無衝突自己重力系の
無衝突ボルツマンシミュレーション

宇宙磁気流体・プラズマシミュレーションワークショップ

2013年2月18日・千葉大学

吉川 耕司 (筑波大学 計算科学研究センター)

吉田 直紀 (東京大学　物理・Kavli IPMU)

梅村 雅之 (筑波大学 計算科学研究センター)

"Direct Integration of the Collisionless Boltzmann Equation in Six-dimensional Phase Space: Self-gravitating Systems" (arXiv:1206.6152)
KY, Naoki Yoshida, Masayuki Umemura, ApJ, (2013), 762, 116

目次

- Boltzmann 方程式
- 自己重力系・Vlasov-Poisson 方程式系
- 6次元位相空間上でのVlasov-Poissonシミュレーション
- 自己重力系でのVlasovシミュレーションの応用例
- まとめ

Boltzmann equation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} - \frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} =$$

$$\int\int\int (f' f_1' - f f_1) \sigma(\vec{p}, \vec{p}_1 | \vec{p}', \vec{p}_1') d\vec{p}' d\vec{p}_1' d\vec{p}_1$$

- あるHamiltonianに従う多数の粒子の集団的な振る舞いを記述

- Hamiltonianを取り換えれば応用範囲は極めて広い

  自己重力系・電磁プラズマ・輻射・ガス・Quark-Gluon プラズマ

- 数値シミュレーションはとても大変

  6次元位相空間をメモリにマップ

  6次元位相空間で移流方程式を解く

モーメント展開

- Boltzmann 方程式のモーメント展開を有限の次数で打ち切って closure condition を使って方程式系を閉じる

- ガス系

2次までのモーメント展開＋局所熱平衡(Maxwell分布) → Euler 方程式

Chapman-Enskog展開 → Navie-Stokes 方程式

- 輻射・相対論的ニュートリノ

0次のモーメント展開＋Diffusion近似 → Flux-Limited-Diffusion(FLD)法

1次のモーメント展開＋Eddington-tensorを仮定 → M1 法

closure conditionが成り立たない状況では当然、間違った結果を与える

粒子法

- 適当なclosure conditionがなさそうな場合は粒子法
- 位相空間をモンテカルロ的に粒子(位置・運動量)でサンプリング
- 粒子をハミルトン方程式(Boltzman方程式の特性線)にそって時間発展

  → 常微分方程式の数値積分に帰着可能

- 自己重力系の場合はN体シミュレーション
- 電磁プラズマの場合はParticle-In-Cell(PIC)シミュレーション

モーメント法や粒子法が適当でない状況ではBoltzmannシミュレーションを行うことが必要

自己重力系

▶ 衝突系と無衝突系

二体緩和 ： 自己重力系を構成している粒子が二体散乱によって軌道が変えられる過程

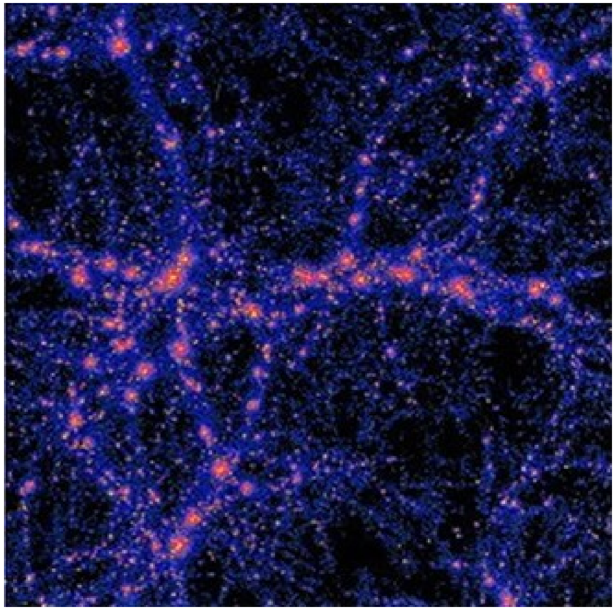
二体緩和のタイムスケール ： $t_{\rm rel} = \dfrac{N}{8\ln N} t_{\rm cr}$ $\qquad t_{\rm cr} \sim \dfrac{L}{\langle |v| \rangle}$

$t_{\rm rel} > t_{\rm age}$ ➡ 無衝突系 （銀河・銀河団・宇宙の大規模構造中のダークマター・恒星）

$t_{\rm rel} < t_{\rm age}$ ➡ 衝突系 （球状星団・銀河中心BH周辺の恒星の運動）

一般に粒子のより正確な軌道積分が要求される

球状星団 M13



(Yoshikawa et al. 2001)

無衝突系のN体シミュレーション

- Tree法やTreePM法を用いることで現在のところ$N=10^{12}$個の粒子数まで計算可能

  石山君のGordon-Bell賞を取った宇宙大規模構造形成のシミュレーションなど

- それでも1粒子あたりの質量は10^3～10^4太陽質量（100Mpc立方のシミュレーションの場合）

  超粒子近似 → 人為的な二体緩和

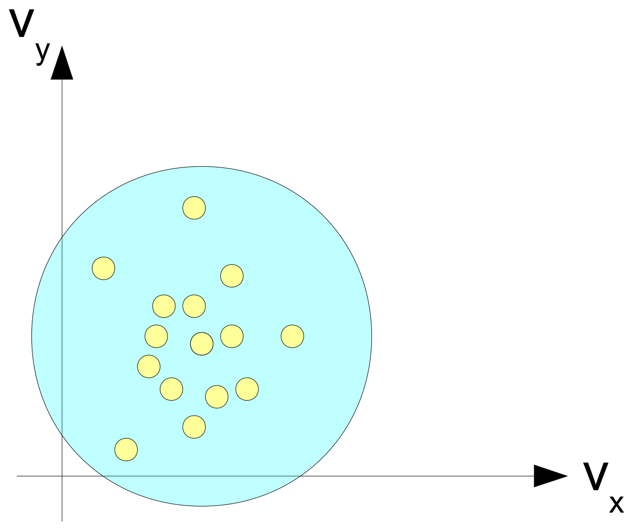
- 密度・速度などの物理量にランダムノイズが内在

- 速度分散の大きな系のシミュレーションには向かない

高速度成分を正確に表現できない

↓

free streaming による 無衝突減衰(Landau damping)を正確に計算できない



Vlasov方程式による
自己重力系シミュレーション

Vlasov-Poisson 方程式系

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} - \nabla \phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho = 4\pi G \int f d^3 \vec{v}$$

計算手法

- 位相空間を座標・運動量空間それぞれで3次元の regular mesh に分割
- Vlasov 方程式自体は方向分割で1次元移流方程式に帰着させて解く
- 重力ポテンシャルはFFTを用いた畳み込み法 （孤立境界条件・周期的境界条件）

並列化

- 座標空間を賽の目にMPIで領域分割
- OpenMPによるスレッド並列でハイブリッド並列化

移流方程式の数値解法

- Vlasov方程式を1次元の移流方程式に分割して解く

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

- 移流方程式の数値解法に対する数学的・物理学的な要請

  - 正値性
  - 最大値の原理
  - 粒子数（質量）保存則

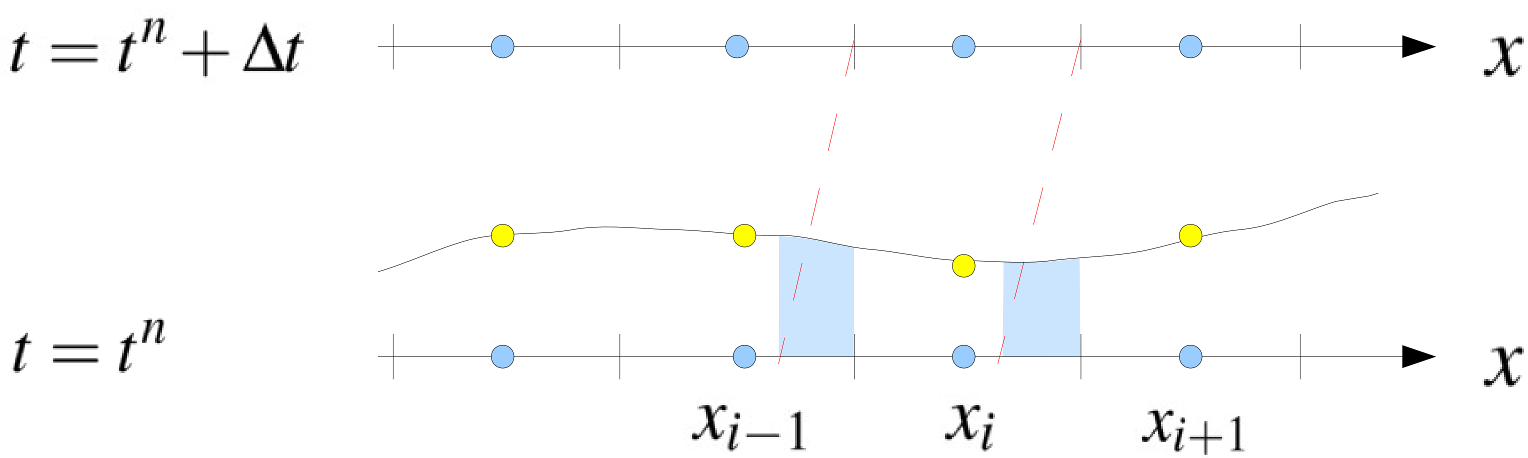
→ これらの要請を満たす数値解法が必要

Filbet & Sonnendrucker, Comp. Phys. Comm. 150 (2003) 247-266

- 様々な移流方程式の数値解法の優劣を比較
- CIP法、semi-Lagrange法、スペクトル法、、、

移流方程式

▶ Positive Flux Conservative (PFC) method



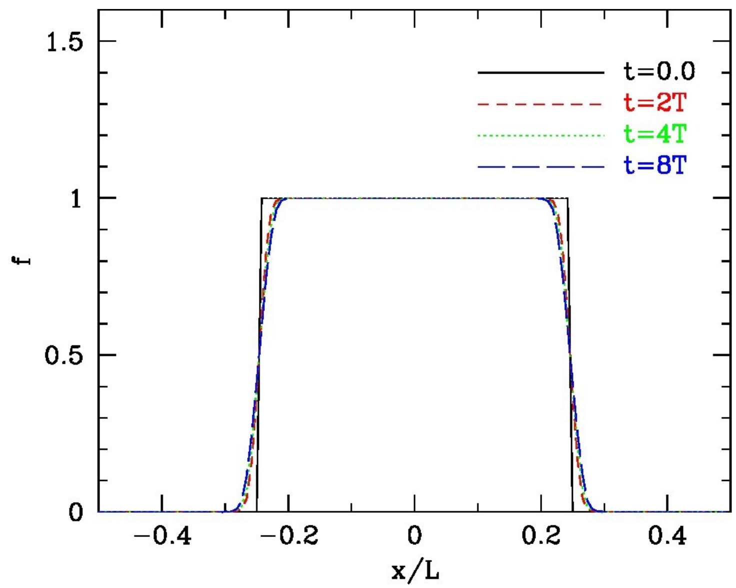
$$\int_{x_i-\Delta x/2}^{x_i+\Delta x/2} f(t^{n+1},x)dx = \int_{x_i-\Delta x/2}^{x_i+\Delta x/2} f(t^n,x)dx + \Phi^+ - \Phi^-$$

