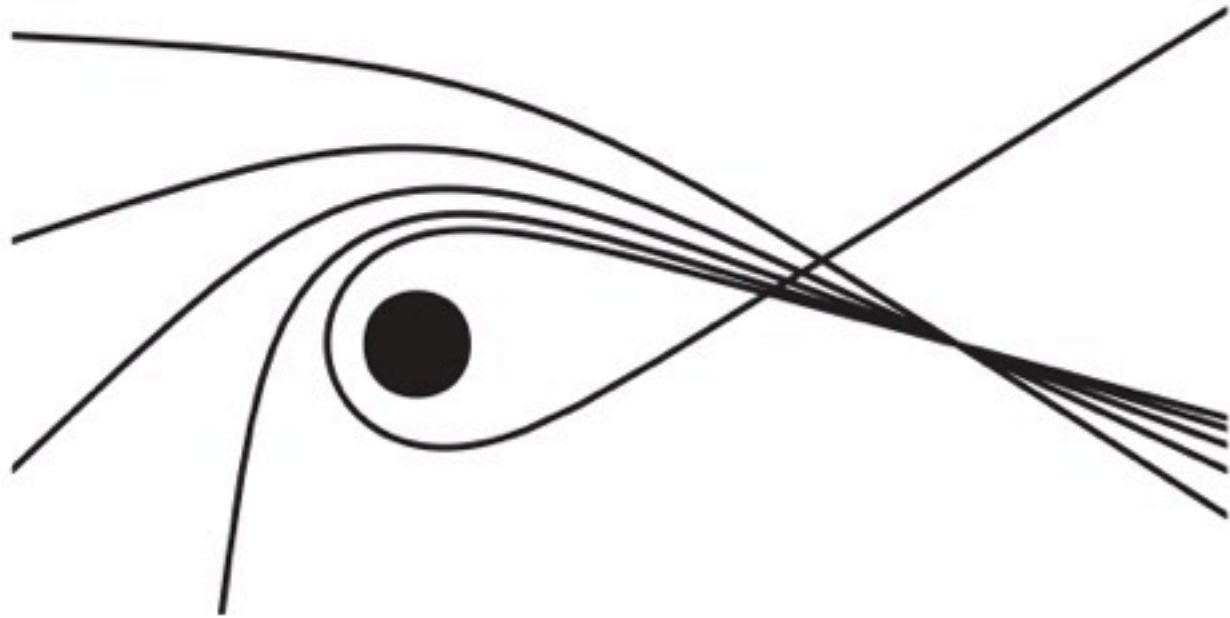
[過去のLC法などでは直線光線]

困難D) 光子・物質間の相互作用計算を行う時空の各点でのorthonormal frameごとにエネルギー・運動量が変化する。

BH周りの光子軌道

scattering orbit

(infinity $\Leftrightarrow$ infinity)



plunging orbit

(BH $\Leftrightarrow$ infinity)



near orbit

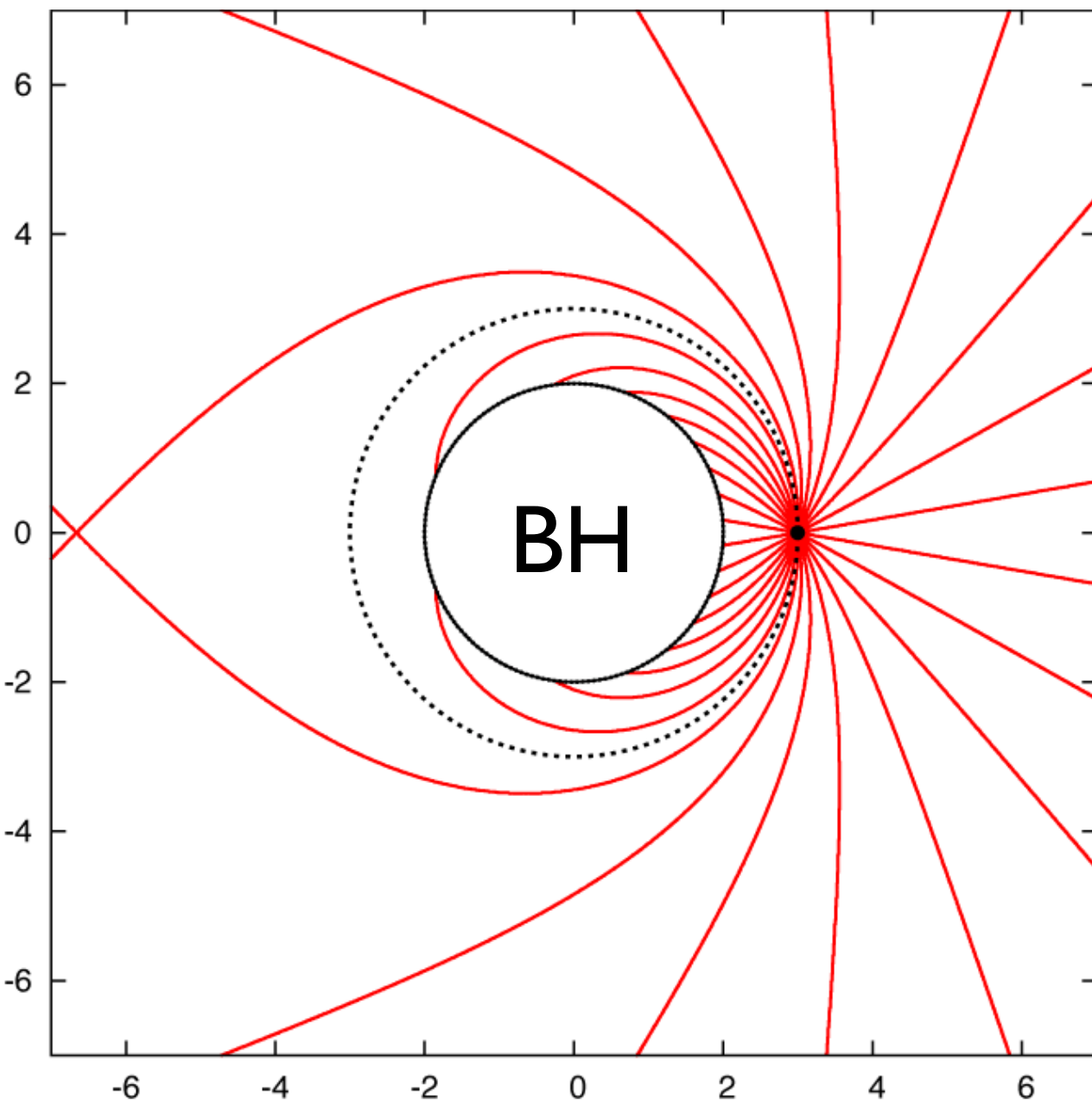
(BH $\Leftrightarrow$ BH)



