

第 2 章

システム方程式の差分解法

松元亮治 (千葉大理)

2.1 磁気流体力学の基礎方程式

3次元カーテシアン座標における磁気流体力学の基礎方程式を保存形に準じた形

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} + S = 0 \quad (2.1)$$

に書くと次のようになる。ただし、エネルギー式において冷却項は無視した。 V_x, V_y, V_z および B_x, B_y, B_z は、それぞれ速度ベクトル、磁束密度ベクトルの成分、 J_x, J_y, J_z は電流ベクトルの成分、 η は電気抵抗、 g は重力加速度で z 成分のみを考慮してある。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V_z) = 0, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho V_x^2 + p + \frac{1}{8\pi} (B_y^2 + B_z^2 - B_x^2) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho V_x V_y - \frac{1}{4\pi} B_x B_y \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho V_x V_z - \frac{1}{4\pi} B_x B_z \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho V_x V_y - \frac{1}{4\pi} B_x B_y \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho V_y^2 + p + \frac{1}{8\pi} (B_x^2 + B_z^2 - B_y^2) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho V_y V_z - \frac{1}{4\pi} B_y B_z \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho V_z) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho V_x V_z - \frac{1}{4\pi} B_x B_z \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho V_y V_z - \frac{1}{4\pi} B_y B_z \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho V_z^2 + p + \frac{1}{8\pi} (B_x^2 + B_y^2 - B_z^2) \right] + \rho g = 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z} = 0 , \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 , \quad (2.8)$$

and

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) + \frac{1}{8\pi} (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\gamma}{\gamma - 1} p V_x + \frac{1}{2} \rho V_x (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) + \frac{1}{4\pi} (E_y B_z - E_z B_y) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\gamma}{\gamma - 1} p V_y + \frac{1}{2} \rho V_y (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) + \frac{1}{4\pi} (E_z B_x - E_x B_z) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\gamma}{\gamma - 1} p V_z + \frac{1}{2} \rho V_z (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) + \frac{1}{4\pi} (E_x B_y - E_y B_x) \right] + \rho g V_z = 0 . \quad (2.9) \end{aligned}$$

ここで、

$$E_x = -V_y B_z + V_z B_y + \eta J_x \quad (2.10)$$

$$E_y = -V_z B_x + V_x B_z + \eta J_y \quad (2.11)$$

$$E_z = -V_x B_y + V_y B_x + \eta J_z \quad (2.12)$$

$$J_x = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \quad (2.13)$$

$$J_y = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \quad (2.14)$$

$$J_z = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \quad (2.15)$$

である。

2.2 1次元理想磁気流体方程式

物理量が x 座標のみに依る場合、磁気流体力学の基礎方程式は次のようになる。ただし、電気抵抗 η と重力加速度 g はゼロとした。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho V_x) = 0 , \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho V_x^2 + p + \frac{1}{8\pi} (B_y^2 + B_z^2 - B_x^2) \right] = 0 , \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho V_x V_y - \frac{1}{4\pi} B_x B_y \right) = 0 , \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_z) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho V_x V_z - \frac{1}{4\pi} B_x B_z \right) = 0 , \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 , \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0 , \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0 , \quad (2.22)$$

and

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) + \frac{1}{8\pi} (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\gamma}{\gamma - 1} p V_x + \frac{1}{2} \rho V_x (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) + \frac{1}{4\pi} (E_y B_z - E_z B_y) \right] = 0 . \end{aligned} \quad (2.23)$$

ただし

$$E_y = -V_z B_x + V_x B_z \quad (2.24)$$

$$E_z = -V_x B_y + V_y B_x \quad (2.25)$$

$$(2.26)$$

また、Maxwell 方程式より

$$\nabla \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \quad (2.27)$$

であるから $B_x = \text{constant}$ である。

したがって、式 (2.17)、(2.23) は、それぞれ

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho V_x^2 + p + \frac{1}{8\pi} (B_y^2 + B_z^2) \right] = 0 \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) + \frac{1}{8\pi} (B_y^2 + B_z^2) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\gamma}{\gamma - 1} p V_x + \frac{1}{2} \rho V_x (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) + \frac{1}{4\pi} (E_y B_z - E_z B_y) \right] = 0 . \end{aligned} \quad (2.29)$$

のように簡単になる。

2.3 システム方程式への Lax-Wendroff 法の適用

前節の 1 次元理想磁気流体方程式は次のような保存形に書けている。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (2.30)$$

ここで、

$$U = [\rho, \rho V_x, \rho V_y, \rho V_z, B_y, B_z, \rho e] \quad (2.31)$$

ただし、

$$\rho e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho}{2}(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) + \frac{B_y^2 + B_z^2}{8\pi} \quad (2.32)$$

である。

この保存形の方程式にスカラー方程式の場合に導入した 2-step Lax-Wendroff 法を適用すると、

$$U_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(U_{j+1}^n + U_j^n) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1}^n - F_j^n) \quad (2.33)$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2}^{n+1/2} - F_{j-1/2}^{n+1/2}) \quad (2.34)$$