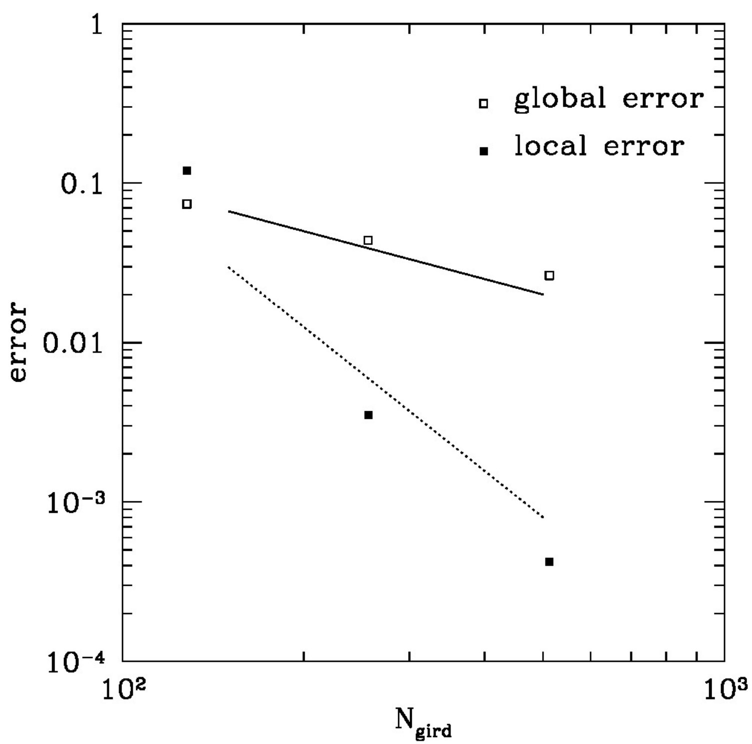
$$\Rightarrow \quad f_i^{n+1} = f_i^n + \frac{\Phi^+}{\Delta x} - \frac{\Phi^-}{\Delta x}$$

正値性、最大値の原理、ノルムの保存を全て満足する。

Filbet, Sonnendrucker, Bertrand, J. Comp. Phys (2001) 172, 166-187

PFCスキーム





PFCスキームのテスト計算

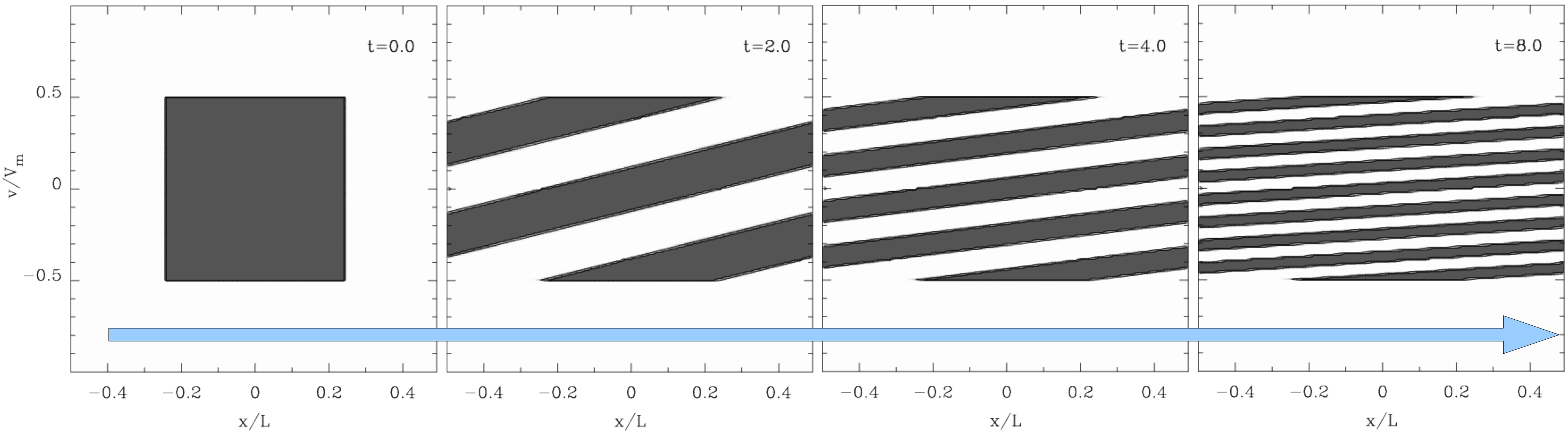
$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

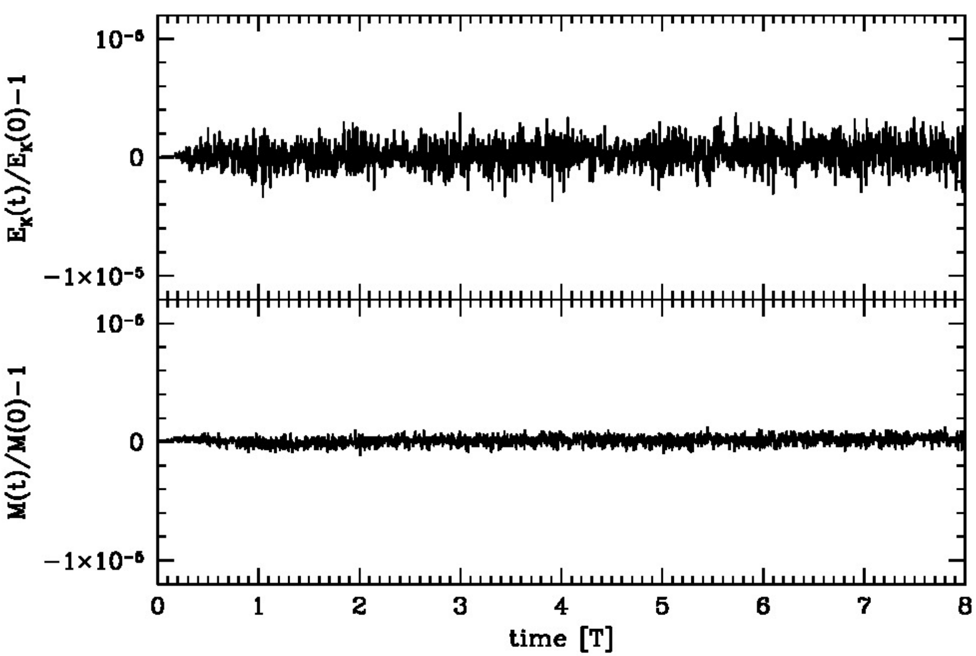
- 局所的には空間3次精度
- 積分値では空間1次精度

slope limiter を採用しているため

- 正値性・最大値の原理は満たしている
- 精度はΔtの大きさにはほとんど依存しない

PFCスキーム





- 1+1次元位相空間での自由流運動

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

- 質量の相対誤差は10^{-6}未満
- 運動エネルギーの相対誤差は10^{-5}未満

時間積分

- 2nd order leapfrog scheme

$$f(\vec{x},\vec{v},t^{n+1}) = T_{v_x}(\Delta t/2)T_{v_y}(\Delta t/2)T_{v_z}(\Delta t/2)$$
$$T_x(\Delta t)T_y(\Delta t)T_z(\Delta t)$$
$$T_{v_x}(\Delta t/2)T_{v_y}(\Delta t/2)T_{v_z}(\Delta t/2) \quad f(\vec{x},\vec{v},t^n)$$

座標空間方向の更新のあとで、Poisson 方程式をといてポテンシャルを更新

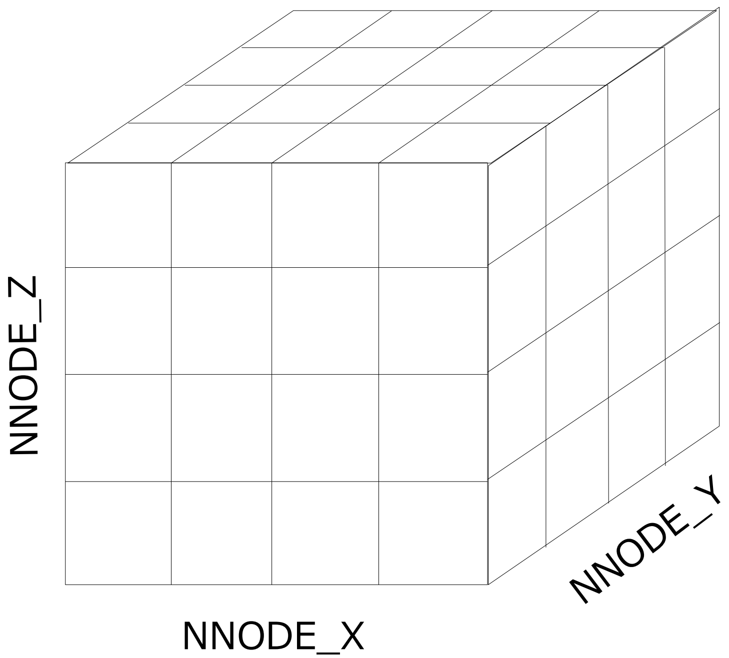
- Timestep constrains

$$\Delta t = C\min(\Delta t_{\mathrm{v}}, \Delta t_{\mathrm{x}})$$

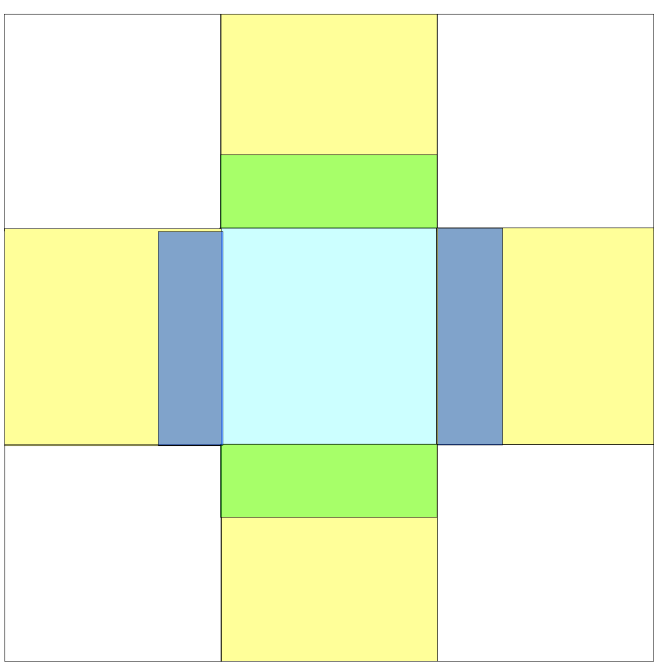
以下では、C=0.2 を採用

$$\Delta t_{\mathrm{x}} = \min\left(\frac{\Delta x}{V_x^{\max}}, \frac{\Delta y}{V_y^{\max}}, \frac{\Delta z}{V_z^{\max}}\right) \qquad \Delta t_{\mathrm{v}} = \min_i\left(\frac{\Delta v_x}{|a_{x,i}|}, \frac{\Delta v_y}{|a_{y,i}|}, \frac{\Delta v_z}{|a_{z,i}|}\right)$$