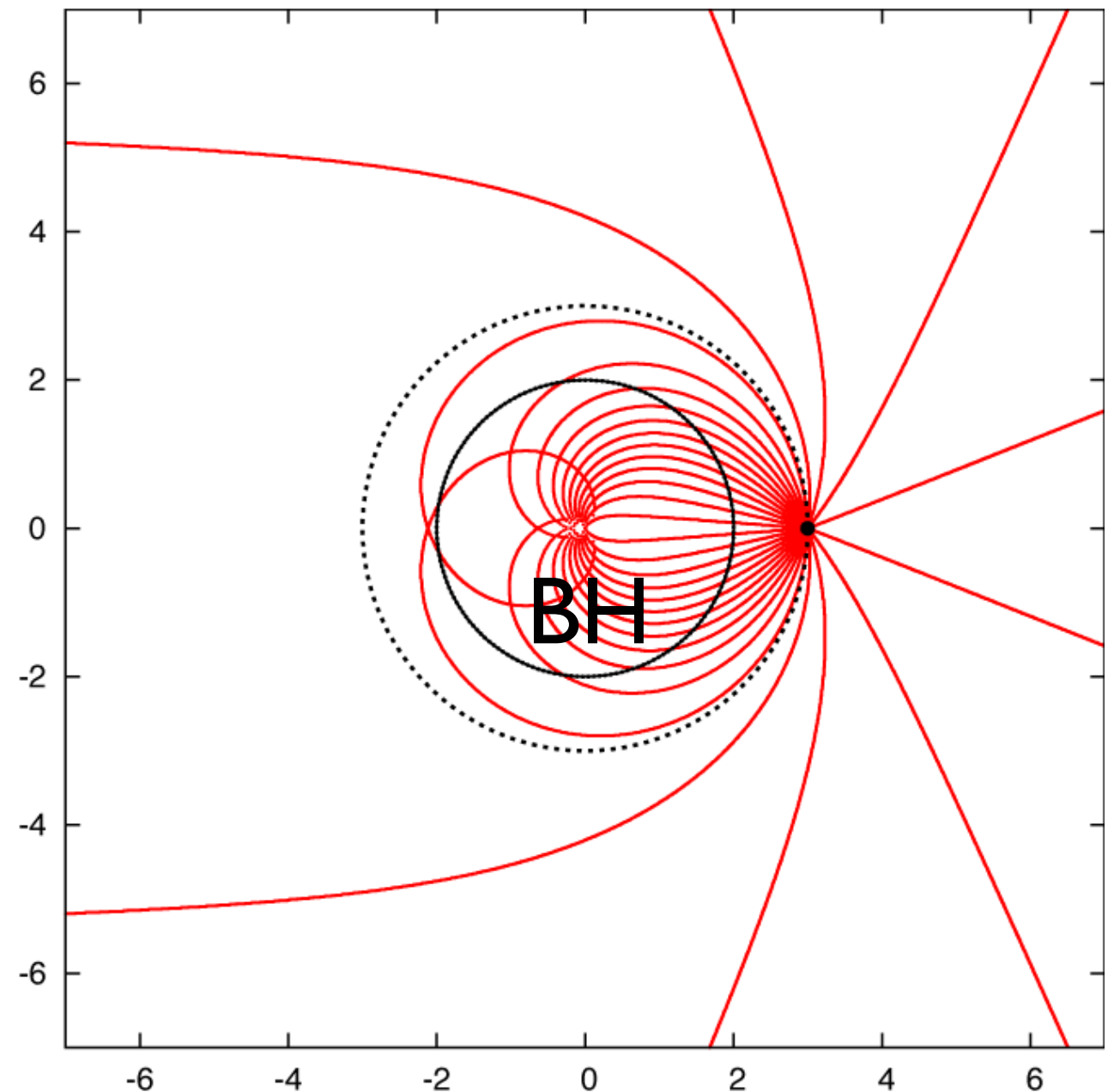
BH周りの光子軌道

Ray-tracingでの計算

Boyer-Lindquist coordinate

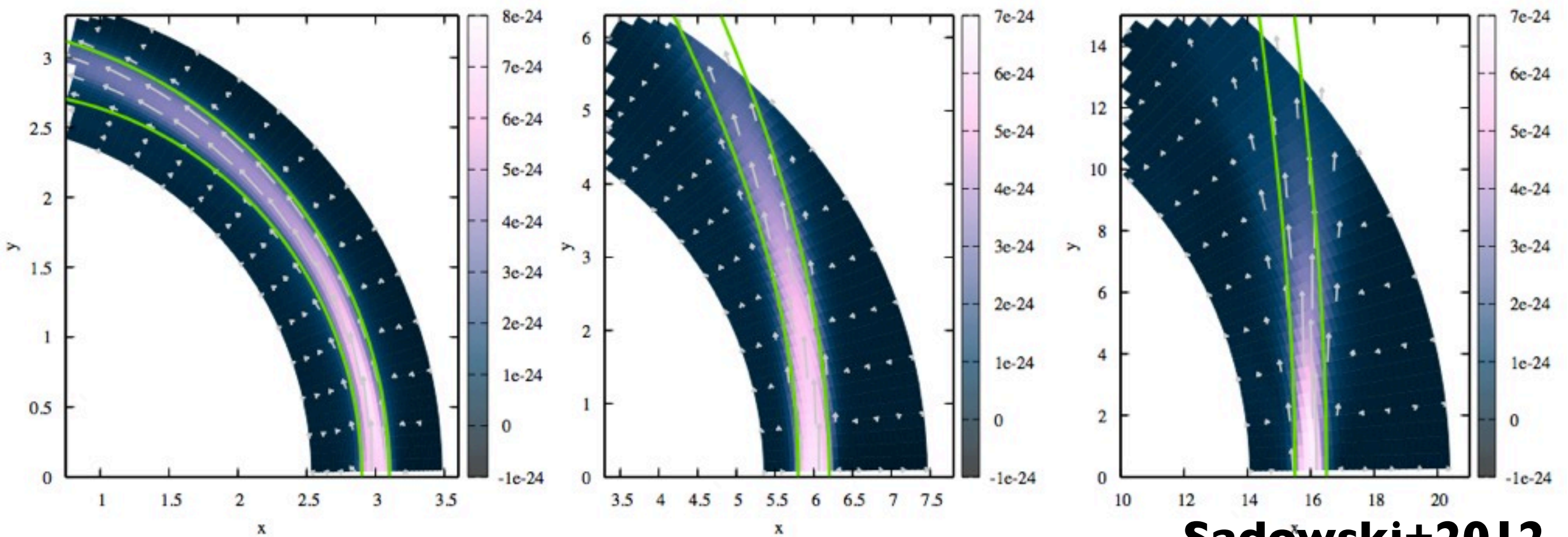


Kerr-Schild coordinate



$$a_* = 0.0$$

GR radiation HD MI closureによる計算



Sadowski+2012

