

輻射磁気
smoothed particle
hydrodynamics法
の手法とテスト結果

塚本裕介

名古屋大学大学院
理学研究科素粒子宇宙物理学専攻
理論宇宙物理学研究室(Ta研)
学術振興会特別研究員(PD)

アウトライン

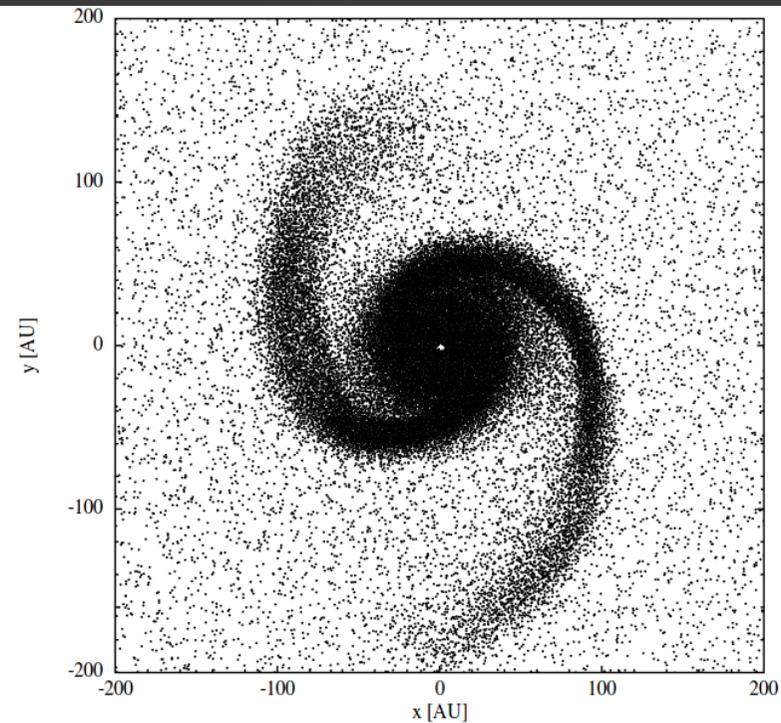
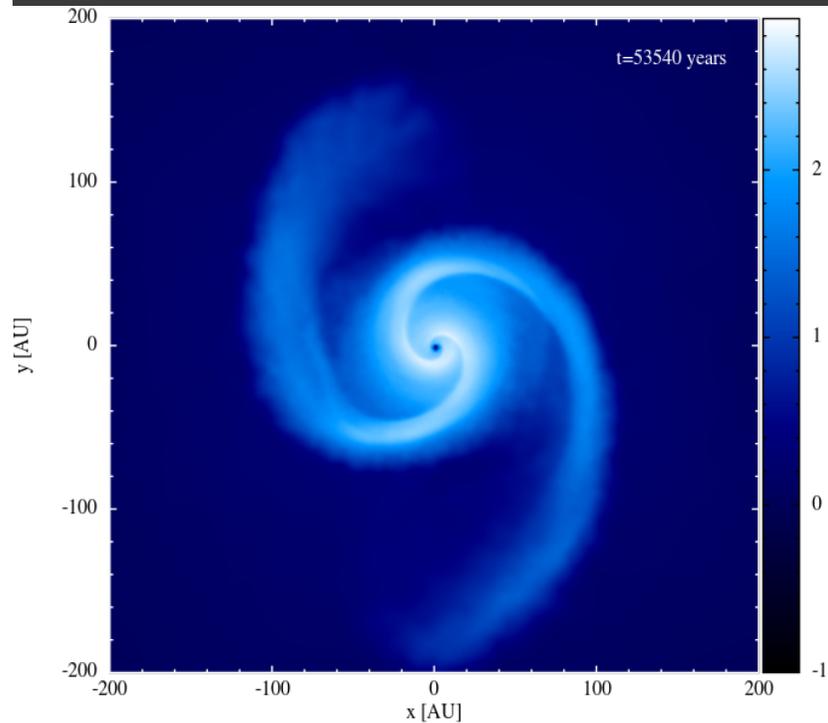
- ◎ Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)法とは
- ◎ 輻射磁気流体力学の方程式系
- ◎ FLD-SPHのアルゴリズムとテスト結果
- ◎ GSPMHDのアルゴリズムとテスト結果
- ◎ まとめ

アウトライン

- ◎ Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)法とは
- ◎ 輻射磁気流体力学の方程式系
- ◎ FLD-SPHのアルゴリズムとテスト結果
- ◎ GSPMHDのアルゴリズムとテスト結果
- ◎ まとめ

Smoothed particle hydrodynamics (SPH)法とは

- ◎ 流体を広がりをもつ粒子で表現
- ◎ 流体の運動とともに座標点が移動する（ラグランジュ的方法）
- ◎ 高密度領域で高解像度
- ◎ 大きいダイナミックレンジに自然に対応



SPHにおける物理量の表現

- 物理量を広がり(h)を持つ「カーネル関数」の畳み込みで表現

$$\langle f \rangle(\mathbf{x}) = \int W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) f(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

$$\langle \nabla f \rangle(\mathbf{x}) = \int \{ \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \} f(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

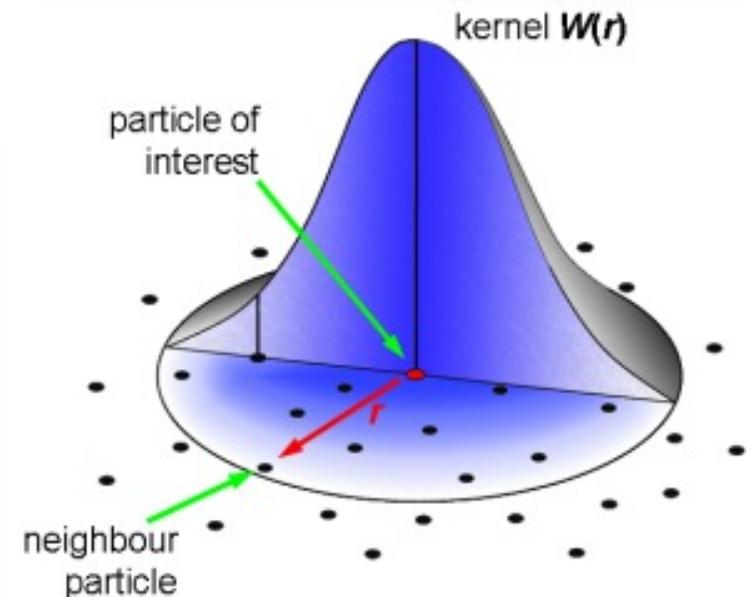
- 球対称、非負なカーネルの場合、空間2次精度
- 積分はサンプリング近似で評価

$$d\mathbf{x}_i = \frac{m_i}{\rho_i} \quad \langle f \rangle(\mathbf{x}) \simeq \sum_j W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j; h) f_j \frac{m_j}{\rho_j}$$