並列化



- 座標空間のみ賽の目に領域分割
- 空間方向の移流方程式については、隣接するプロセスから必要な分布関数のデータを転送する。
- 移流方程式は6重ループになるが、MPIデータ転送を含まない一番外側のループについてOpenMPでハイブリッド並列化



計算機資源

- T2K-Tsukuba
  - ノード構成 ： Quad Core Opteron (Barcelona) x 4ソケット + 32GB RAM
  - ネットワーク ： Quad Rail DDR Infiniband (8GB/s single-sided)
  - 全体構成 ： 640ノード (95Tflops) + 800TB Luster File System
- 典型的な計算規模
  - 座標空間 64^3 メッシュ、運動量空間 32^3 メッシュの計算の場合 ： 8ノードまたは16ノード
  - 座標空間 64^3 メッシュ、運動量空間 64^3 メッシュの計算の場合 ： 64ノード

テスト計算

- 1-D Homogeneous Gravitational System (Landau damping + Gravitational Instability)
- 3-D Homogeneous Gravitational System (Landau damping + Gravitational Instability)
- King sphere (a stable solution of the Vlasov-Poisson equations)
- Collision of Two King spheres (a comparison with an N-body simulation)

1-D Self-Gravitating System

1次元周期境界条件でのVlasov-Poisson方程式系

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 4\pi G(\rho - \bar{\rho}) = 4\pi G\bar{\rho}\left(\int f dv - 1\right)$$

初期条件

$$f(x, v, t=0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right)(1 + \delta\cos kx)$$

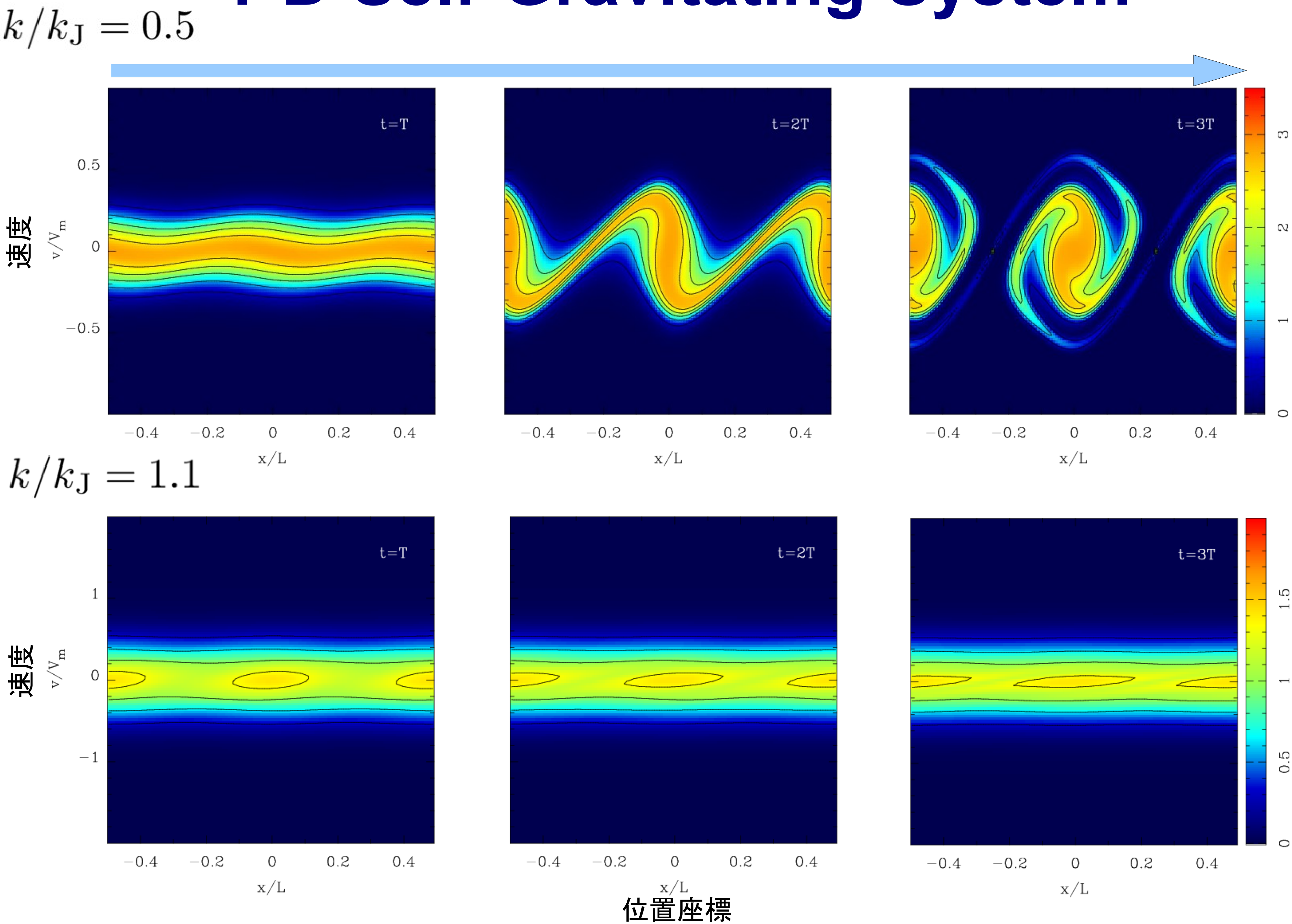
$$\rho = \bar{\rho}(1 + \delta\cos kx)$$

$k > k_{\mathrm{J}} \longrightarrow$ **Landau damping**

$k < k_{\mathrm{J}} \longrightarrow$ 重力不安定

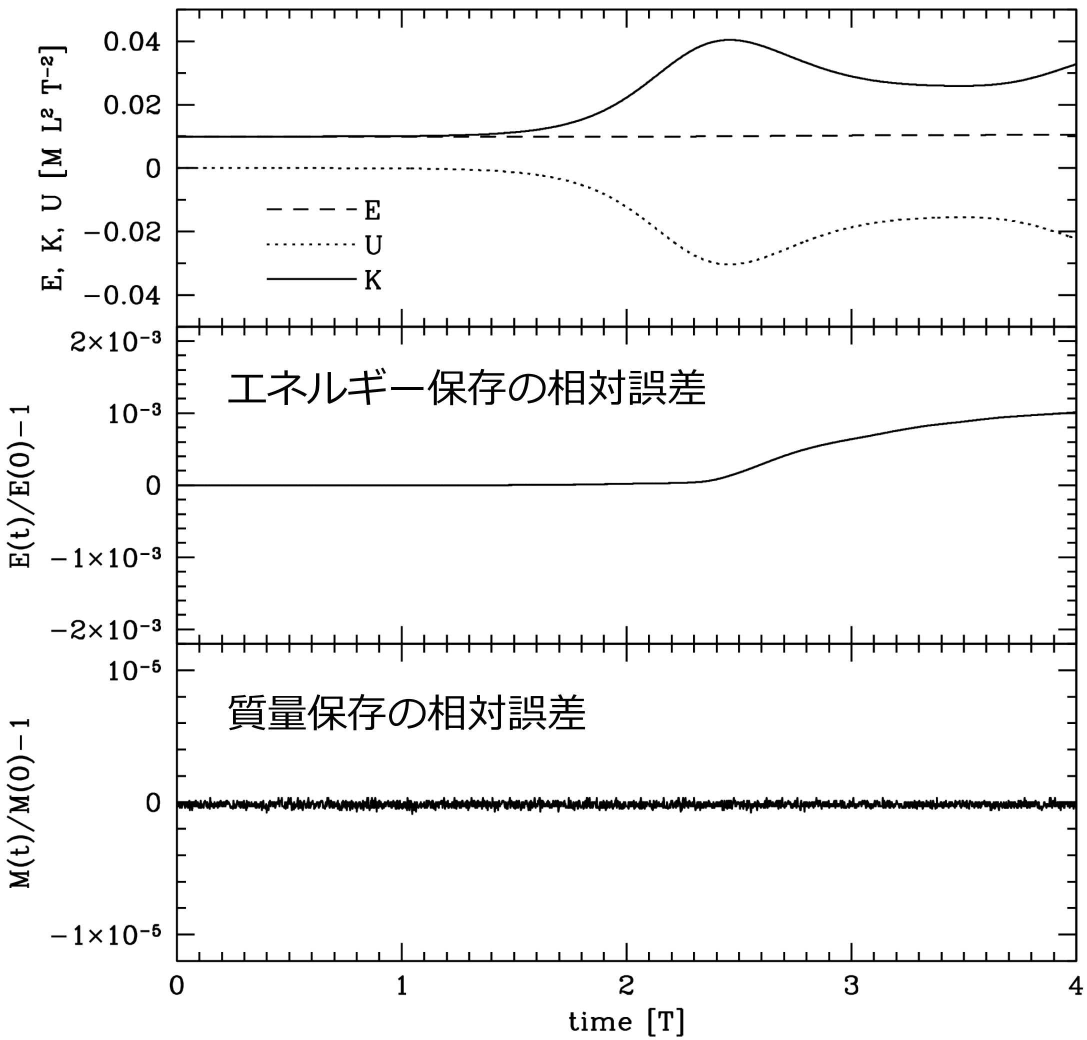
$$k_{\mathrm{J}} = \frac{\sqrt{4\pi G\rho_0}}{\sigma}$$

