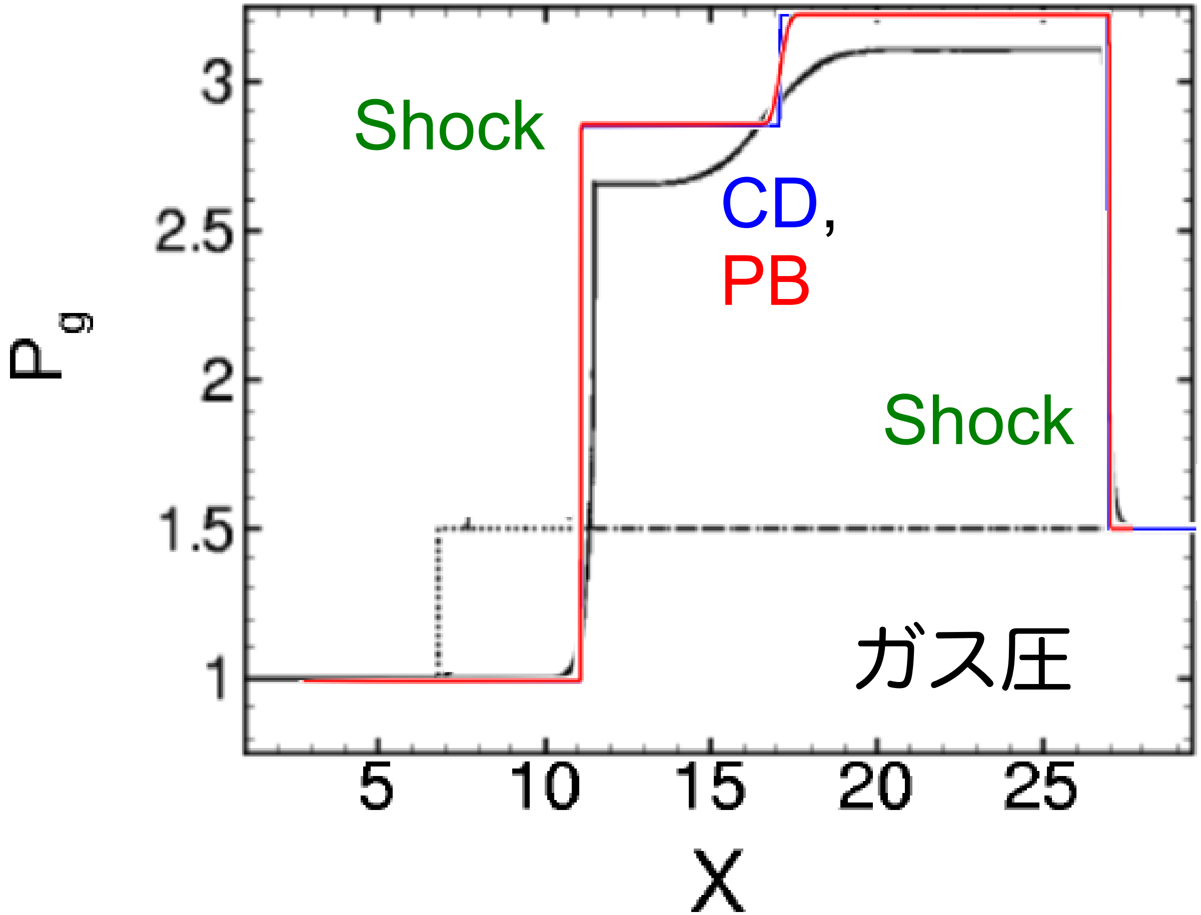
宇宙線を考慮した磁気流体シミュレーション

— 従来の数値解法
(Rice & Zank 1999, Case 2)

— 新たな数値解法

— 解析解



工藤 祐己
(鹿児島大学)

花輪 知幸
松元 亮治
(千葉大学)

