ダイナモの数値計算

政田洋平（愛知教育大学）

「磁気流体プラズマで探る高エネルギー天体現象」
@海洋研究開発機構東京事務所 (2017年8月28日-39日)

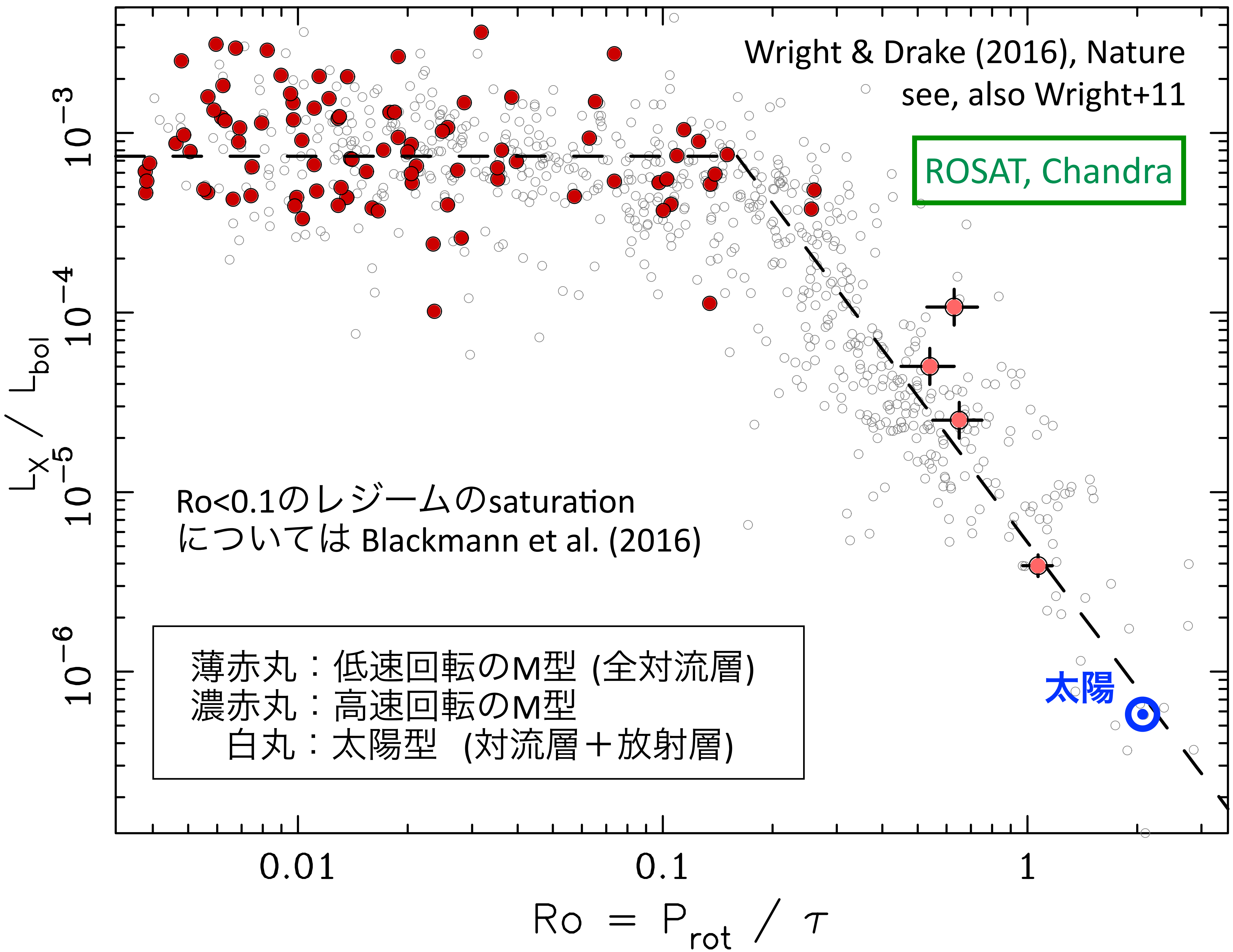
Outline　今日の切り口：ロスビー数とダイナモ

1. 太陽型星の磁気活動のロスビー数依存性
2. ダイナモの数値計算の現状
3. 対流ダイナモのロスビー数依存性

1. 太陽型星の磁気活動のロスビー数依存性

〜 なぜロスビー数に注目するのか？ 〜

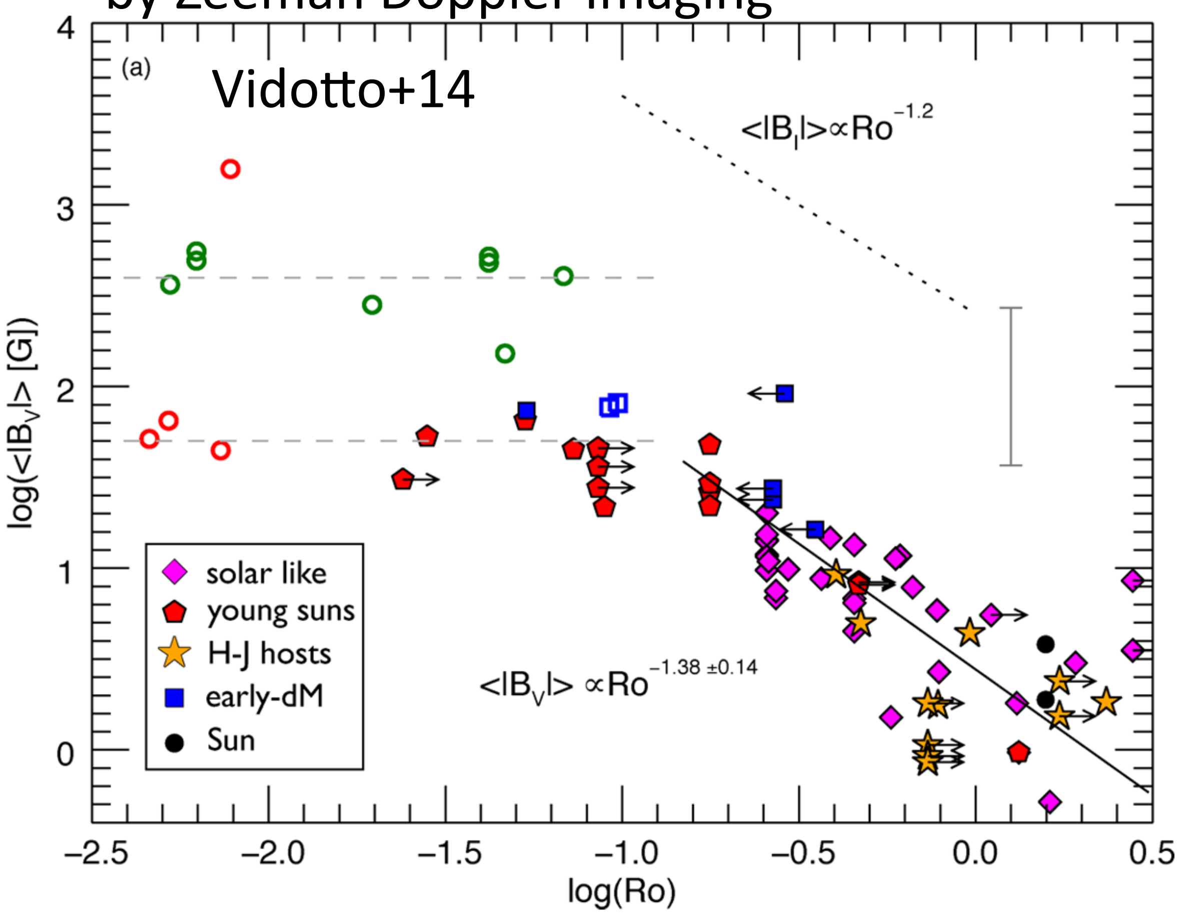
恒星の活動性（X線光度）とロスビー数

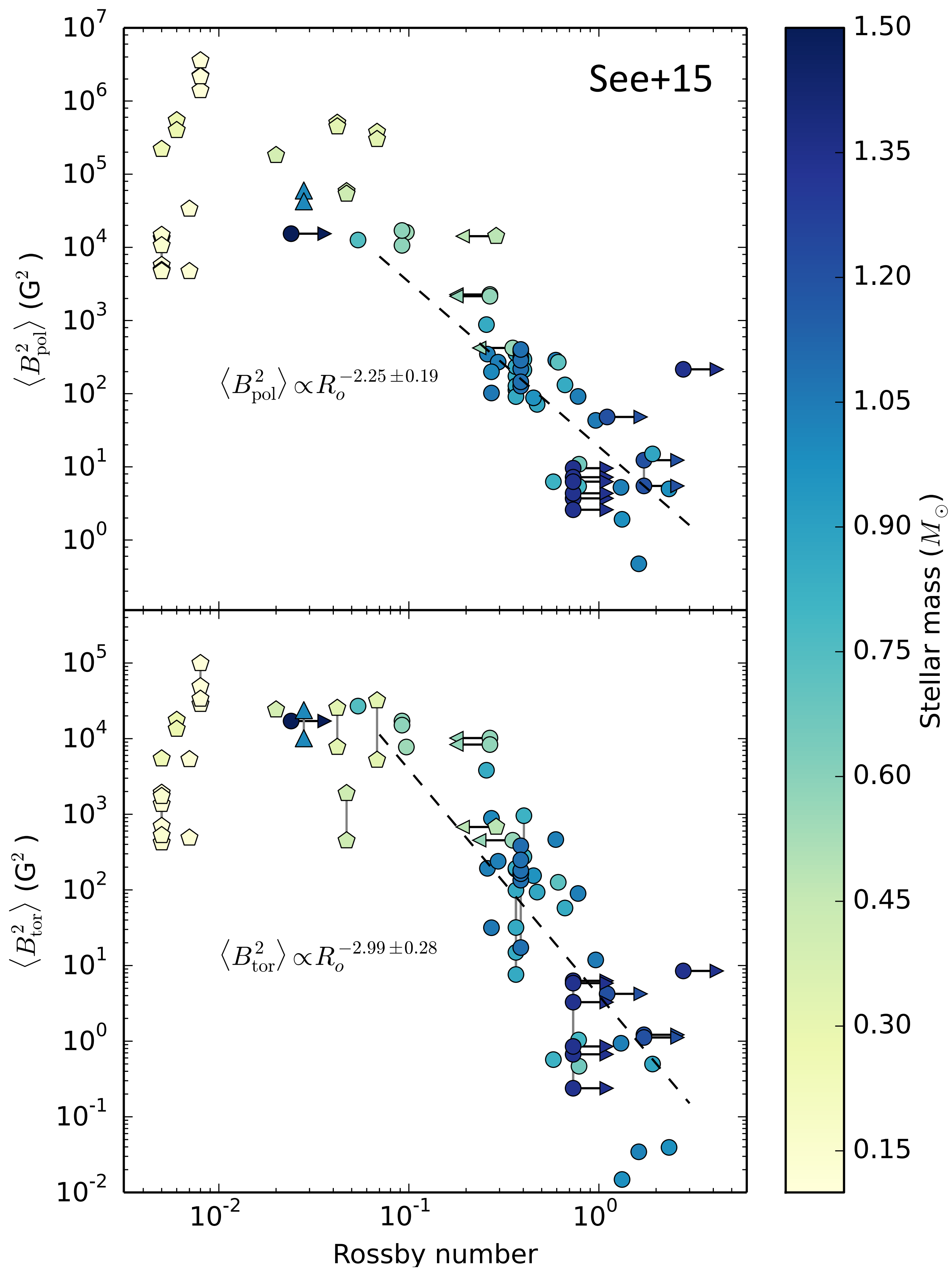


- 内部構造に依らずRo（ロスビー数）が恒星の活動性の指標
- Roが小さいほど磁気活動（～ダイナモ）は活発

恒星の磁場強度とロスビー数

by Zeeman Doppler Imaging





- **磁場強度のRo依存性の観測も進展：**
  - **平均磁場強度　$B_{ave} \propto Ro^{-1.4}$**
    (Vidotto+14)
  - **ポロイダル磁場 $B_p^2 \propto Ro^{-2.3}$ のエネルギー** (See+15)
  - **トロイダル磁場 $B_t^2 \propto Ro^{-3.0}$ のエネルギー** (See+15)

若い恒星ほどトロイダル磁場が支配的に

Rossby数とは？

$$\rho(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \underline{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}} + \underline{2\Omega\times\mathbf{u}}) = -\nabla p$$

$$\mathrm{Ro} \equiv \frac{V}{2\Omega L} \sim \frac{\text{慣性力}\ (V^2/L)}{\text{コリオリ力}\ (2\Omega V)}$$

V・・・系の典型的な速度
Ω・・・系の角速度
L・・・系の典型的な空間スケール

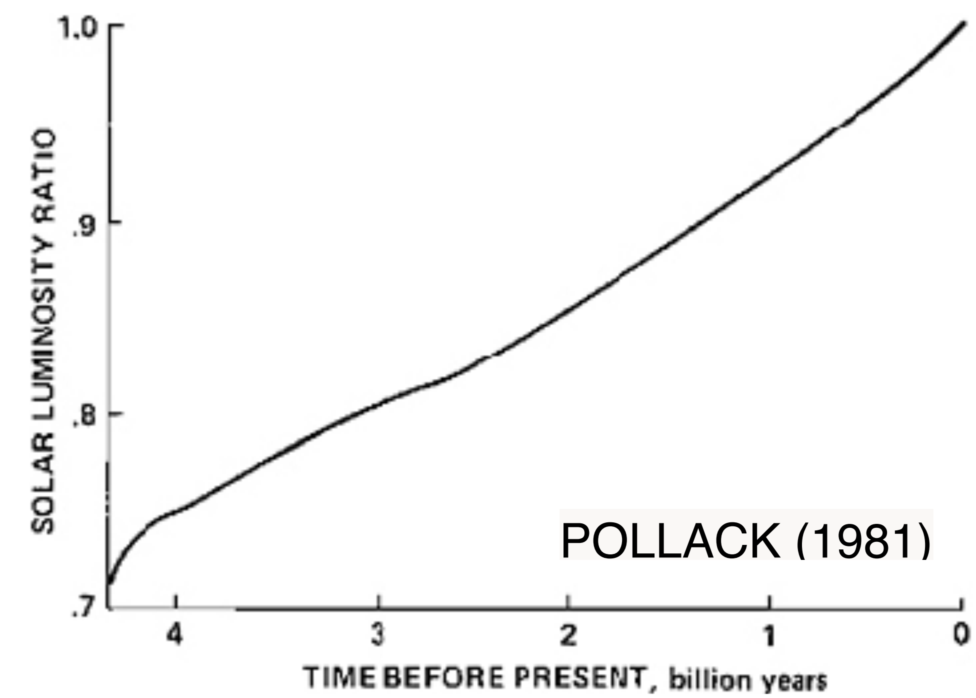
- 恒星進化とロスビー数の関係

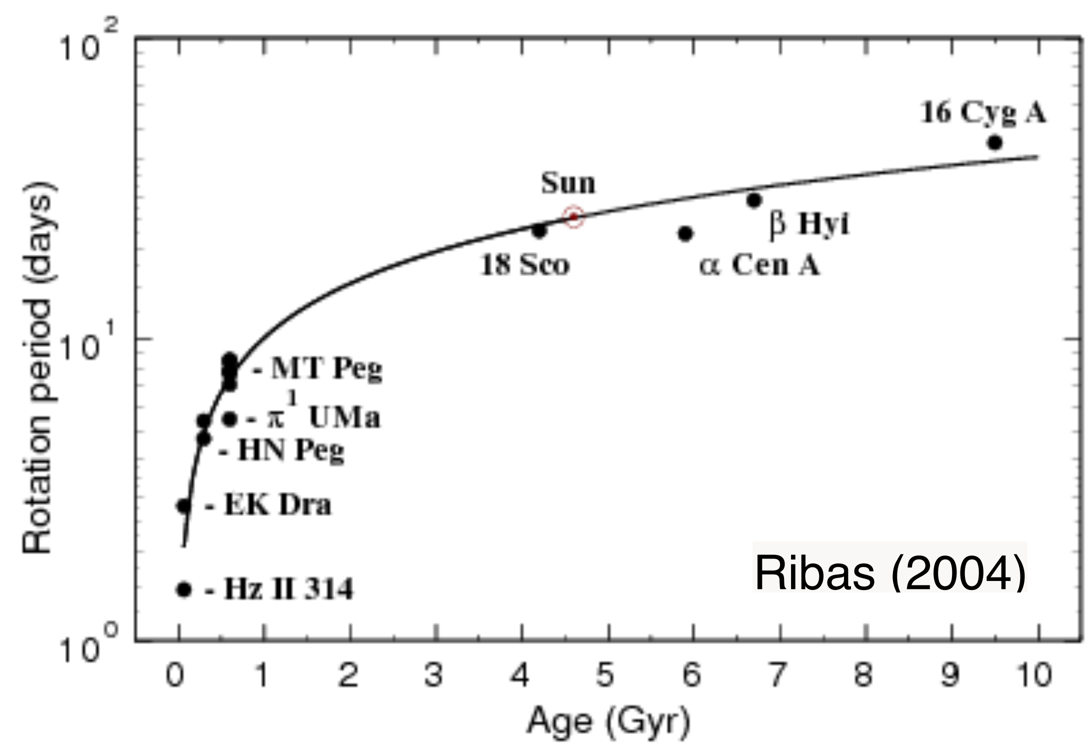
V〜 対流速度 $\propto$ 星の光度 $L^{1/2}$

- 太陽では過去から現在までにLは30%増加
  → Vの変動は高々10%程度
- 星の質量光度関係： $L \propto M^4$
  → Vは星の質量の違いに敏感

Ω〜 自転角速度

- 過去から現在までに1桁程度減少
- Magnetic braking



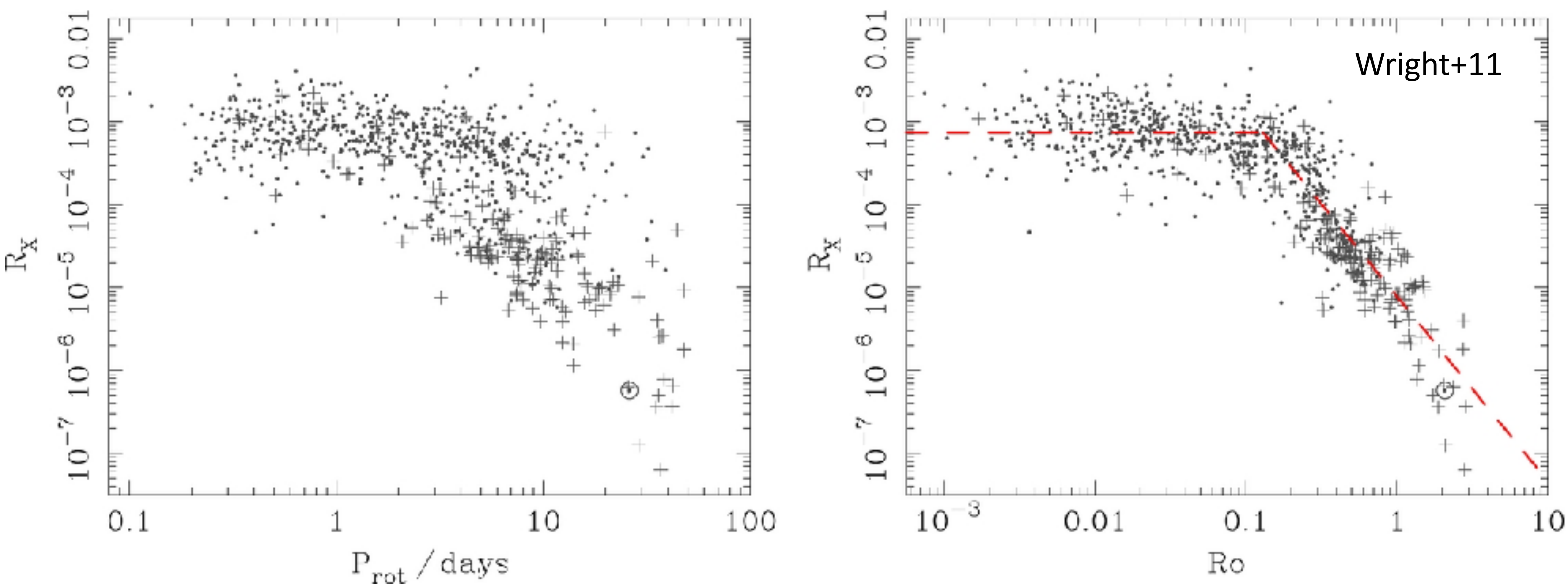


Rossby数とは？

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \underline{\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}} + \underline{2\Omega\times\mathbf{u}}\right) = -\nabla p$$

$$\mathrm{Ro} \equiv \frac{V}{2\Omega L} \sim \frac{\text{慣性力}\ (V^2/L)}{\text{コリオリ力}\ (2\Omega V)}$$

V・・・系の典型的な速度
Ω・・・系の角速度
L・・・系の典型的な空間スケール



横軸をRoにする（Vを考慮する）ことで星の質量の違いを補正

Rossby数とダイナモが関係する理由

$$\mathrm{Ro} \equiv \frac{V}{2\Omega l} \sim \frac{\text{慣性力}\ (V^2/l)}{\text{コリオリ力}\ (2\Omega V)}$$

$$\sim \frac{V^2/l}{\omega \cdot V} \propto \frac{\eta_{\mathrm{t}} k}{\alpha} = D^{-1}$$

（Dはダイナモ数）

ここで $\alpha \sim \tau_c\, \omega \cdot V$　（乱流α効果：磁場の生成を担う効果）

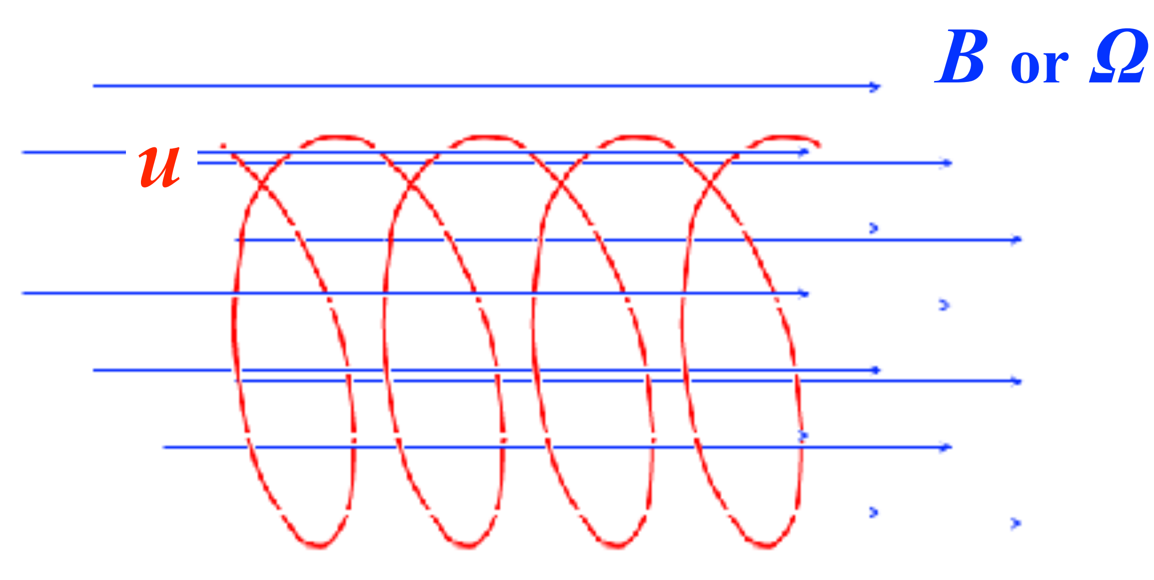
$\eta_t \sim \tau_c\, V^2$　（乱流磁気拡散効果：磁場の散逸を担う効果）