1-D Self-Gravitating System



1-D Self-Gravitating System

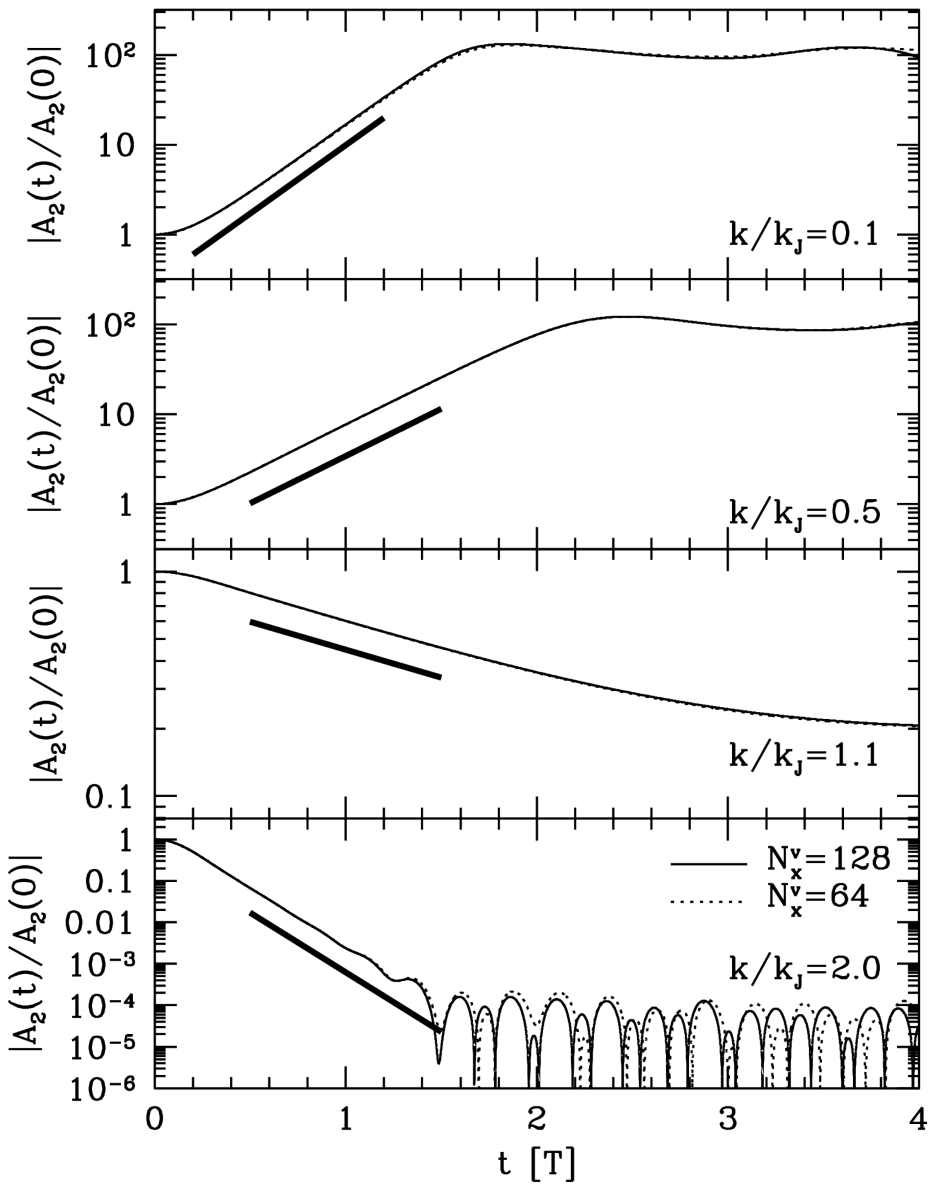
▶ 質量保存・エネルギー保存



- k/k_J = 0.5 の結果
- 質量保存、エネルギー保存ともに問題なし

1-D Self-Gravitating System

▶ 線形摂動理論との比較



- 初期に与えた密度揺らぎの時間発展
- 太線：線形摂動理論の growth / damping rate
- 線形〜準線形領域では線形理論とコンシステント
- k/k_J=2の場合、途中でdampingが止まる。

  i) 運動エネルギー ⇒ 重力ポテンシャル

  ii) 速度分布がGaussianからずれる (coldになる)

  iii) damping が止まる

  k/k_J=1.1でも同様の傾向が見える

3-D Self-Gravitating System

- **初期条件:**

$$f(\vec{x}, \vec{v}) = \frac{(1+\delta)}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|\vec{v}|^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\rho = 1 + \delta$$

密度揺らぎδは空間的にランダムに(white noiseで)与える

(様々なモードの密度揺らぎを与える)