- カーネルはスプラインがよく使われる

$$W(r, h) = \frac{1}{\pi h^3} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{3}{4}q^3, & 0 \leq q < 1, \\ \frac{1}{4}(2 - q)^3, & 1 \leq q < 2, \\ 0, & q \geq 2, \end{cases}$$

$$q = \frac{r}{h}$$



アウトライン

- ◎ Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)法とは
- ◎ 輻射磁気流体力学の方程式系
- ◎ FLD-SPHのアルゴリズムとテスト結果
- ◎ GSPMHDのアルゴリズムとテスト結果
- ◎ まとめ

輻射磁気流体力学の方程式系

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\partial^\mu v^\mu \quad \boxed{} \quad \text{RHD} \quad \text{連続の式}$$

$$\rho \frac{Dv^\mu}{Dt} = \partial^\nu T^{\mu\nu} + \frac{\chi_F \rho}{c} F^\mu \quad \boxed{} \quad \text{MHD} \quad \text{運動方程式}$$

$$\rho \frac{De}{Dt} = \partial^\nu T^{\mu\nu} v^\nu - 4\pi\kappa_p \rho B + c\kappa_E \rho^2 \xi \quad \text{輻射場のエネルギー方程式}$$

$$\rho \frac{D\xi}{Dt} = \partial^\nu F^\nu - \partial^\mu v^\nu \mathbf{P}_{\text{rad}}^{\mu\nu} - 4\pi\kappa_p \rho B + c\kappa_E \rho^2 \xi \quad \text{物質場のエネルギー方程式}$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{B^\mu}{\rho} \right) = \frac{B^\nu}{\rho} \partial^\nu v^\mu \quad \text{誘導方程式}$$

$$T^{\mu\nu} = - \left(p + \frac{B^2}{2} \right) \delta^{\mu\nu} + B^\mu B^\nu$$

$$e = \frac{1}{2} v^2 + u + \frac{B^2}{2\rho}$$

$u = \frac{p}{(\gamma-1)\rho}$: specific internal energy
 ξ : specific radiative energy

アウトライン

- ◎ Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)法とは
- ◎ 輻射磁気流体力学の方程式系
- ◎ **FLD-SPHのアルゴリズムとテスト結果**
- ◎ GSPMHDのアルゴリズムとテスト結果
- ◎ まとめ

Flux limited Diffusion-SPHの方程式系

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_{neigh}} m_j W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|, h).$$

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = - \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \nabla W(r_{ij}, h_{ij}) - \frac{\lambda_i}{\rho_i} \sum_{j=1}^N m_j \xi_j \nabla W(r_{ij}, h_{ij}),$$

輻射輸送

輻射圧
物質場との相互作用

$$\frac{D\xi_i}{Dt} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} c \left[\frac{4 \frac{\lambda_i}{\kappa_i \rho_i} \frac{\lambda_j}{\kappa_j \rho_j}}{\left(\frac{\lambda_i}{\kappa_i \rho_i} + \frac{\lambda_j}{\kappa_j \rho_j} \right)} \right] (\rho_i \xi_i - \rho_j \xi_j) \frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla W_{ij}}{r_{ij}^2} - (\nabla \mathbf{v} : \mathbf{f})_i \xi_i - a c \kappa_i \left(\frac{\rho_i \xi_i}{a} - \left(\frac{u_i}{c_{v,i}} \right)^4 \right)$$

輻射圧による仕事

輻射場との相互作用

$$\frac{Du_i}{Dt} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{1}{2} \Pi_{ij} \right) m_j \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla W_{ij} + a c \kappa_i \left(\frac{\rho_i \xi_i}{a} - \left(\frac{u_i}{c_{v,i}} \right)^4 \right)$$

フラックスリミッター

$$\mathbf{F} = -D \nabla E, \quad D = \frac{c \lambda}{\chi \rho}, \quad R = |\nabla E| / (\chi \rho E), \quad f = \lambda + \lambda^2 R^2,$$

$$\mathbf{P} = f \mathbf{E}, \quad \lambda(R) = \frac{2 + R}{6 + 3R + R^2}, \quad f = \frac{1}{2} (1 - f) \mathbf{I} + \frac{1}{2} (3f - 1) \hat{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{n}},$$

Flux limited Diffusion-SPHの方程式系

ステップ1

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_{neigh}} m_j W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|, h).$$

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = - \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \nabla W(r_{ij}, h_{ij}) - \frac{\lambda_i}{\rho_i} \sum_{j=1}^N m_j \xi_j \nabla W(r_{ij}, h_{ij}),$$

$$\frac{D\xi_i}{Dt} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} c \left[\frac{4 \frac{\lambda_i}{\kappa_i \rho_i} \frac{\lambda_j}{\kappa_j \rho_j}}{\left(\frac{\lambda_i}{\kappa_i \rho_i} + \frac{\lambda_j}{\kappa_j \rho_j} \right)} \right] (\rho_i \xi_i - \rho_j \xi_j) \frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla W_{ij}}{r_{ij}^2} - (\nabla \mathbf{v} : \mathbf{f})_i \xi_i - a c \kappa_i \left(\frac{\rho_i \xi_i}{a} - \left(\frac{u_i}{c_{v,i}} \right)^4 \right)$$

$$\frac{Du_i}{Dt} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{1}{2} \Pi_{ij} \right) m_j \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla W_{ij} + a c \kappa_i \left(\frac{\rho_i \xi_i}{a} - \left(\frac{u_i}{c_{v,i}} \right)^4 \right)$$

フラックスリミッター

$$\mathbf{F} = -D \nabla E, \quad D = \frac{c \lambda}{\chi \rho}, \quad R = |\nabla E| / (\chi \rho E), \quad f = \lambda + \lambda^2 R^2,$$

$$\mathbf{P} = f \mathbf{E}, \quad \lambda(R) = \frac{2 + R}{6 + 3R + R^2}, \quad f = \frac{1}{2} (1 - f) \mathbf{I} + \frac{1}{2} (3f - 1) \hat{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{n}},$$