宇宙線のエネルギー密度

$$E_{\rm cr} = \frac{4\pi}{c}\int E^2 \frac{dN}{dE} d\ln E$$

$$\sim 1.4 \times 10^{-12} \quad [{\rm erg\ cm}^{-3}]$$

宇宙線 = 陽子

星間ガスの熱エネルギー密度

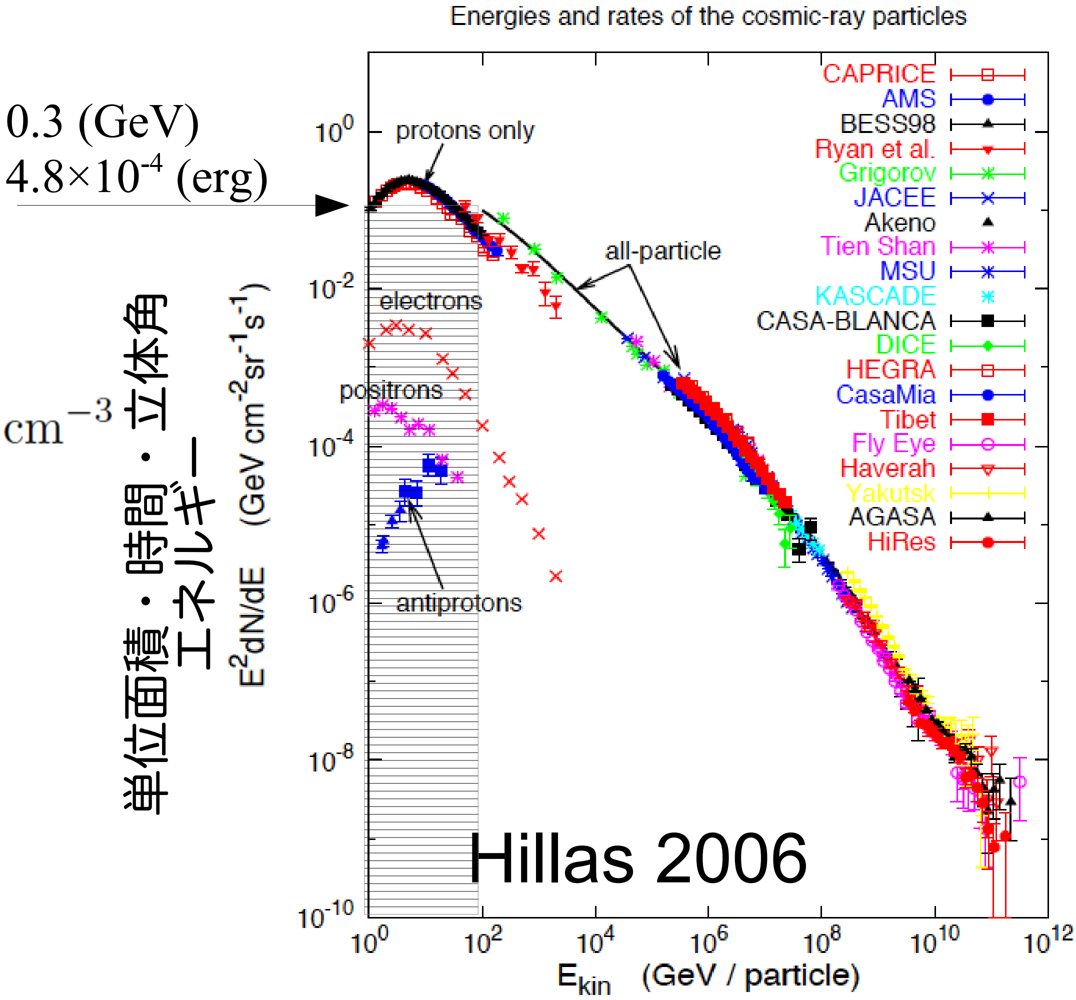
$$E_{\rm g} \sim 0.5 \times 10^{-12} \left[\frac{n}{0.3\ [{\rm cm}^{-3}]}\right] \left[\frac{T}{8000\ [{\rm K}]}\right] \quad {\rm erg\ cm}^{-3}$$

磁気エネルギー密度

$$E_B = 1.0 \times 10^{-12} \left[\frac{B}{5\ [\mu{\rm G}]}\right]^2 \quad {\rm erg\ cm}^{-3}$$

$E_{\rm cr}$ Я $E_{\rm mag}$ Я $E_{\rm g}$

エネルギースペクトル



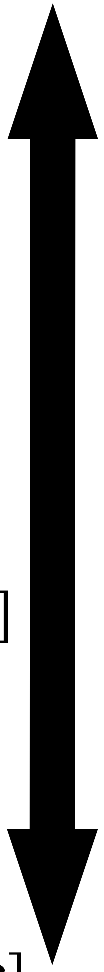
0.3 (GeV)
4.8×10^{-4} (erg)

$\Delta E \sim 100$ GeV 運動エネルギー
$\Delta \ln E \sim 6.9$

CR+(M)HD方程式の数値シミュレーション

宇宙線エネルギー式（移流-拡散方程式)

$$\frac{\partial E_{\rm cr}}{\partial t} + \underline{\nabla\cdot[(E_{\rm cr}+P_{\rm cr})\boldsymbol{v}]} = \boldsymbol{v}\cdot\nabla P_{\rm cr} + \underline{\nabla\cdot\left[\frac{\kappa_\parallel \boldsymbol{B}\,(\boldsymbol{B}\cdot\nabla E_{\rm cr})}{|\boldsymbol{B}|^2}\right]}$$

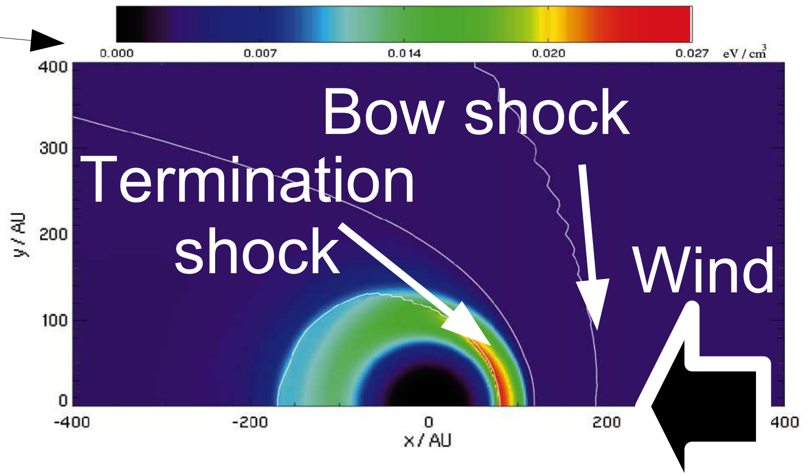


10^{-3} [pc]

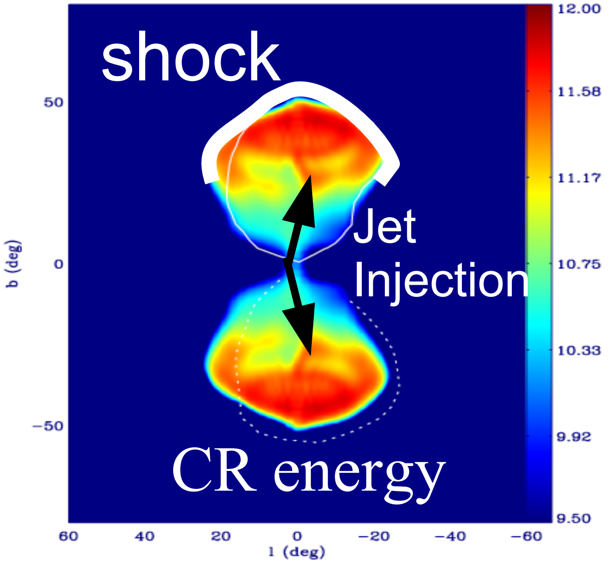
10 [kpc]