- **メッシュ数:** 座標空間 64^3 、運動量空間 32^3 or 64^3

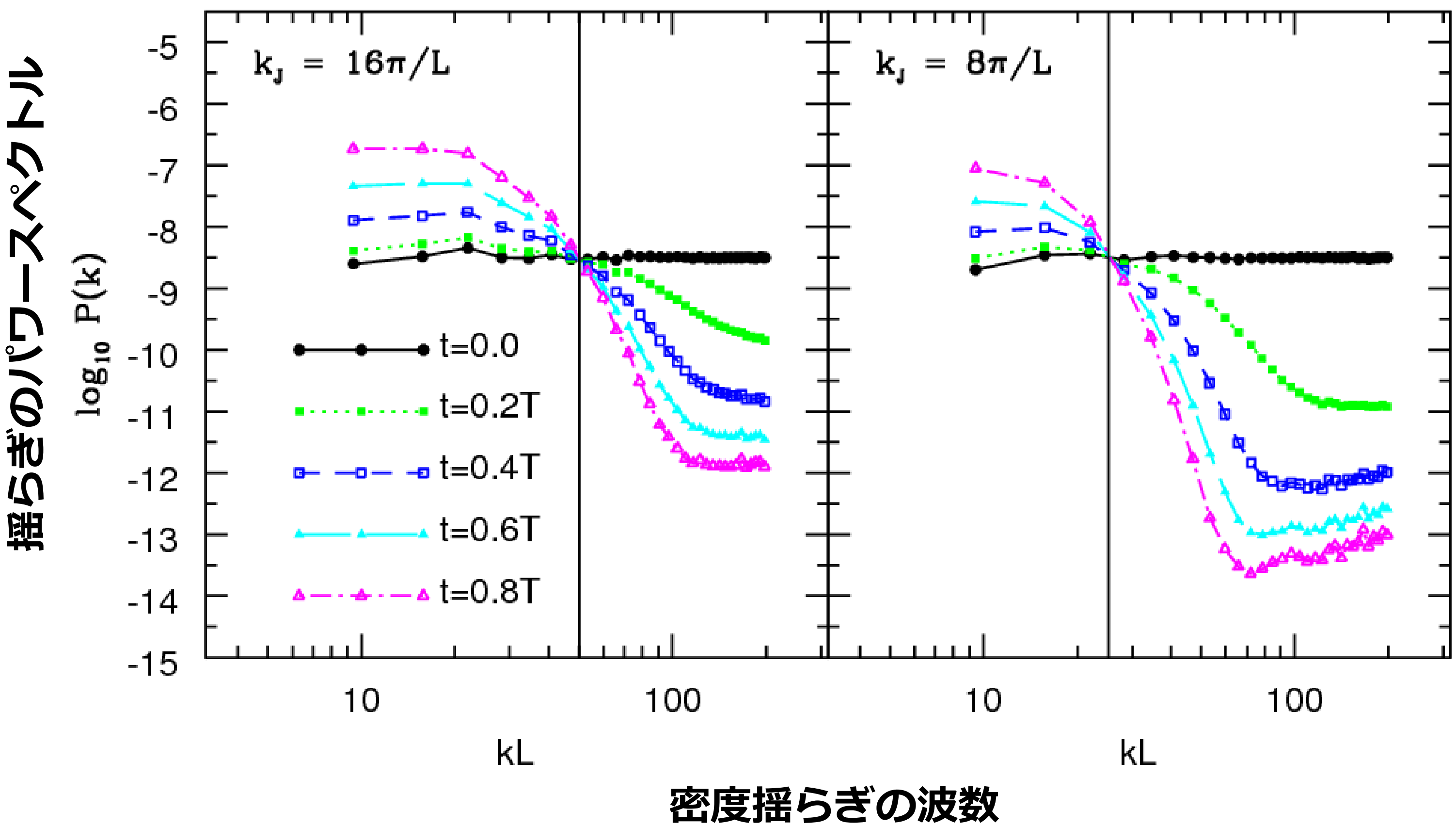
- **境界条件:** 座標空間の境界条件は周期的境界条件

$$k_J^2 = \frac{4\pi G\rho}{\sigma^2}$$ で与えられる波数より大きな波数のモードは

Landau damping (free streaming) により減衰するはず

3-D Self-Gravitating System

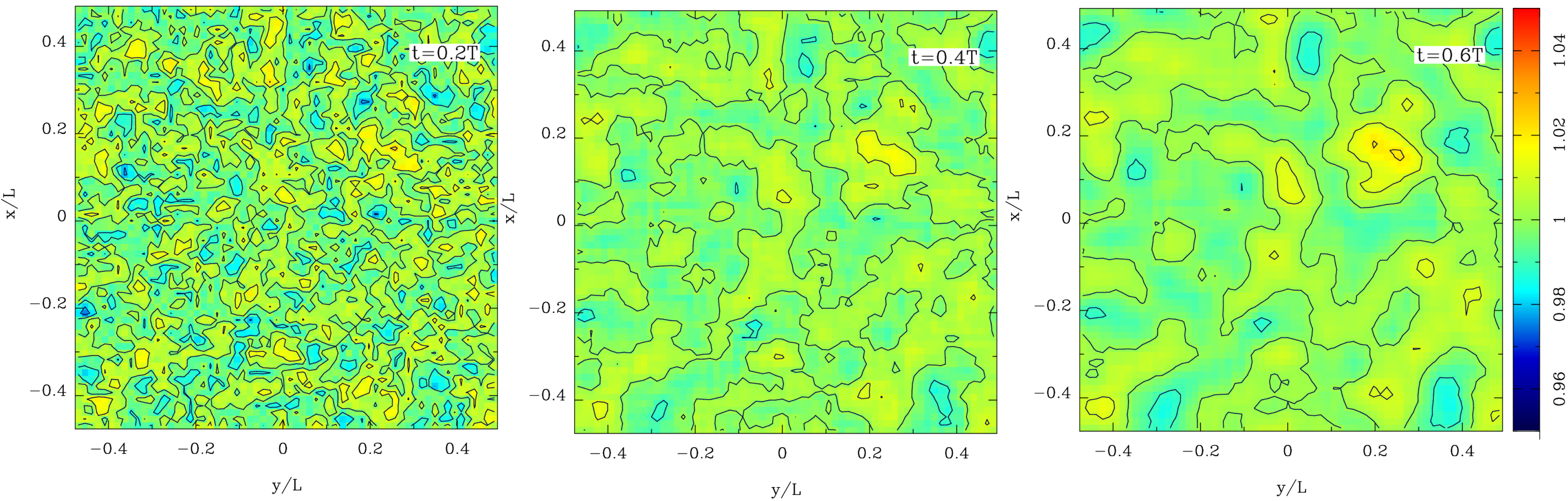
※縦棒がJeans wavenumberの位置



- ちょうど、Jeans wavenumber のところでLandau damping と重力不安定が切り替わっている

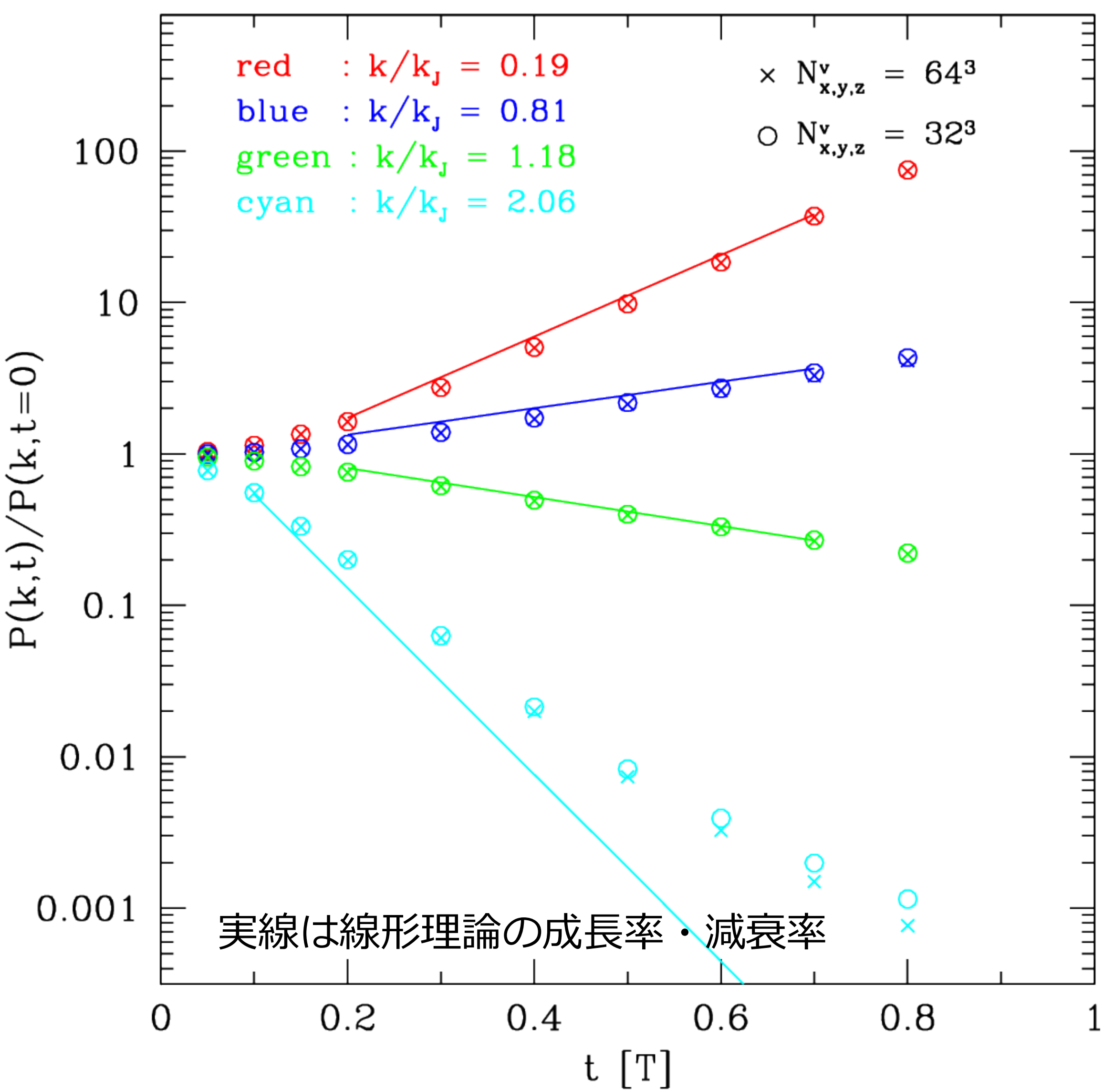
3-D Self-Gravitating System

t=0.2T　t=0.4T　t=0.6T



- 密度マップの時間発展
- 初期の小スケールの密度揺らぎが無衝突減衰（landau damping）で消えていく
- Jeans長以上のスケールの揺らぎは重力不安定性で増幅する

3-D Self-Gravitating System



- 密度揺らぎの成長率・減衰率

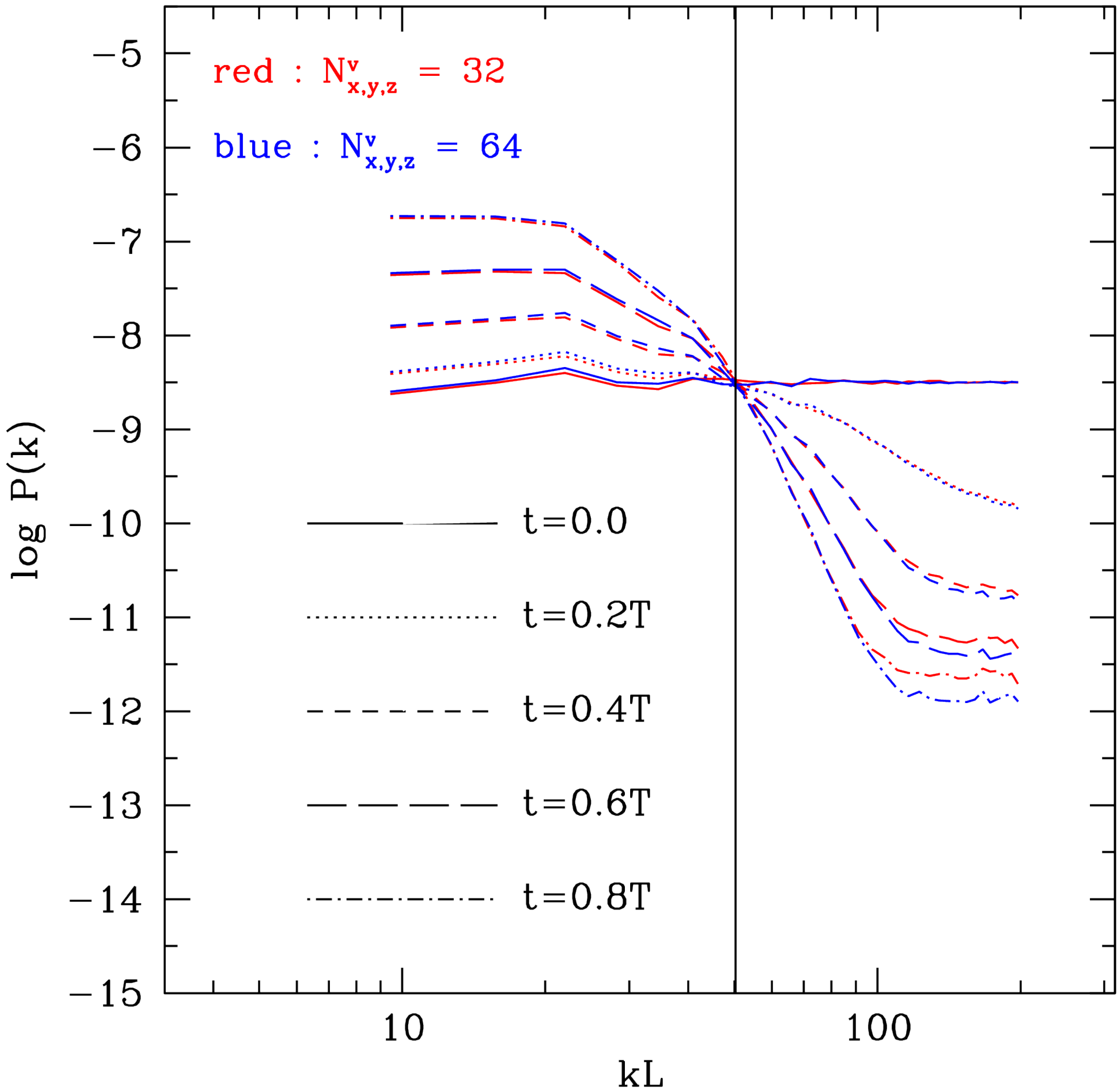
  線形摂動理論とほぼ一致

- k/k_J が大きい場合に、減衰率が線形理論よりも小さくなる

- 前のテスト計算でdampingが止まる現象と同じ仕組み

- 様々なamplitudeの揺らぎが混ざっているので、緩やかに減衰率が下がっていく

3-D Self-Gravitating System



密度揺らぎの波数

- 速度空間分解能による違い
- 小スケール以外では大きな違いはない
- k/k_Jが大きい小スケールでは、速度空間の分解能が悪いと速度分布の広がりをちゃんと再現できないので、dampingが進まない