Flux limited Diffusion-SPHの方程式系

ステップ2

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_{neigh}} m_j W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|, h).$$

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = - \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \nabla W(r_{ij}, h_{ij}) - \frac{\lambda_i}{\rho_i} \sum_{j=1}^N m_j \xi_j \nabla W(r_{ij}, h_{ij}),$$

$$\frac{D\xi_i}{Dt} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} c \left[\frac{4 \frac{\lambda_i}{\kappa_i \rho_i} \frac{\lambda_j}{\kappa_j \rho_j}}{\left(\frac{\lambda_i}{\kappa_i \rho_i} + \frac{\lambda_j}{\kappa_j \rho_j} \right)} \right] (\rho_i \xi_i - \rho_j \xi_j) \frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla W_{ij}}{r_{ij}^2} - (\nabla \mathbf{v} : \mathbf{f})_i \xi_i - a c \kappa_i \left(\frac{\rho_i \xi_i}{a} - \left(\frac{u_i}{c_{v,i}} \right)^4 \right)$$

$$\frac{Du_i}{Dt} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{1}{2} \Pi_{ij} \right) m_j \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla W_{ij} + a c \kappa_i \left(\frac{\rho_i \xi_i}{a} - \left(\frac{u_i}{c_{v,i}} \right)^4 \right)$$

フラックスリミッター

$$\mathbf{F} = -D \nabla E, \quad D = \frac{c \lambda}{\chi \rho}, \quad R = |\nabla E| / (\chi \rho E), \quad f = \lambda + \lambda^2 R^2,$$

$$\mathbf{P} = f \mathbf{E}, \quad \lambda(R) = \frac{2 + R}{6 + 3R + R^2}, \quad f = \frac{1}{2} (1 - f) \mathbf{I} + \frac{1}{2} (3f - 1) \hat{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{n}},$$

Flux limited Diffusion-SPHの方程式系

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_{neigh}} m_j W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|, h). \quad \boxed{} \text{ ステップ3}$$

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = - \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \nabla W(r_{ij}, h_{ij}) - \frac{\lambda_i}{\rho_i} \sum_{j=1}^N m_j \xi_j \nabla W(r_{ij}, h_{ij}),$$

$$\frac{D\xi_i}{Dt} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} c \left[\frac{4 \frac{\lambda_i}{\kappa_i \rho_i} \frac{\lambda_j}{\kappa_j \rho_j}}{\left(\frac{\lambda_i}{\kappa_i \rho_i} + \frac{\lambda_j}{\kappa_j \rho_j} \right)} \right] (\rho_i \xi_i - \rho_j \xi_j) \frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla W_{ij}}{r_{ij}^2} - (\nabla \mathbf{v} : \mathbf{f})_i \xi_i - a c \kappa_i \left(\frac{\rho_i \xi_i}{a} - \left(\frac{u_i}{c_{v,i}} \right)^4 \right)$$

$$\frac{Du_i}{Dt} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{1}{2} \Pi_{ij} \right) m_j \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla W_{ij} + a c \kappa_i \left(\frac{\rho_i \xi_i}{a} - \left(\frac{u_i}{c_{v,i}} \right)^4 \right)$$

フラックスリミッター

$$\mathbf{F} = -D \nabla E, \quad D = \frac{c \lambda}{\chi \rho}, \quad R = |\nabla E| / (\chi \rho E), \quad f = \lambda + \lambda^2 R^2,$$

$$\mathbf{P} = f \mathbf{E}, \quad \lambda(R) = \frac{2 + R}{6 + 3R + R^2}, \quad f = \frac{1}{2} (1 - f) \mathbf{I} + \frac{1}{2} (3f - 1) \hat{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{n}},$$

エネルギー方程式の陰解法

- ◎ 宇宙流体の多くの場合で輻射輸送の時間スケールは流体に比べて非常に短い

→ 輻射パート(ステップ2)は陰解法を用いる

$$\xi_i^{n+1} = \xi_i^n + dt \sum_j \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} bc (\rho_i \xi_i^{n+1} - \rho_j \xi_j^{n+1}) \frac{\nabla W_{ij}}{r_{ij}} - dt (\nabla \cdot \mathbf{v})_i f_i \xi_i^{n+1} - dt a c \kappa_i \left[\frac{\rho_i \xi_i^{n+1}}{a} - \left(\frac{u_i^{n+1}}{c_{v,i}} \right)^4 \right]$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + dt a c \kappa_i \left[\frac{\rho_i \xi_i^{n+1}}{a} - \left(\frac{u_i^{n+1}}{c_{v,i}} \right)^4 \right]$$