ただし、 $F_{j+1/2}^{n+1/2} = F(U_{j+1/2}^{n+1/2})$ である。

基本課題のプログラムでは、この Lax-Wendroff 法を少し修正した修正 Lax-Wendroff 法 (Modified Lax-Wendroff 法: Rubin and Burstein 1967) を採用している。

重力項等がある場合にあらわれる source term S を含めた方程式

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + S = 0, \quad (2.35)$$

を修正 Lax-Wendroff 法では次のように差分化する

$$U_{j+1/2}^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{j+1}^n + U_j^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1}^n - F_j^n) - \frac{\Delta t}{2} (S_{j+1}^n + S_j^n). \quad (2.36)$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{F_{j+1/2}^{n+1} - F_{j-1/2}^{n+1}}{\Delta x} \right) - \frac{\Delta t}{2} \left(S_j^n + \frac{S_{j+1/2}^{n+1} + S_{j-1/2}^{n+1}}{2} \right), \quad (2.37)$$

ここで、 $F_{j+1/2}^{n+1}$ and $S_{j+1/2}^{n+1}$ はそれぞれ $F(U_{j+1/2}^{n+1})$ と $S(U_{j+1/2}^{n+1})$, をあらわす。

2.4 人工粘性

Lax-Wendroff 法のプログラムでは、不連続面近傍で生じる数値不安定性を抑えるために各タイムステップごとに人為的な拡散項 (人工粘性) を加える必要がある。基本課題のプログラムでは、Richtmeyer and Morton (1967) にしたがって、以下の人工粘性を加えている

$$\hat{U}_j^{n+1} = U_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} Q_j^n (U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \quad (2.38)$$

ここで、 Q_j^n は局所的な速度勾配を用いて

$$Q_j^n = Q_b \frac{(\Delta x)^2}{2} \left(\left| \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\Delta x} \right| + \left| \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{\Delta x} \right| \right). \quad (2.39)$$

とする。 v_j はメッシュ点 x_j の速度、 Q_b は入力パラメータである。

2.5 特性曲線とリーマン不変量

1次元磁気流体の基礎方程式を次の形に書く。

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} = 0 \quad (2.40)$$

ここで、 w はベクトル、 A は行列である。行列 A の固有値を λ 、この固有値に対応する左固有ベクトルを $\vec{\ell}$ とするとき、

$$\vec{\ell} \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \vec{\ell} A \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} = 0. \quad (2.41)$$

ℓ は左固有ベクトルなので

$$\vec{\ell} A = \lambda \vec{\ell}. \quad (2.42)$$

を上式に代入して

$$\vec{\ell} \left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} \right) = 0. \quad (2.43)$$

さて、

$$dx = \lambda dt \quad (2.44)$$

によって定義される曲線を考える。この曲線を 特性曲線 と言う。特性曲線に沿って

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{w(t + \Delta t, x + \lambda \Delta t) - w(t, x)}{\Delta t} = \frac{\partial w}{\partial t} + \lambda \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.45)$$

が成り立つ。したがって、特性曲線に沿って

$$\vec{\ell} d\vec{w} = 0 \quad (2.46)$$

である。

磁場のない場合の1次元流体方程式を例にとると

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.49)$$

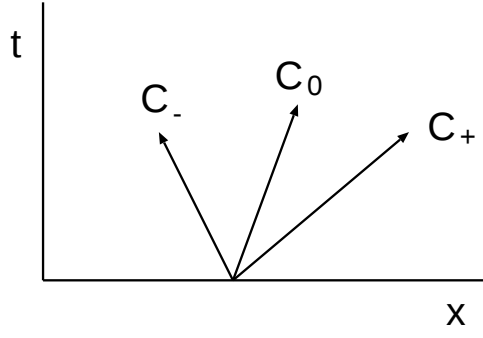


図 2.1: 固有値 $u - c$, u , $u + c$ に対応する特性曲線 C_- , C_0 , C_+

より

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

$$A = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \gamma p & u \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

であり、行列 A の固有値は

$$\lambda = u, u \pm c \quad (2.52)$$

ただし、 c は音速

$$c = \left(\frac{\gamma p}{\rho} \right)^{1/2} \quad (2.53)$$

である。固有値 $u - c$, u , $u + c$ に対応する特性曲線

$$\frac{dx}{dt} = u - c, u, u + c \quad (2.54)$$

をそれぞれ、 C_- 、 C_0 、 C_+ と記す。

$\lambda = u + c$ のとき、左固有ベクトル

$$(\ell_1 \ell_2 \ell_3) \quad (2.55)$$

を用いて

$$(\ell_1 \ell_2 \ell_3) A = (u + c)(\ell_1 \ell_2 \ell_3) \quad (2.56)$$

これより、

$$\ell_1 u = (u + c) \ell_1 \quad (2.57)$$

$$\frac{\ell_2}{\rho} + u \ell_3 = (u + c) \ell_3 \quad (2.58)$$

したがって、

$$\ell_1 = 0 \quad (2.59)$$

$$\frac{\ell_2}{\rho} = c\ell_3 \quad (2.60)$$

よって、特性線 C_+

$$\frac{dx}{dt} = u + c \quad (2.61)$$

に沿って

$$\vec{\ell} d\vec{w} = (\ell_1 \ell_2 \ell_3) \begin{bmatrix} d\rho \\ du \\ dp \end{bmatrix} = du + \frac{1}{\rho c} dp = 0 \quad (2.62)$$