Roは磁場の生成・散逸効果の比

- 回転と対流の相互作用

コリオリ力：	analogy	ローレンツ力：
$F_c \propto u \times \Omega$		$F_L \propto u \times B$
$\lambda_h \propto u/\Omega$		$r_{gyro} \propto u/B$

→ 渦度 $\omega = \mathrm{rot}\ u \sim u/\lambda_h \propto \Omega$



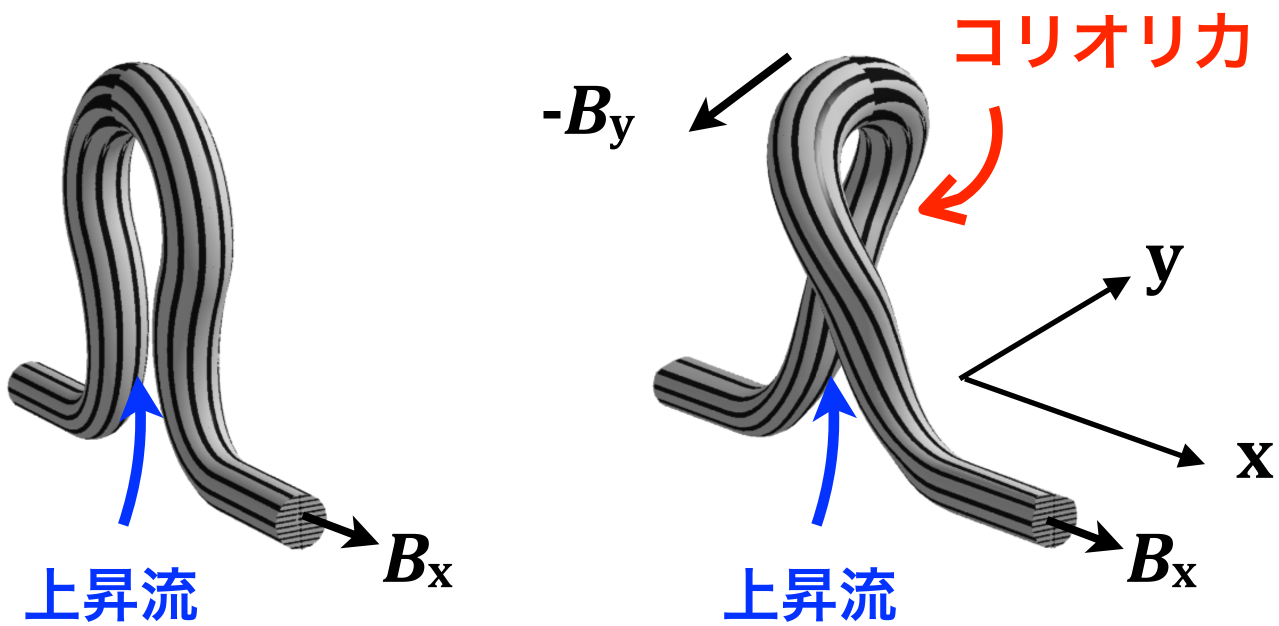
乱流α効果と乱流磁気拡散 (横井さんが説明して下さった時は飛ばす)

$$\mathrm{Ro} \equiv \frac{V}{2\Omega l} \sim \frac{\text{慣性力}\ (V^2/l)}{\text{コリオリ力}\ (2\Omega V)}$$

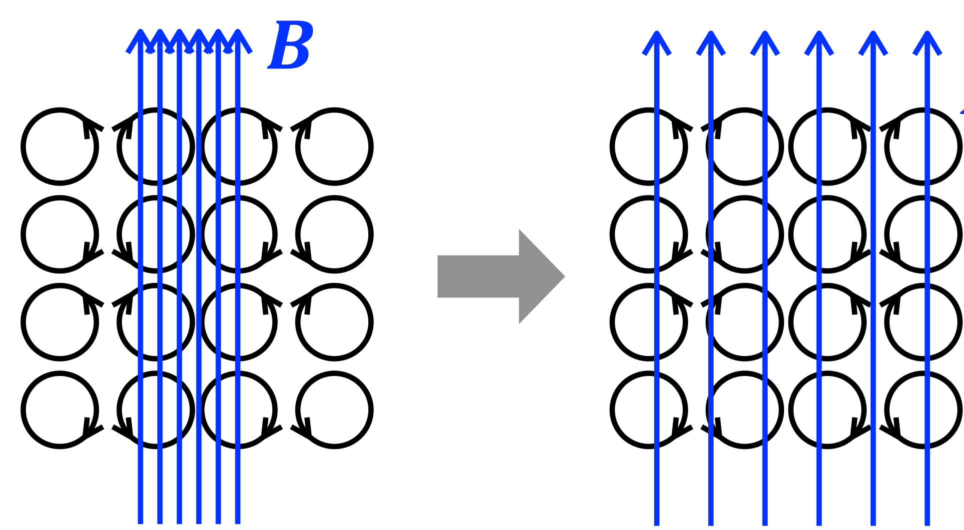
$$\sim \frac{V^2/l}{\omega \cdot V} \propto \frac{\eta_t k}{\alpha} = D^{-1}$$

(Dはダイナモ数)

● 乱流α効果



● 乱流磁気拡散

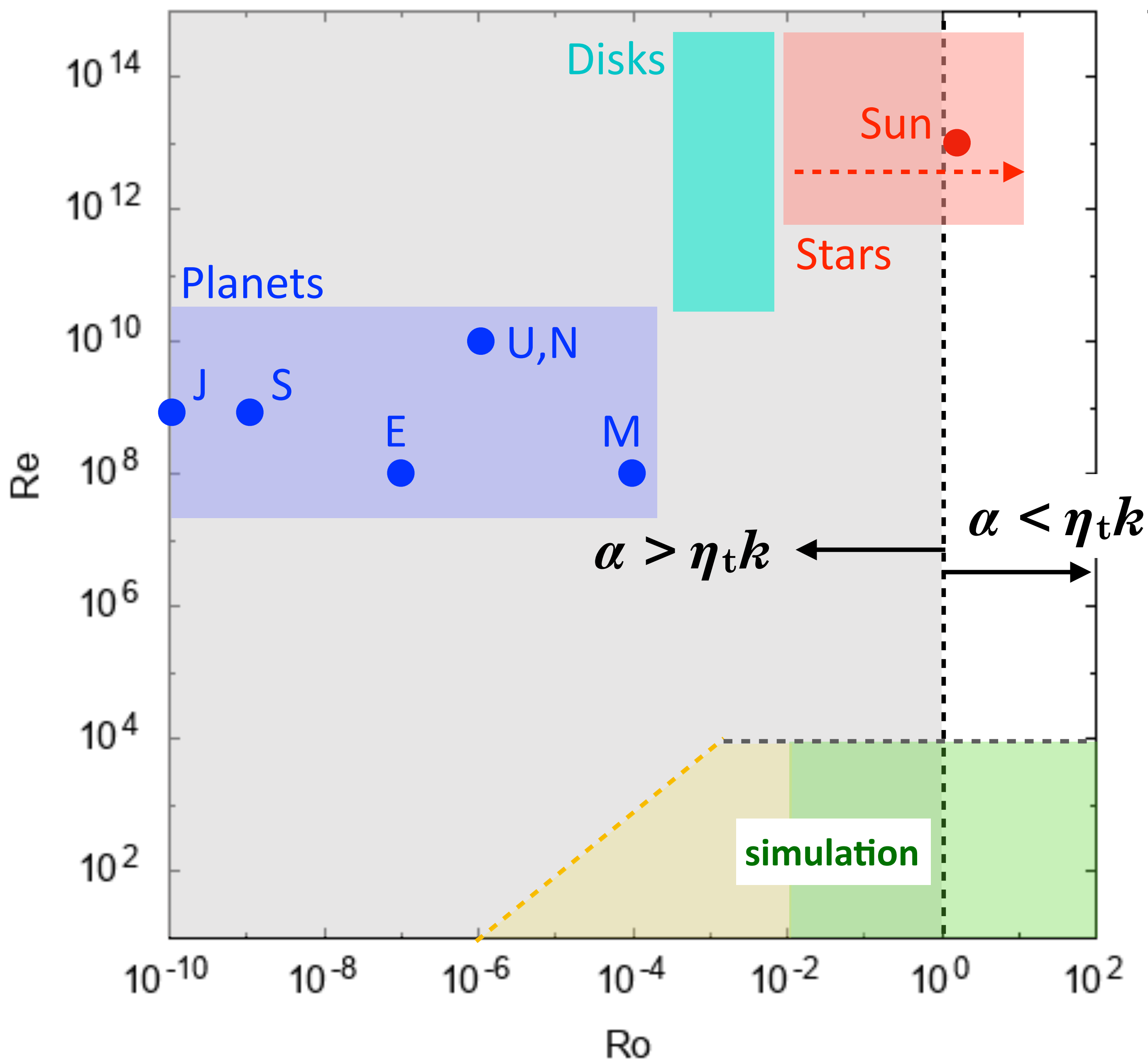


→ 降着円盤のα粘性と考え方は同じ

$$\alpha = \tau_c\ \omega \cdot V$$ 相関時間 τ_cは対流ターンオーバー時間 ($\sim H_p/V$)

$$\eta_t k = \tau_c V^2/H_p$$ 空間スケール$1/k$ は スケールハイト ($\sim H_p$)

天体のRossby数-Reynolds数と数値計算



Dynamo	E	Pr	Pm	Rm	Ro	Re
Mercury	10^{-12}	0.1	10^{-6}	10^2	10^{-4}	10^8
Earth	10^{-15}	0.1	10^{-6}	10^2	10^{-7}	10^8
Jupiter	10^{-19}	0.1	10^{-7}	10^2	10^{-10}	10^9
Ganymede	10^{-13}	0.1	10^{-6}	10^2	10^{-5}	10^8
Saturn	10^{-18}	0.1	10^{-7}	10^2	10^{-9}	10^9
Uranus	10^{-16}	10	10^{-8}	10^2	10^{-6}	10^{10}
Neptune	10^{-16}	10	10^{-8}	10^2	10^{-6}	10^{10}
(ref. Schubert & Soderlund 2011)						
Sun	10^{-13}	10^{-7}	10^{-5}	10^9	10^{-1}	10^{13}
(ref. Kapyla 2011)						

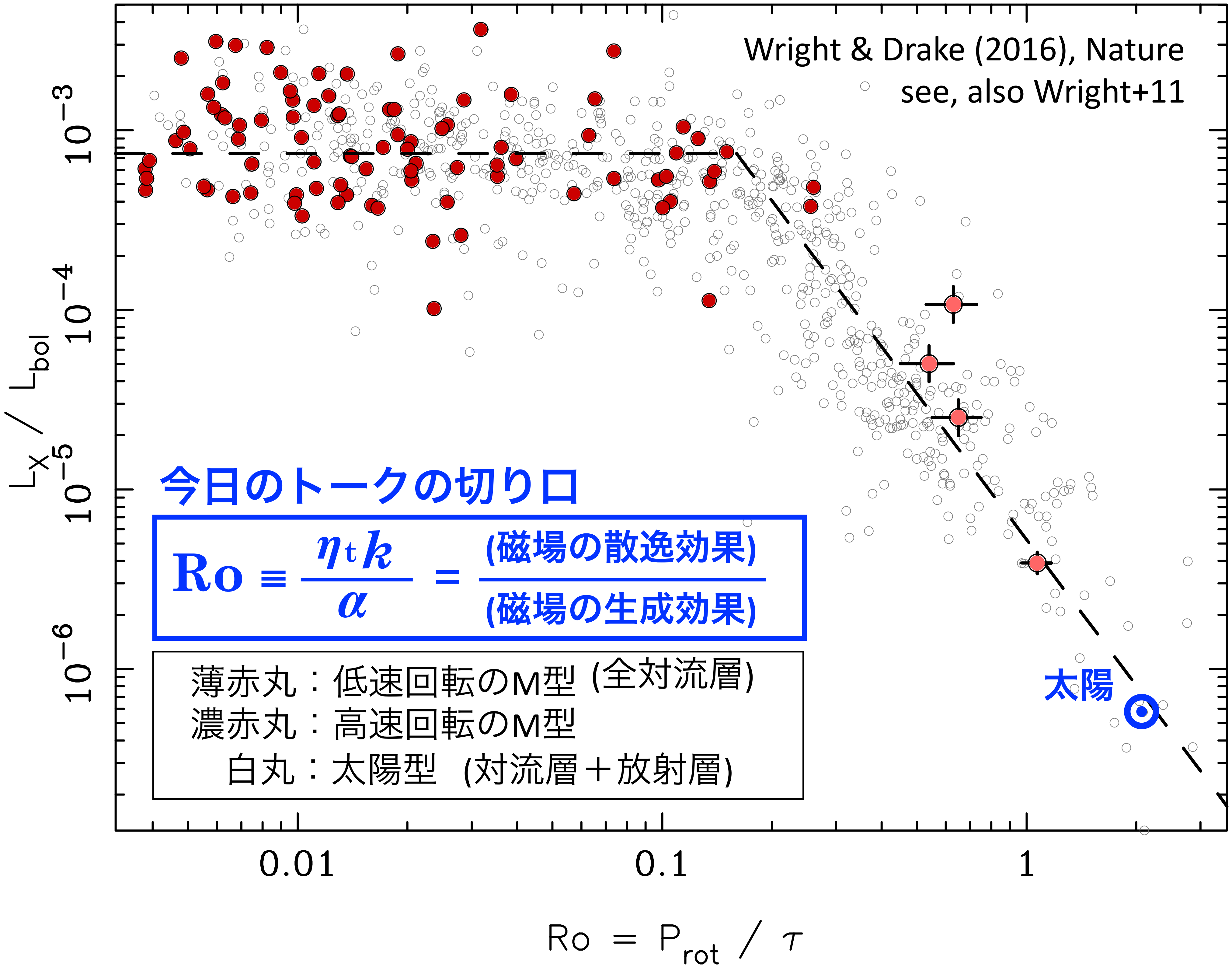
※惑星に比べて太陽では慣性力の寄与が重要

※Ek ～ Ro/Re（図中の黄色点線はEk一定の線）

$$\mathrm{Ro} \equiv \frac{\eta_t k}{\alpha} = \frac{\text{(磁場の散逸効果)}}{\text{(磁場の生成効果)}}$$

- Re-Roの相図上で, 恒星・円盤・惑星はそれぞれ異なるレジームに位置
- 惑星や円盤, 若い恒星 → Roの観点からは比較的ダイナモを起こしやすい
- 太陽はRo $\gtrsim$ 1のレジーム → ダイナモを起こすのが困難
- 現実と数値計算の差は, いずれの天体でも大きい

観測からの示唆：まとめ



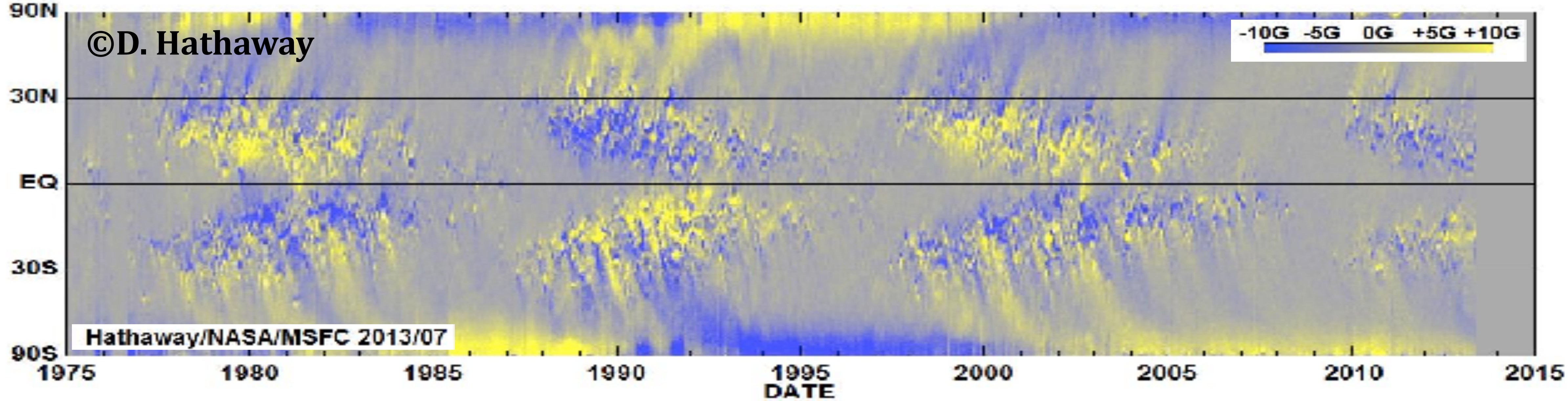
F,G,K,M型の星のダイナモはRoがキーパラメター（Ro > 0.1の範囲）

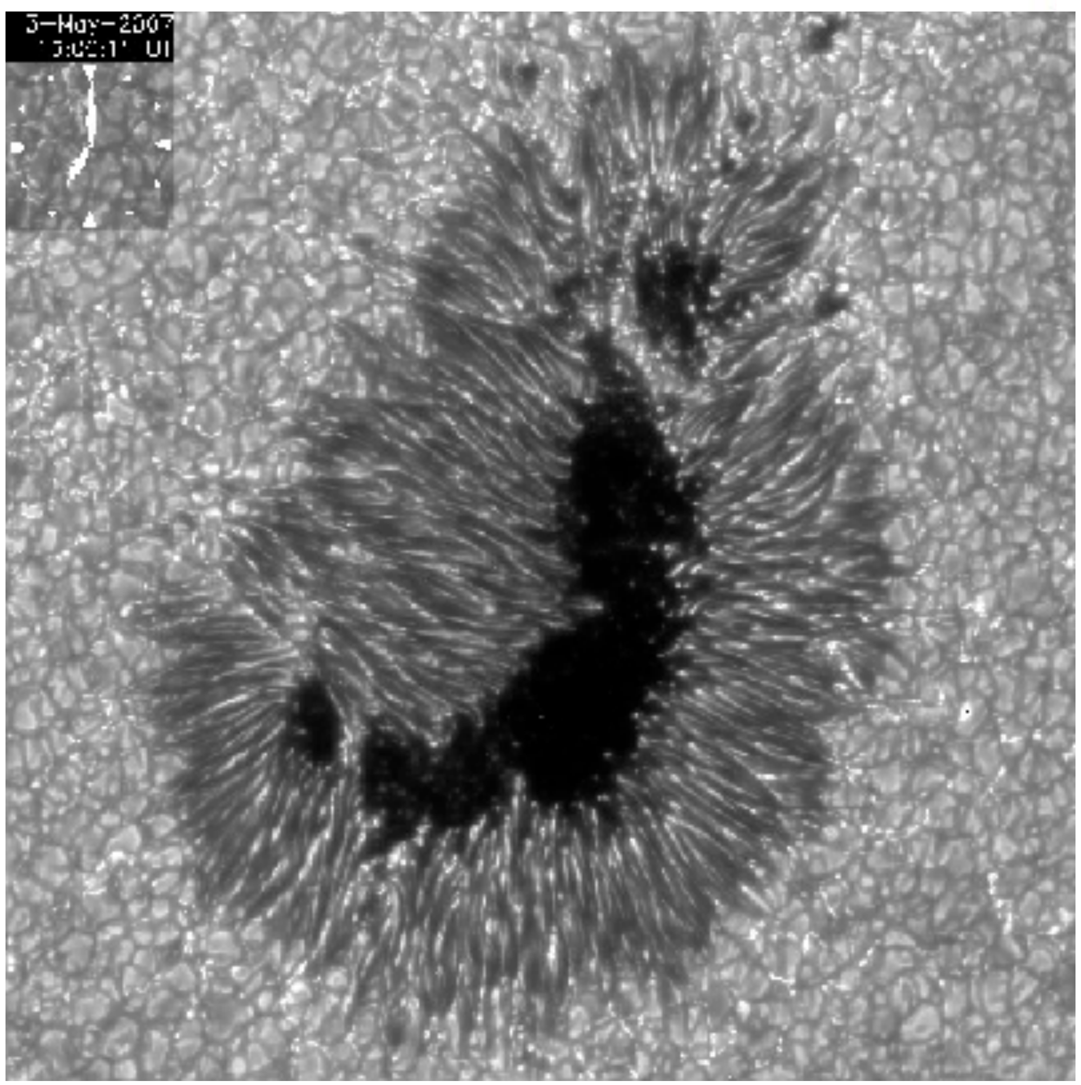
(内部構造や光度[エネルギー注入の大きさ]などには直接的には依らない)