→ ξ_i^{n+1} を消去して、 u_i^{n+1} について解く

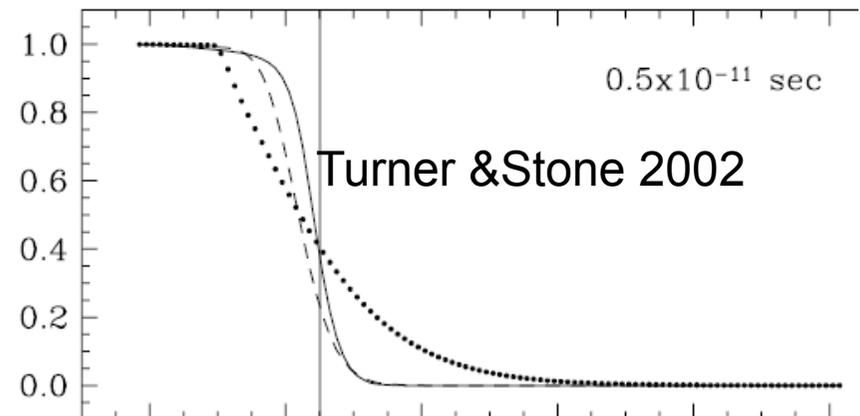
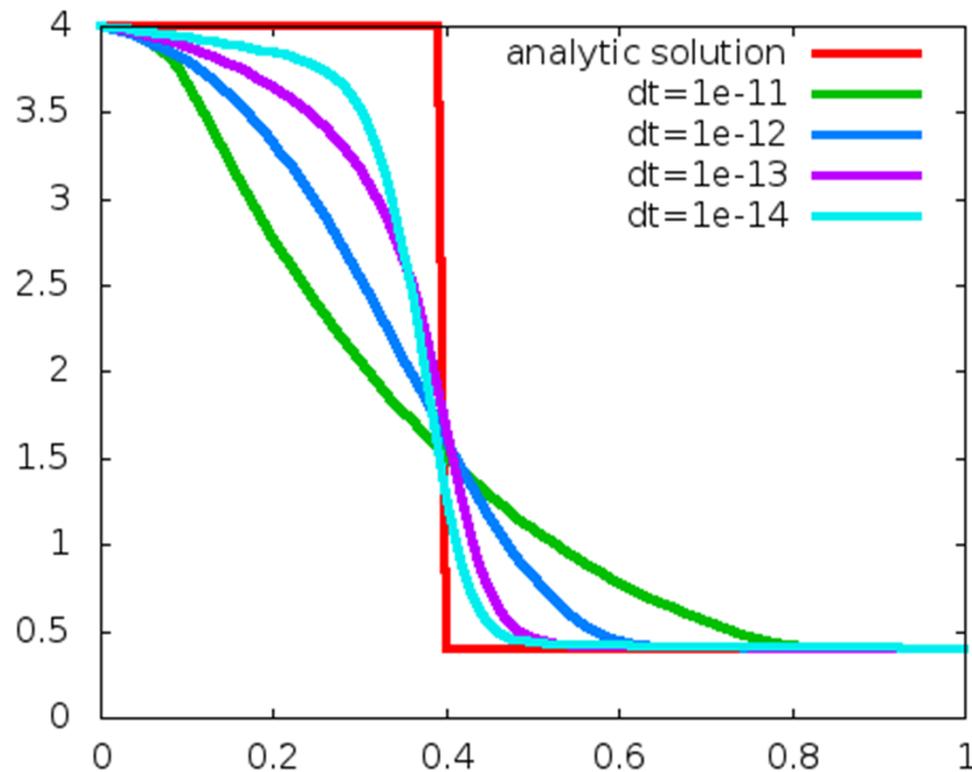
$$\xi_i^{n+1} = \frac{\left(\xi_i^n + dt D_{n,i} + dt \Gamma [u_i^{n+1}]^4 \right)}{1 - \chi + \beta}$$

収束するまで繰り返す

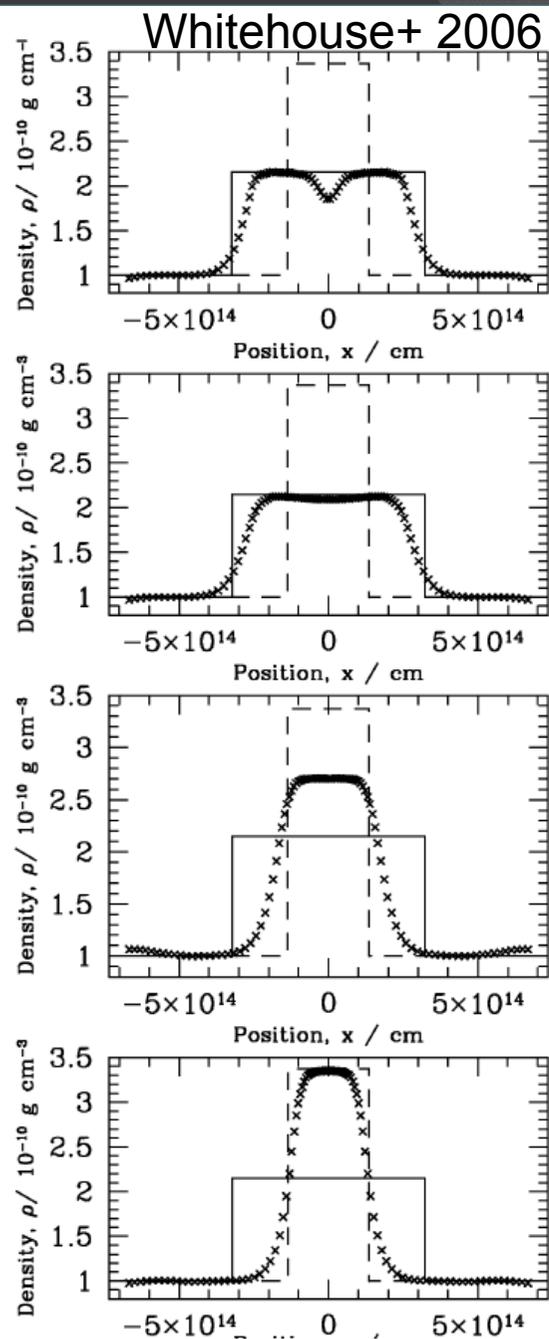
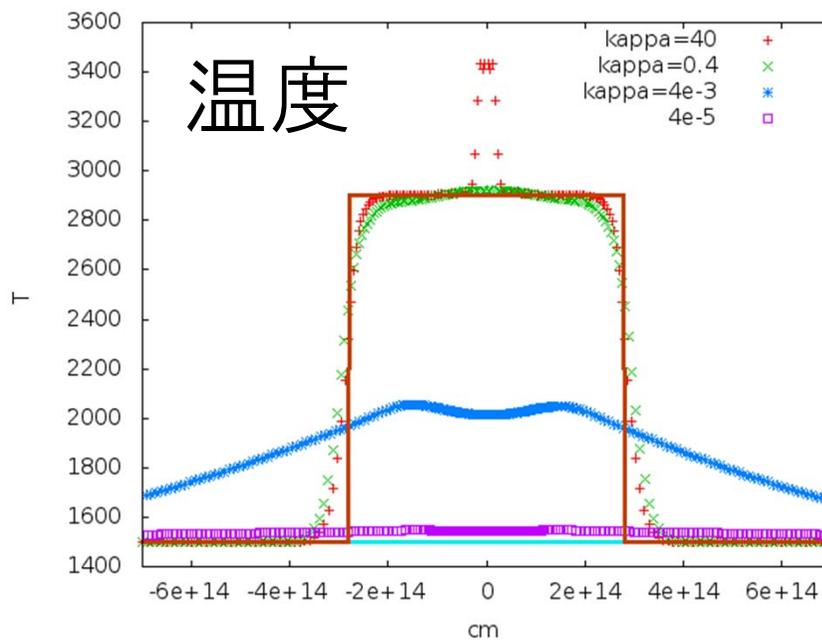
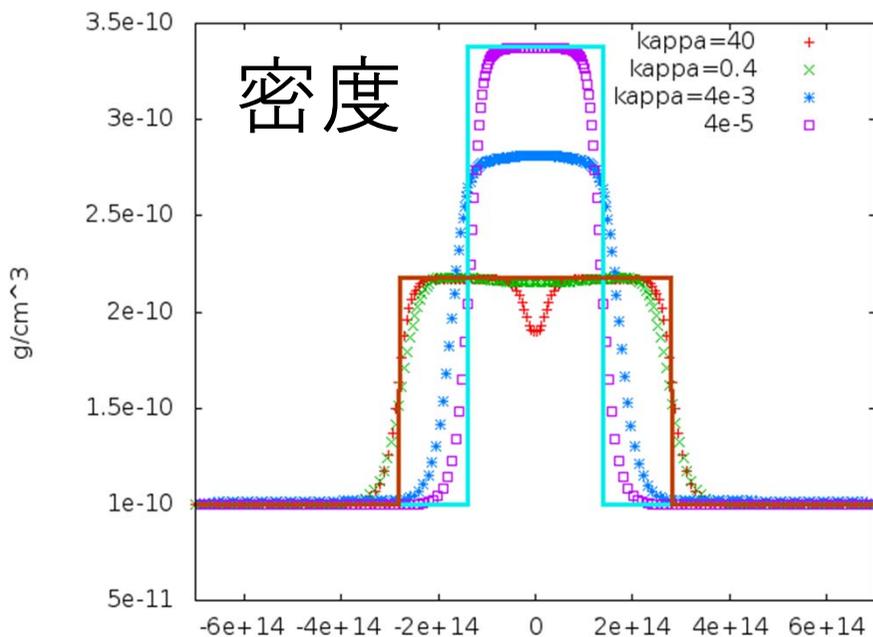