10^2 [Mpc]

Solar Wind
(HD, Fahr et al. 2000)

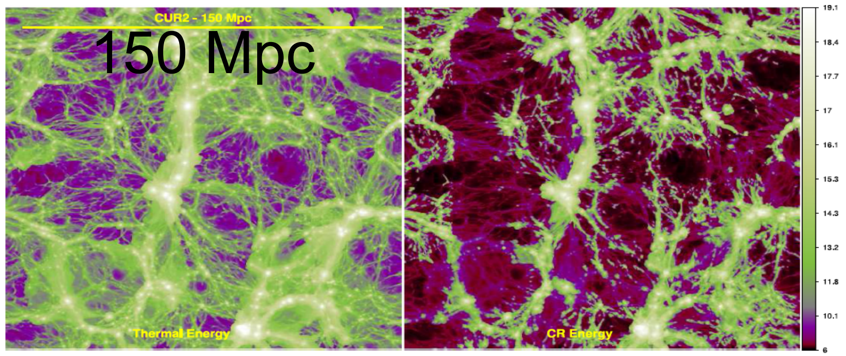


Fermi Bubble (Jet)
(MHD, Yang et al. 2012)



Galactic Dynamo & Wind
(MHD, e.g. Hanaz et al. 2013)

Large Scale Structure
(HD, Vazza et al. 2014)



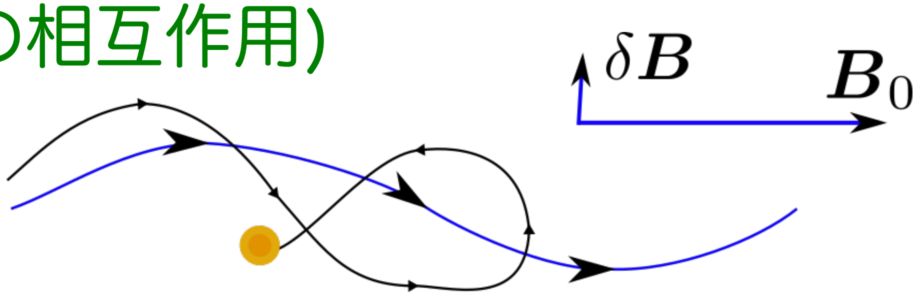
Thermal energy CR energy

宇宙線エネルギー方程式

(Berezinskii 1990, Bykov et al. 2013)

$$\underbrace{\frac{\partial E_{\rm cr}}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot[(E_{\rm cr}+P_{\rm cr})\underline{\boldsymbol{v}}]=\underline{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{\nabla}P_{\rm cr}}+\underbrace{\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\frac{\kappa_{\parallel}\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}E_{\rm cr}\right)}{|\boldsymbol{B}|^2}\right]}$$

磁力線に沿った拡散近似 (波と粒子の相互作用)



反射 〜 弾性散乱

宇宙線のジャイロ半径 ($v_{\rm cr}\sim c$)

$$r_L\sim\frac{p_{\rm cr}c}{eB}\sim 2.0\times10^{-7}\left[\frac{B}{5\ [\mu{\rm G}]}\right]^{-1}\left[\frac{p_{\rm cr}c}{1\ [{\rm GeV}]}\right]\quad[{\rm pc}]$$

宇宙線の平均自由行程

$$\lambda_{\rm mfp}\sim r_L\left(\frac{2\pi r_L}{l_{\rm max}}\right)^{1-q}\left(\frac{B_0}{\delta B}\right)^2\sim 0.13\left[\frac{B_0}{5\ [\mu{\rm G}]}\right]^{-\frac{1}{3}}\left[\frac{l_{\rm max}}{100\ [{\rm pc}]}\right]^{\frac{2}{3}}\left[\frac{p_{\rm cr}c}{1\ [{\rm GeV}]}\right]^{\frac{1}{3}}\quad[{\rm pc}]$$

$$\frac{\delta B}{B_0}=O(1)$$

$$q=\frac{5}{3}$$

ų ƃ ˇ ̈ L チ$\lambda_{\rm mfp}$ $\boldsymbol{v}\sim\langle\boldsymbol{v}_{\rm cr}\rangle\ll c$

流体近似

宇宙線は相対論的に運動するので

$$E_{\rm cr}=\langle E_{\rm kin}\rangle n_{\rm cr}$$
$$P_{\rm cr}=\langle\boldsymbol{p}_{\rm cr}\cdot\boldsymbol{v}_{\rm cr}\rangle n_{\rm cr}$$

$$P_{\rm cr}=\frac{\langle E_{\rm kin}\rangle}{3}n_{\rm cr}=(\gamma_{\rm cr}-1)E_{\rm cr}\ \Longleftrightarrow\ \gamma_{\rm cr}=4/3$$

宇宙線の比熱比

Basic CR + Ideal MHD equations

(Berezinskii 1990, Bykov et al. 2013)

宇宙線エネルギー

$$E_{\rm cr} = \frac{P_{\rm cr}}{\gamma_{\rm cr} - 1}$$

$$\frac{\partial E_{\rm cr}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot [(E_{\rm cr} + P_{\rm cr})\boldsymbol{v}] = \underbrace{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} P_{\rm cr}}_{\text{仕事}} \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{磁力線に沿った拡散}}$$

運動量

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left[\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v} + \left(P_{\rm g} + P_{\rm cr} + \frac{B^2}{2}\right)\mathbf{I} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}\right] = 0$$