2. ダイナモの数値計算の現状

〜 ロスビー数の観点から 〜

ダイナモの理論・数値計算の目標 ～太陽をベースに～





Hinode SOT © じょうてん

太陽磁場（黒点）の3つの観測的特徴：

①周期性

：11年周期　~~ランダム~~

②大局性

：黒点の構造 » 対流構造

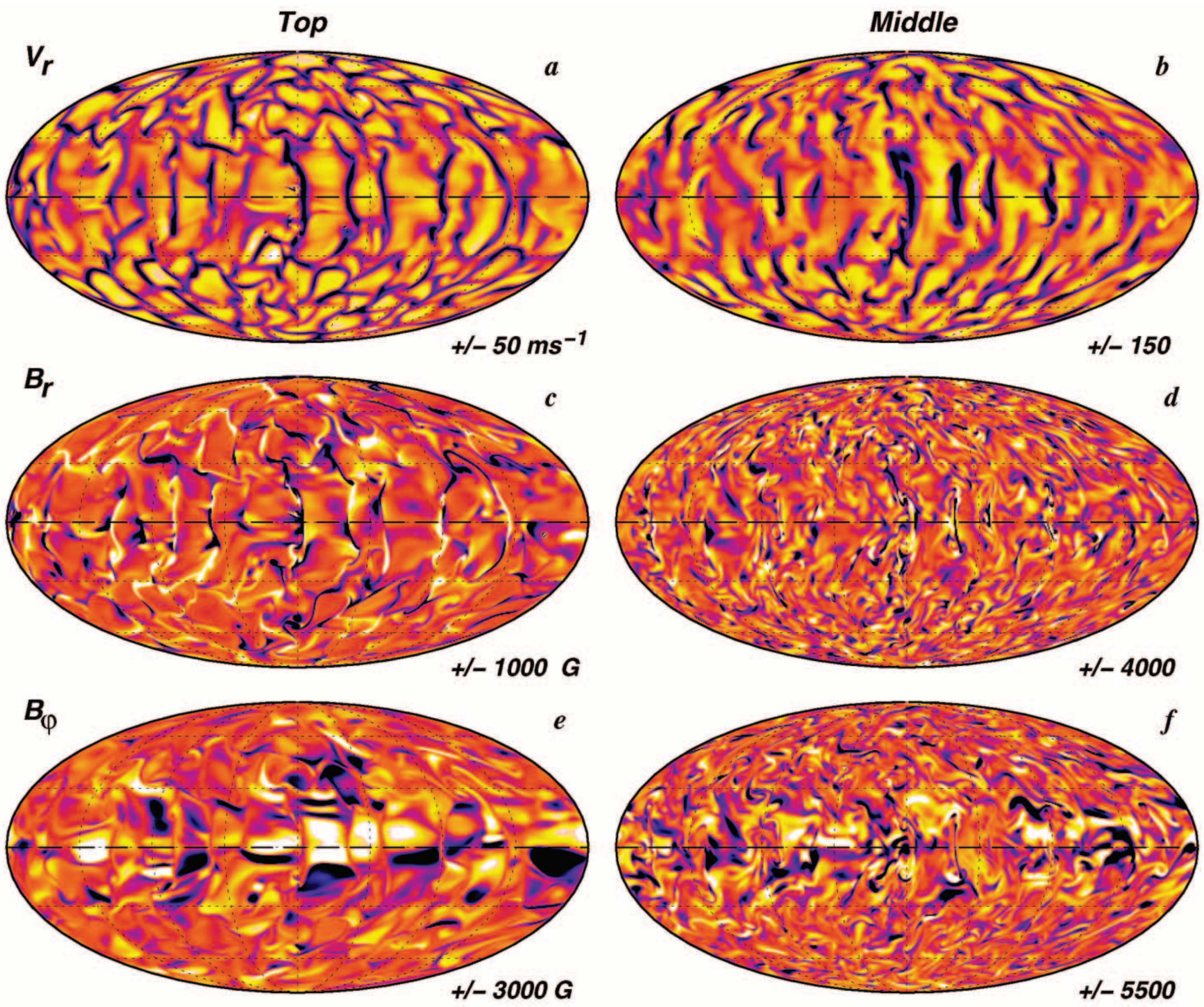
③収束性（集中性）

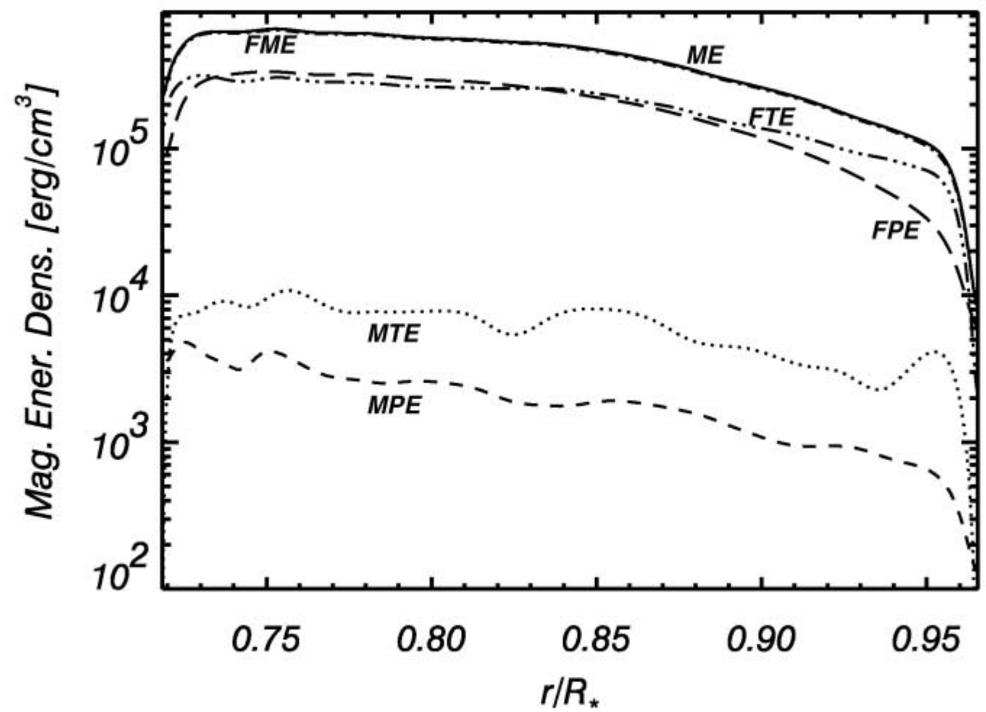
：局在化　~~一様分布(diffuse)~~

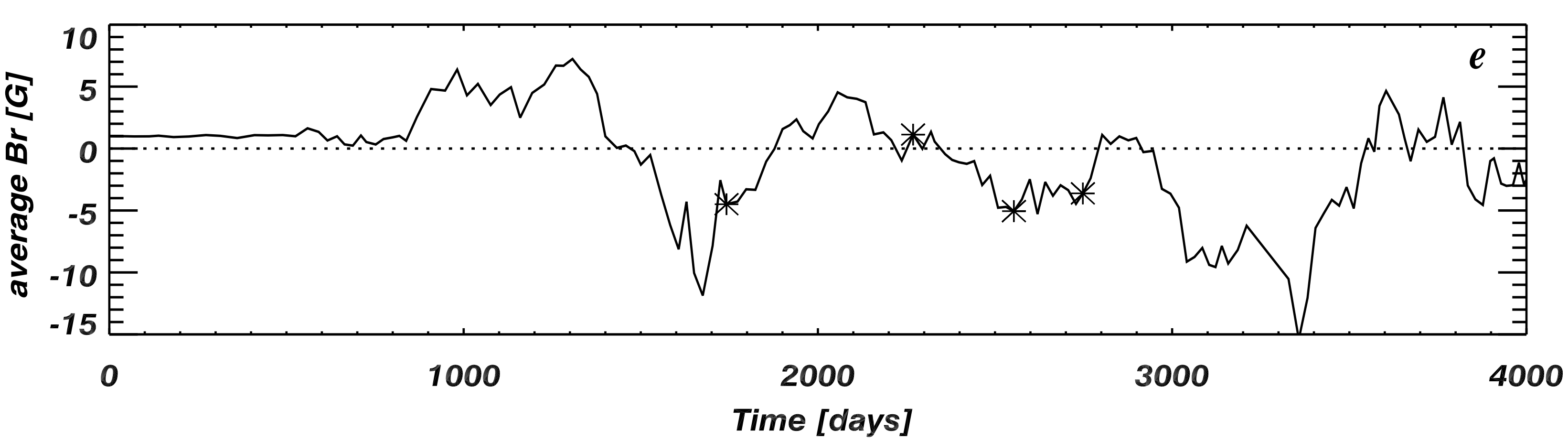
※時空間コヒーレンスの高い磁場の形成機構の解明

※太陽型星のダイナモとも整合する必要性（太陽だけが特別というわけでも無さそう）

太陽ダイナモ計算の先駆け：Brun et al. (2004)







- 現実的太陽内部構造モデルを使った初のMHD計算

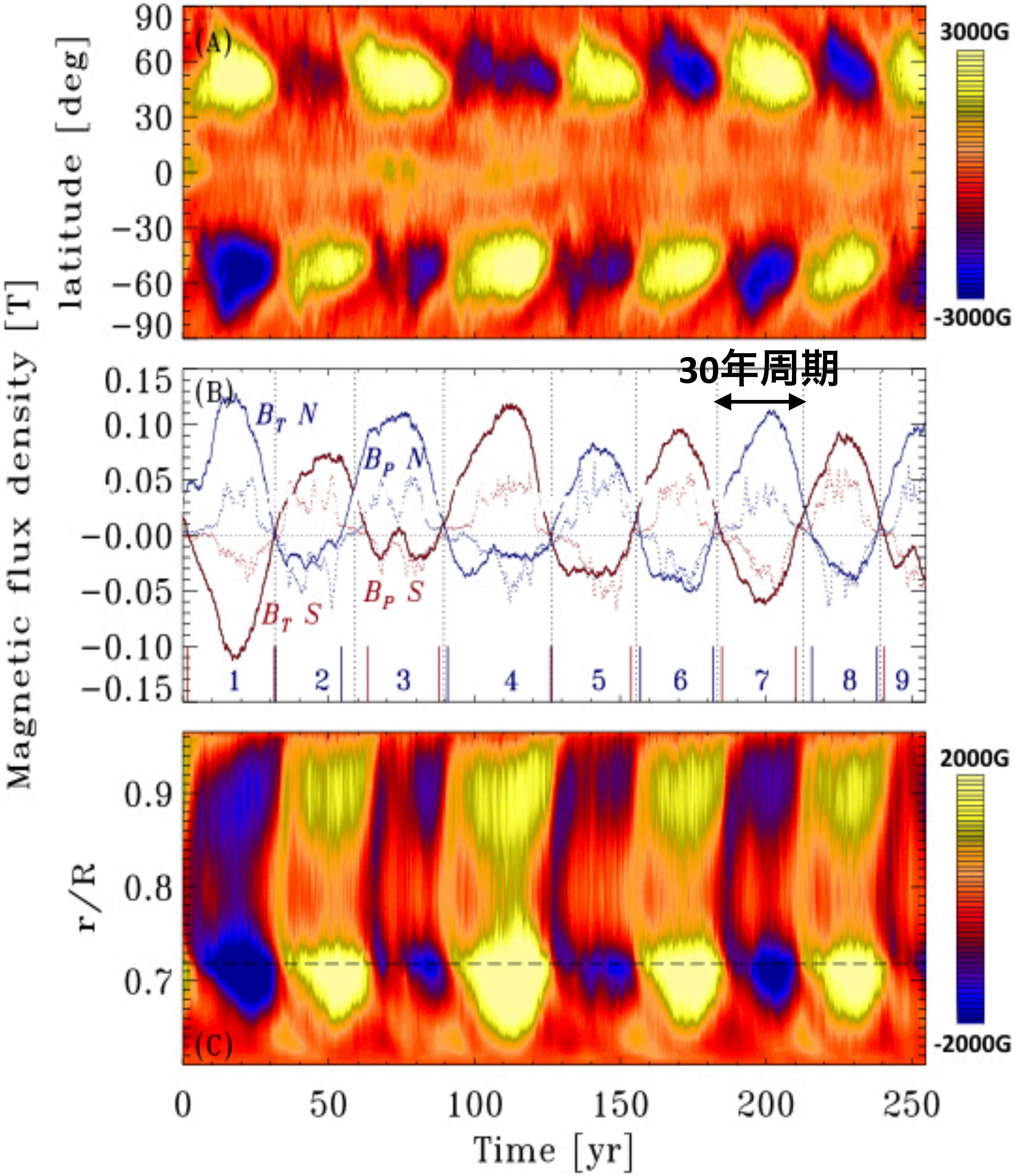
：$\Omega = 1\Omega_{sun}$，$L = 1L_{sun}$

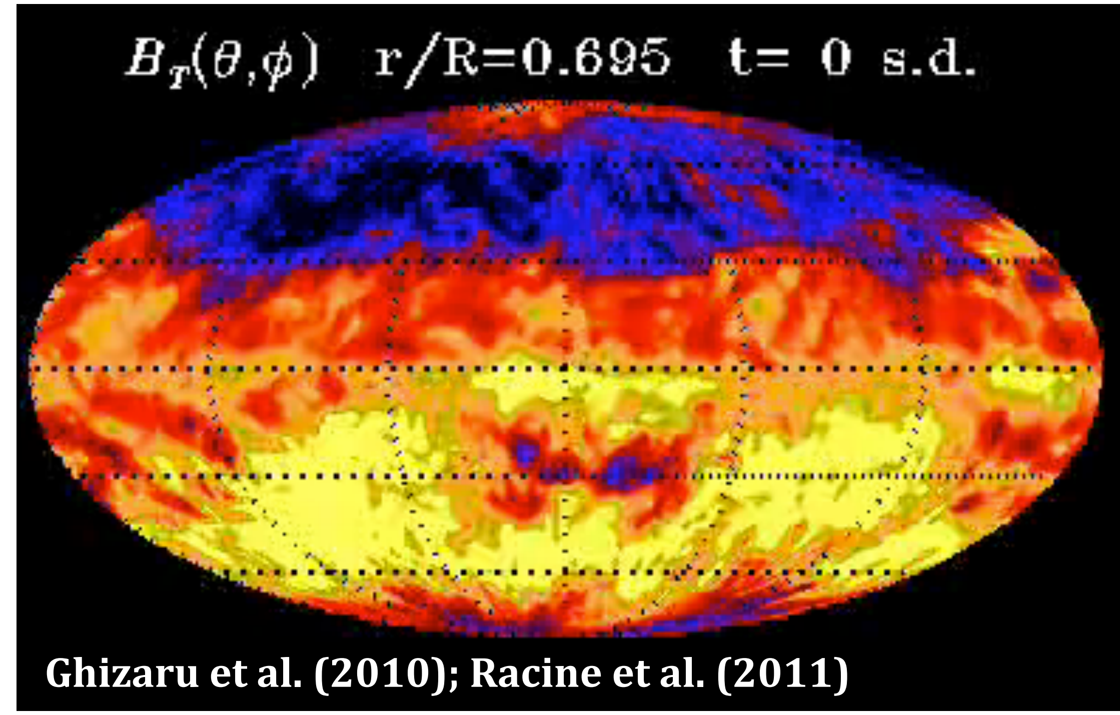
→ Ro = 0.11

- 当時の世界最高解像度計算（128×512×1024）
- 乱流磁場が支配的
- 弱い平均場. 顕著な周期性は無し

2010年代の発展：Ghizaru et al. (2010)

MHD計算で初めて太陽ライクな準周期的な磁場の極性反転の再現に成功





- 現実的太陽内部構造モデル
  - $\Omega = 1\Omega_{sun}$, $L = 1L_{sun}$
  - 乱流モデル（sub-grid scale）入りLES
  - 低解像度・長時間計算
  - 人工的な冷却関数

$$\frac{D\theta'}{Dt} = -\mathbf{v} \cdot \nabla\theta_e + \mathcal{H} - \alpha\theta',$$

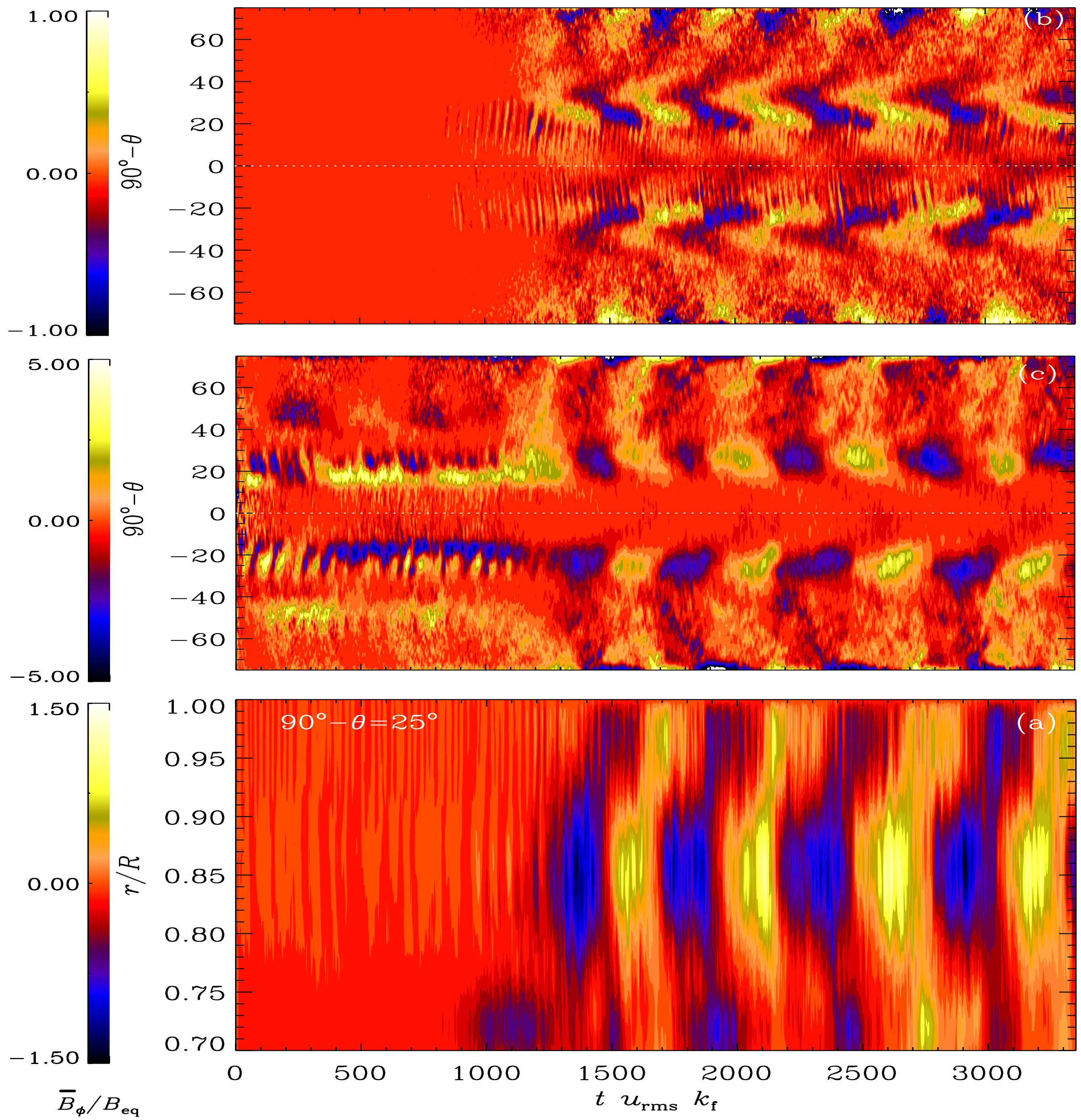
→ 遅い対流速度

$$\mathrm{Ro} \equiv \frac{V}{2\Omega\, l}$$

→ Vが小さい, つまり
Roの小さい計算

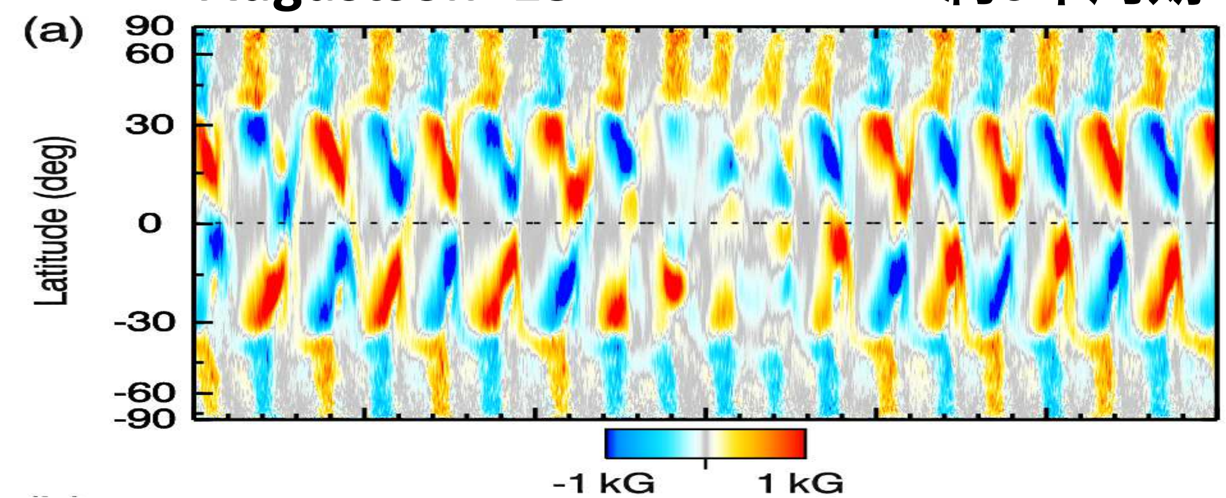
Ghizaru et al. (2010)以後の発展①

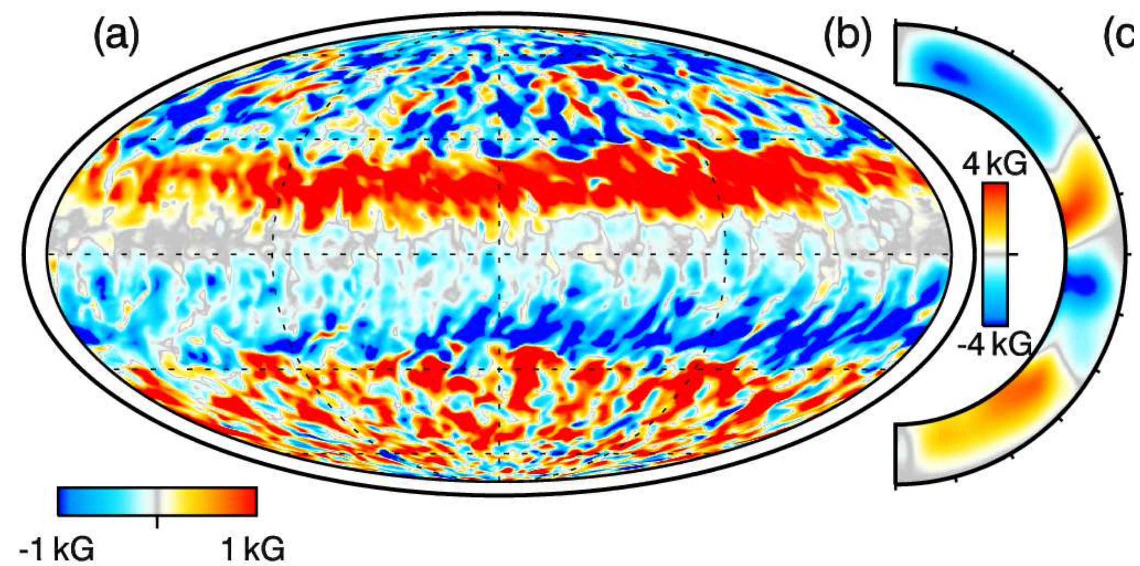
Kapyla+12　　約15年周期



- 太陽型の強密度成層モデル
- ドリフトを伴う準周期的極性反転
- Ro = 0.02
  (Brun+04より3~5倍速い回転に相当)