King Sphere

- **初期条件:**

$$f_{\mathrm{K}}(\mathcal{E}) = \frac{\rho_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}\left[\exp(\mathcal{E}/\sigma^2) - 1\right] \qquad \mathcal{E} > 0$$

$$= 0 \qquad \mathcal{E} < 0$$

$$\mathcal{E} = \Psi - \frac{v^2}{2} \qquad \Psi(0)/\sigma^2 = 3$$

- **メッシュ数:**

座標空間 64^3 、運動量空間 32^3 or 64^3

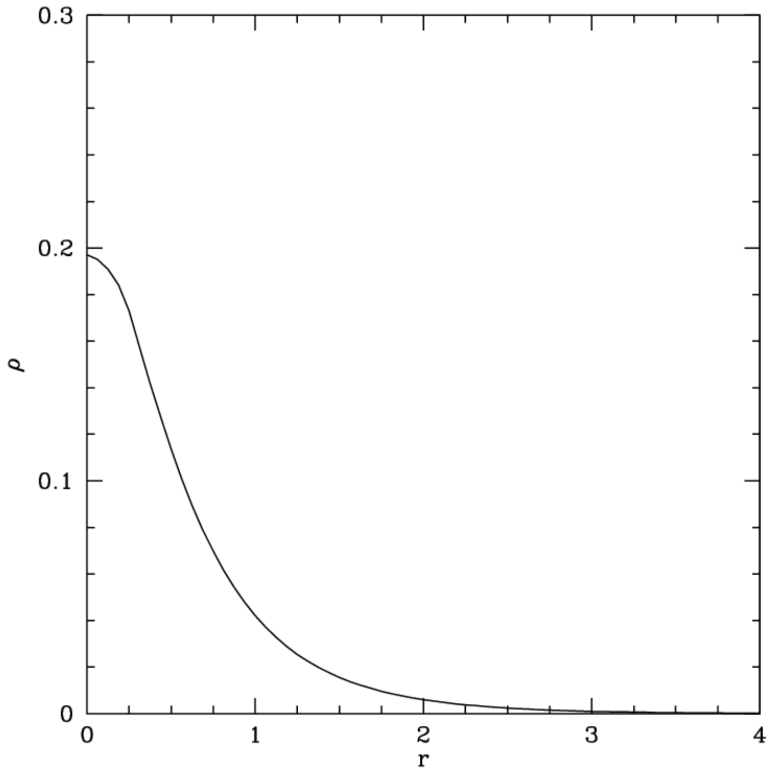
座標空間の境界条件は孤立境界条件

- **その他:**

Virial 平衡にある自己重力系

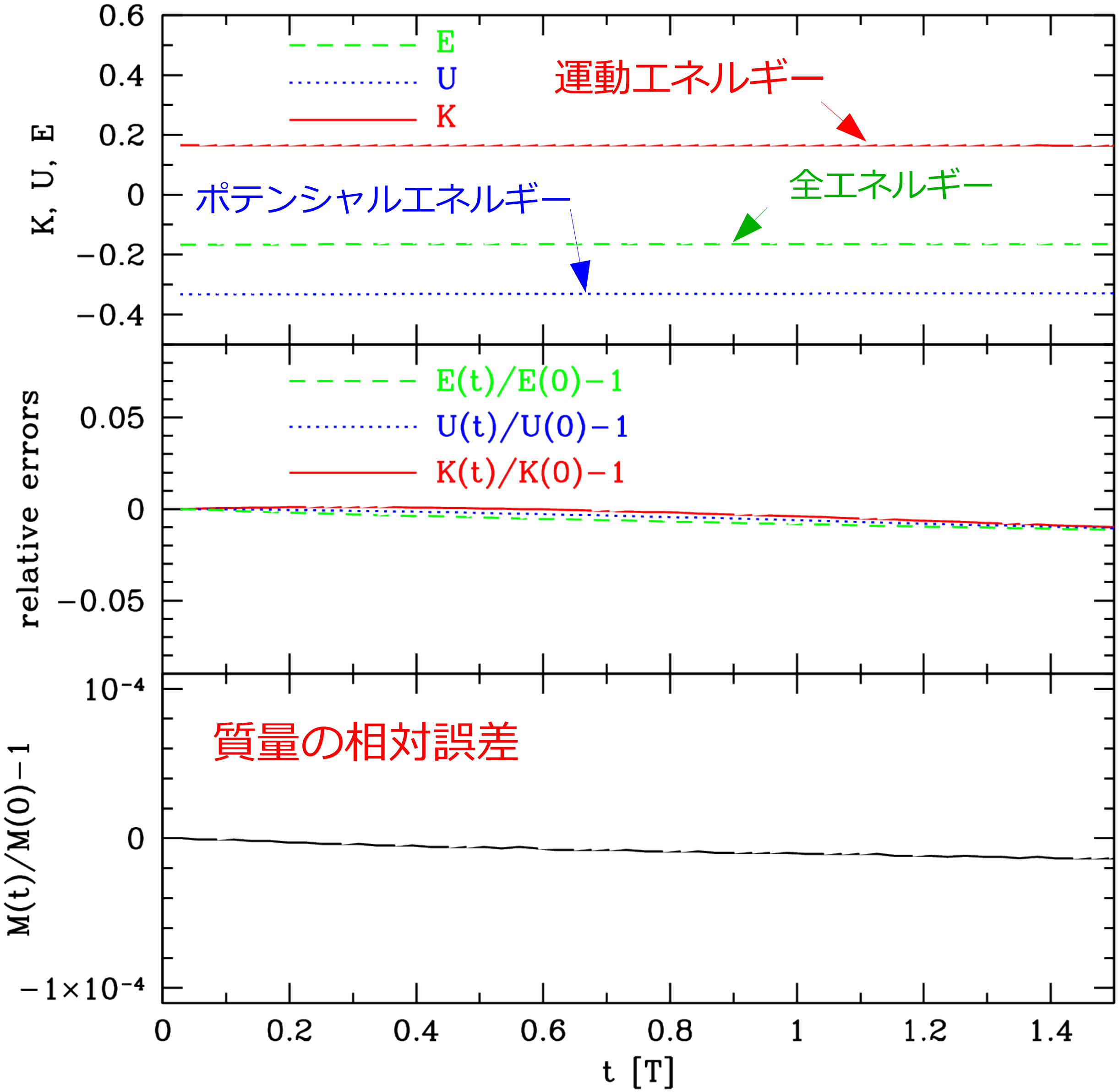
↓

Vlasov-Poisson方程式の定常解



Vlasov-Poisson solver の時間積分の精度のチェック

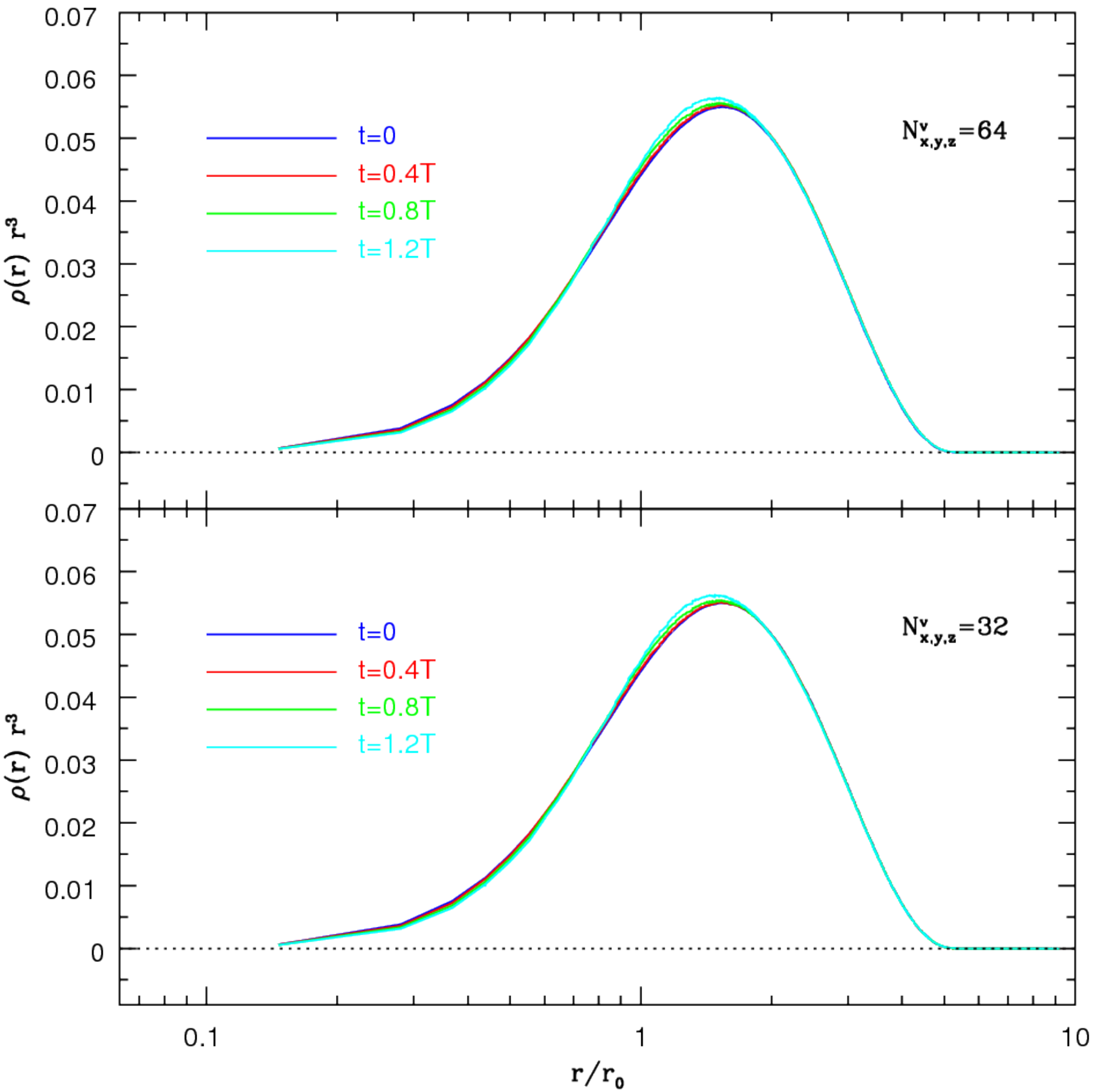
King Sphere



時間 [dynamical time]

- 運動エネルギー、重力ポテンシャルの時間変動は最大1%程度
- 全力学的エネルギーの誤差も1%程度
- 全質量はよく保存している

King Sphere

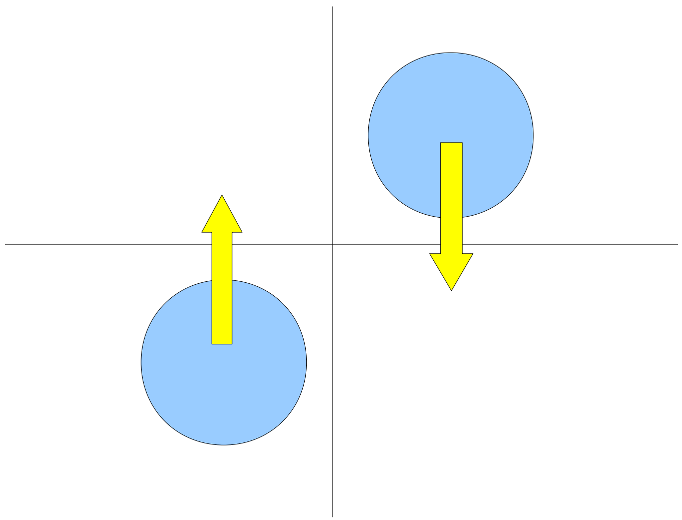


半径

- King sphere の質量分布の時間発展
- 力学時間に亘ってほとんど変化しない
- 中心付近から外側に向かって若干の質量移動
- コア半径付近は10メッシュぐらいしかない。ちゃんと平衡状態を再現できていないと思われる。