エネルギー

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P_{\rm g}}{\gamma_{\rm g} - 1} + \frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{B^2}{2}\right) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left[\left(\frac{\gamma_{\rm g}}{\gamma_{\rm g} - 1}P_{\rm g} + \frac{1}{2}\rho v^2\right)\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}\right] = -\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} P_{\rm cr}$$

質量

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot [\rho\boldsymbol{v}] = 0$$

磁束 (誘導方程式)

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -c\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} \qquad \boldsymbol{E} = -\frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B}$$

従来の数値解法の問題点
宇宙線エネルギー式は非保存形

保存形

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \boldsymbol{v}] = 0$$

Center　Surface

- 標準的な数値解法を使える
- 保存則を満たし不連続面をとらえる

非保存形

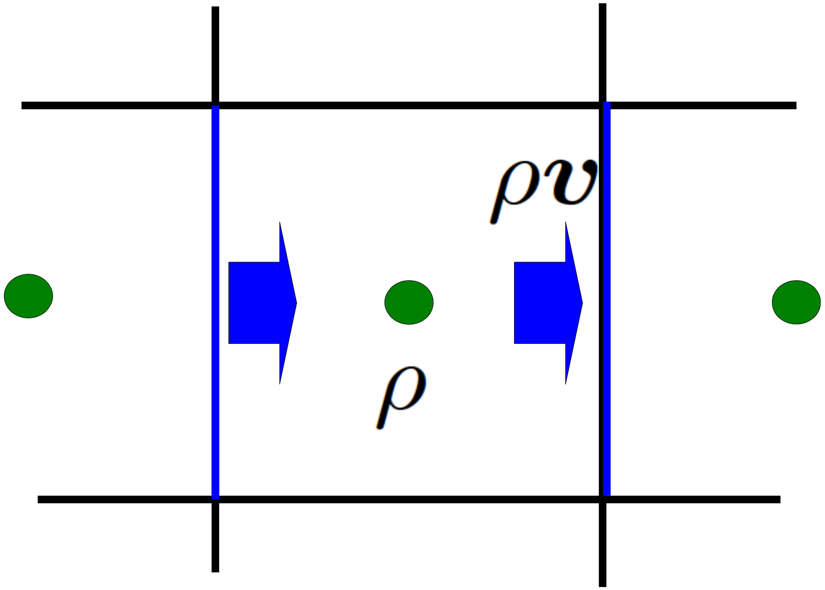
ソース項

$$\frac{\partial E_{\mathrm{cr}}}{\partial t} + \nabla \cdot [(E_{\mathrm{cr}} + P_{\mathrm{cr}})\boldsymbol{v}] = \boxed{\boldsymbol{v} \cdot \nabla P_{\mathrm{cr}}}$$

Center　Surface　Mixed

Center ：離散化によって物理量を定義

Surface : 数値計算手法による



非保存形の計算

Kuwabara et al. (2004)　:　CANS

Rasera & Chandran (2008)　:　Flash4

Dubois & Commerson (2015) :　RAMSESя я

Fully Conservation Form

(Kudoh Y., Hanawa T., 2016, MNRAS, 462, 4517)

CR エネルギー

$$\frac{\partial E_{\rm cr}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot [(E_{\rm cr} + P_{\rm cr})\boldsymbol{v}] = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} P_{\rm cr} \qquad E_{\rm cr} = \frac{P_{\rm cr}}{\gamma_{\rm cr} - 1}$$

CR 粒子数保存

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(P_{\rm cr}^{1/\gamma_{\rm cr}}\right) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left[P_{\rm cr}^{1/\gamma_{\rm cr}} \boldsymbol{v}\right] = 0$$

œ CR 粒子数密度
(adiabatic : K=1)

$$\rho_{\rm cr} \equiv P_{\rm cr}^{1/\gamma_{\rm cr}}$$

ポリトロープ関係

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{P_{\rm cr}^{1/\gamma_{\rm cr}}}{\rho}\right) = 0 \Longleftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{P_{\rm cr}}{\rho^{\gamma_{\rm cr}}}\right) = 0 \Longleftrightarrow P_{\rm cr} = K\rho^{\gamma_{\rm cr}}$$

CR Concentration

衝撃波において
ガスの運動エネルギーは熱エネルギーに変換(エントロピー増)
CRは断熱圧縮によって変化(Concentration = 一定)

1次元の宇宙線+流体系におけるリーマン問題の解

- Rankine-Hugoniot 関係 $(\rho, v_x, P_\mathrm{g}, P_\mathrm{cr})$

質量

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[\rho v_x] = 0$$

運動量

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho v_x^2 + (P_\mathrm{g} + P_\mathrm{cr})\right] = 0$$

エネルギー

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P_\mathrm{g}}{\gamma_\mathrm{g} - 1} + \frac{P_\mathrm{cr}}{\gamma_\mathrm{cr} - 1} + \frac{1}{2}\rho v_x^2\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\gamma_\mathrm{g}}{\gamma_\mathrm{g} - 1}P_\mathrm{g} + \frac{\gamma_\mathrm{cr}}{\gamma_\mathrm{cr} - 1}P_\mathrm{cr} + \frac{1}{2}\rho v_x^2\right) v_x\right] = 0$$

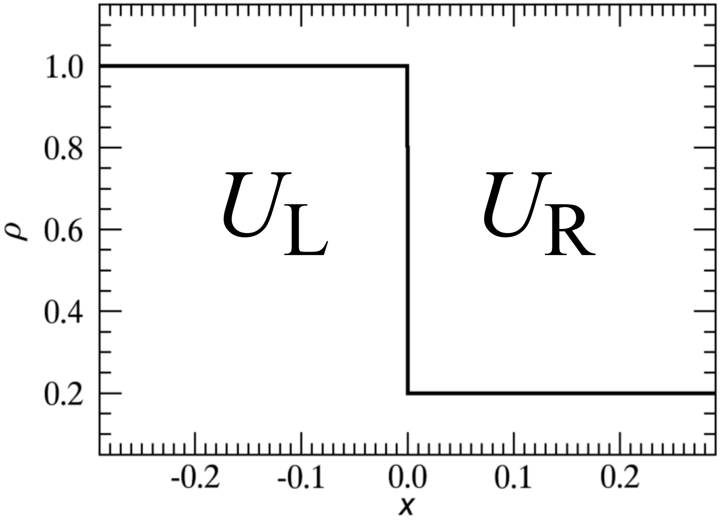
宇宙線粒子数

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(P_\mathrm{cr}^{1/\gamma_\mathrm{cr}}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[P_\mathrm{cr}^{1/\gamma_\mathrm{cr}} v_x\right] = 0$$