Augustson+13　　約6年周期





- 現実的太陽内部構造モデル
  (初めてgrand-minimumを得た計算)
  - $\Omega = 3\Omega_{sun}$, $L = 1L_{sun}$

$$Ro \equiv \frac{V}{2\Omega l}$$

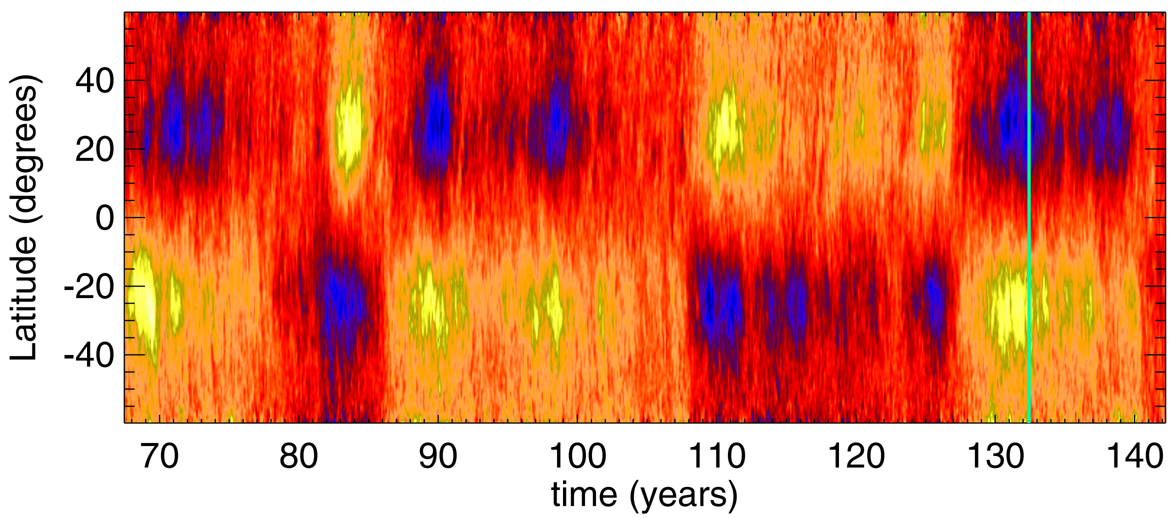
→ Ωが大きい, つまり Roの小さい計算

太陽とは異なるパラメータ設定

Ghizaru et al. (2010)以後の発展②

太陽のパラメータ設定

Fan & Fang ‘15



- 現実的太陽内部構造モデル

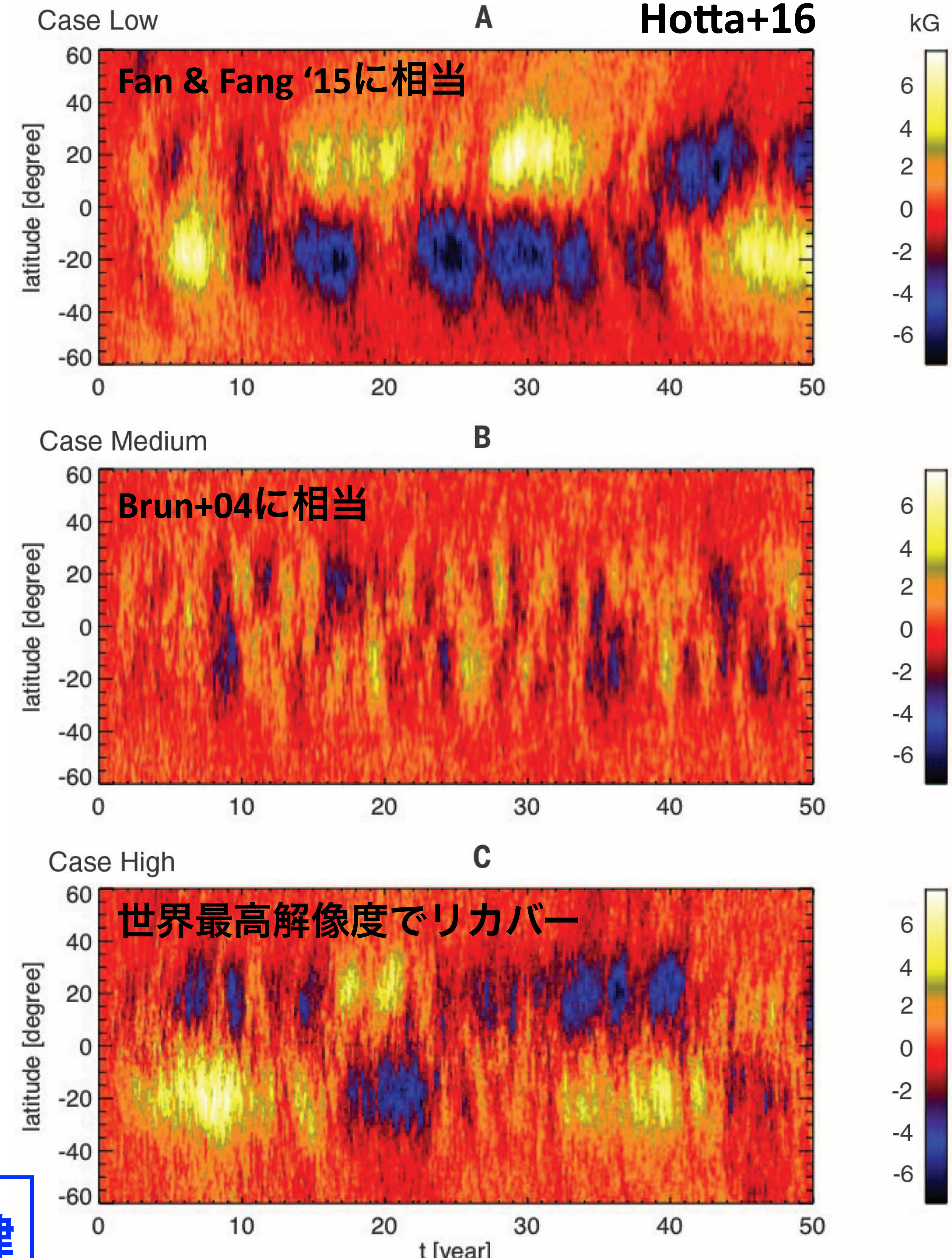
  ：$\Omega = 1\Omega_{sun}$, $L = 1L_{sun}$

  → 基本的にはBrun+04と同じ設定

- FF15: より低解像度（96x512x768）
  - → より大きな粘性
  - → より小さな対流速度
  - → より小さいロスビー数
- Hotta+16: より高解像度 (256x768x1536)
  - → 効率的な小スケールダイナモ
  - → “物理的に”より小さな対流速度
  - → “物理的に”より小さいロスビー数

理論的にもロスビー数の大きさは鍵

Hotta+16

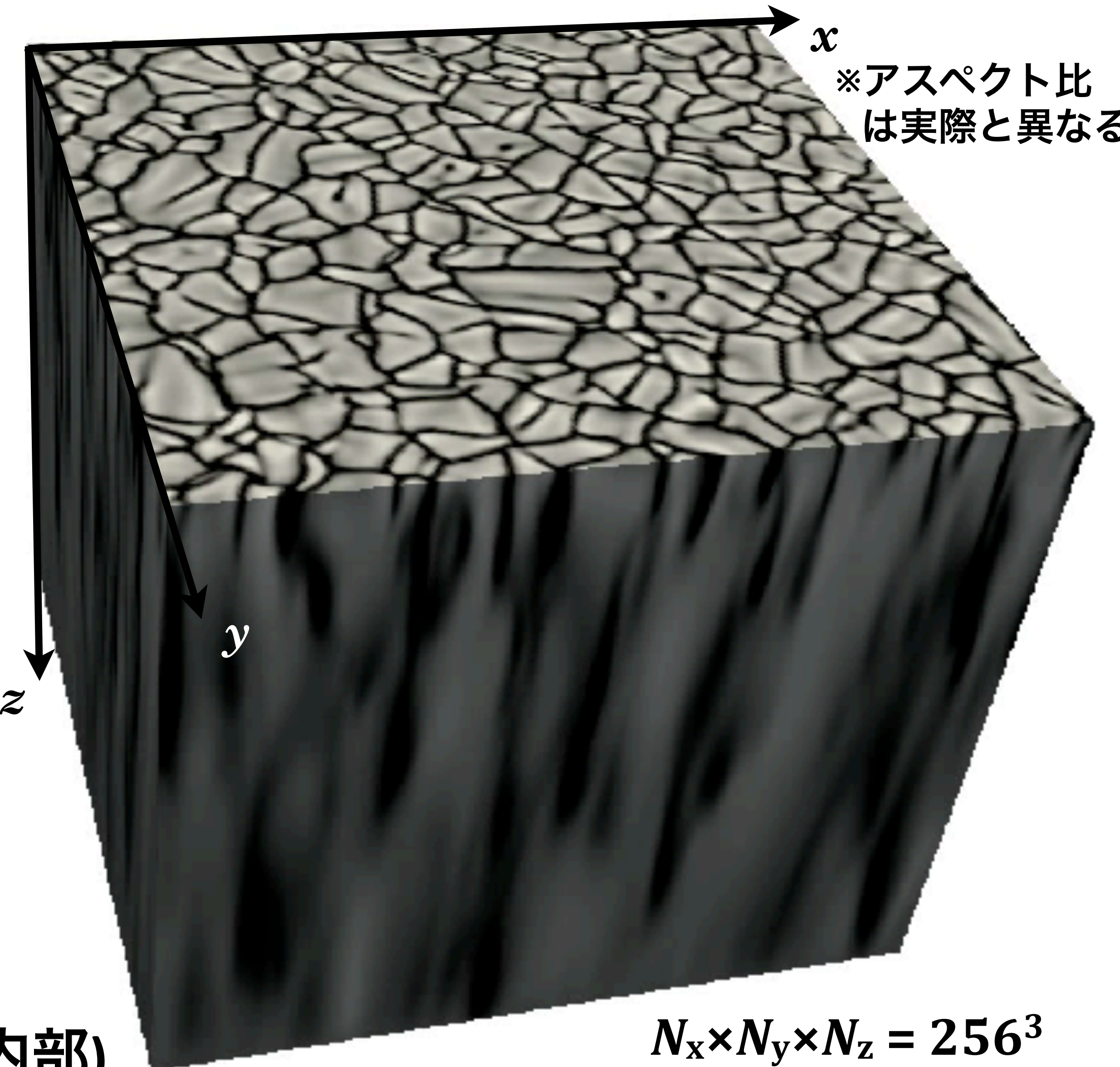


3. 対流ダイナモのロスビー数依存性

ロスビー数の違いがダイナモに及ぼす影響

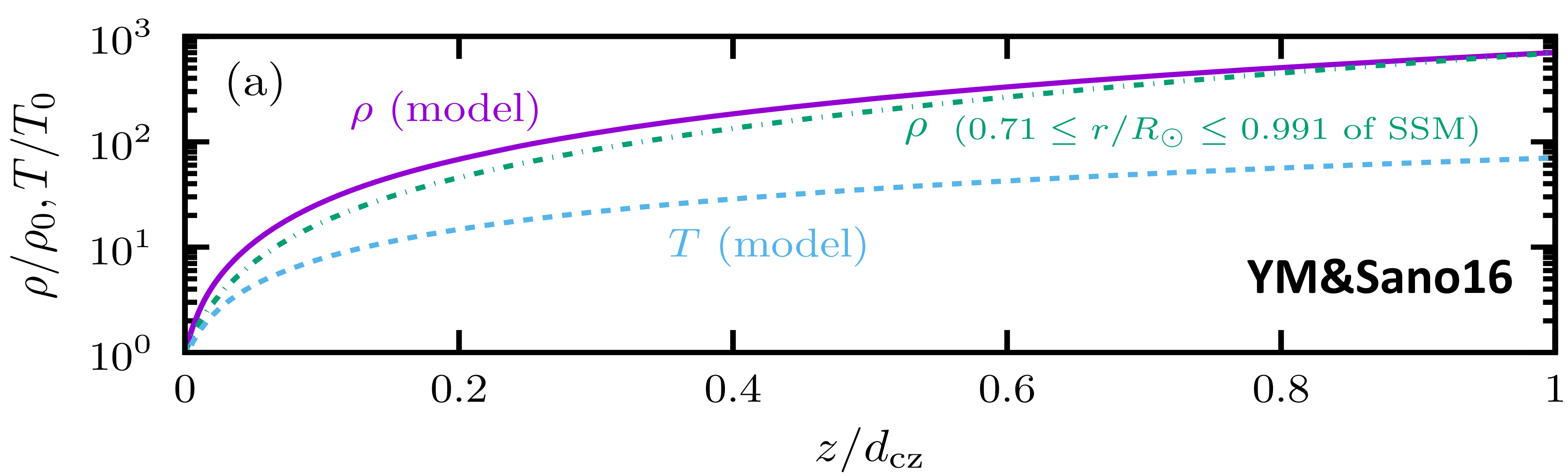
- 計算設定：恒星の対流層を模擬した強い密度成層モデル
- パラメータ：回転率（Ω_0）

- 基礎方程式：圧縮性MHD方程式【回転系】
- 1層ポリトロープモデル【対流層のみ】
  アスペクト比：$L_x/L_z = L_y/L_z = 4$, Ωはgと反平行
- 無次元パラメータ：$Pr = 10$, $Pm = 2$, $Ra = 4\times10^6$
- ポリトロープ指数：1.49 (super-adiabaticity δ=10^{-3})
- 境界条件（水平方向は周期境界）：
  - 磁場・・上部境界：開放境界（垂直磁場）条件
    下部境界：完全導体
  - 速度場・・上・下とも応力なし境界条件
  - 下部境界に一定の $d\varepsilon/dz$ → 対流を駆動



$N_x\times N_y\times N_z = 256^3$
Godunov CMoC-CT

- 密度プロファイルの比較 (計算モデル vs 太陽内部)



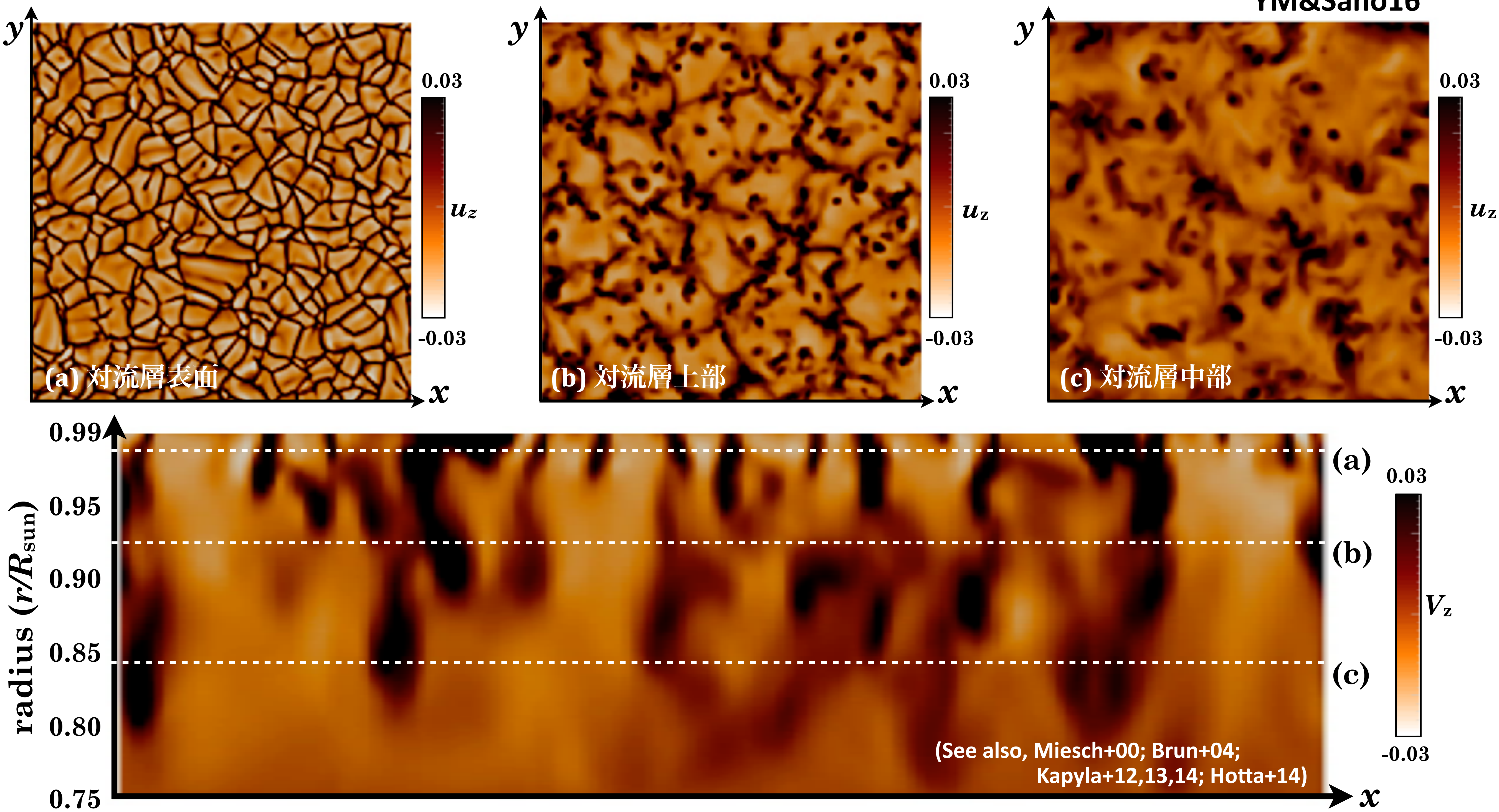
密度比 〜 700
（太陽だと0.99Rsun位に相当）

強密度成層下の対流構造 太陽・恒星の熱対流の性質

① 強い上下（上昇流と下降流）非対称性 → グラニュール状対流
② 対流セルサイズ：深部ほど大（マルチスケール熱対流 ∵ スケールハイトの違い）
③ 下降流の収束 → 下降流プルームの形成

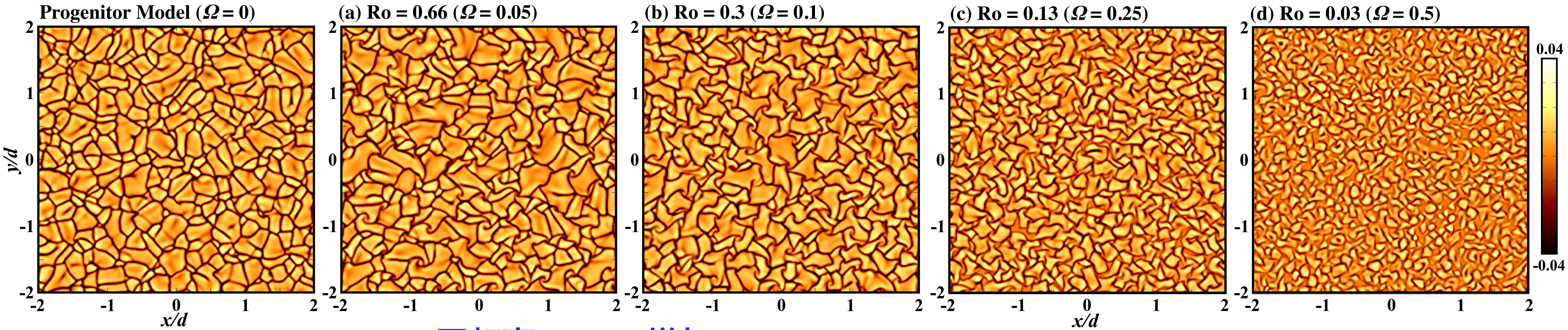
→ 回転率を変える. 種磁場を加える.

YM&Sano16

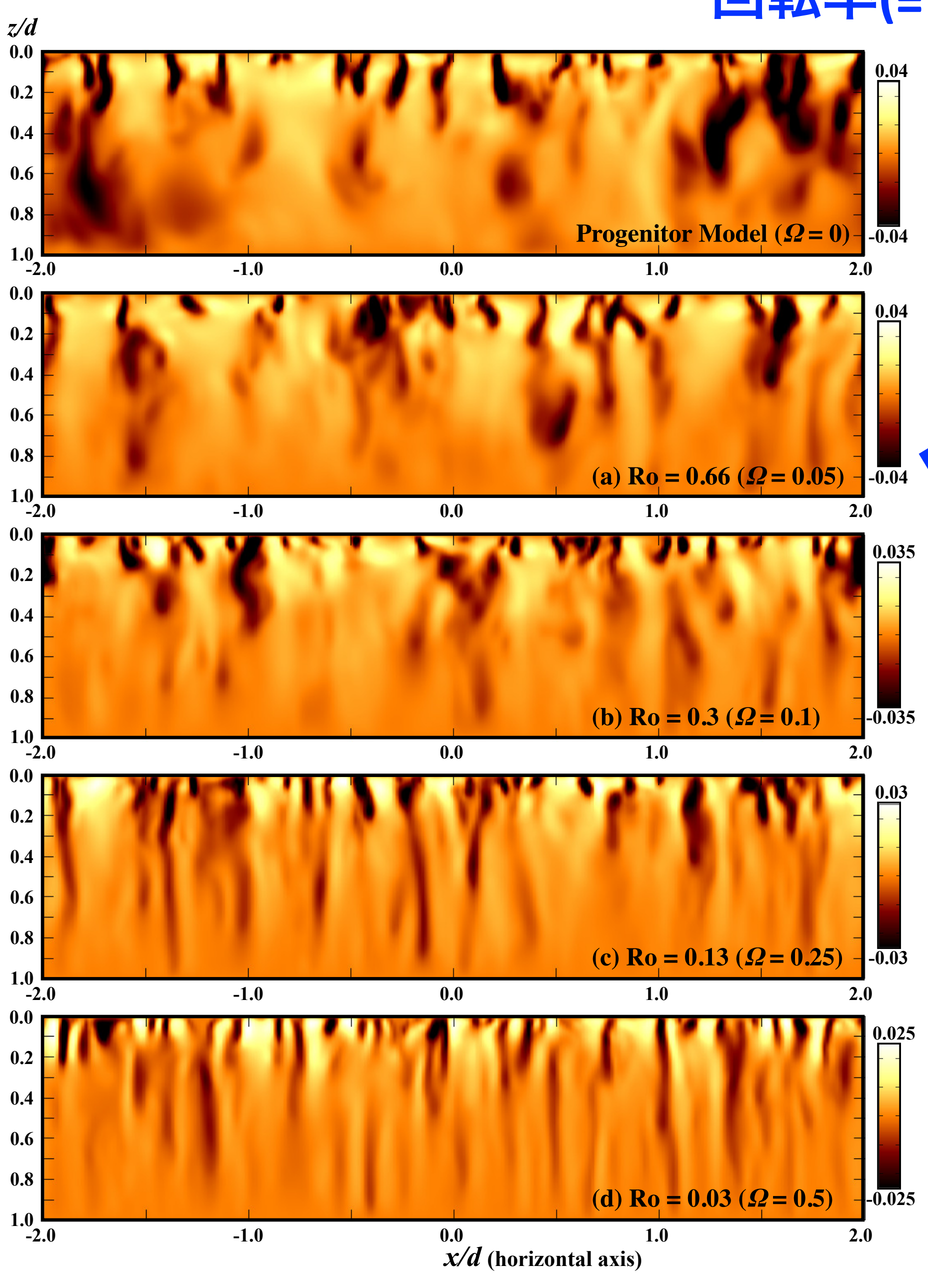


対流構造・ロスビー数の回転率依存性

YM&Sano17 in prep.