serchlight-beam test

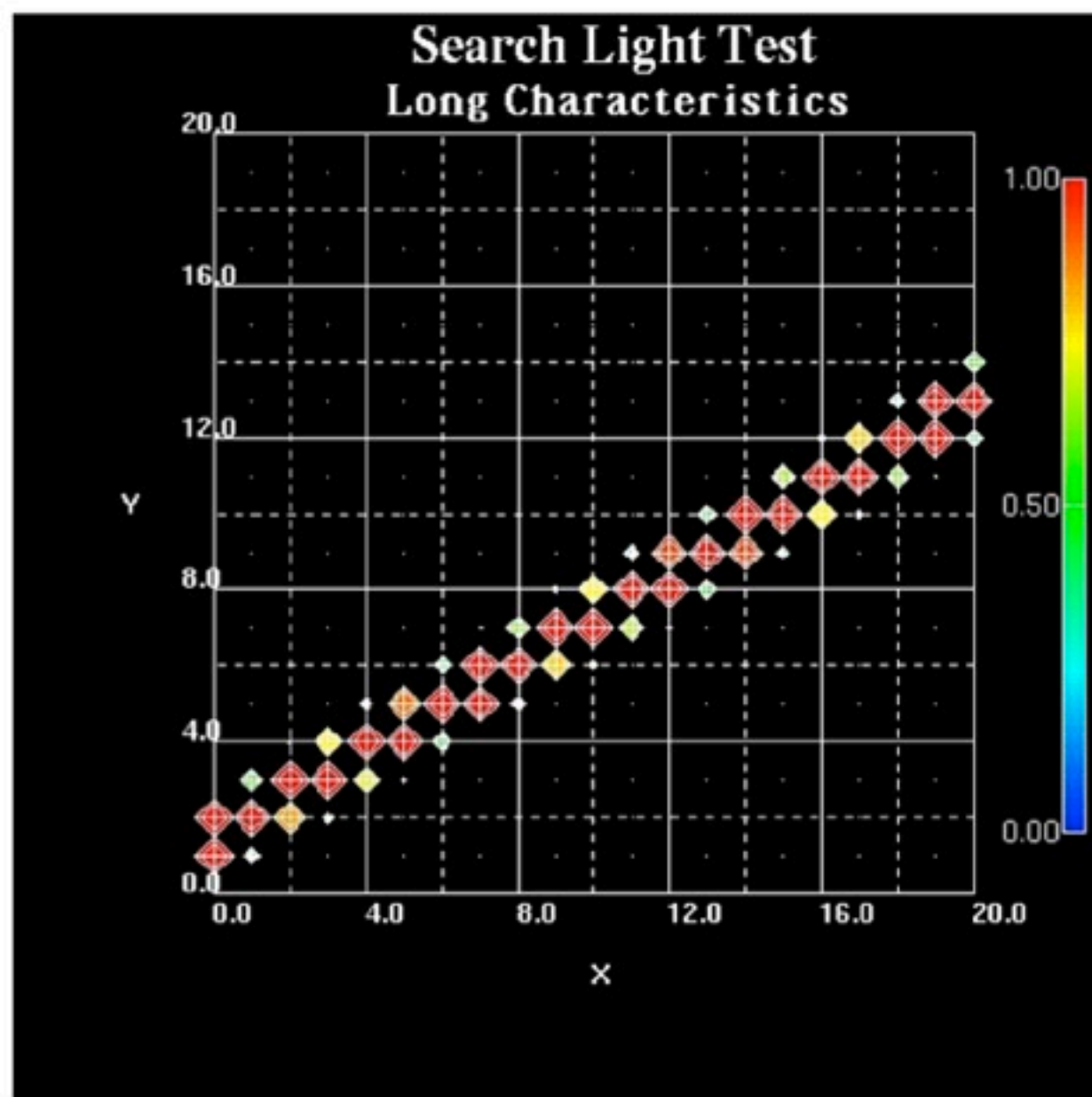
非相対論的計算

梅村雅之氏の
プレゼンファイルより

テスト結果：計算精度

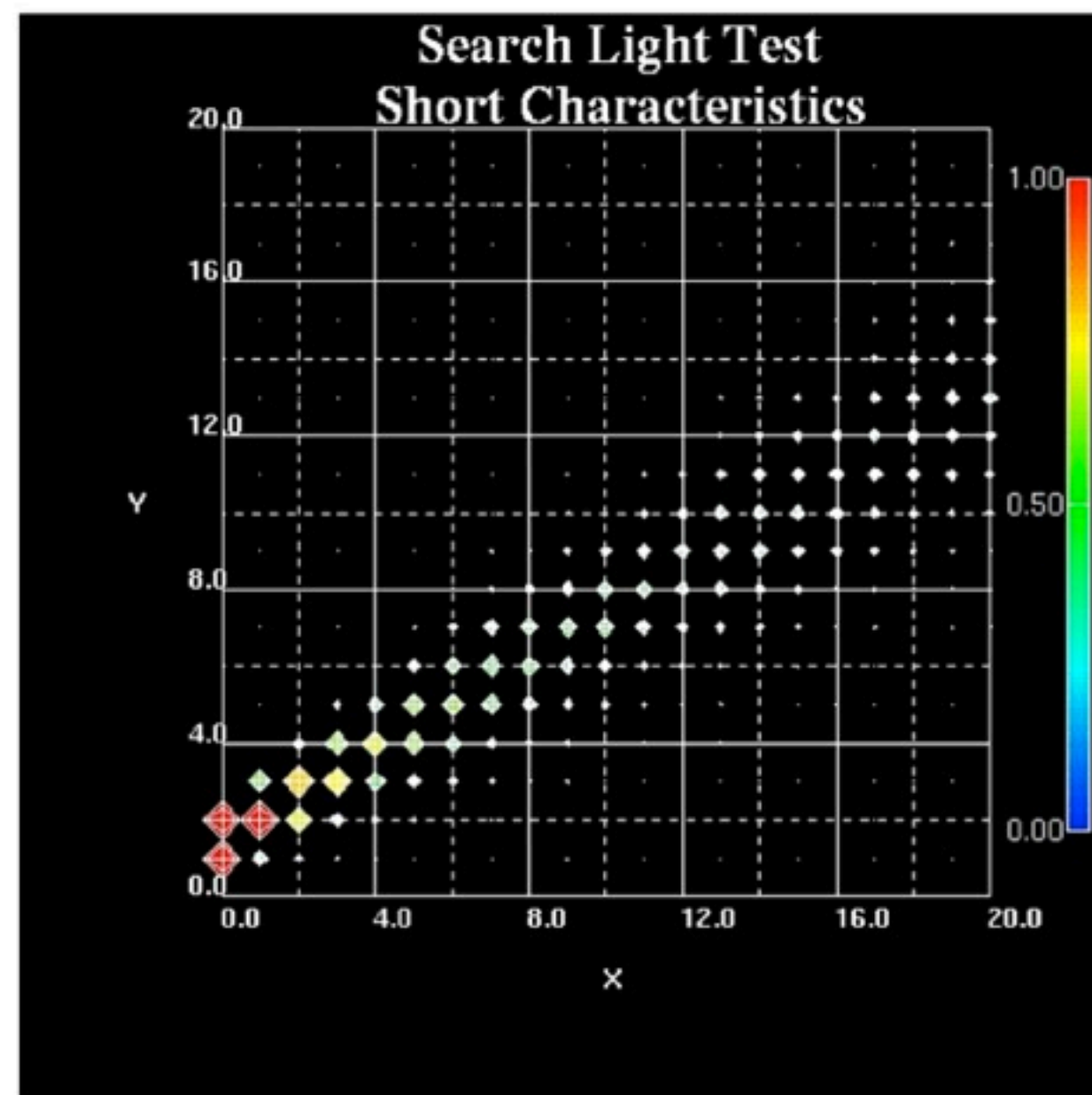
by 中本

Long Char. 法



正確な値が得られている.

Short Char. 法

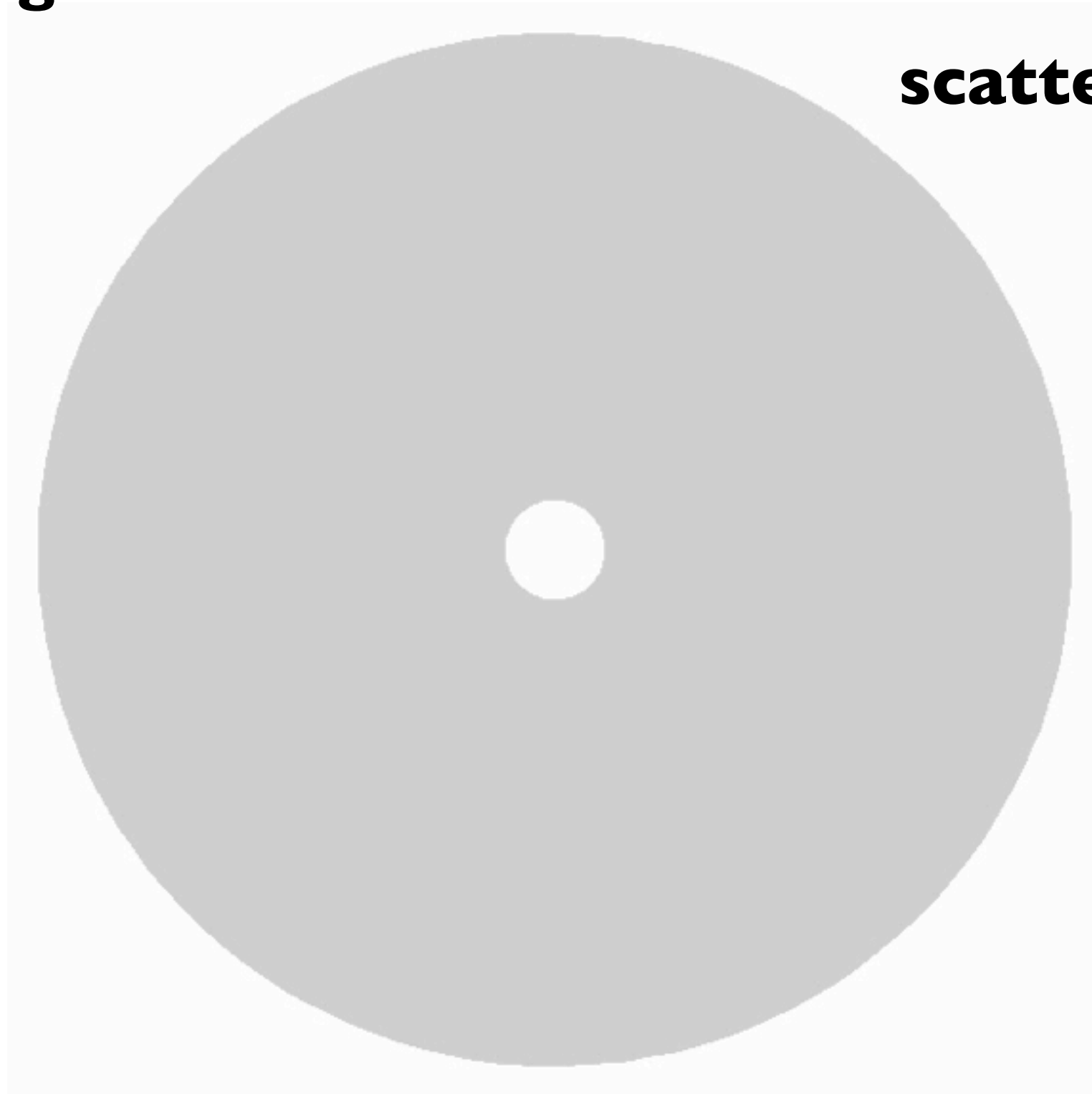


数値拡散が見られる.