- リーマン問題とリーマン解

初期状態

$$\boldsymbol{U} = \begin{cases} \boldsymbol{U}_\mathrm{L} & x < 0 \\ \boldsymbol{U}_\mathrm{R} & x \geq 0 \end{cases}$$



宇宙線+流体系における1次元リーマン問題の解

Pfrommer et al. 2006

- ４ つの波 (ρ, v_x, P_g, P_{cr})

→音波モードで Concentration は一定，修正音速 $c_s = \left(\frac{\gamma_g P_g + \gamma_{cr} P_{cr}}{\rho}\right)^{1/2}$

→新たな波 (圧力平衡モード)

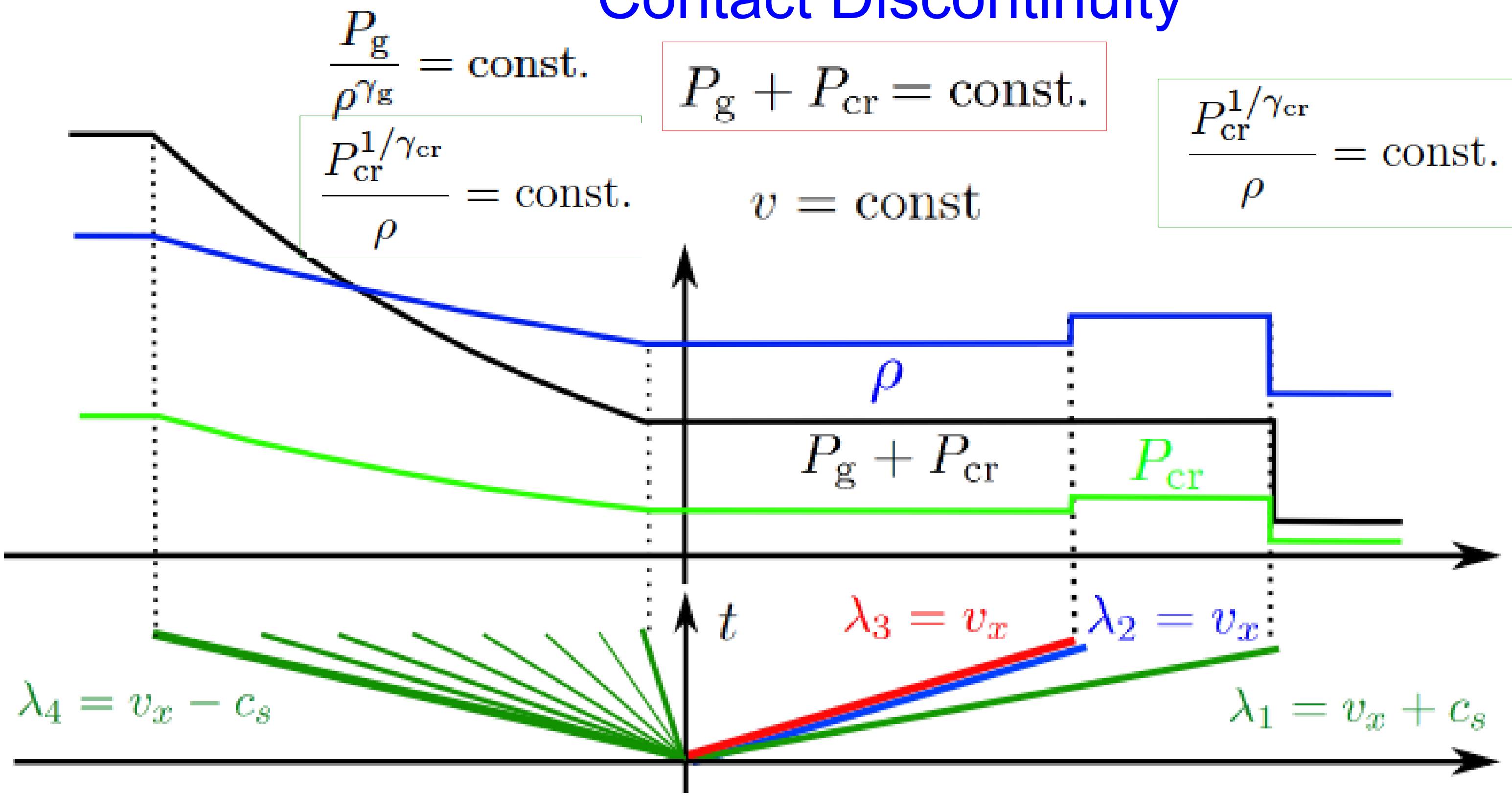
→ CDとPBは縮退

Pressure Balance Mode
(Webb et al. 1995)