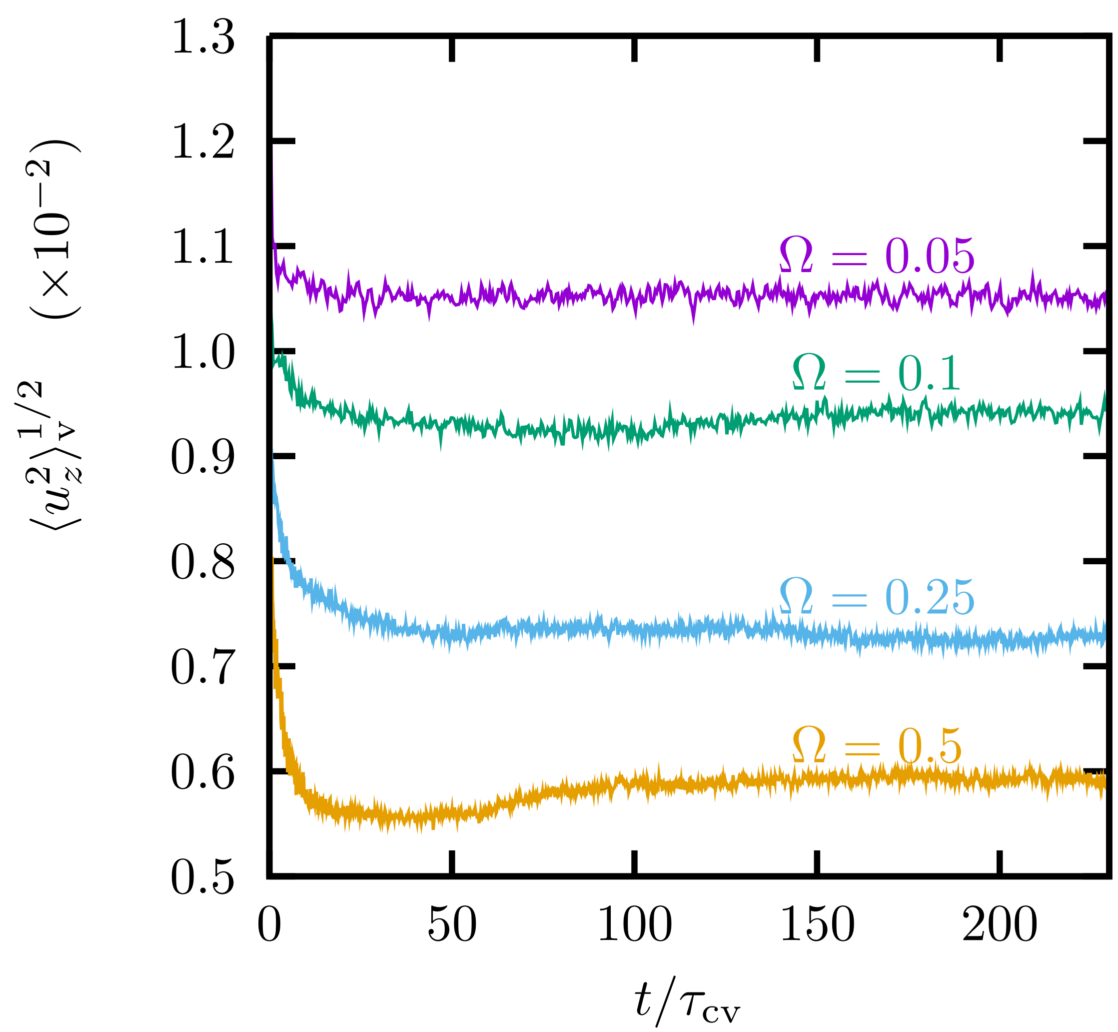
回転率(≡ Ω_0)の増加 →



- 対流のスケールが回転率の増加にともない減少
- 対流速度も回転率の増加にともない減少

$$\mathrm{Ro} \equiv \frac{v_{\mathrm{rms}}}{2\Omega_0 d}$$

d：対流層の厚み



→ Ro = 0.09

→ Ro = 0.04

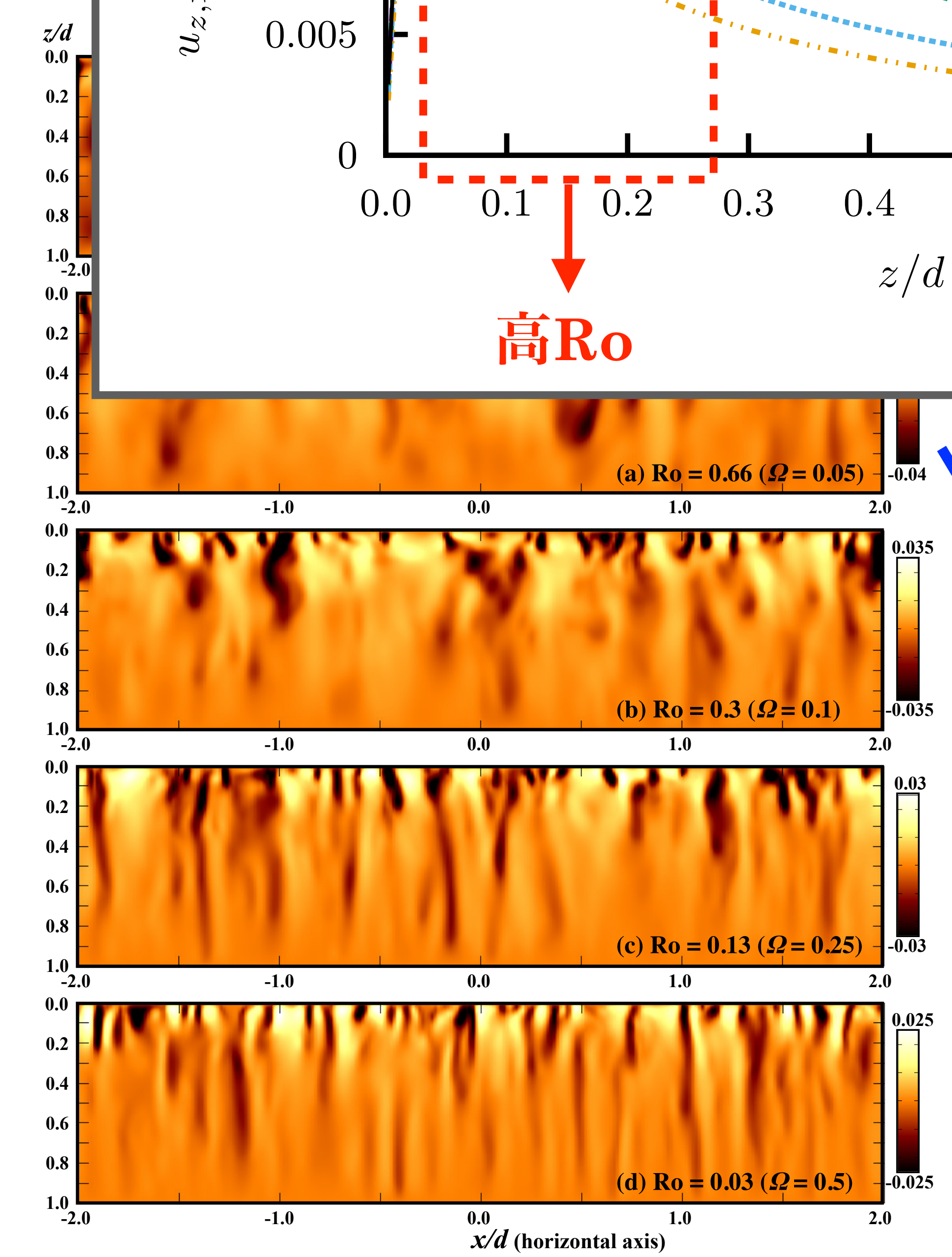
→ Ro = 0.015

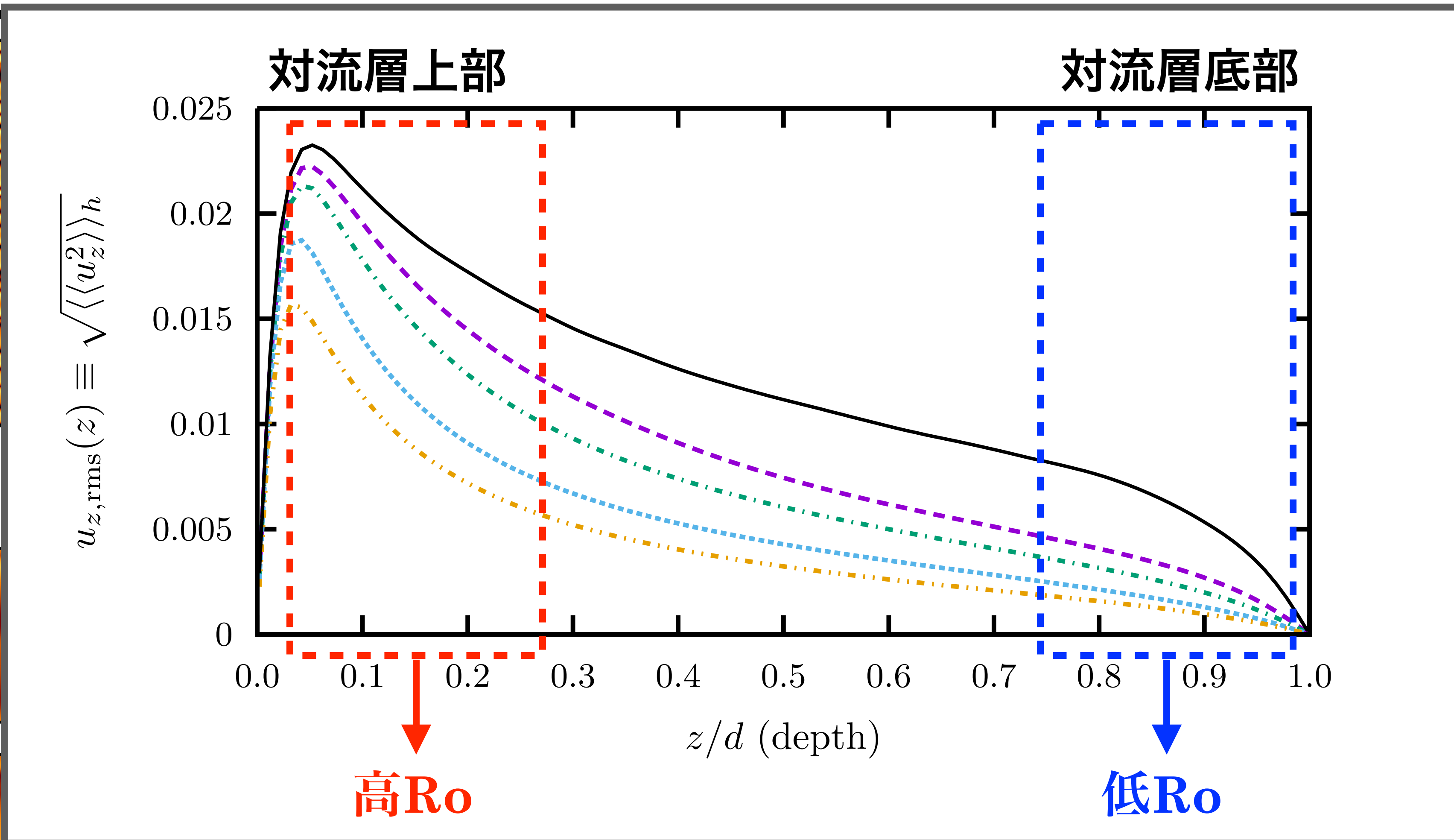
→ Ro = 0.005

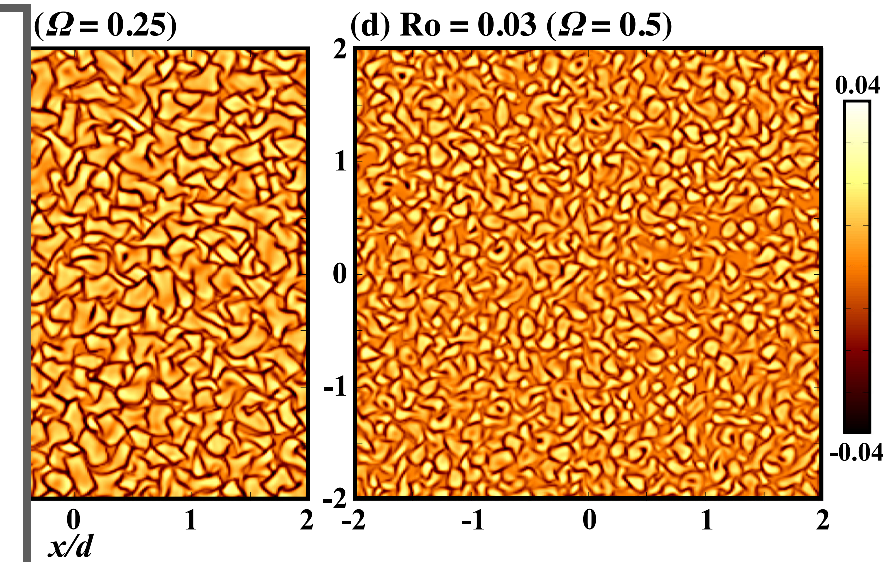
※速度の全成分のrms値でRoは計算

対流構造・ロスビー数の回転率依存性

YM&Sano17 in prep.





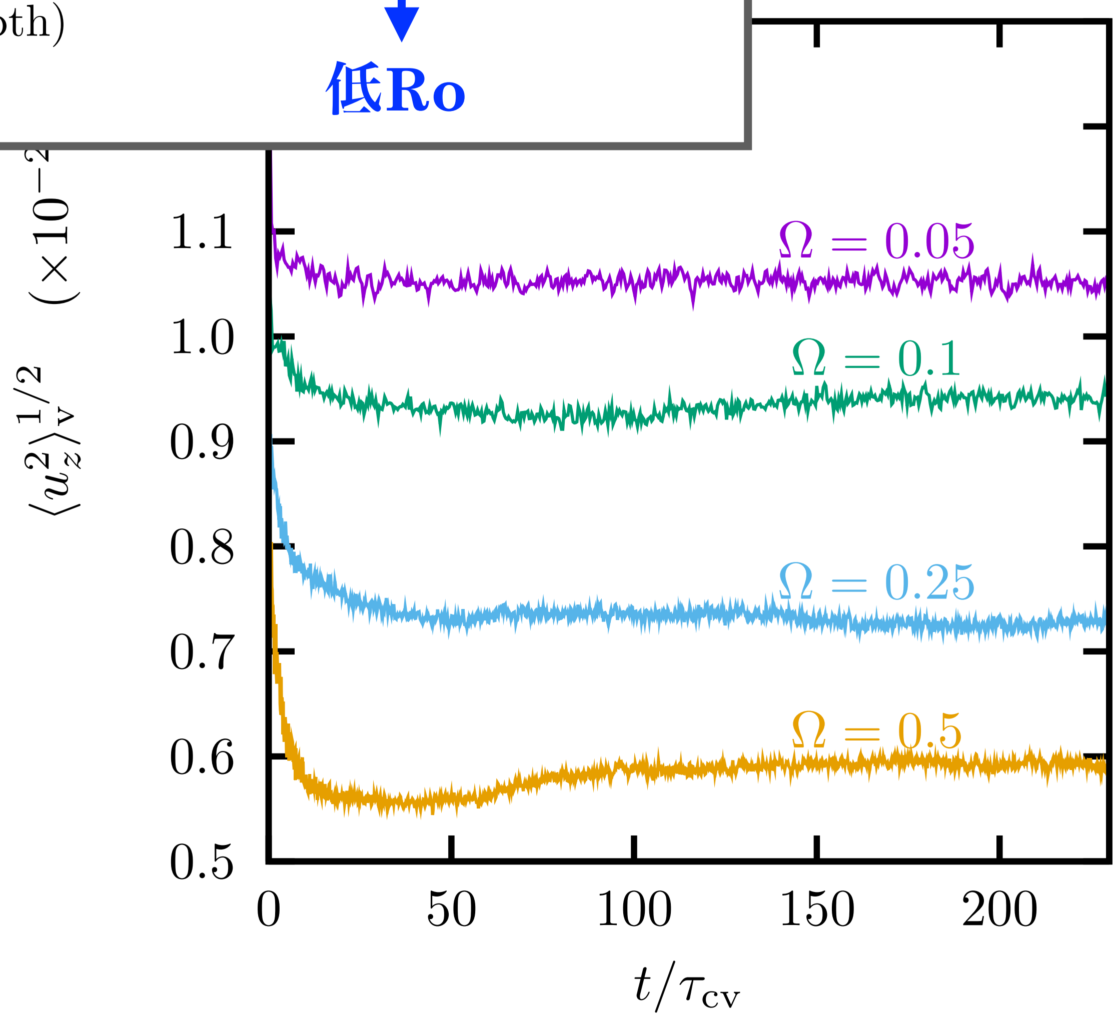


加にともない減少

もない減少

$$\mathrm{Ro} \equiv \frac{v_{\mathrm{rms}}}{2\Omega_0 d}$$

d：対流層の厚み



→ Ro = 0.09

→ Ro = 0.04

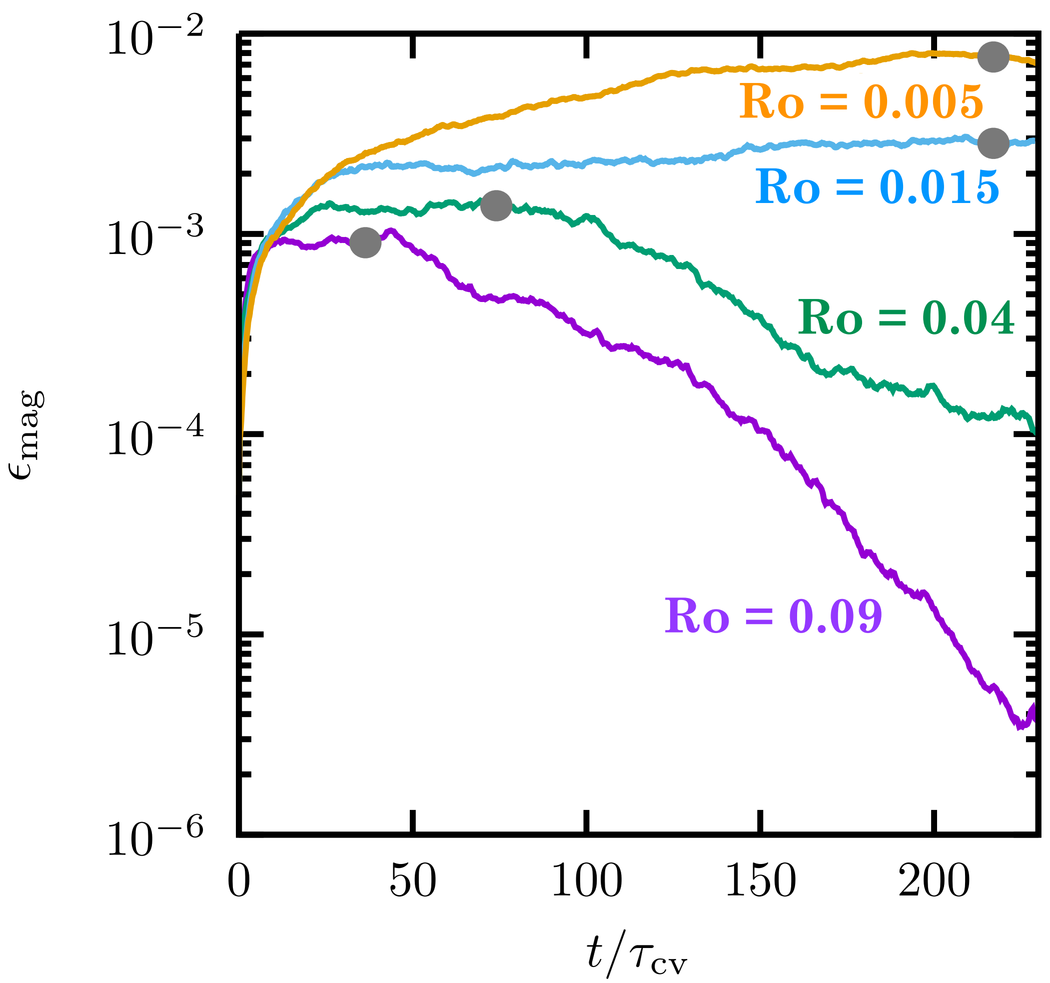
→ Ro = 0.015

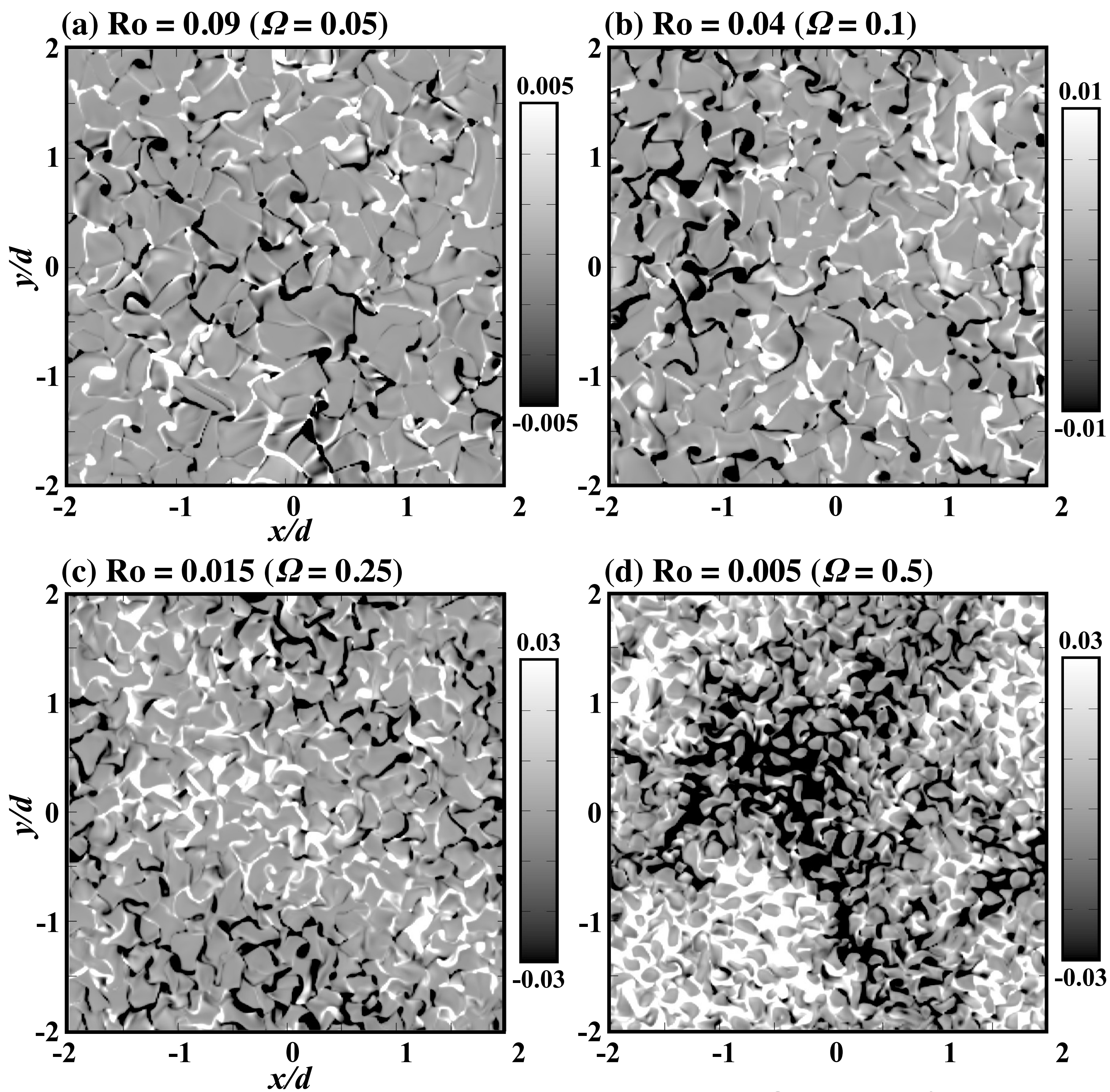
→ Ro = 0.005

※速度の全成分のrms値でRoは計算

対流ダイナモのロスビー数依存性①

Roに依存してダイナモの振る舞いが変わる





- **高ロスビー数のモデル**
  - 乱流磁場の成長が支配的
  - 磁場を維持できず時間とともに減衰
- **低ロスビー数のモデル**
  - 乱流磁場の成長後, 大局的磁場が形成
  - 乱流磁場・大局的磁場ともに維持