エネルギープロパゲーションテスト

- 初期に $x=0.1$ にエネルギー不連続面を置く
- 光学的に薄い媒質を光速で波面が伝播
- 陰解法では波面が大きくなまる
- Zeusコードの結果とよく一致



断熱衝撃波から等温衝撃波への遷移



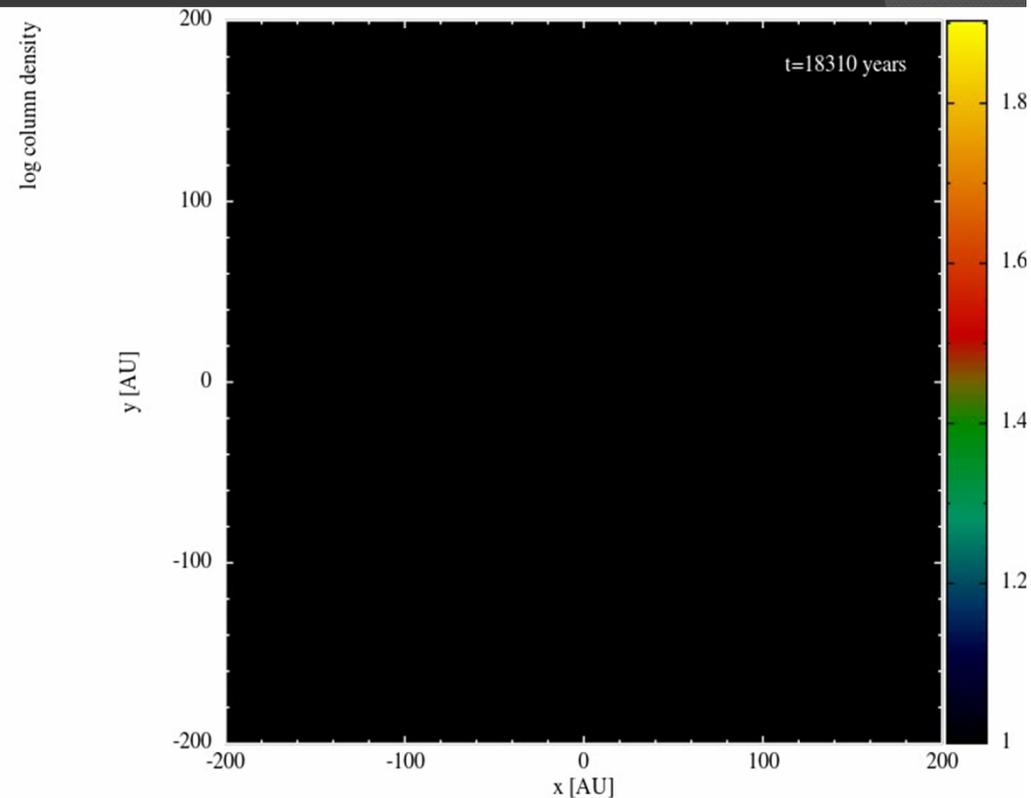
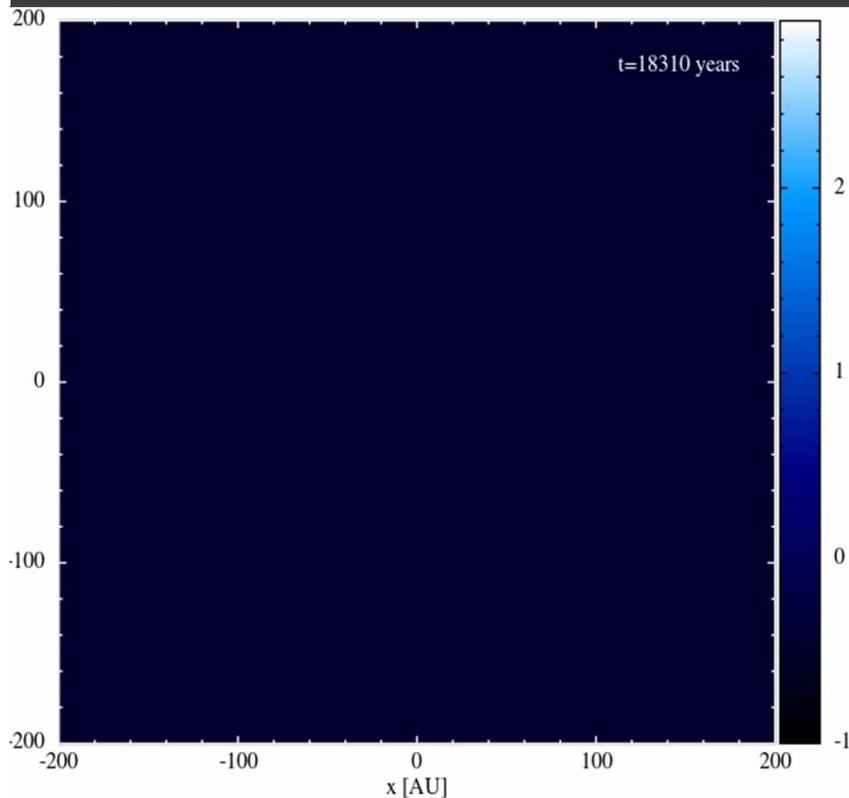
サイエンスの例:原始星、円盤形成シミュレーション