GR serchlight-beam test

BH時空でのGR-ART法による計算

light bendingなどのテスト

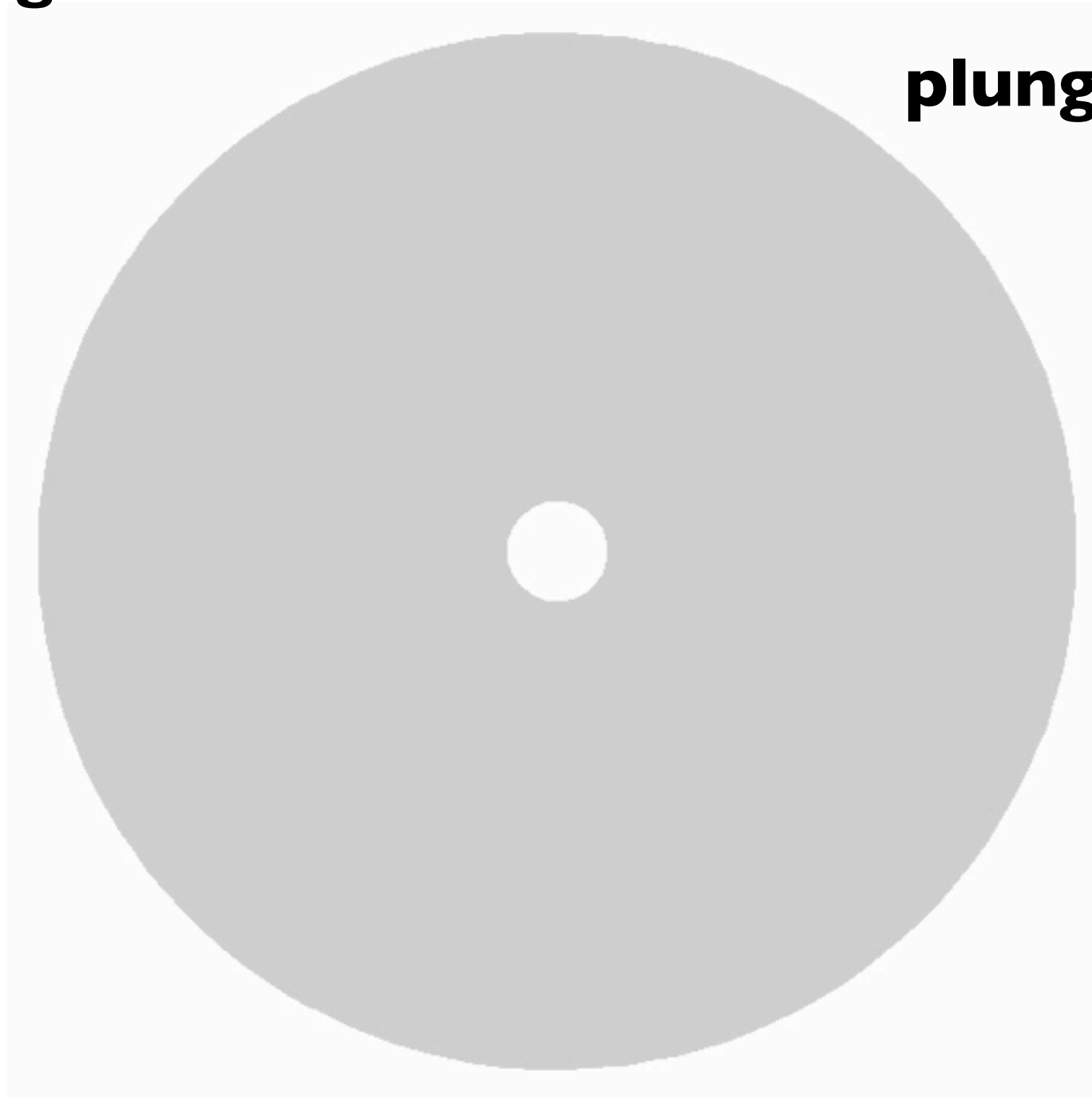


scattering orbit

GR serchlight-beam test

BH時空でのGR-ART法による計算

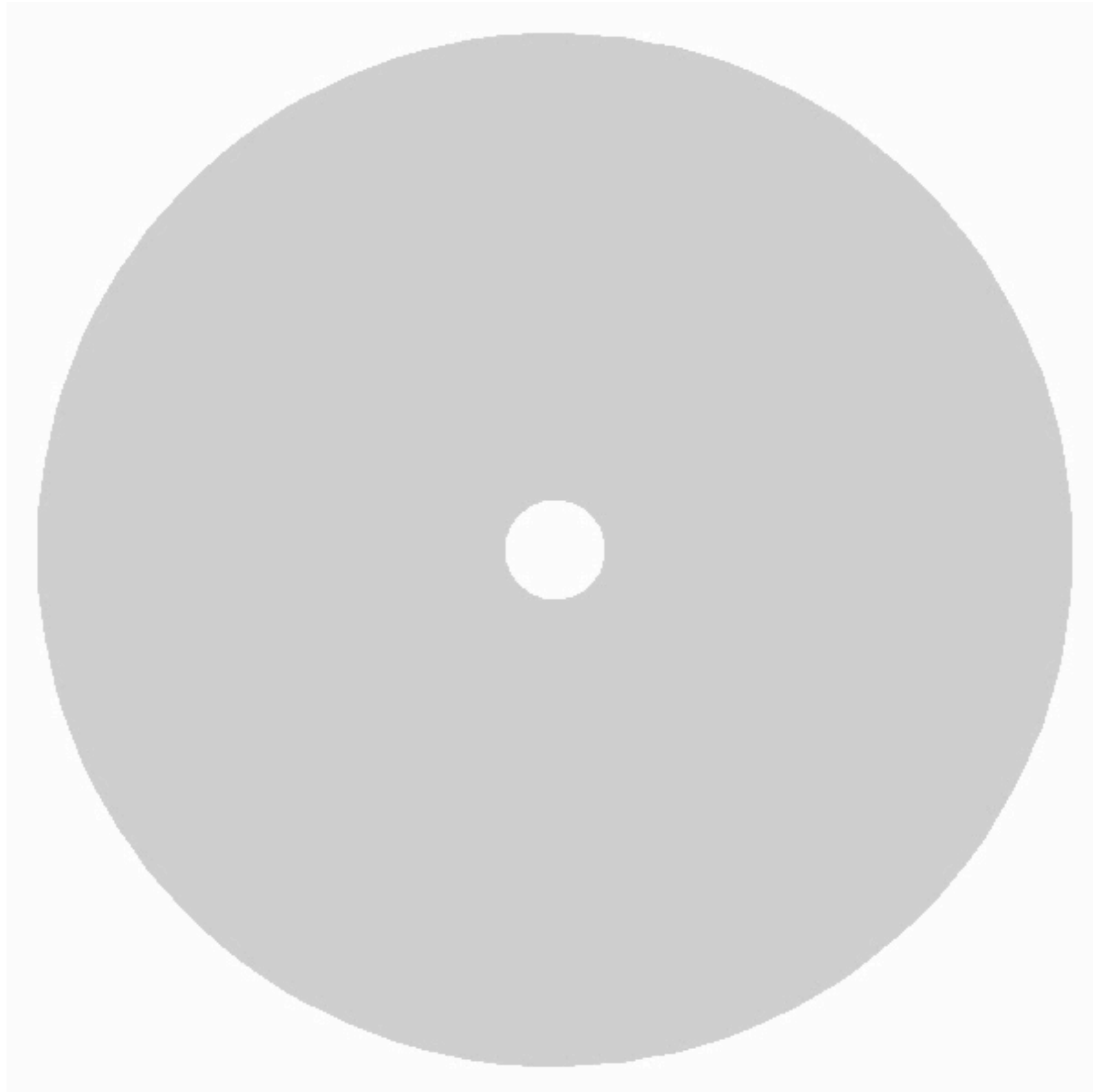
light bendingなどのテスト



plunging orbit

radiation collision test