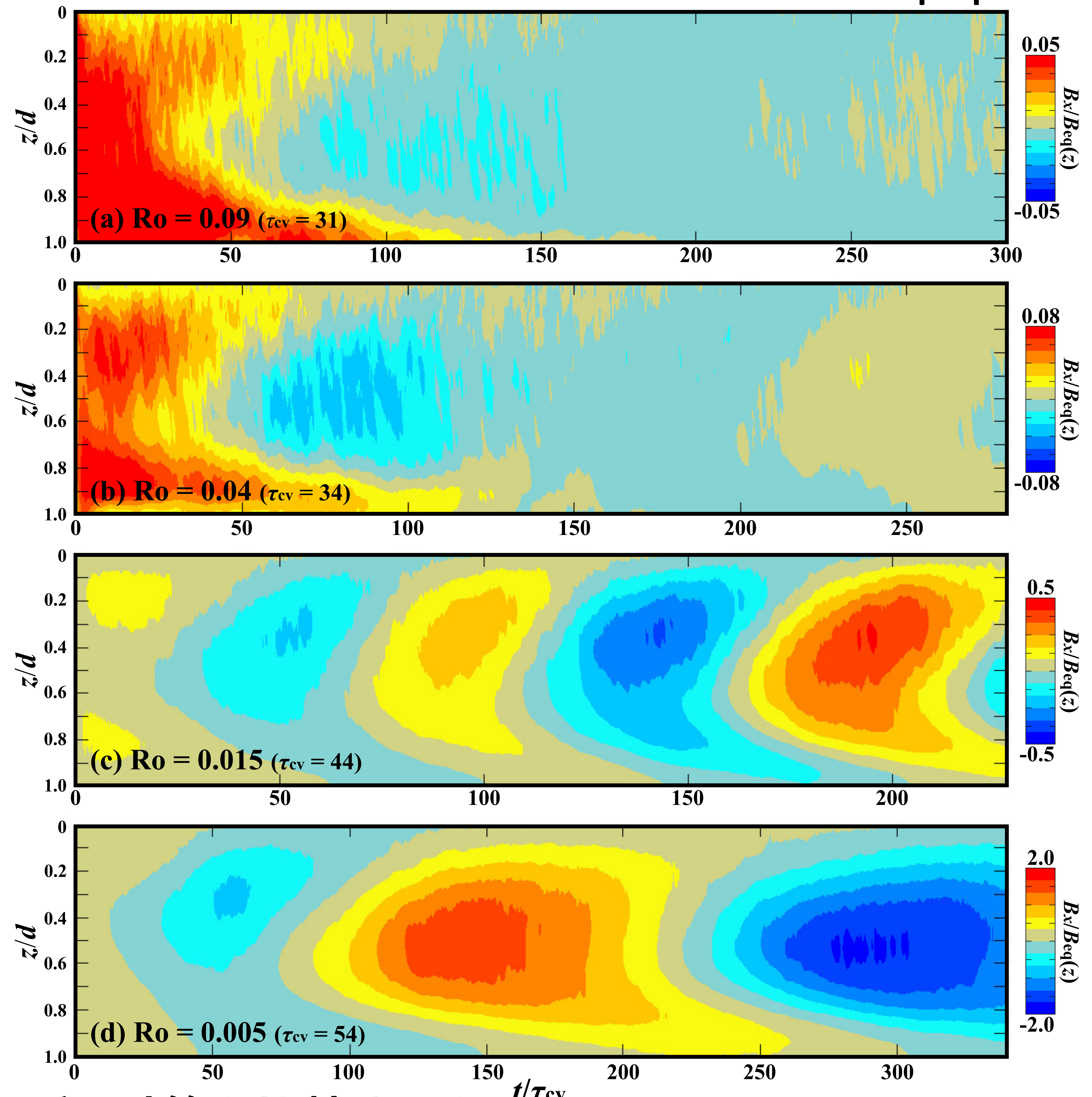
$\mathrm{Ro_{crit}} \sim 0.015 - 0.04$

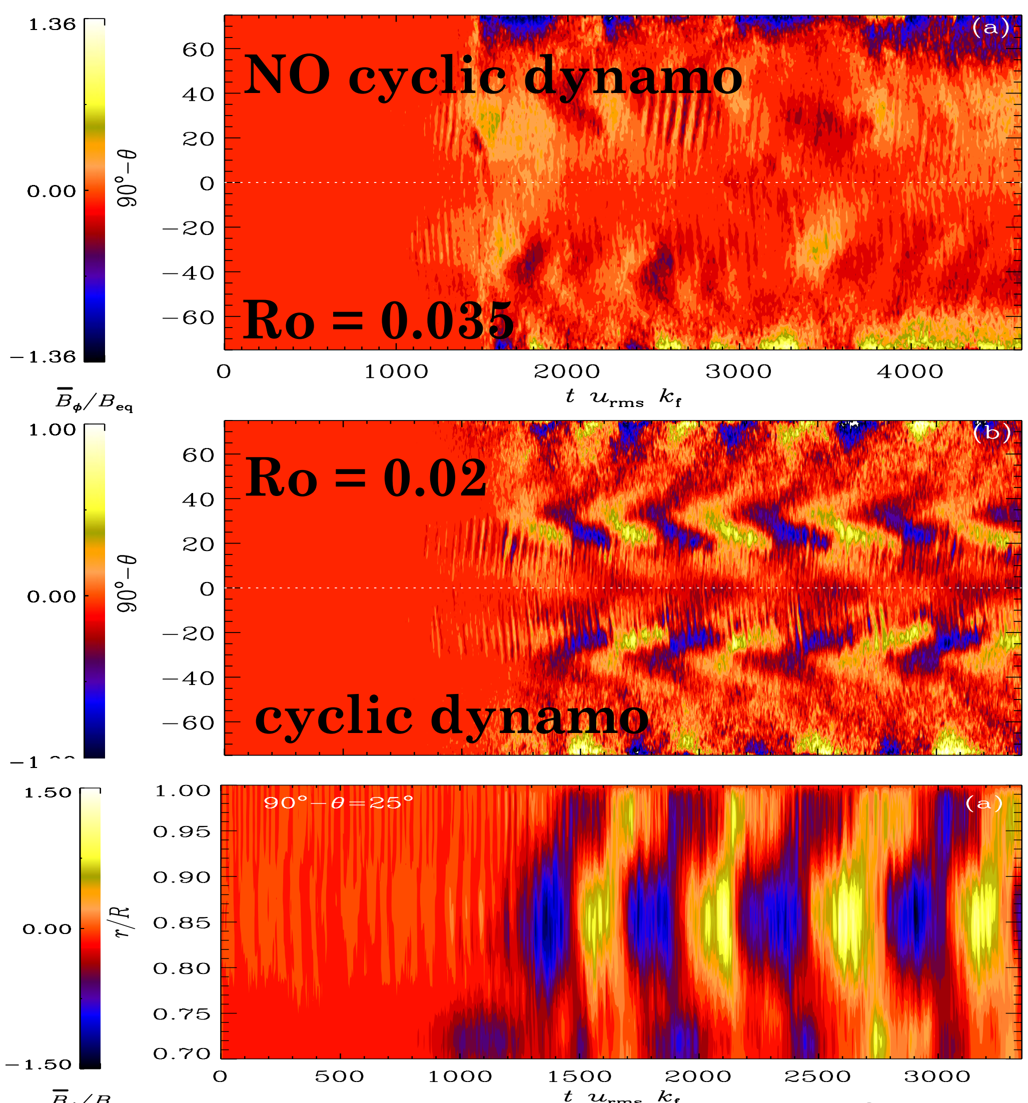
YM&Sano17 in prep.

対流ダイナモのロスビー数依存性②

- 水平磁場の時間–深さ図
  - 高ロスビー数モデルは
    〈B_h〉が成長しようとするが減衰
  - 低ロスビー数モデルは
    〈B_h〉が成長・増幅され維持

YM&Sano17 in prep.





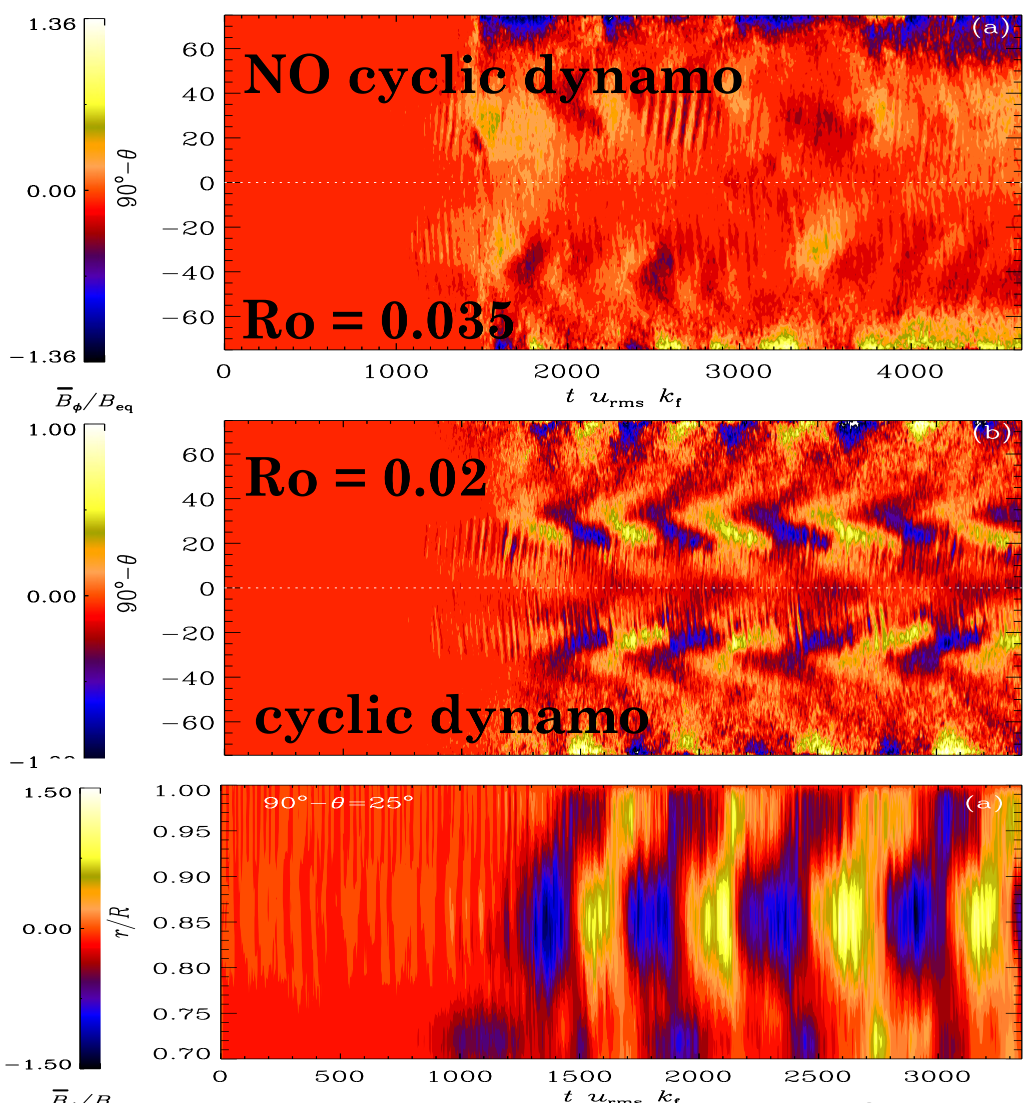
Kapyla+12

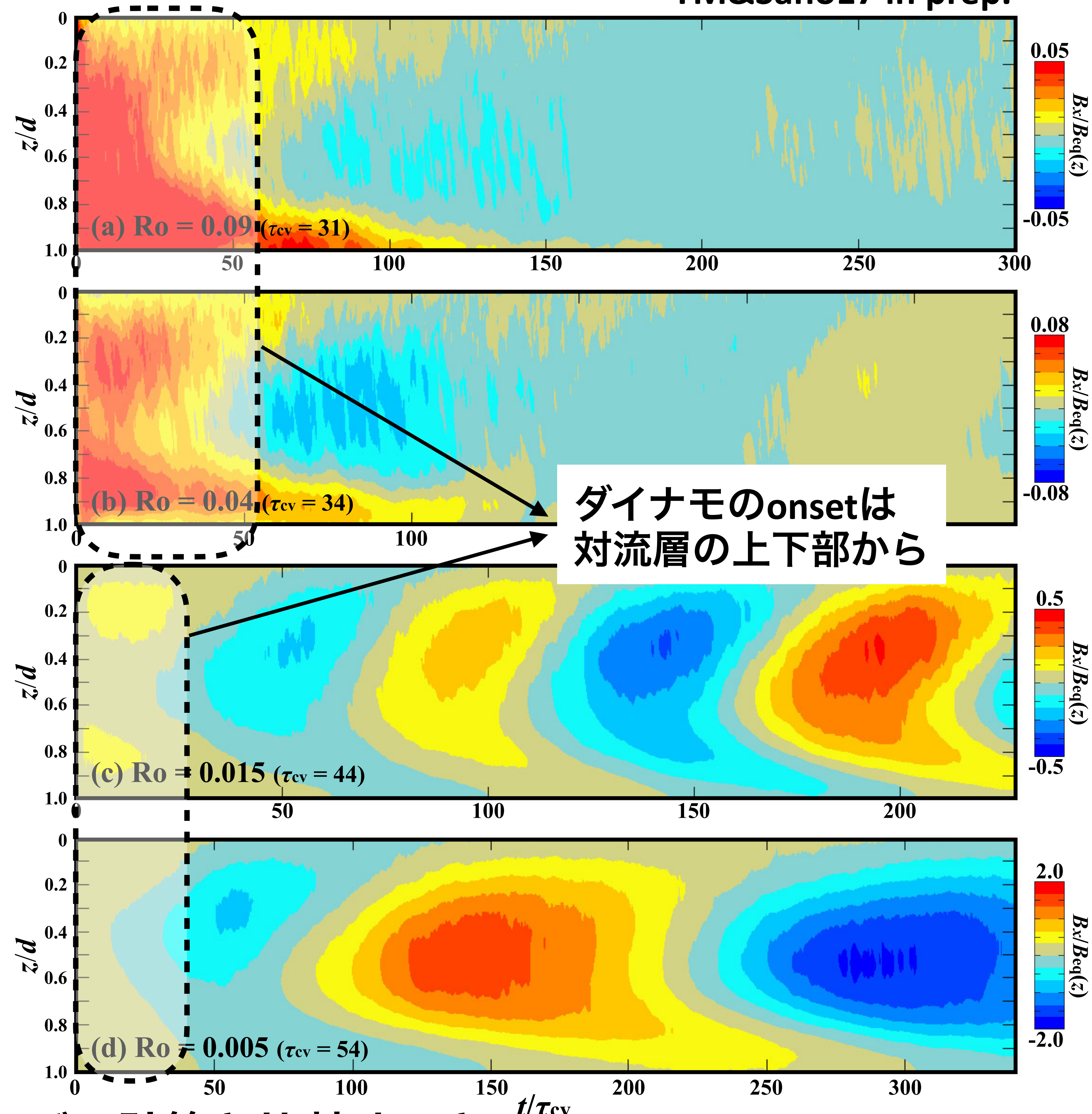
例えばKapyla+12のグローバル計算と比較すると
ダイナモを与える臨界ロスビー数や時間–深さ図には共通点

対流ダイナモのロスビー数依存性②

YM&Sano17 in prep.

- 水平磁場の時間–深さ図
  - 高ロスビー数モデルは〈B_h〉が成長しようとするが減衰
  - 低ロスビー数モデルは〈B_h〉が成長・増幅され維持



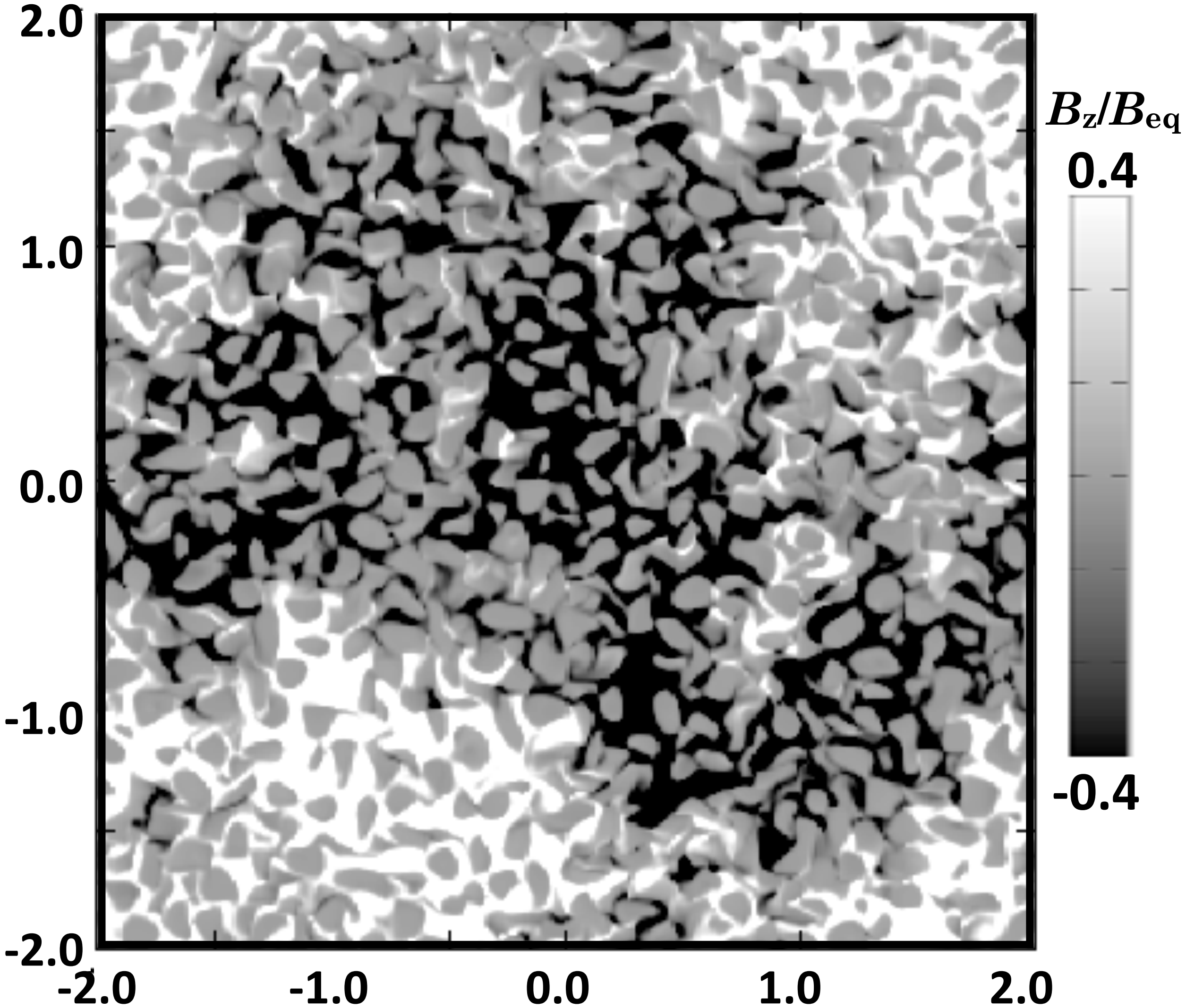


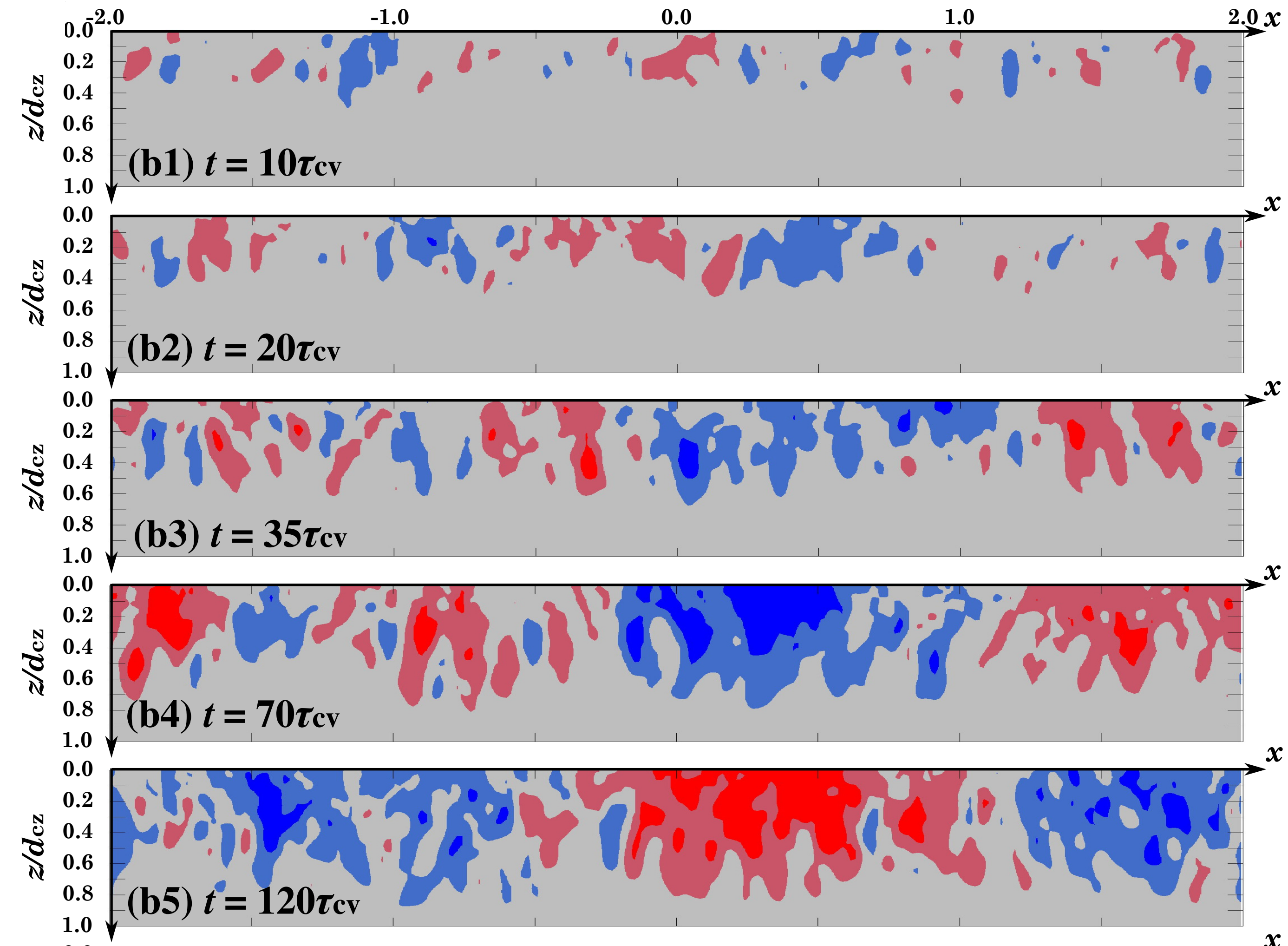
例えばKapyla+12のグローバル計算と比較すると
ダイナモを与える臨界ロスビー数や時間–深さ図には共通点

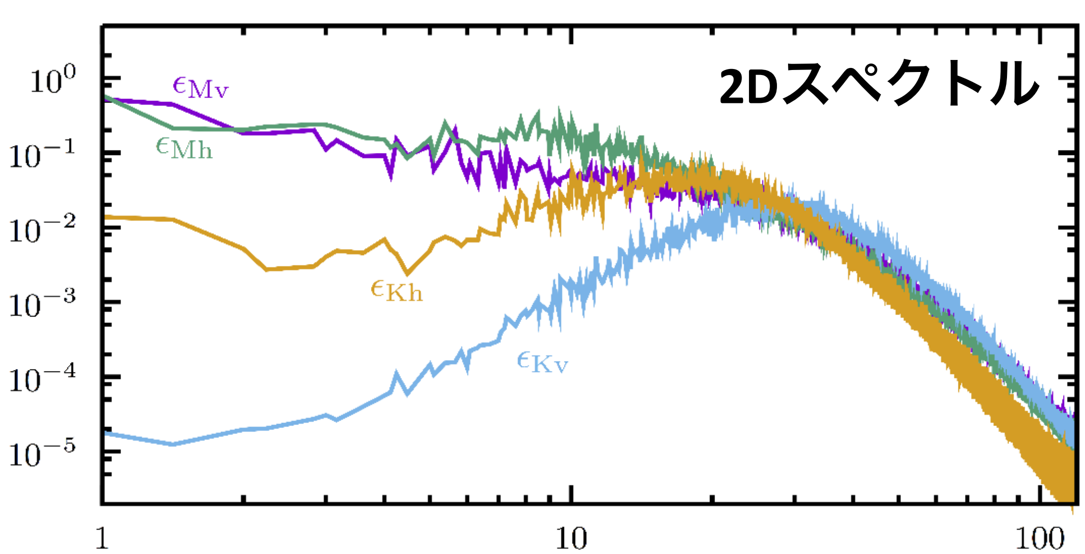
対流ダイナモのロスビー数依存性③

YM&Sano16

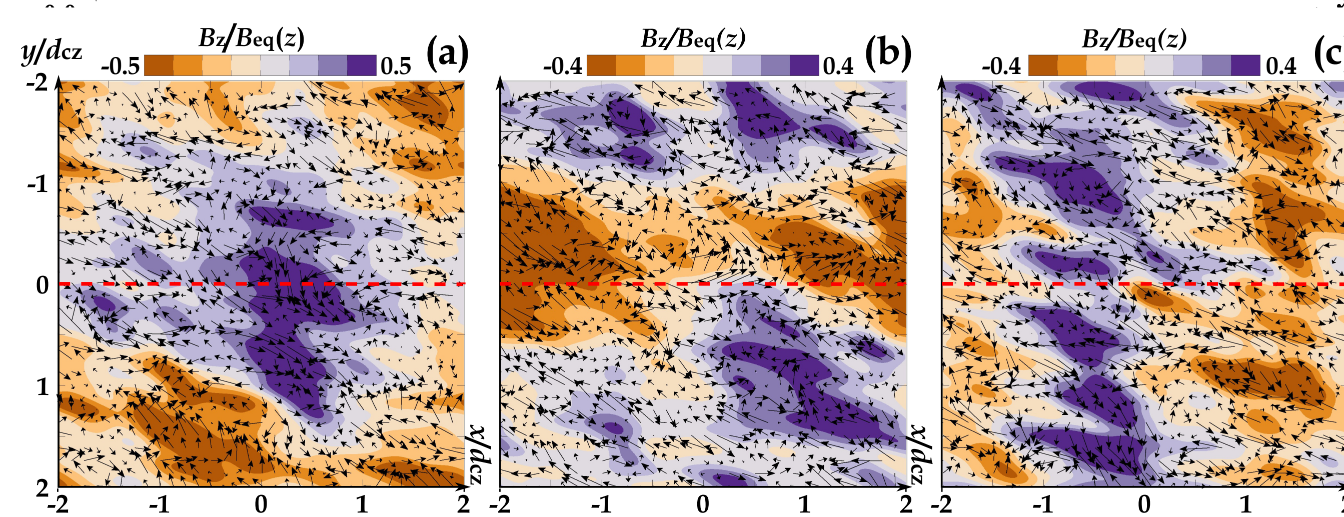
対流層表面での磁場の進化







磁気エネルギー (B_z成分)は箱幅にピーク



- 垂直磁場の大局構造は確かに存在 (Fourier filtering)
- 進化後期は双極のバンド状構造
- Ro = 0.015, 0.005のモデルに共通