初期条件

~10000AU

密度 400AU

温度



アウトライン

- ◎ Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)法とは
- ◎ 輻射磁気流体力学の方程式系
- ◎ FLD-SPHのアルゴリズムとテスト結果
- ◎ **GSPMHDのアルゴリズムとテスト結果**
- ◎ まとめ

SPMHDの方程式 (Iwasaki & Inutsuka 2011,13prep)

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = \sum_j m_j \left\{ \left[-(P_t)_{RP} - P_{B,\parallel} \right] \mathbf{n} + B_{\parallel} (\mathbf{B}_{\perp})_{MOC} - \mathbf{B}_i B_{\parallel} \right\} F_{ij}$$

$$\frac{De_i}{Dt} = \sum_j m_j \left\{ \left[-(P_t)_{RP} - P_{B,\parallel} \right] v_{\parallel,RP} + B_{\parallel} (\mathbf{B}_{\perp})_{MOC} \cdot \mathbf{v}_{\perp,MOC} - \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{v}_i B_{\parallel} - B_{i,\parallel} \psi_{ij} \right\} F_{ij}$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \right)_i = \sum_j m_j \left\{ B_{\parallel,ij} (v_{\parallel,RP} \mathbf{n} + \mathbf{v}_{\perp,MOC} - \mathbf{v}_i) - \psi_{ij} \mathbf{n} \right\} F_{ij}$$

$$\frac{D\psi_i}{Dt} = - \sum_j m_j \frac{c_h^2}{\rho_i} \{ B_{j,\parallel} - B_{i,\parallel} \} \frac{\partial_i W_i}{\partial s_i} - \frac{\psi_i}{\tau}$$

$$F_{ij} = \left(\frac{1}{\rho_i^2} \frac{\partial_i W_i}{\partial s_i} + \frac{1}{\rho_j^2} \frac{\partial_i W_i}{\partial s_i} \right)$$



:通常のMHD方程式に現れる項、RP,MOCはそれぞれリーマン問題と特性曲線法の解を用いる



:数値不安定を押さえるための項、ローレンツ力に起因



:Hyperbolic Divergence Cleaning法

Divergence Cleaning Method(Dedner 2000, Trico & Price 2010)

誘導方程式にスカラー場を導入

$$\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t} \left(\frac{\vec{B}}{\rho} \right) = \frac{\vec{B}}{\rho} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \psi$$

スカラー場が以下の方程式を満たすとする

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -c_h^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{B} - \frac{1}{\tau} \psi$$

磁場の発散は以下の移流拡散方程式を満たす

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_h^2 \vec{\nabla}^2 + \frac{1}{\tau} \right) \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

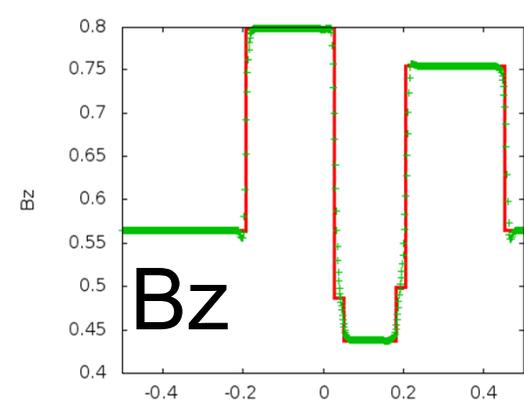
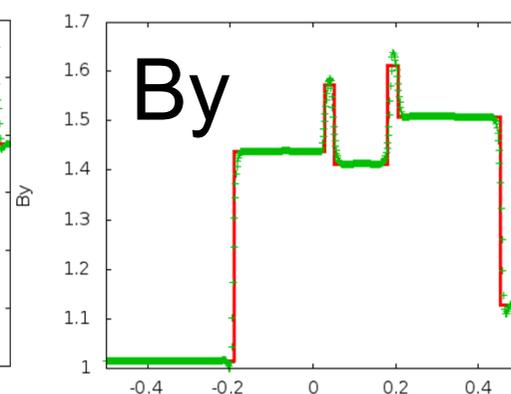
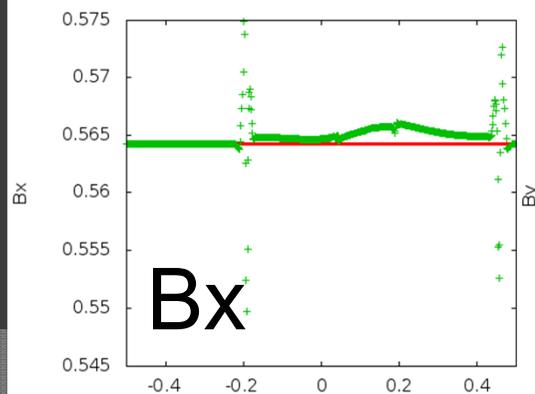
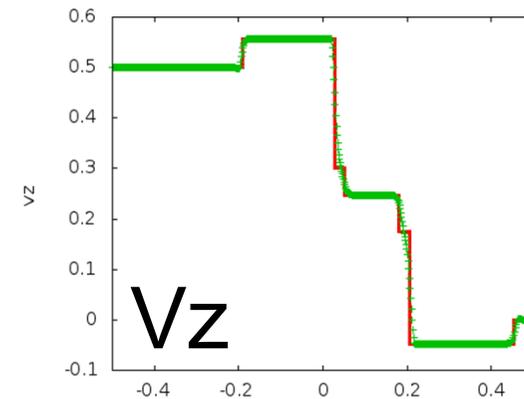
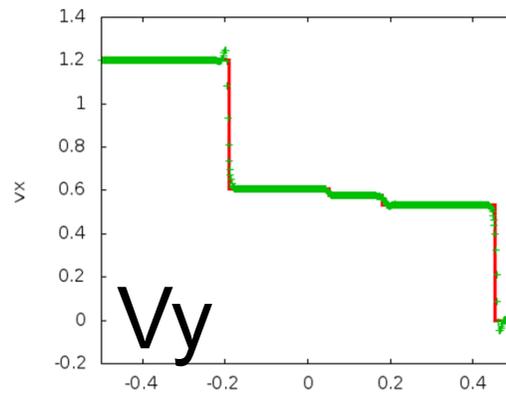
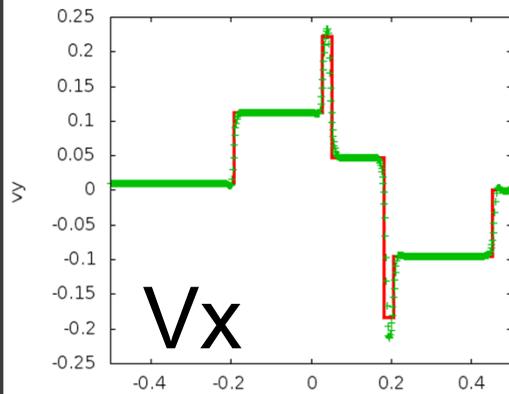
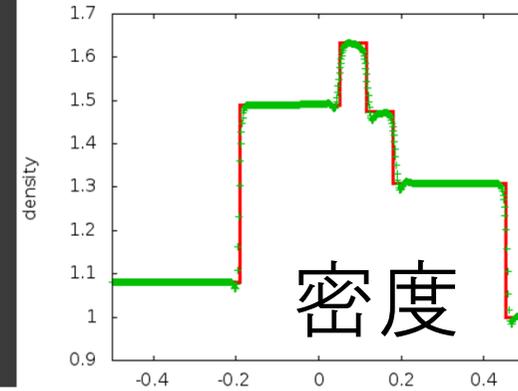
→発散を移流させつつ減衰させる