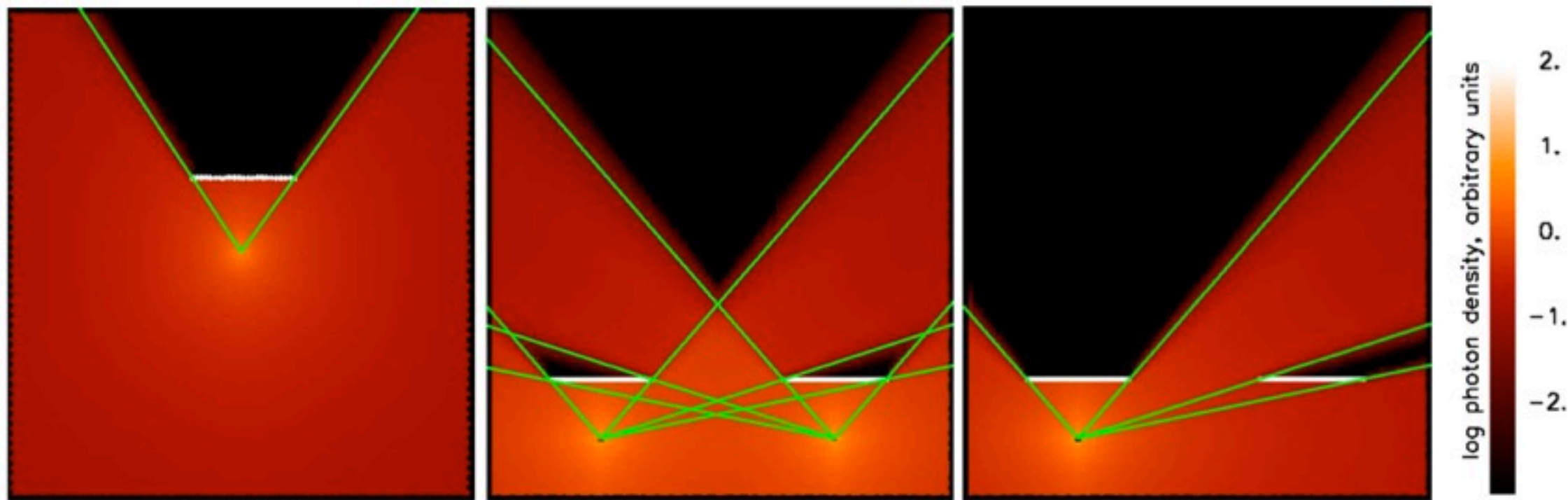
BH時空でのGR-ART法による計算



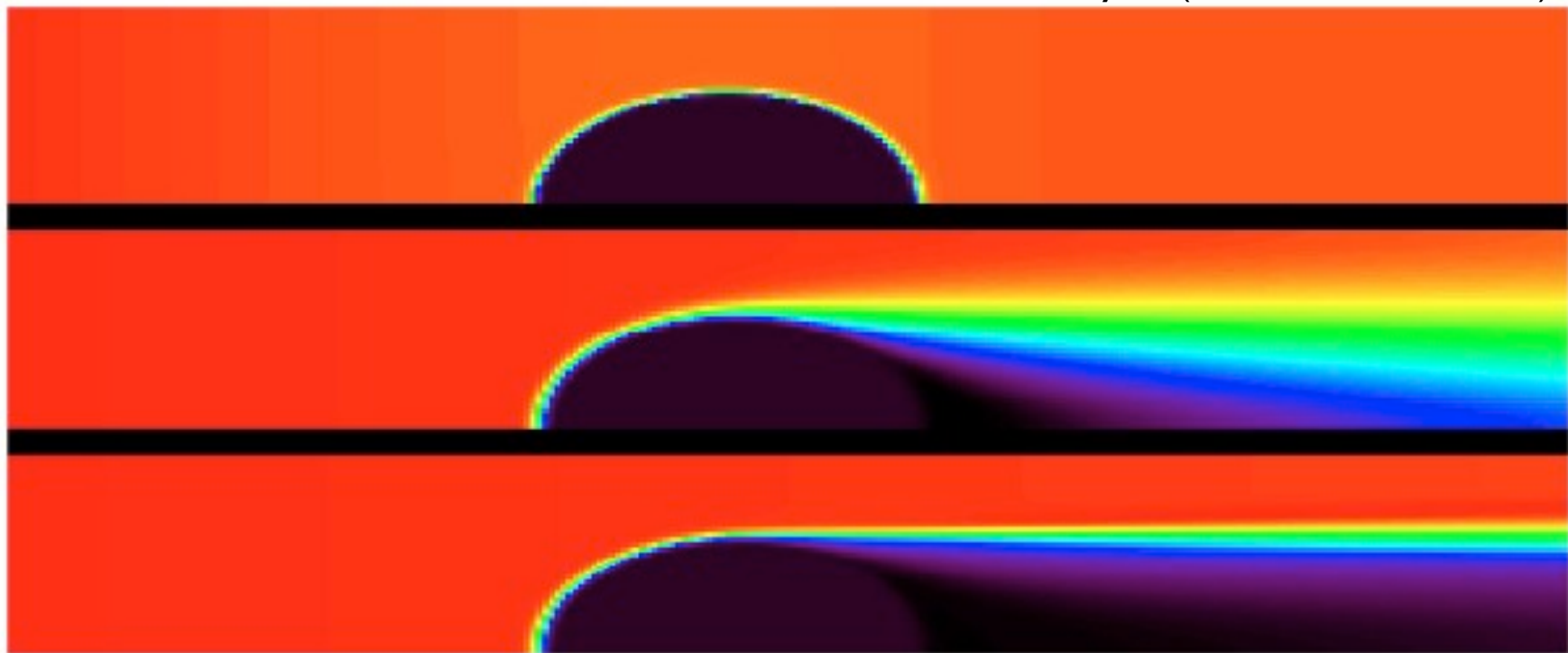
shadow test

非相對論的計算

Petkova & Springel (2011, MNRAS, 415, 3731)



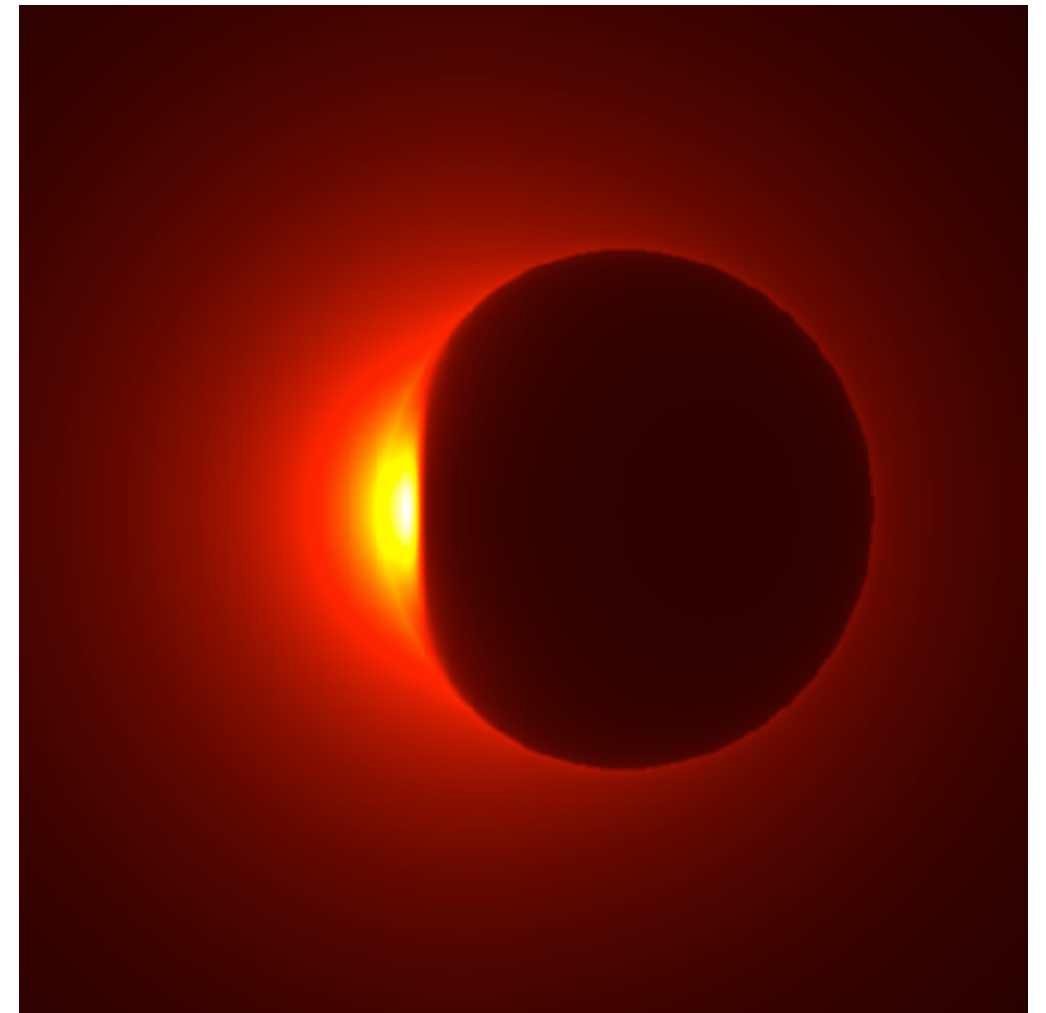
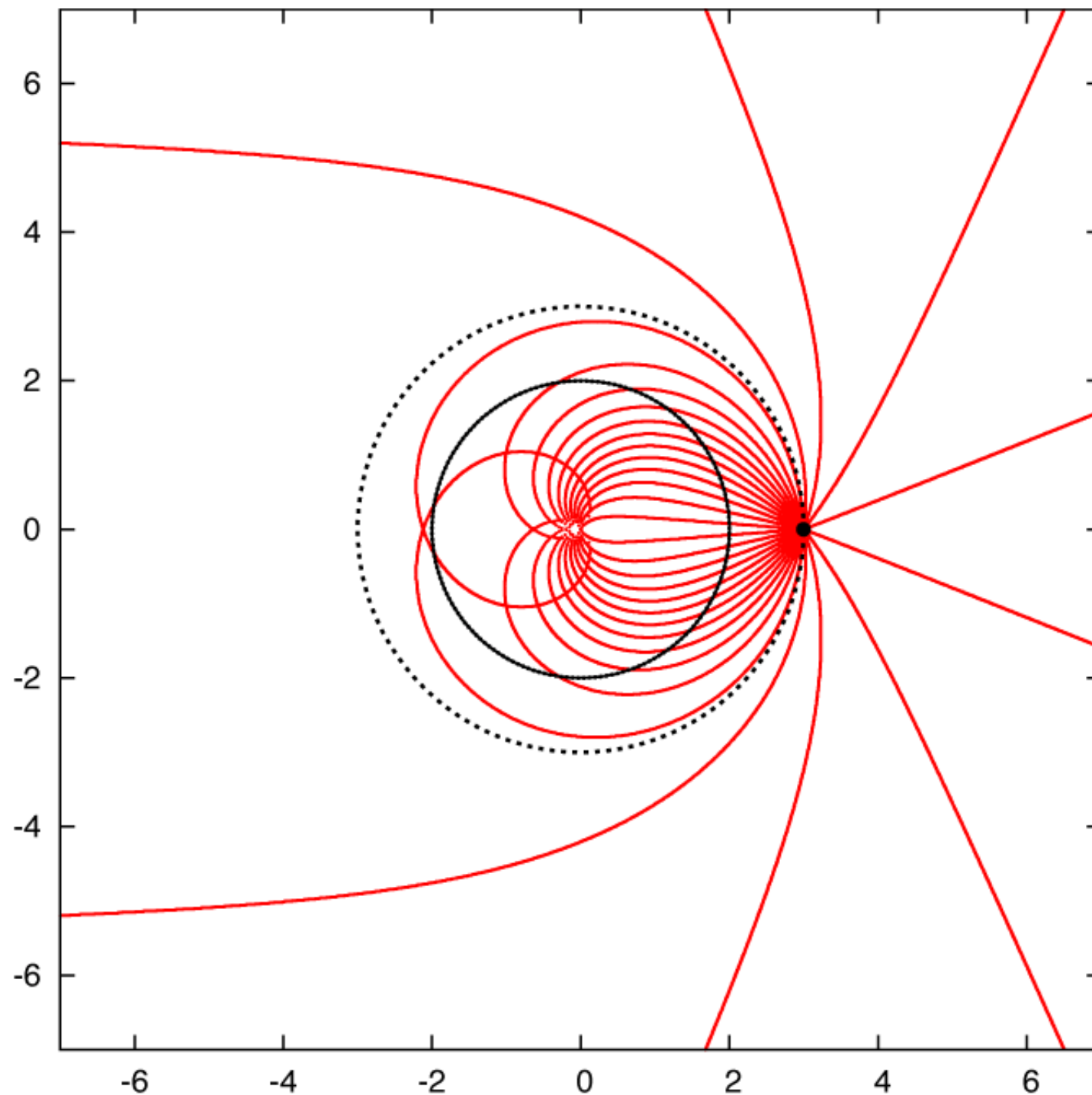
Gonzalez, Audit & Huynh (2007, A&A, 464, 429)