Rarefaction

Contact Discontinuity

Shock



$\frac{P_g}{\rho^{\gamma_g}} = \text{const.}$

$\frac{P_{cr}^{1/\gamma_{cr}}}{\rho} = \text{const.}$

$P_g + P_{cr} = \text{const.}$

$v = \text{const}$

$\frac{P_{cr}^{1/\gamma_{cr}}}{\rho} = \text{const.}$

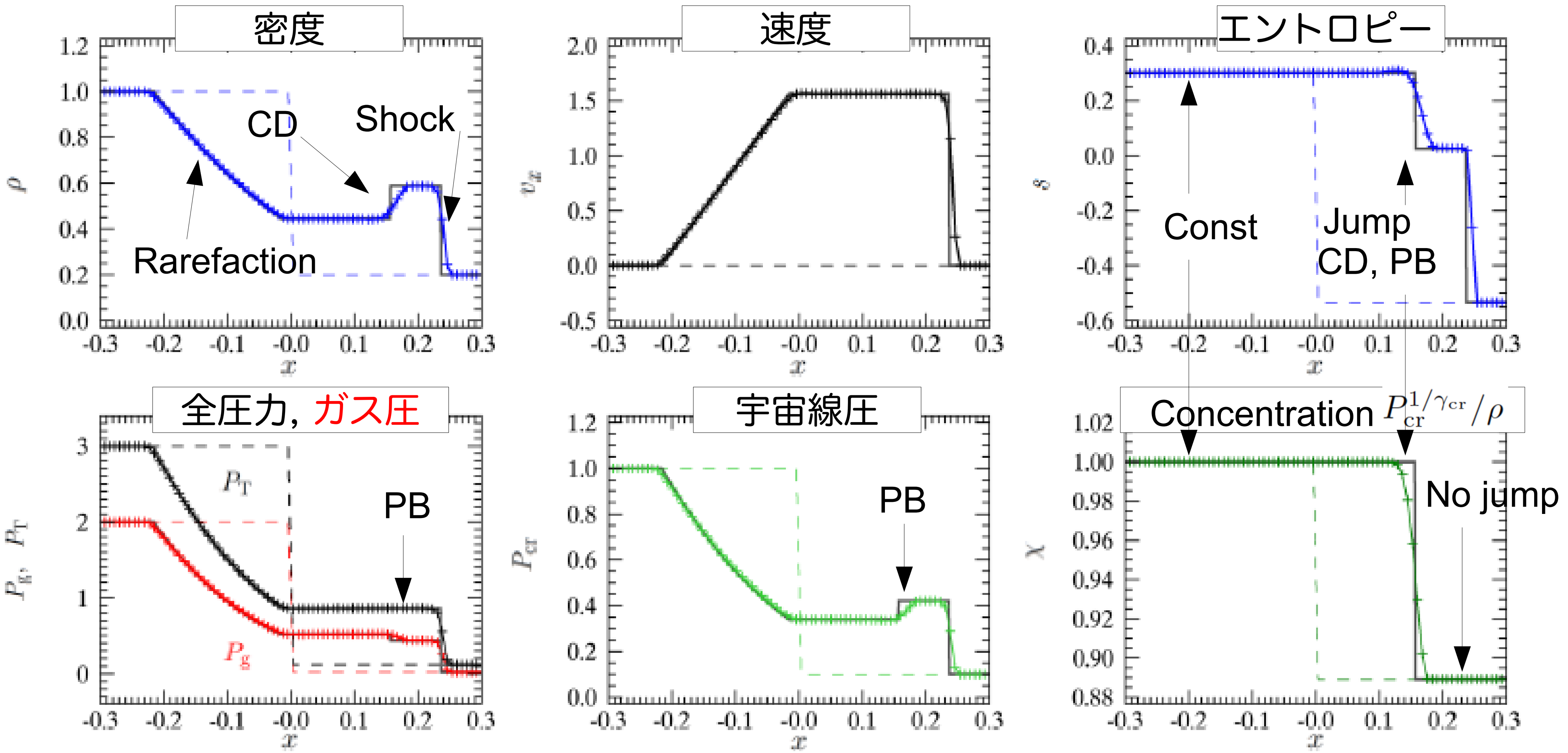
ρ
$P_g + P_{cr}$
P_{cr}
x
t
$\lambda_3 = v_x$
$\lambda_2 = v_x$
$\lambda_4 = v_x - c_s$
$\lambda_1 = v_x + c_s$
x

1D CR+HD Shock Tube Problem

Dashed line : 初期状態,　Solid line : 解析解

$\Delta x = 1/128$,　@ t=0.1
Roe method,　2nd-order

	ρ	v_x	P_{g}	P_{cr}
left ($x < 0$)	1.0	0.0	2.0	1.0
right ($x \geq 0$)	0.2	0.0	0.02	0.1