衝撃波管問題

Dai & Woodward (1994)の衝撃波管問題

赤:厳密解

緑:GSPMHDの結果

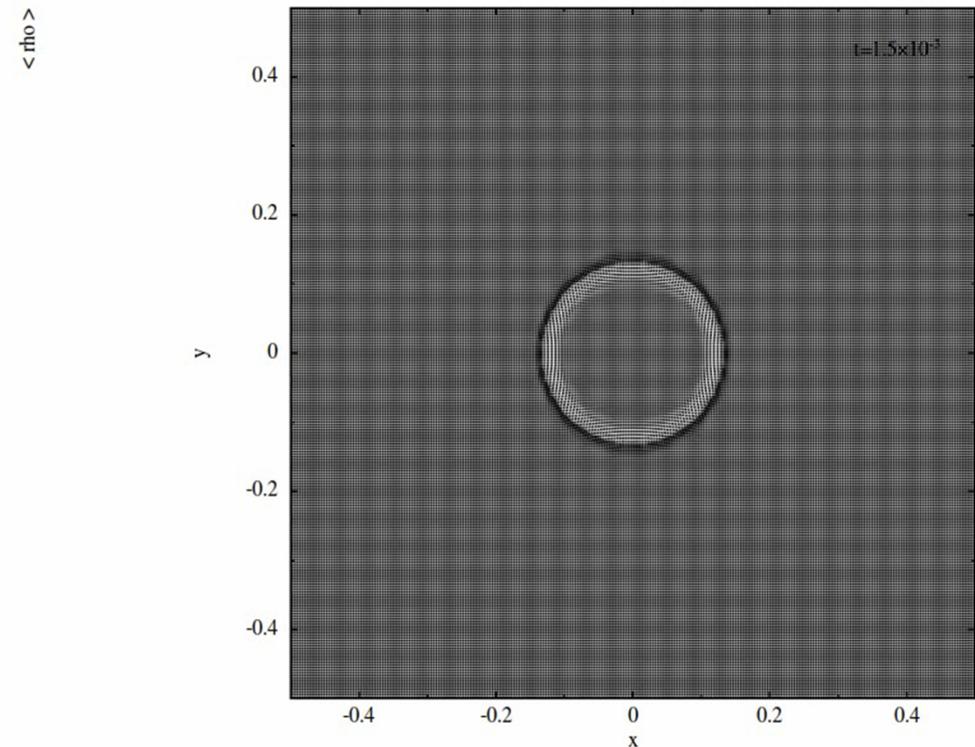
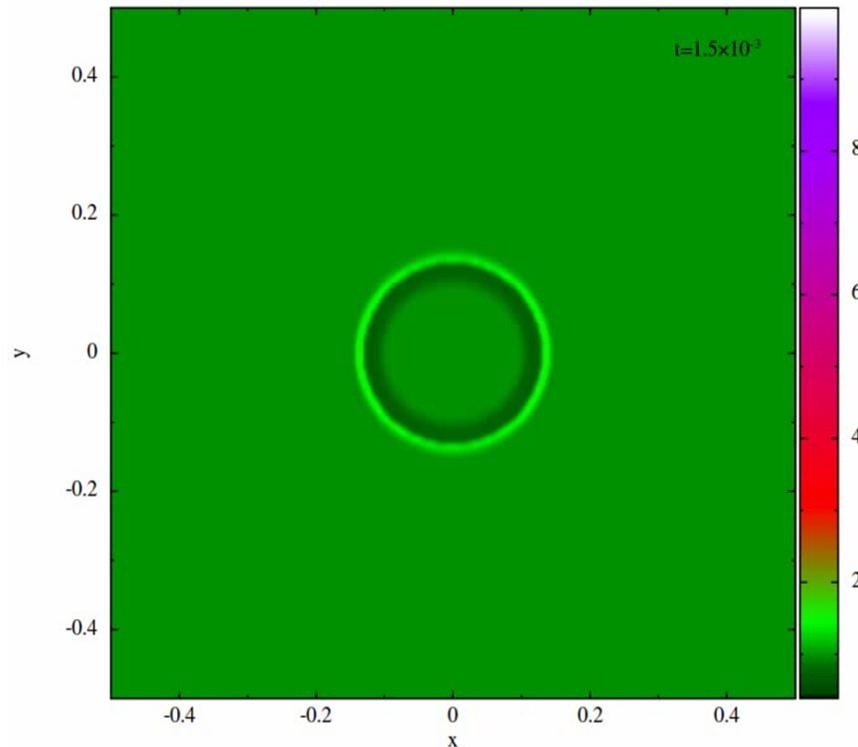


Magnetic Blast Wave

- $r < 0.125$: $P=100$
- $r > 0.125$: $P=1$, $B_x=10$
- プラズマ β : 0.02
- 磁場が強いため磁力線に沿って衝撃波が伝播