BH shadow formation test

空間的に適当に光源を置き、シミュレーション

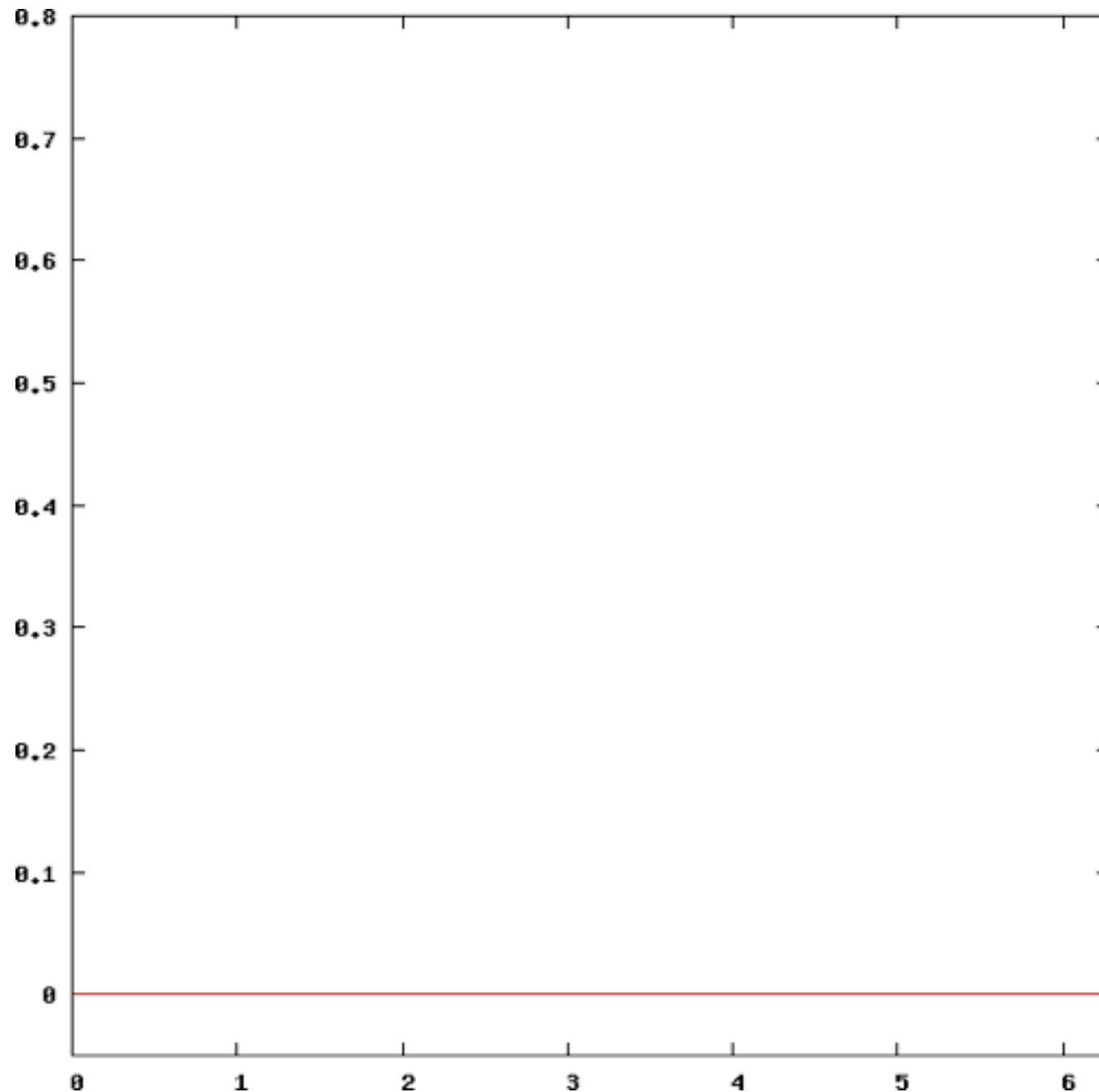
→ 光子の伝搬により、各点で徐々にshadowが形成される



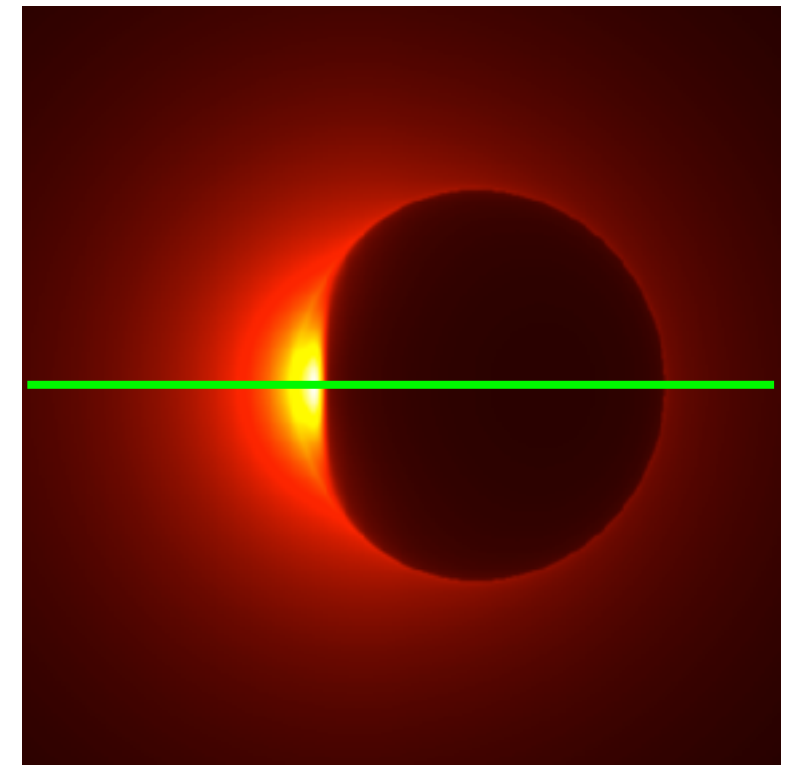
BH shadow formation test

相対論的 ray-tracingによる計算

不変輝度



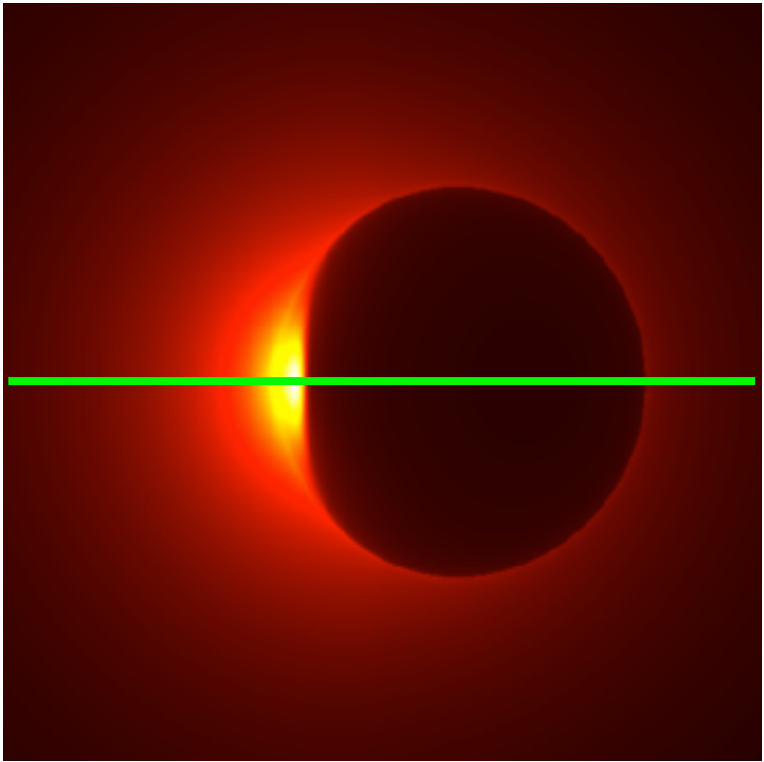
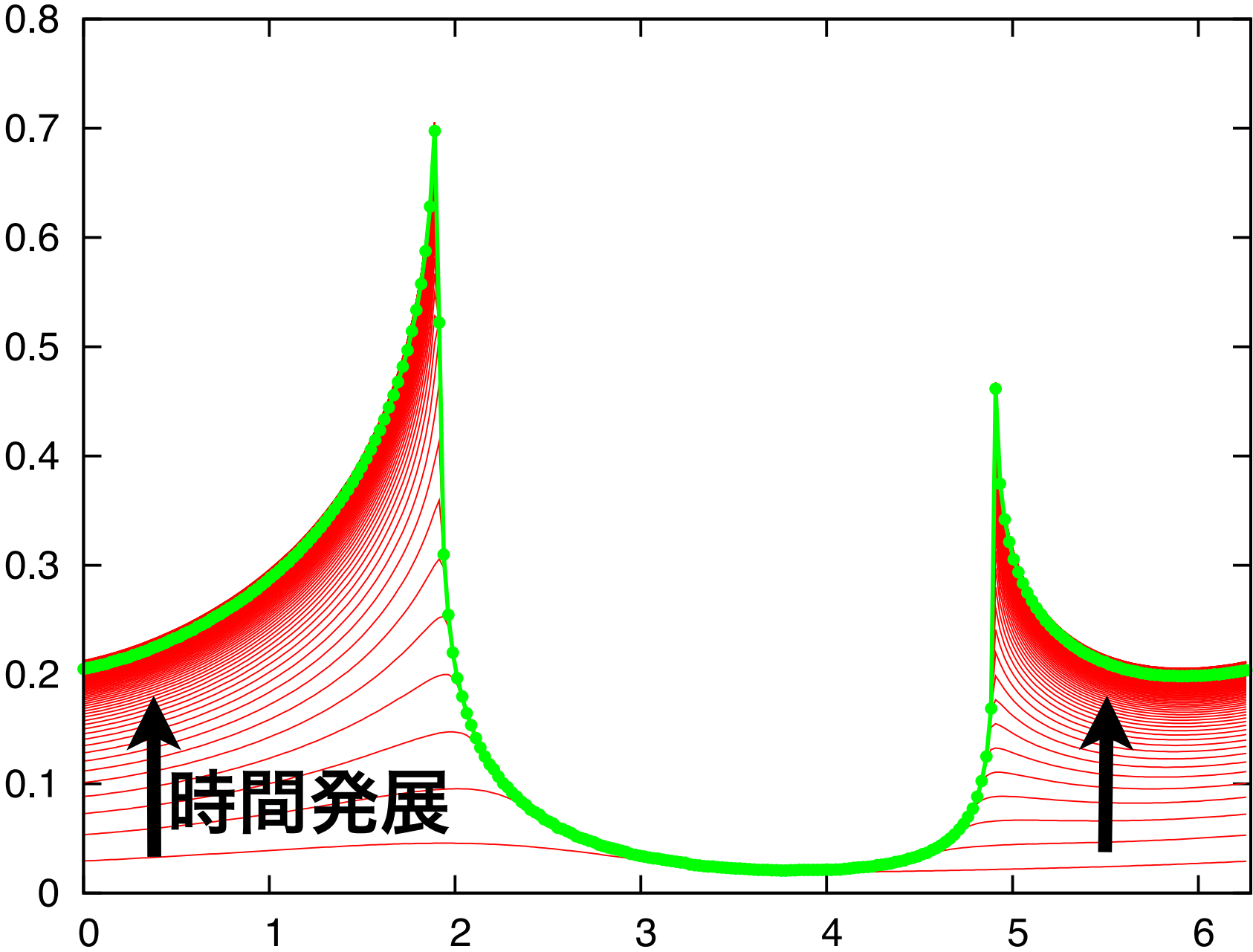
gravitational redshift
+ light bending
+ frame-dragging