Collision of Two King Spheres

- 初期条件

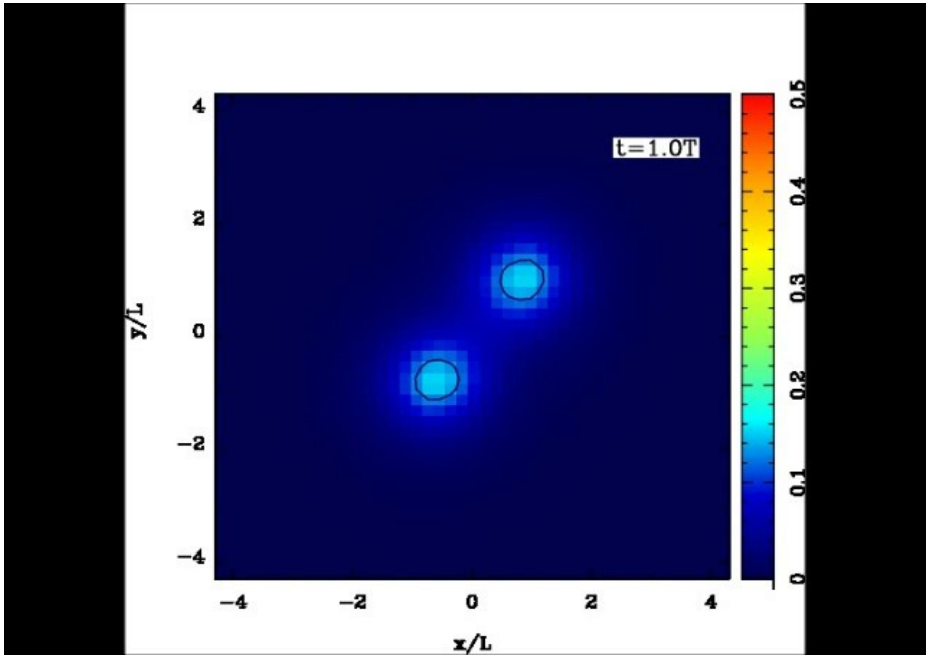


- 前のテストで使ったKing球2個を相対速度を持たせてオフセット衝突させる。
- メッシュ数は座標空間64^3、速度空間64^3

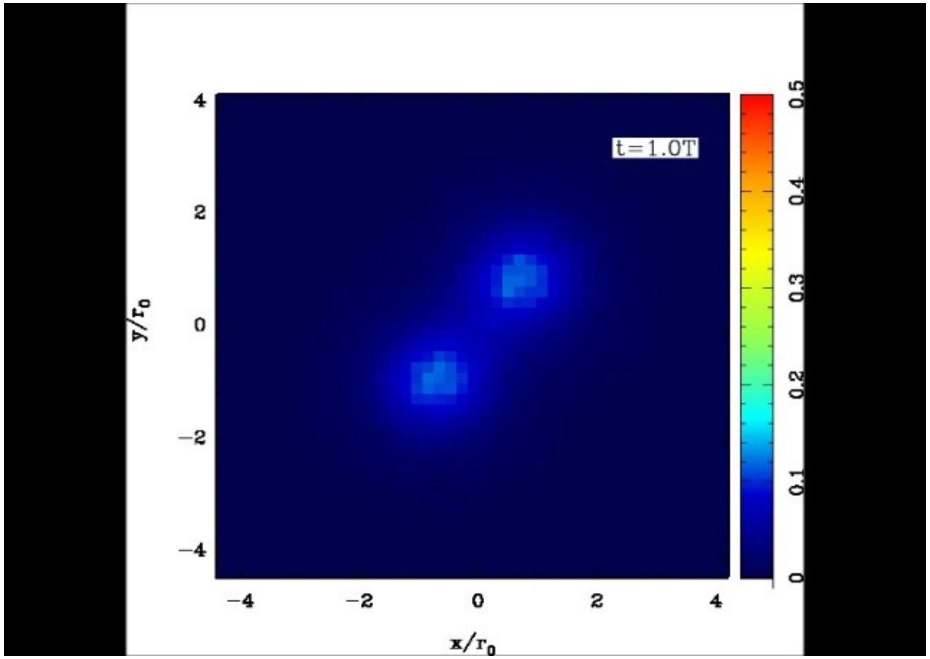
- 比較のためのN体シミュレーション
  - King sphere 1つを100万粒子で表した初期条件を用意
  - Particle-Mesh法で計算 ← Poisson solverは同じもの。メッシュ数も同じ。