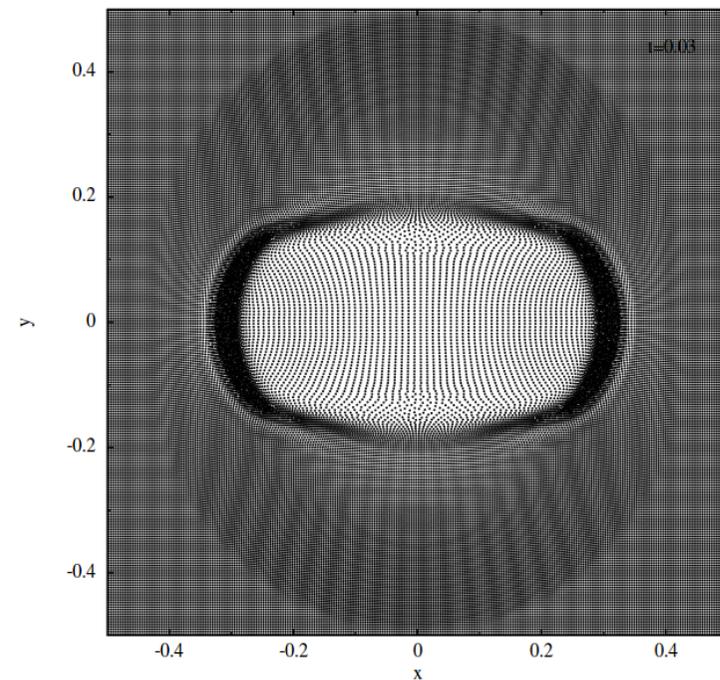
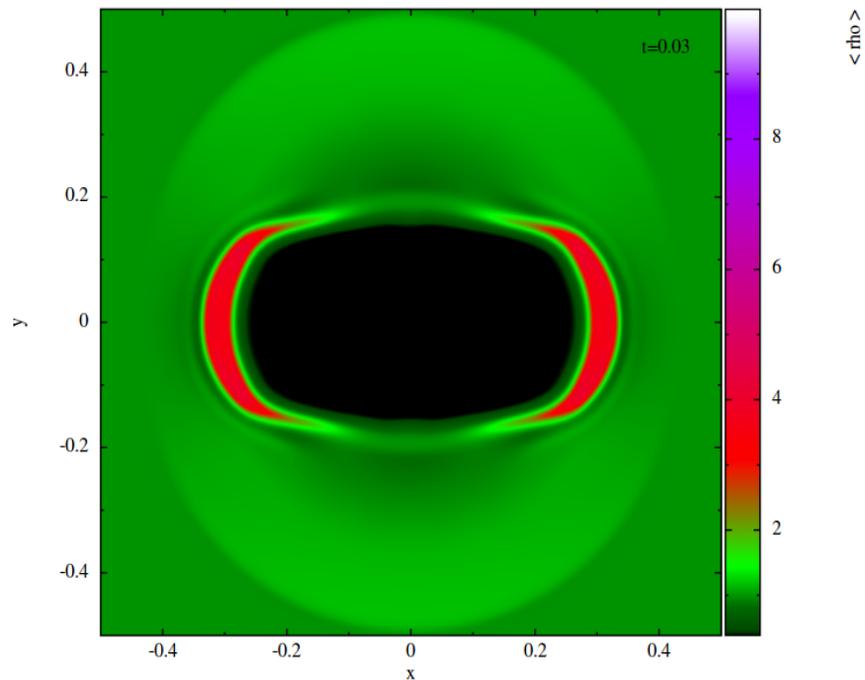
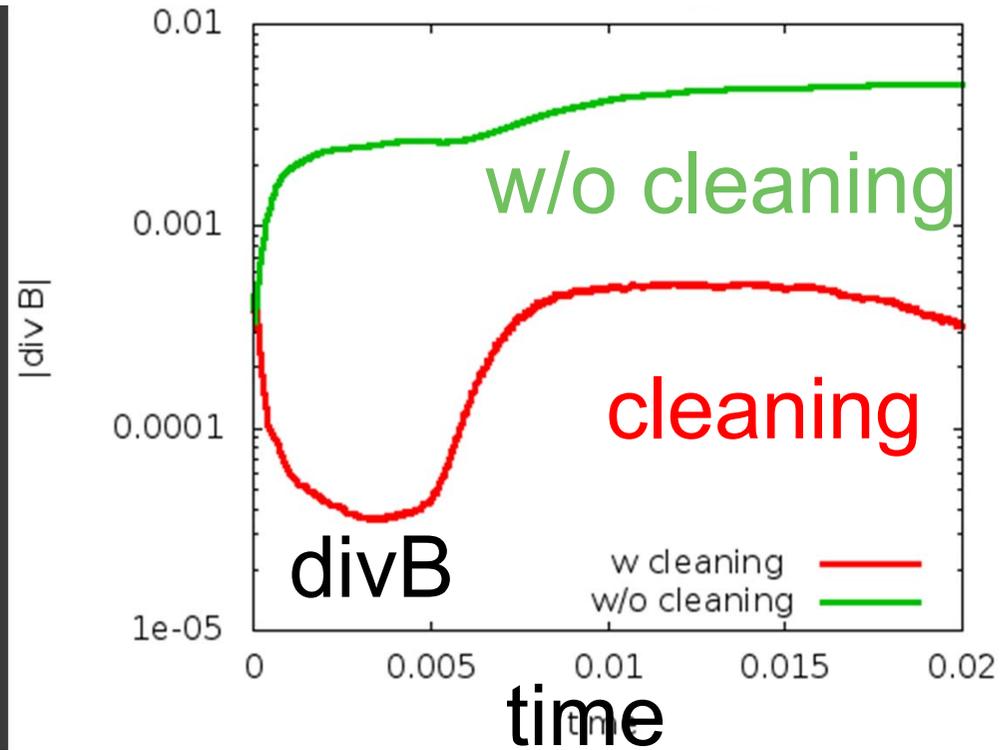
密度

粒子配置



Magnetic Blast Wave

- 発散エラーがクリーニングによって一桁以上抑制されている



アウトライン

- ◎ Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)法とは
- ◎ 輻射磁気流体力学の方程式系
- ◎ 輻射輸送のアルゴリズムとテスト結果
- ◎ 磁気流体のアルゴリズムとテスト結果
- ◎ **まとめ**

まとめ

- ◎ 輻射磁気SPHコードを実装しテストを行った
- ◎ 多くのテスト計算でよい結果が得られた

- ◎ 今後は乱流的な速度場をもつ分子雲コアの崩壊、大質量星形成などの問題に取り組んでいく