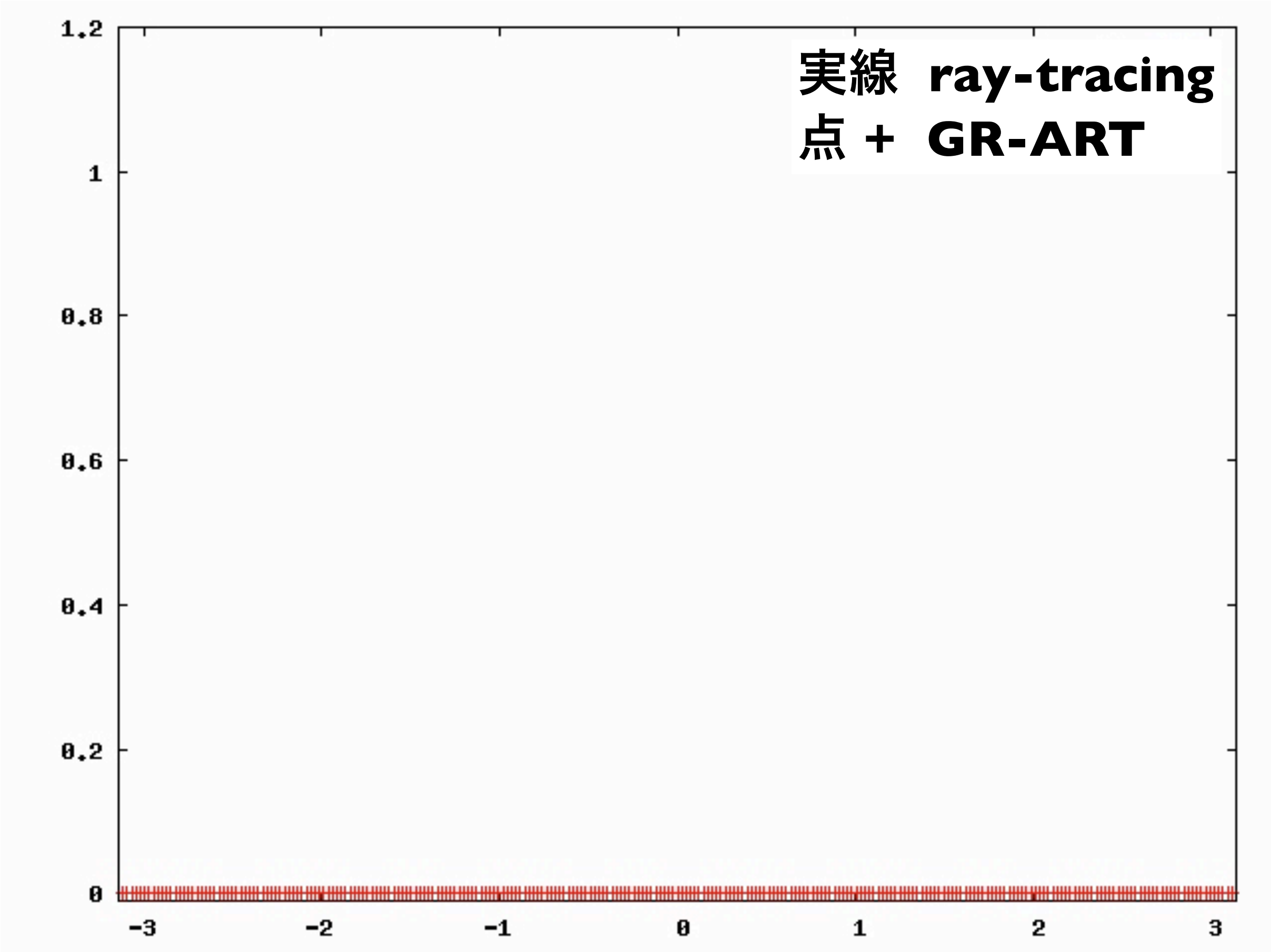
方位角

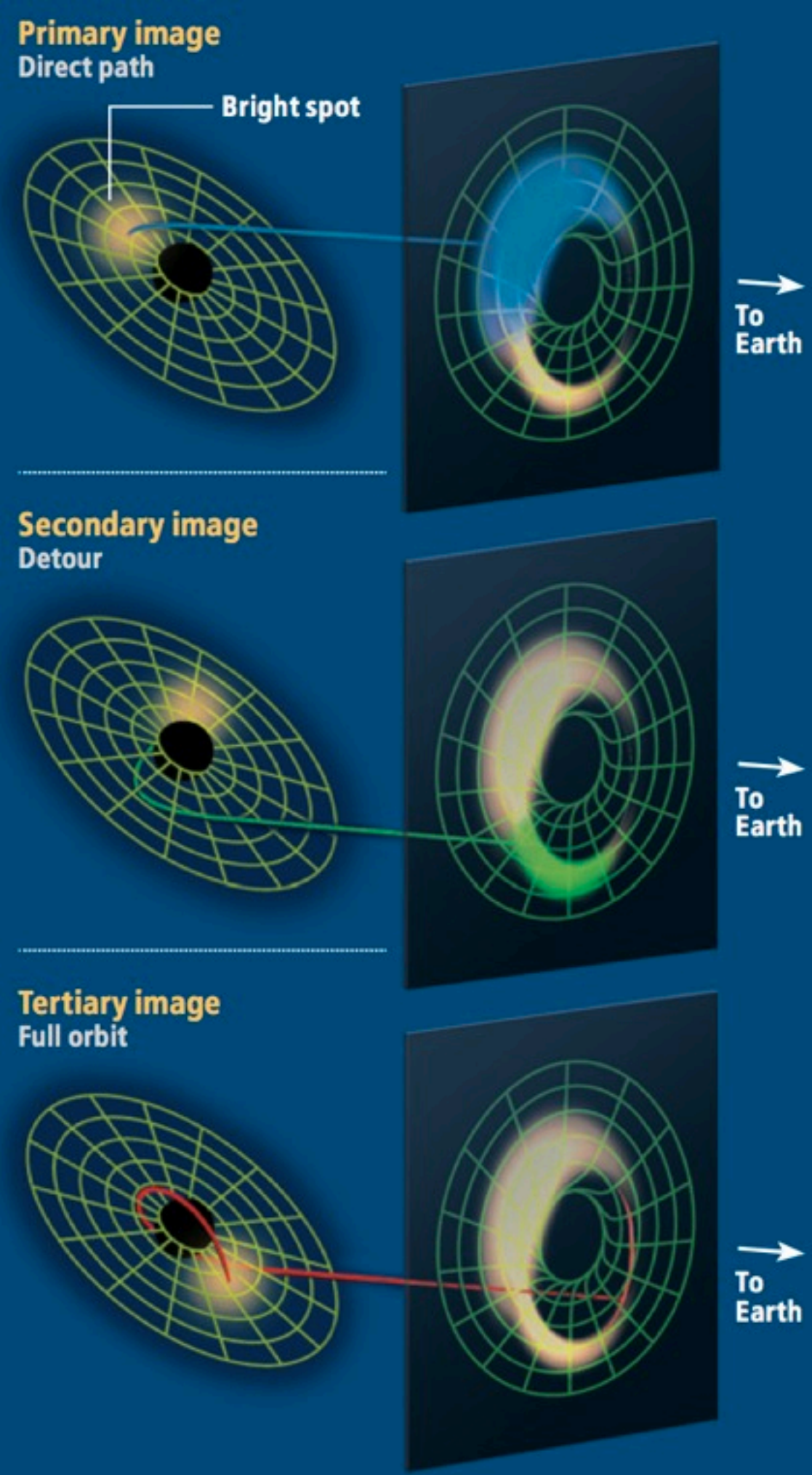
相対論的 ray-tracingによる計算

不変輝度



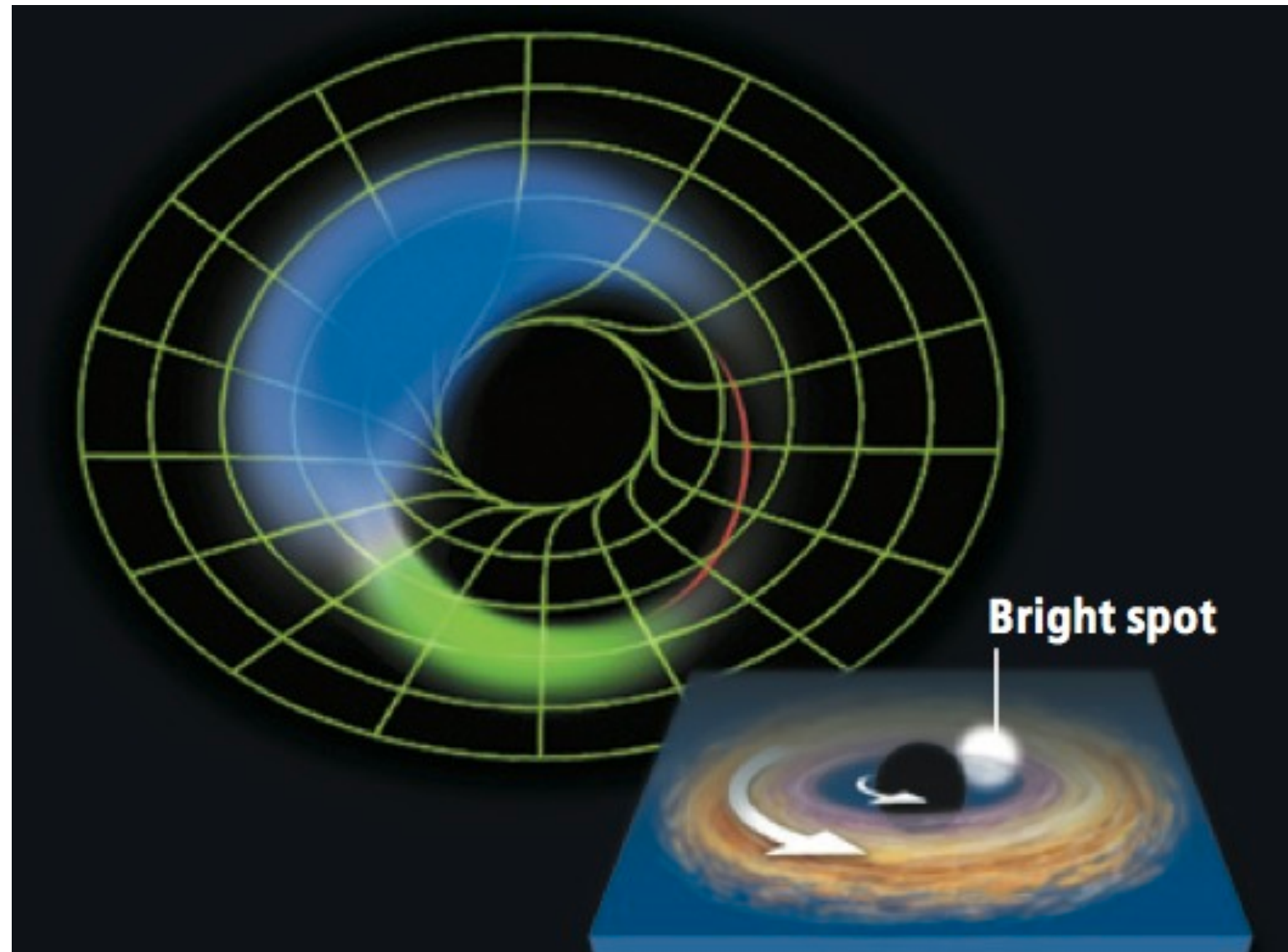
BH shadow formation test

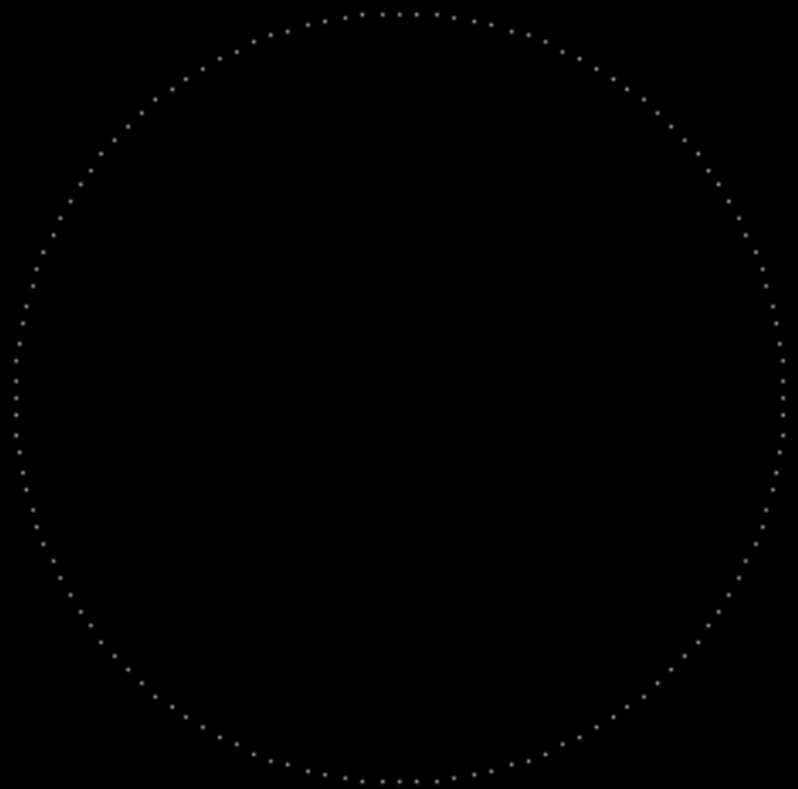




hot spot

Broderick & Loeb (2009)





GR radiation field テスト問題

1. in optically thick limit

(a) shock tube 問題 [SR Riemann problem]

2. in optically thin limit

(a) searchlight beam test

(b) radiation collision test

(c) BH shadow formation test

(d) wave-front propagation test

Ray-tracingと同じ結果を
再現できた。

過去のMI closure による
計算では(a)のみ
(Sadowski+2012)

3. intermediate regime (optically thin and thick)

(a) photon trapping

4. energy spectrum

(a) thermalization

(b) non-thermalization (e.g. inv. Compton)