なぜダイナモが起こるのか？

●MHD計算のまとめ：

- ダイナモは対流層の上部と底部で励起 → 対流層中部でも成長, 全体で維持
- ロスビー数の大きさが鍵（臨界Ro = 0.015 ~ 0.04）
- ロスビー数は「乱流α効果」と「乱流磁気拡散」の比：

$$\boxed{\mathrm{Ro} \equiv \frac{V}{2\Omega l} \sim \frac{\eta_t k}{\alpha}}$$

ダイナモの励起を定量的に理解するために「平均場ダイナモ方程式」を導入

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B} - \eta_0 \boldsymbol{J}),$$

平均場分解：

$\boldsymbol{u} = \langle \boldsymbol{u} \rangle + \boldsymbol{u}', \boldsymbol{B} = \langle \boldsymbol{B} \rangle + \boldsymbol{B}'$

平滑化近似

平均場ダイナモ方程式

$$\frac{\partial \langle \boldsymbol{B} \rangle}{\partial t} = \nabla \times [\langle \boldsymbol{u} \rangle \times \langle \boldsymbol{B} \rangle + \mathcal{E}_t - \eta_0 \nabla \times \langle \boldsymbol{B} \rangle]$$

$$\mathcal{E}_t = \alpha \langle \boldsymbol{B} \rangle + \underbrace{\boldsymbol{\gamma} \times \langle \boldsymbol{B} \rangle}_{\text{今日は忘れる}} - \eta_t \nabla \times \langle \boldsymbol{B} \rangle$$

乱流α効果：平均場の生成を担う効果

乱流磁気拡散効果：平均場の散逸を担う効果

乱流輸送係数は数値計算の結果から見積もることが可能

$$\alpha(z) = -\tau_c \mathcal{H}_{\mathrm{eff}} \ ,$$

$$\gamma(z) = -\tau_c \partial_z \langle\langle u_z^2 \rangle\rangle \ ,$$

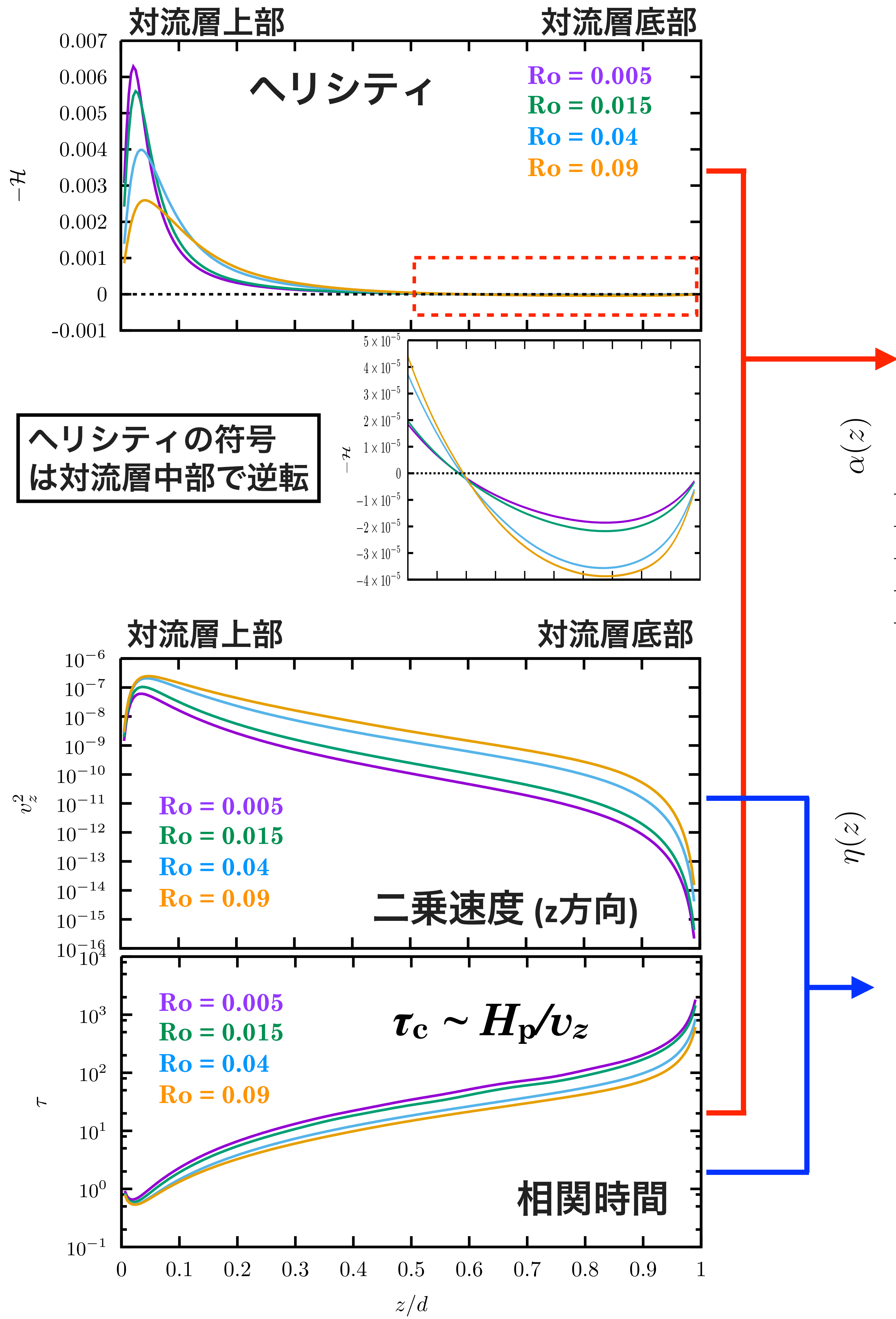
$$\eta_t(z) = \tau_c \langle\langle u_z^2 \rangle\rangle \ ,$$

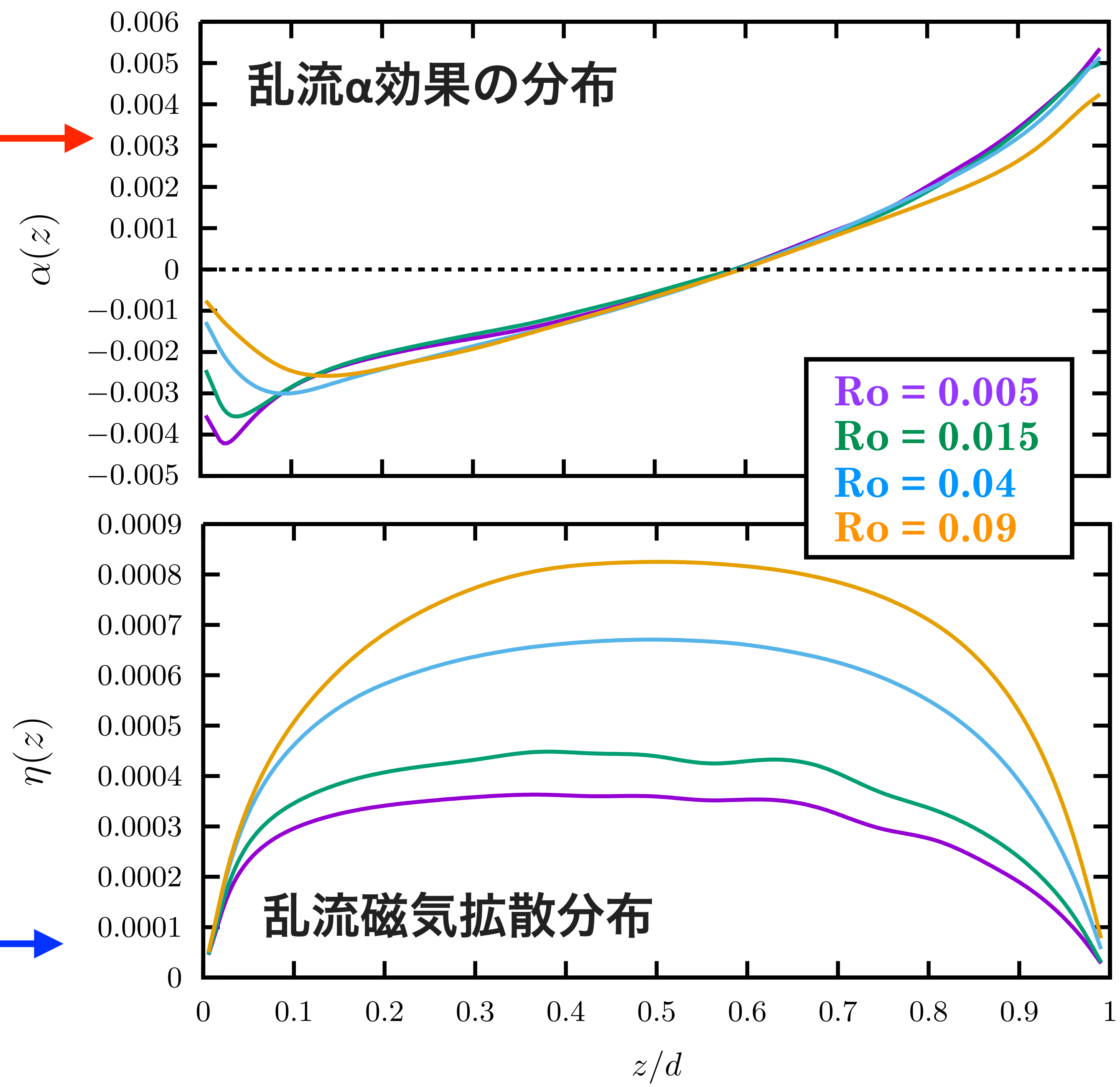
平均場方程式からダイナモ励起に対する系の線形安定性を議論できる

（ダイナモというのは平均場方程式における不安定性の成長）

乱流輸送係数αとηの分布

$$\alpha(z) = -\tau_c \mathcal{H}\,, \quad \eta_t(z) = \tau_c \langle\langle u_z^2 \rangle\rangle$$

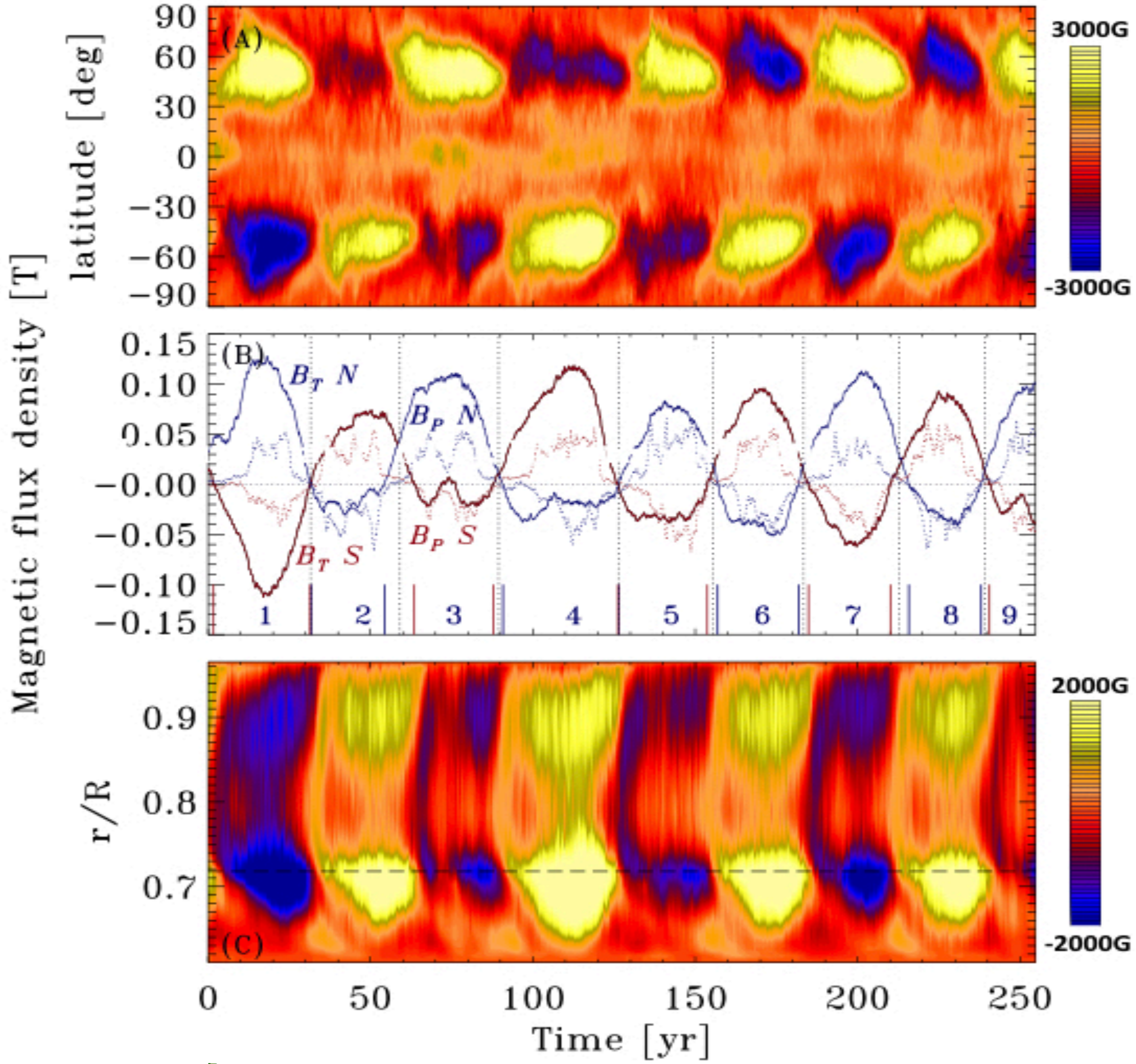


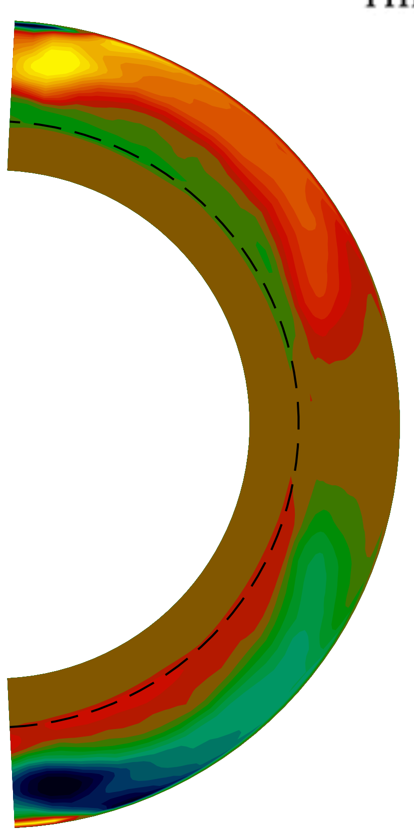


- 乱流α効果の分布は対流層上部を除き
モデル毎の違いはほとんど無い
- 乱流磁気拡散分布は対流層全域に渡って
ロスビー数が小さいモデルほど小さい

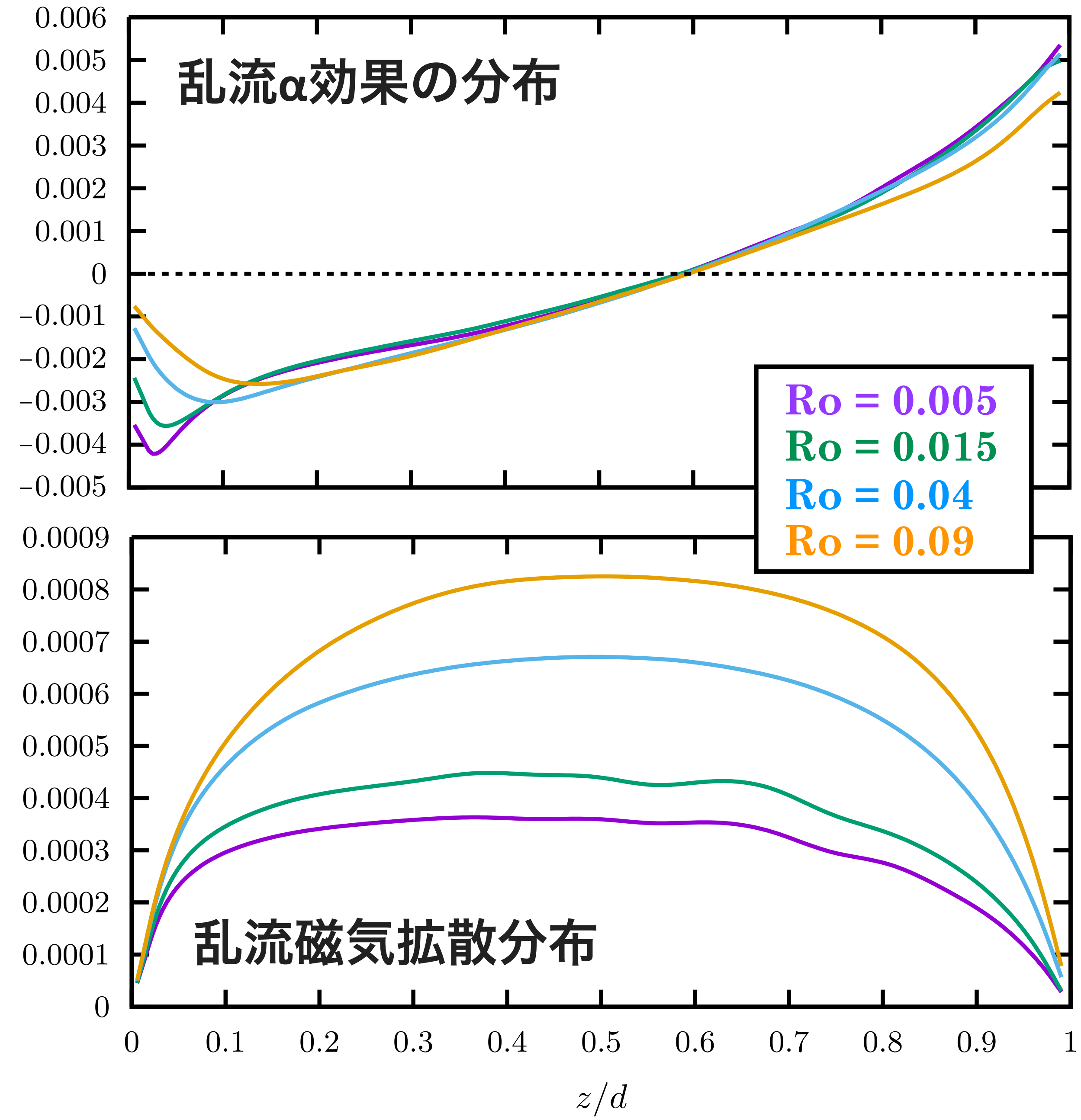
乱流輸送係数αとηの分布

$$\alpha(z) = -\tau_c \mathcal{H}\,, \quad \eta_t(z) = \tau_c \langle\langle u_z^2 \rangle\rangle$$