CRエネルギー方程式の保存形・非保存形解法の比較

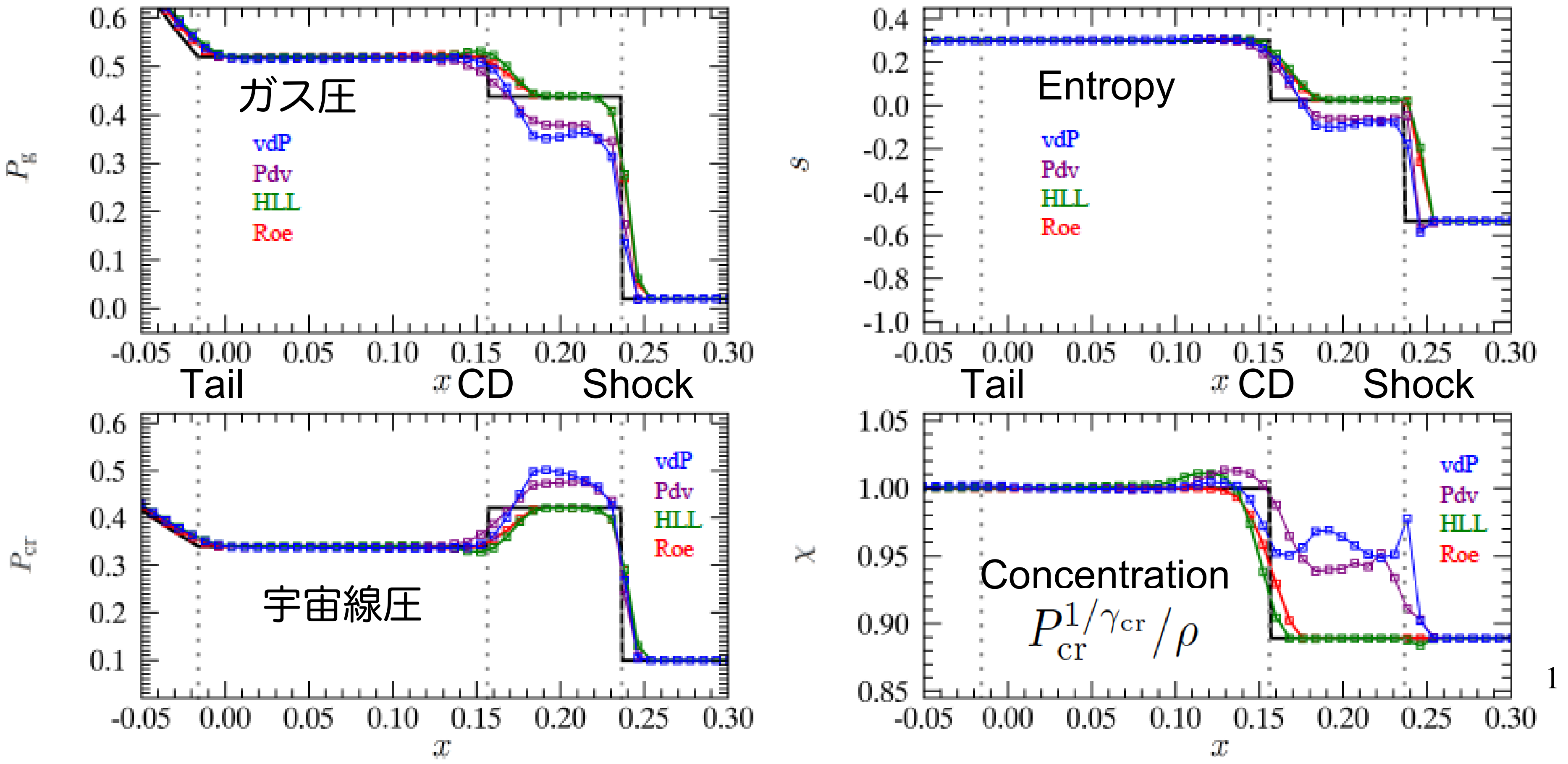
vdP : $$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P_{\rm cr}}{\gamma_{\rm cr}-1}\right)+\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\frac{\gamma_{\rm cr}}{\gamma_{\rm cr}-1}P_{\rm cr}\boldsymbol{v}\right]=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}P_{\rm cr}$$

Pdv : $$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P_{\rm cr}}{\gamma_{\rm cr}-1}\right)+\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\frac{P_{\rm cr}}{\gamma_{\rm cr}-1}\boldsymbol{v}\right]=-P_{\rm cr}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}$$

Non- conservation

HLL & Roe : $$\frac{\partial}{\partial t}\left(P_{\rm cr}^{1/\gamma_{\rm cr}}\right)+\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[P_{\rm cr}^{1/\gamma_{\rm cr}}\boldsymbol{v}\right]=0$$

Conservation



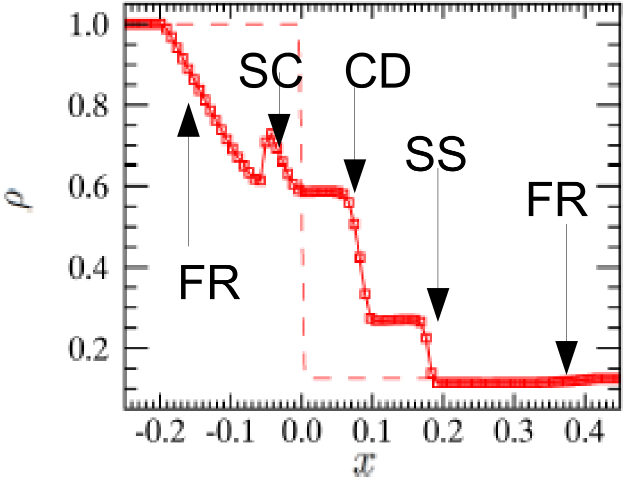
1D CR+MHD Shock Tube Problem

(Brio & Wu 1988 モデルの修正)

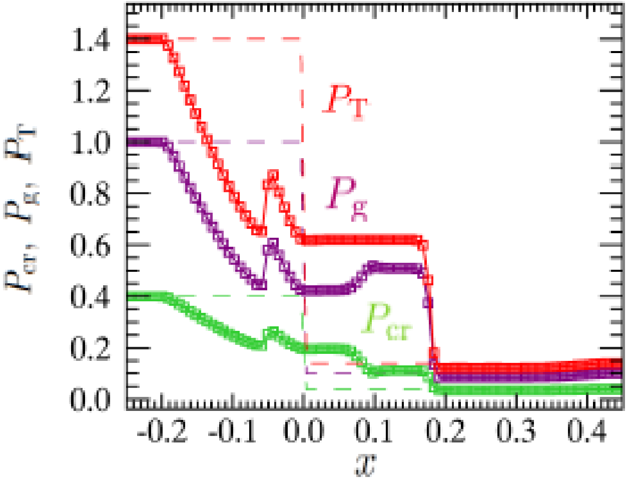
$\Delta x=1/256$, $t=0.08$
Roe method, 2nd order

	ρ	B_x	B_y	B_z	P_g	P_{cr}
Left ($x<0$)	1.0	1.0	1.0	0.0	1.0	0.4
Right ($x\geq 0$)	0.125	1.0	-1.0	0.0	0.1	0.04