Collision of Two King Spheres

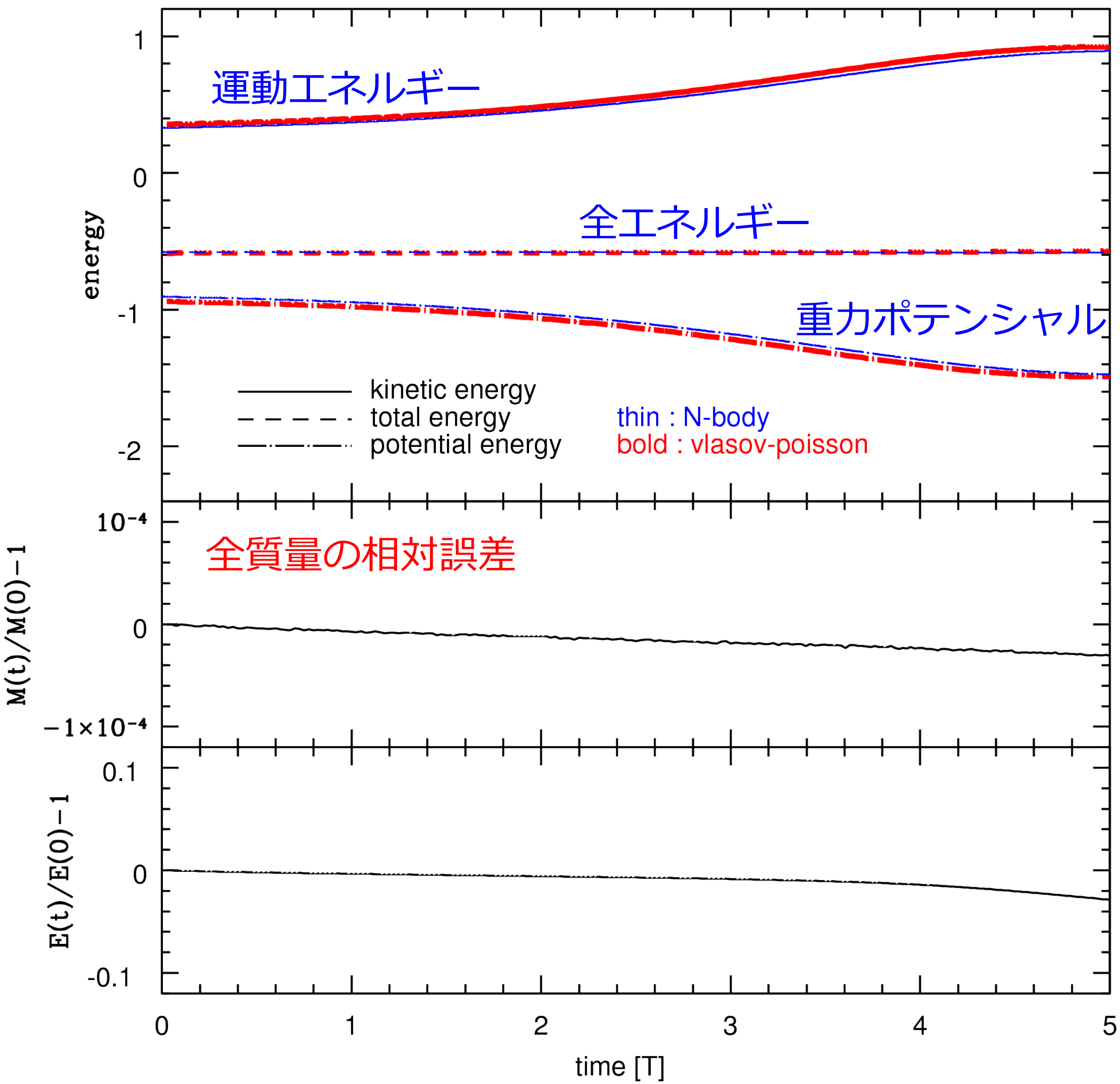
Vlasov simulation



N-body simulation



Collision of Two King Spheres



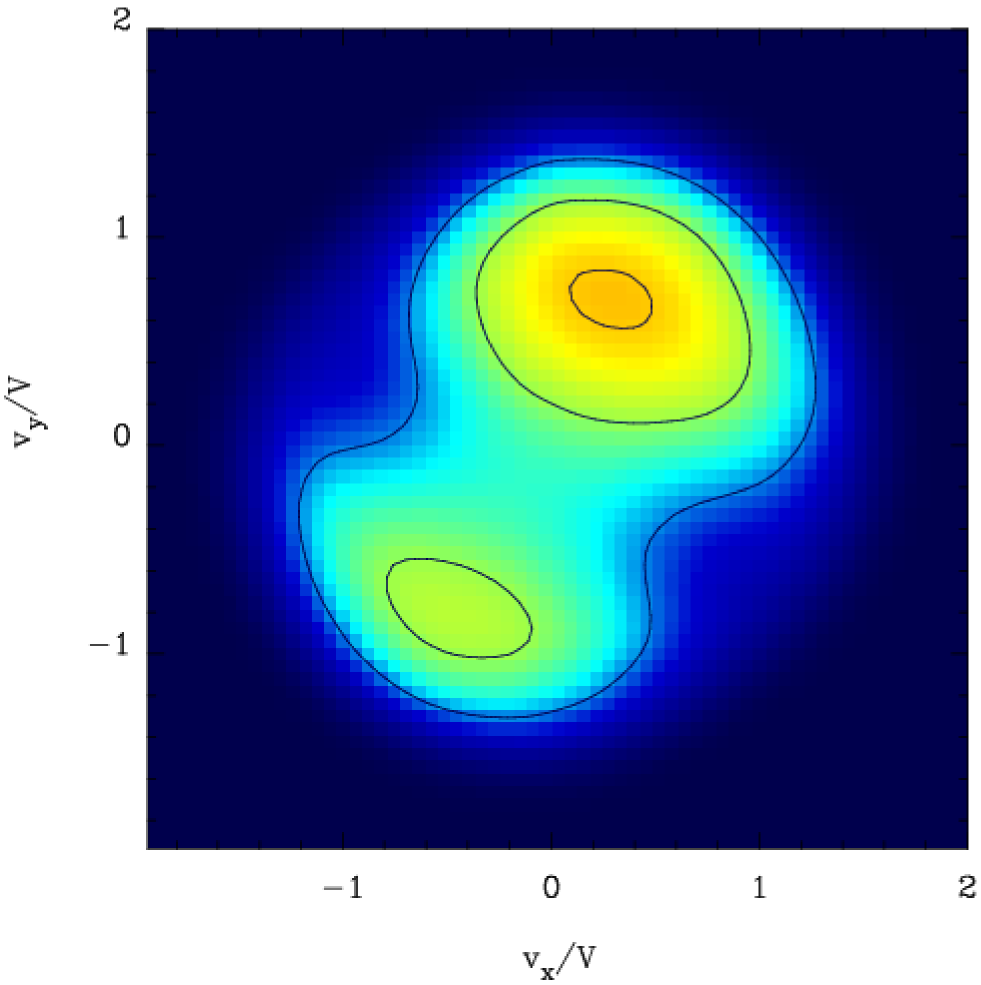
時間 [dynamical time]

- 振る舞いはN体シミュレーションとよく一致
- 質量保存はほぼOK
- エネルギー保存は t<4.5Tまでは概ね1%以内の相対誤差で成り立っている
- 運動エネルギーが最大となるところで分布関数が速度空間からはみ出している為、エネルギー保存の誤差が大きくなっている。

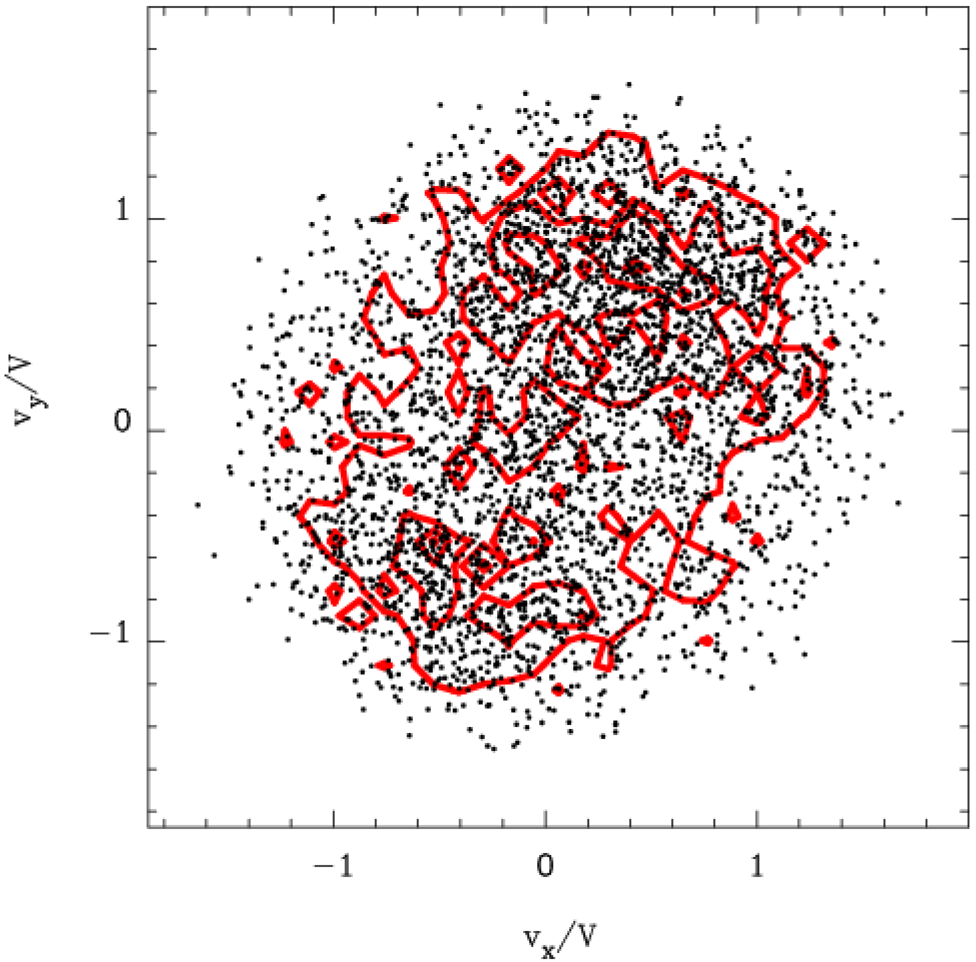
Velocity Distribution

二つのKing球の最接近時における、系の重心付近の速度分布

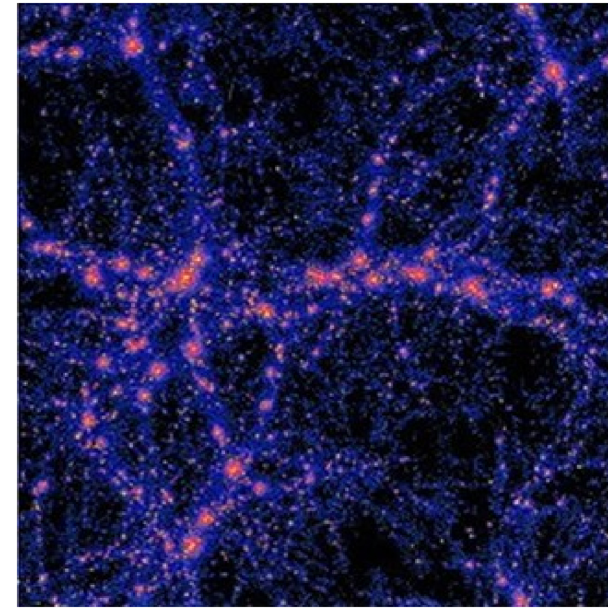
Vlasov simulation



N-body simulation



宇宙の大規模構造形成における
ニュートリノの振る舞い



▶ ニュートリノの役割

- free streaming による密度揺らぎの Landau damping

$$\sigma_v = 165.7(1+z)\left(\frac{m_\nu}{1\mathrm{eV}}\right)^{-1}\mathrm{km/s}$$

この damping は銀河赤方偏移探査で同定可能

⟶ ニュートリノ質量を天文学的な観測によって決定可能

素粒子実験では、質量差やmixing angleしかわからない

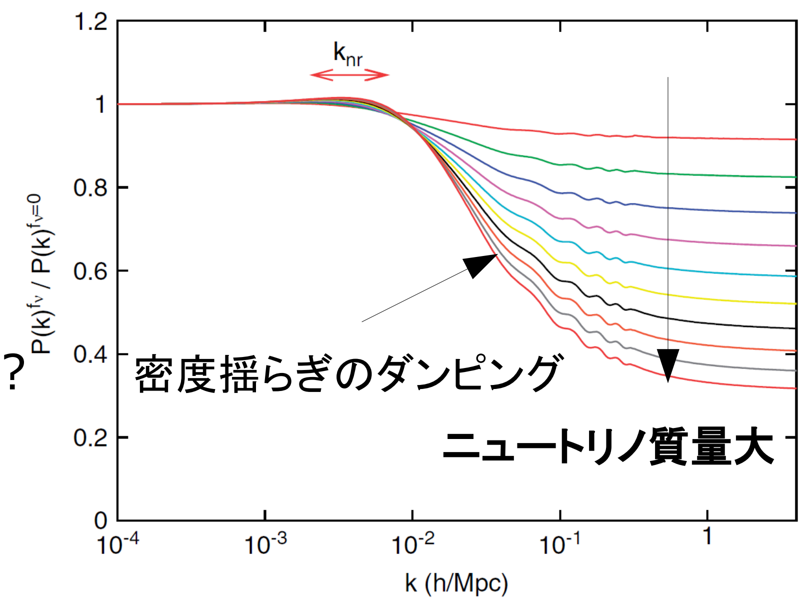
- 非線形領域での dark matter halo 形成への影響

球対称に近いDM haloの形成は抑制される。

Ichiki & Takada 2012

filament / sheet-like structure は逆に形成されやくなる？

Song & Lee 2011

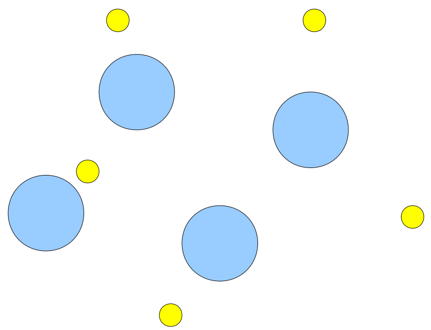


N体計算ではダメか？

▶ 速度分散が大きい

free streaming による無衝突減衰がちゃんと解けない

初期のパワースペクトルで入れるだけではダメ



▶ CDMに比べて密度が極めて小さい

1粒子質量の大きく異なる2成分のN体計算

CDMの粒子にニュートリノ粒子が追随してしまう。

▶ Vlasov方程式なら大丈夫

CDMは”cold”なので、N体シミュレーションで良いであろう

ニュートリノの運動論はVlasovシミュレーションで計算

CDM(N体)＋ニュートリノ(Vlasov)の2成分シミュレーション

まとめ

- Vlasov-Poisson方程式系の6次元位相空間での数値シミュレーションを達成
- 少なくとも宇宙物理学的には、満足できる精度で正しく解けているように見える

  質量保存、エネルギー保存
- 当面の目標はstellar dynamics と宇宙大規模構造形成におけるニュートリノ減衰

  CDM(N体)+ニュートリノ(Vlasov)のハイブリッドシミュレーション
- 恐らくVlasov-Poisson系はBoltzmann方程式の一番簡単な応用

  無衝突＋force term が運動量に依存しない
- 他に宇宙物理的に需要があるのは、Vlasov-Maxwellシミュレーション

  無衝突衝撃波、粒子加速、磁気リコネクション

  Lorentz forceの取り扱いが厄介 ⇒ MMAスキーム （この後の簑島君のトーク）