Ghizaru et al. (2010) ：
[大局的磁場の準周期的振動]
のαの分布も基本的構造は同じ



- 乱流α効果の分布は対流層上部を除き
モデル毎の違いはほとんど無い
- 乱流磁気拡散分布は対流層全域に渡って
ロスビー数が小さいモデルほど小さい

線形分散関係と最大成長率

平面波 $\propto \exp[i(kr - \omega t)]$ で展開 (局所解析)

$$a_2\omega^2 + a_1\omega + a_0 = 0$$

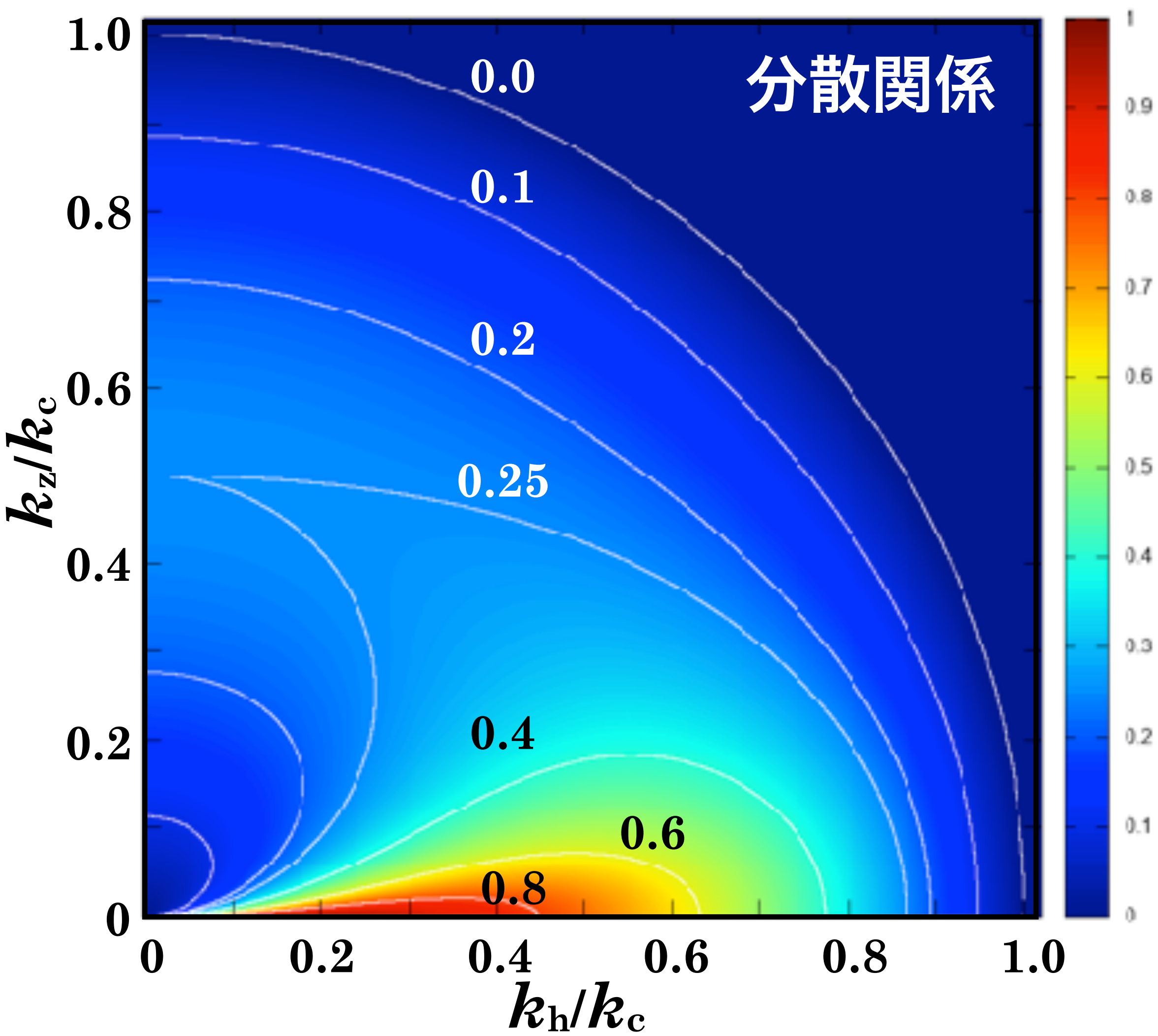
$$a_2 = 1$$

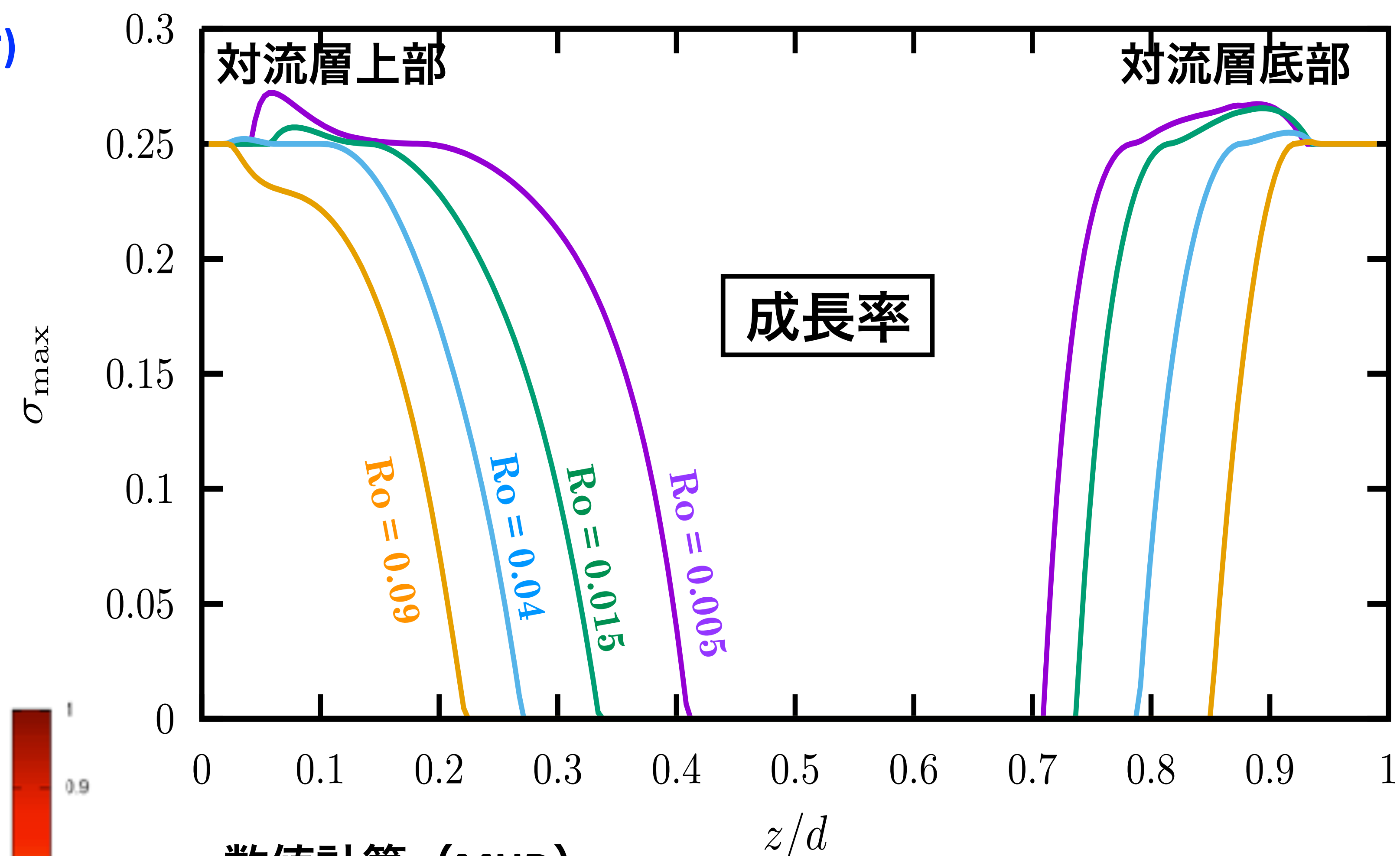
$$a_1 = \partial_z\eta(k^2+k_z^2)/k_z + 2i\eta k^2$$

$$a_0 = [\partial_z\eta k_z + i\eta k^2][\partial_z\eta k^2/k_z + i\eta k^2] - [\partial_z\alpha + i\alpha k_z][\partial_z\alpha + i\alpha k^2/k_z]$$

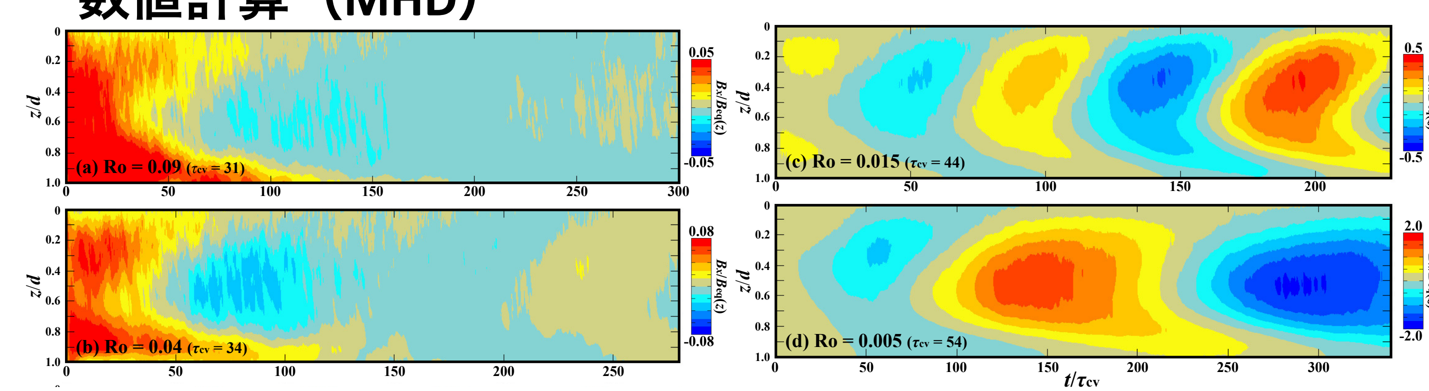
規格化： $k_c = |\alpha|/\eta$, $g_c = \alpha^2/\eta$

特徴的な水平波数(波長)が存在





数値計算（MHD）



- 全モデルが, 対流層の上部と底部でダイナモ励起に対し線形不安定
- 成長率はRoが小さいモデルほど大きい
- 不安定領域もRoが小さいモデルほど広い

平均場モデルの時間発展 vs. MHD計算

平均場ダイナモ方程式：

$$\frac{\partial \langle B \rangle}{\partial t} = \nabla \times \left[\langle \boldsymbol{u} \rangle \times \langle B \rangle + \mathcal{E}_t - \eta_0 \nabla \times \langle B \rangle \right]$$

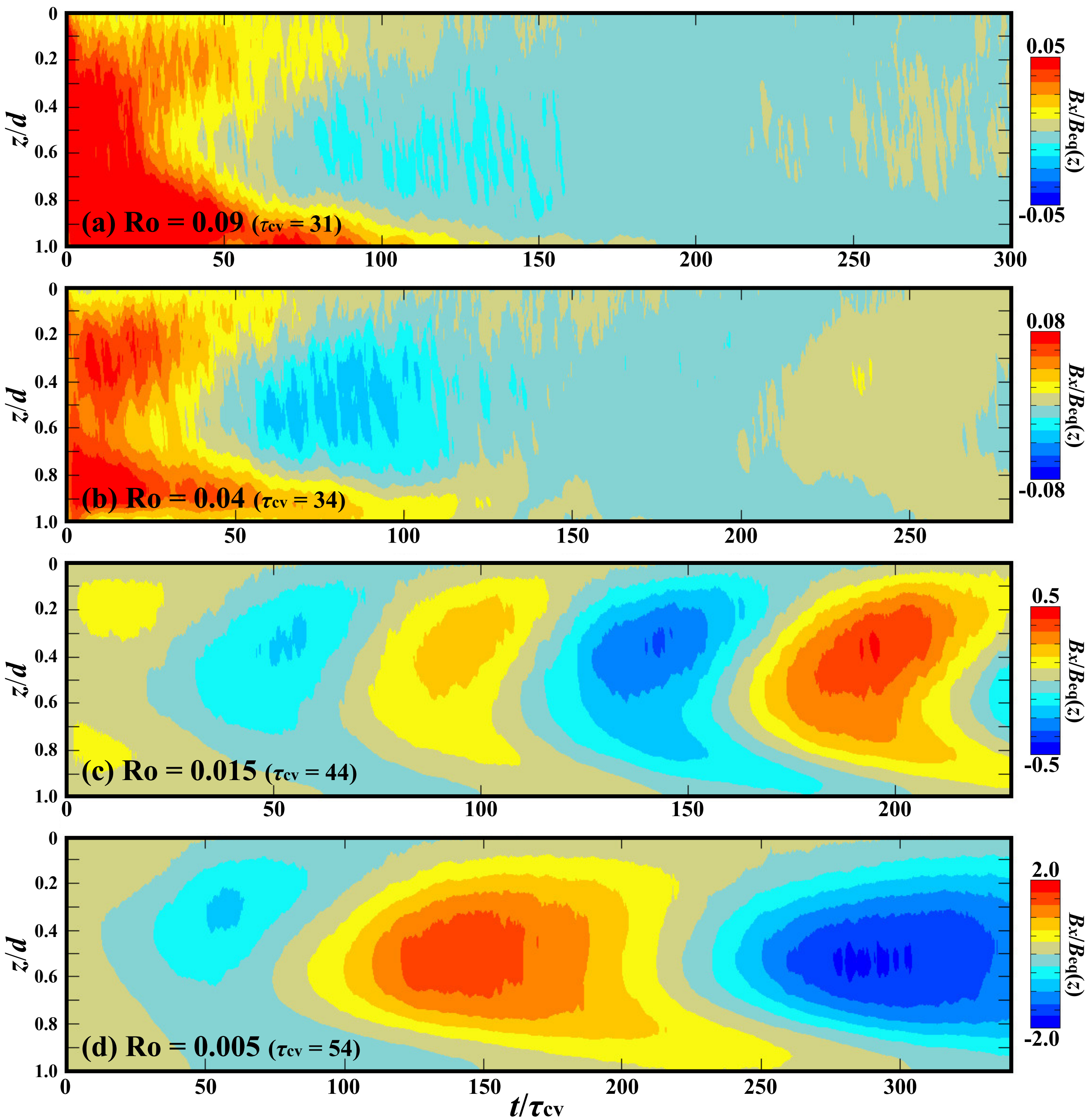
with $\mathcal{E}_t = \alpha \langle B \rangle + \boldsymbol{\gamma} \times \langle B \rangle - \eta_t \nabla \times \langle B \rangle$

+ 非線形効果：α-quenching (c.f., Brandenburg & Subramanian 05)

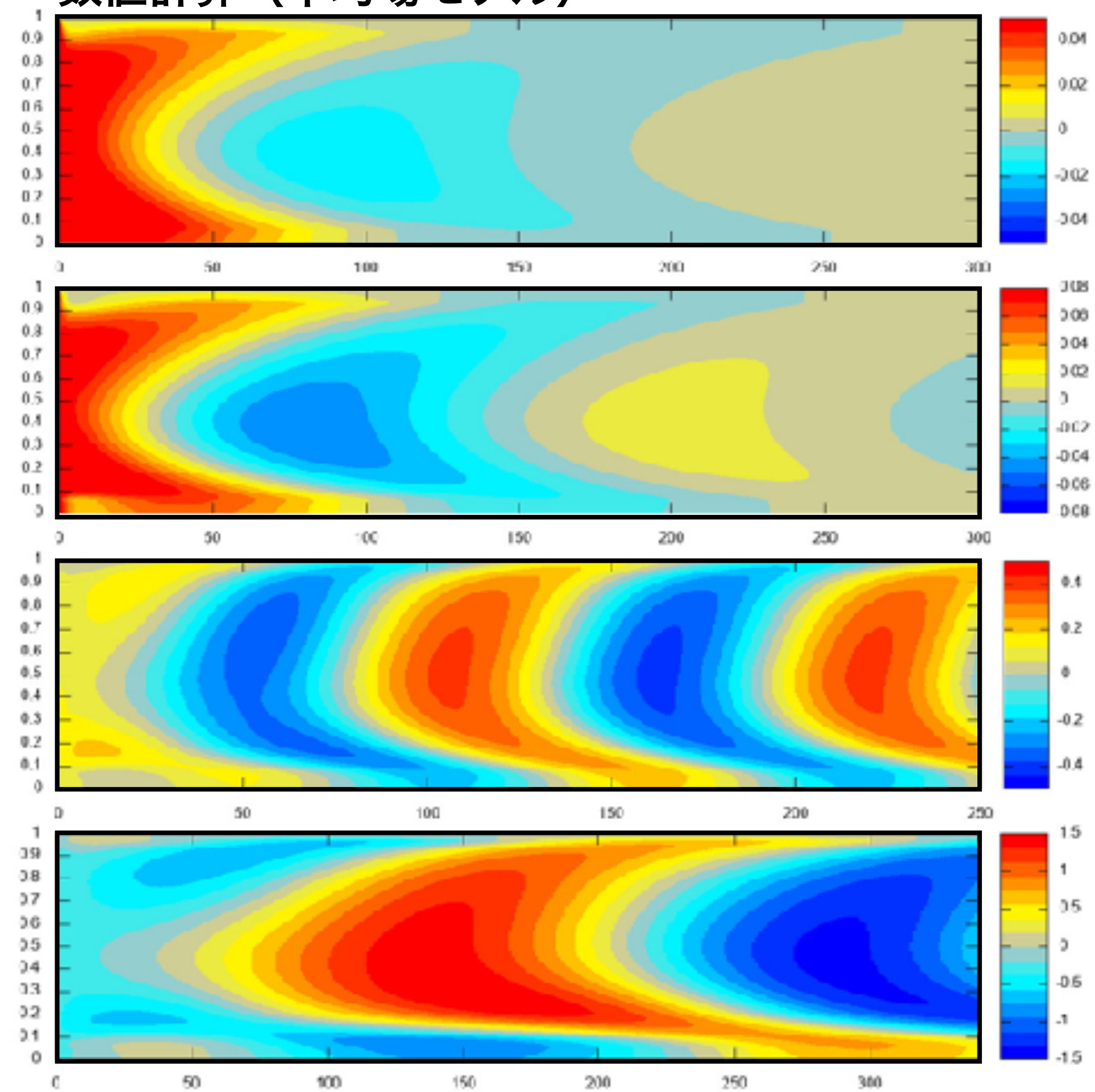
$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = -2\eta_k k_c^2 \left[\frac{\alpha \langle B \rangle^2 - \eta \left(\nabla \times \langle B \rangle \right) \cdot \langle B \rangle}{B_{\rm eq}^2} + \frac{\alpha - \alpha_k}{Re_M} \right]$$

(磁場と磁気ヘリシティが増大するとα効果を抑制)

数値計算（MHD）



数値計算（平均場モデル）



ダイナモ励起や臨界Ro, 時空間パターンなど定性的にはダイナモの振る舞いを再現可能

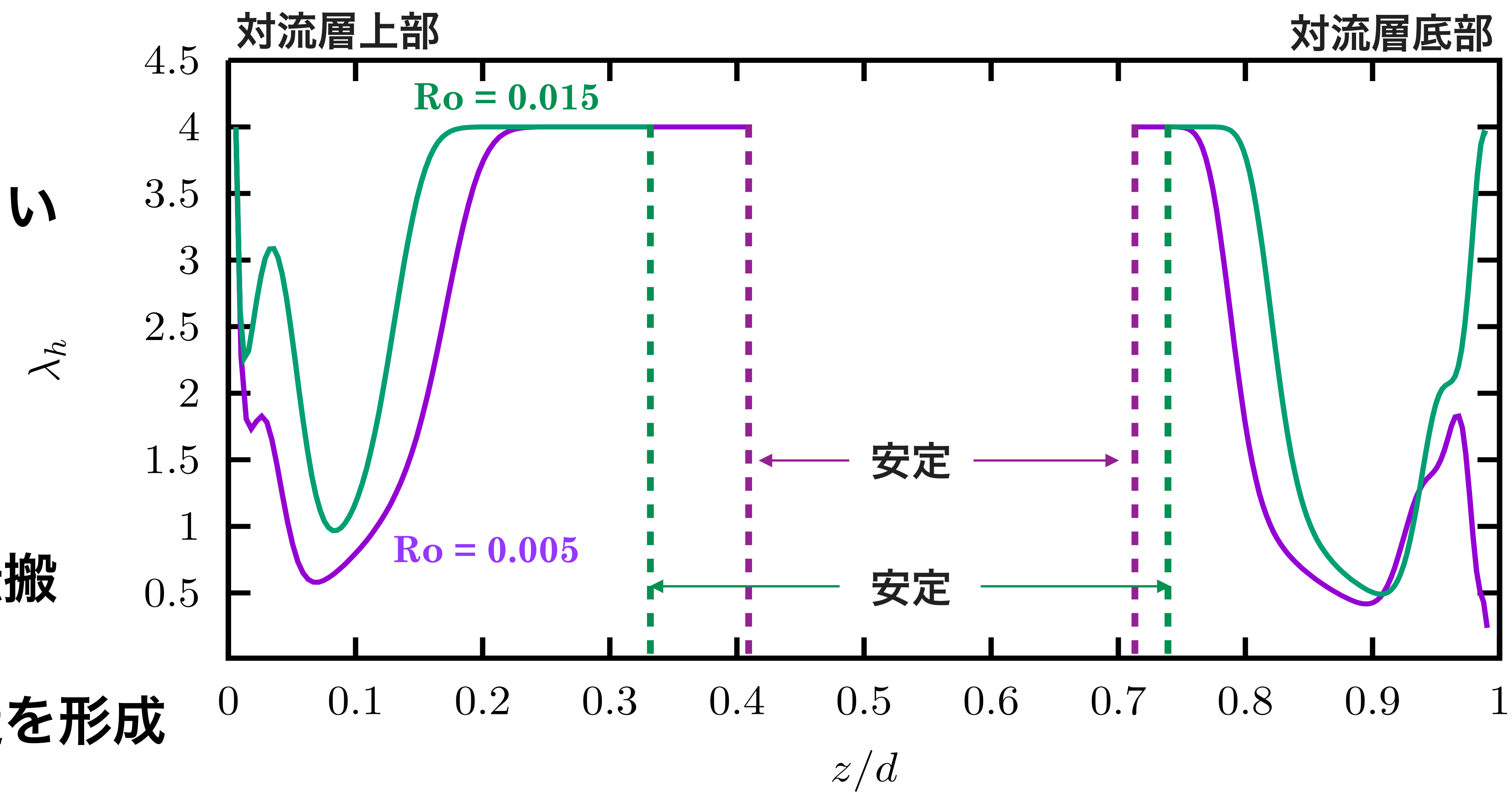
Bzの構造の進化

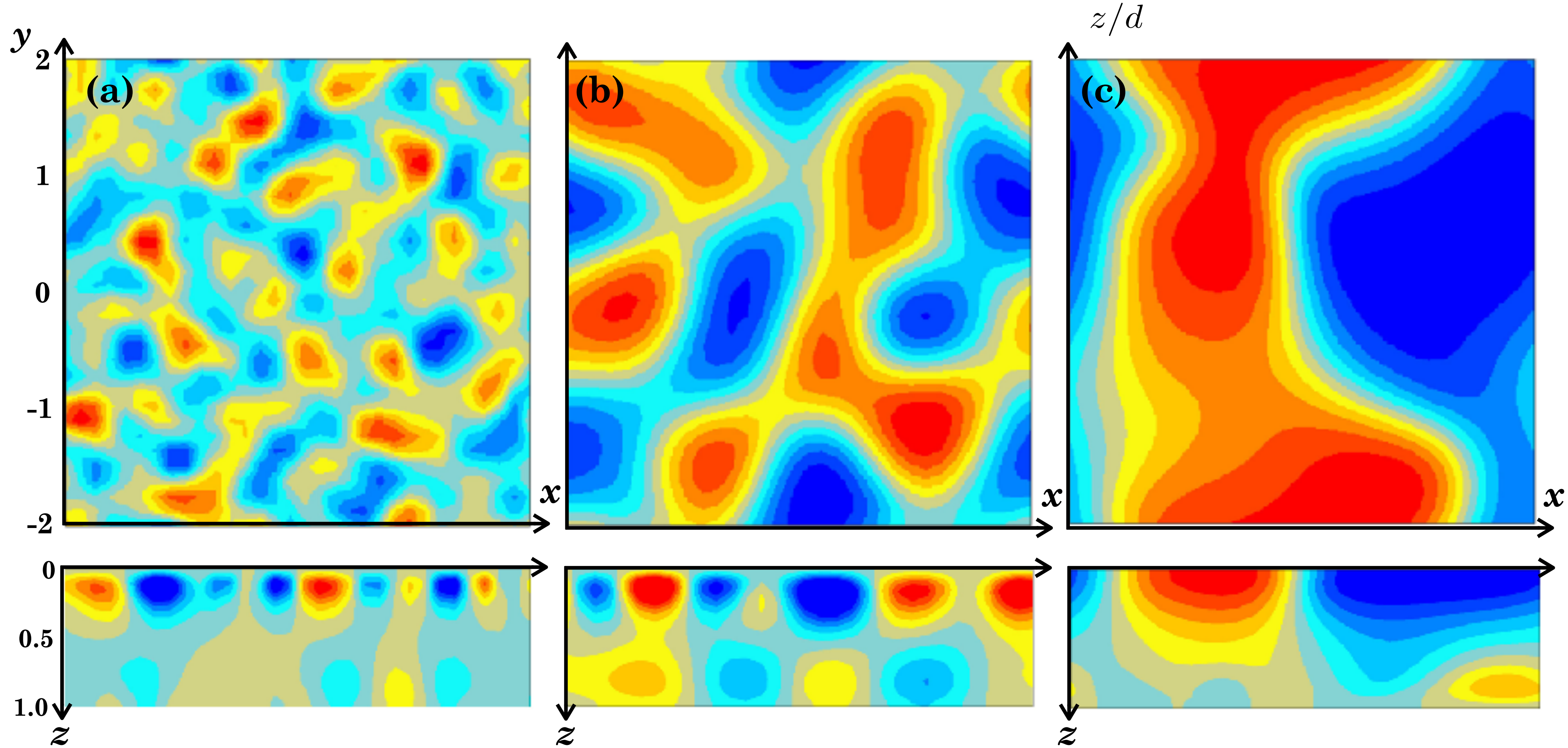
- 対流層上部は成長率が大きい一方で, 不安定波長は短い

①初期に表層の短波長モードが成長

②中部の長波長モードはゆっくり成長し上部へ伝搬

③対流層表面へ到達し箱幅程度のバンド場構造を形成





まとめ

- 観測的にも理論的にも恒星のダイナモの鍵はロスビー数

$$\boxed{\mathrm{Ro} \equiv \frac{\eta_\mathrm{t} k}{\alpha}}$$

- 励起の臨界値は Ro = 0.015 ~ 0.04（星の内部の平均）
  - 乱流α効果はΩにそれほど依存しない
  - 乱流磁気拡はΩの増大とともに現象
- 回転が遅い場合にダイナモが減衰する理由は？