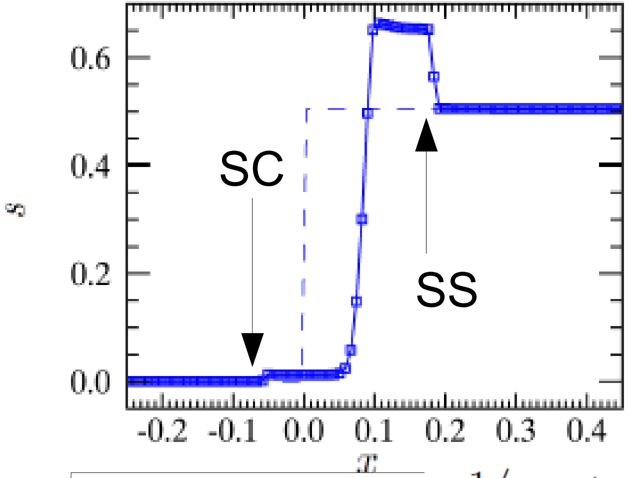
密度



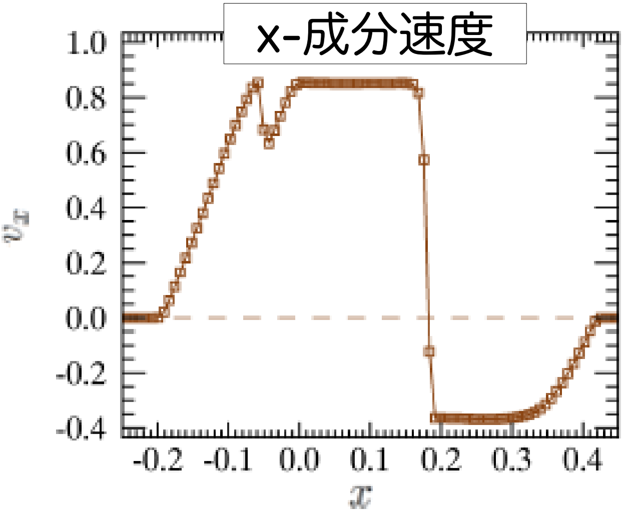
圧力



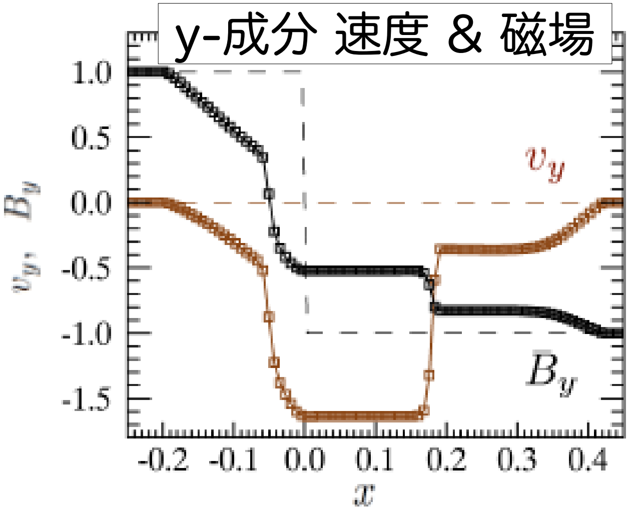
エントロピー



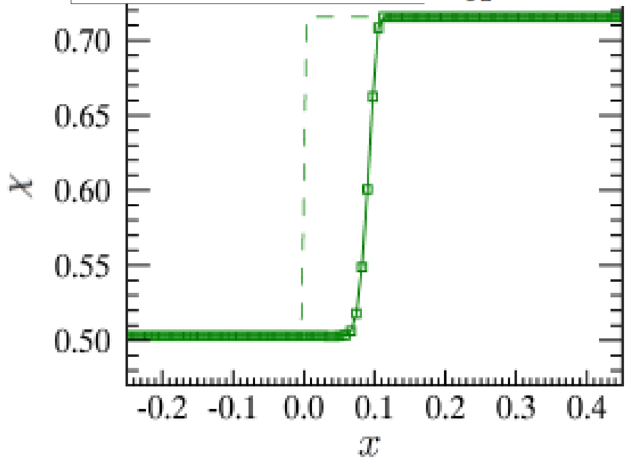
x-成分速度



y-成分 速度 & 磁場



Concentration $P_{cr}^{1/\gamma_{cr}}/\rho$



宇宙線を考慮した磁気流体シミュレーション

- 宇宙線＋磁気流体方程式を保存形に変形

  CR “粒子数” 保存　$\rho_{\mathrm{cr}} \equiv P_{\mathrm{cr}}^{1/\gamma_{\mathrm{cr}}}$

- Rankine-Hugoniot 関係 (1次元 CR HD 方程式)

Mass $[\rho v] = 0$

Momentum $[\rho v^2 + P_g + P_{cr}] = 0$

CR Number $\left[P_{cr}^{1/\gamma_{cr}} v\right] = 0$

Energy $\left[\frac{\gamma_g}{\gamma_g - 1}\frac{P_g}{\rho} + \frac{\gamma_{cr}}{\gamma_{cr} - 1}\frac{P_{cr}}{\rho} + \frac{1}{2}v^2\right] = 0$

衝撃波で Concentration が連続 $\frac{P_{\mathrm{cr}}^{1/\gamma_{\mathrm{cr}}}}{\rho} = \mathrm{const.}$

- Roe法による、保存形方程式を解く数値計算コードを開発
  非保存形のCRエネルギー方程式を用いると誤った解を導く

- 非等方拡散方程式の改良の必要性
  Flux Limited Diffusion, ゼロ磁場回避、(Super-Time Stepping法)

- 簡単なモデルほど数値計算がなされていない。