この式を変形すると

$$d(u + \frac{2c}{\gamma - 1}) = 0 \quad (2.63)$$

以上により、特性曲線 C_+ に沿って

$$u + \frac{2c}{\gamma - 1} = constant \quad (2.64)$$

であることがわかった。このように、特性曲線に沿って一定の値に保たれる物理量を リーマンの不変量 と言う。同様に、特性曲線 C_- に沿っては

$$u - \frac{2c}{\gamma - 1} = constant \quad (2.65)$$

である。

2.6 磁気流体の特性曲線

1次元理想磁気流体の基礎方程式を保存形

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (2.66)$$

で書くと、

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho V_x \\ \rho V_y \\ \rho V_z \\ B_y \\ B_z \\ \rho e \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho V_x \\ \rho V_x^2 + p + \frac{1}{8\pi} (B_y^2 + B_z^2 - B_x^2) \\ \rho V_x V_y - \frac{1}{4\pi} B_x B_y \\ \rho V_x V_z - \frac{1}{4\pi} B_x B_z \\ B_y V_x - B_x V_y \\ -B_x V_z + B_z V_x \\ (\rho e + p)V_x + \frac{1}{8\pi} V_x (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) - \frac{1}{4\pi} B_x (B_x V_x + B_y V_y + B_z V_z) \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

ただし、

$$\rho e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) + \frac{1}{8\pi}(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) \quad (2.69)$$

行列 $\frac{\partial F}{\partial U}$ の固有値は $V_x, V_x \pm C_s, V_x \pm C_A, V_x \pm C_f$ である。ここで、 C_s, C_A, C_f は遅い磁気音波、アルフベン波、速い磁気音波の速度である。それぞれの固有値に対応して 7 本の特性曲線が存在する。

2.7 初期不連続の分解

基本課題のひとつとして、図のように 1 次元的な管が隔壁により高圧室と低圧室に仕切られているときに、この隔壁を破ると、どのように時間変化していくかという問題を取りあげている。このような管のことを衝撃波管 (ショックチューブ) と言う。また、初期不連続がどのように時間発展していくかという問題はリーマン問題と呼ばれる。Godunov 法などの数値解法ではリーマン問題を解くことによって数値流束が計算される。

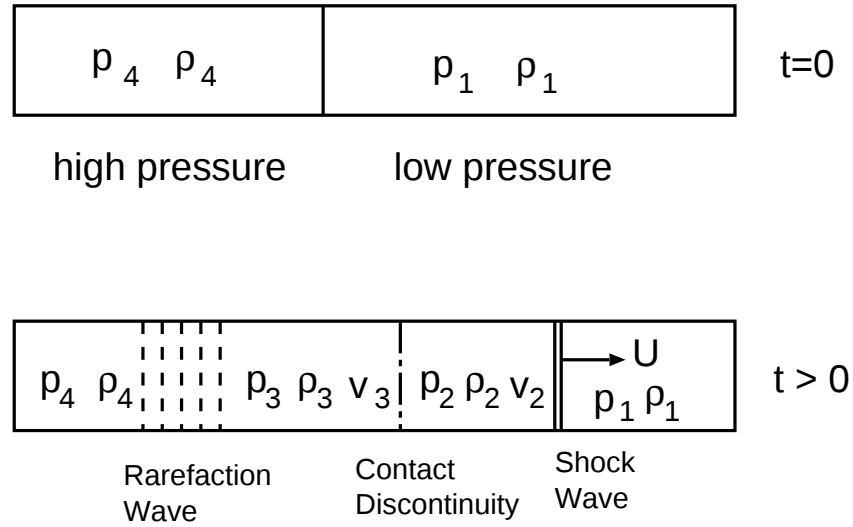


図 2.2: ショックチューブの時間発展

磁場がない場合、隔壁を破ると図のように低圧側へ衝撃波 (shock wave)、高圧側へ膨張波 (rarefaction wave) が伝わる。また、もともと高圧側にあった気体と低圧側にあった気体が接する面 (接触不連続面: contact discontinuity) が低圧側へ移動していく。接触不連続面では密度のみが変化し、速度、圧力は変化しない。

初期不連続の分解とともに空間が影響を受けていない領域、膨張波領域、膨張波と接触不連続面で囲まれた領域、接触不連続面と衝撃波の間の領域、衝撃波全面の影響を受けていない領域に分かれる。それぞれの領域での圧力、密度等は以下のようにして求めることができる。

衝撃波の速度を U とするとき、衝撃波の前面と後面で質量、運動量、エネルギーが保存することから、

$$\rho_2(U - v_2) = \rho_1 U \quad (2.70)$$

$$\rho_2(U - v_2)^2 + p_2 = \rho_1 U^2 + p_1 \quad (2.71)$$

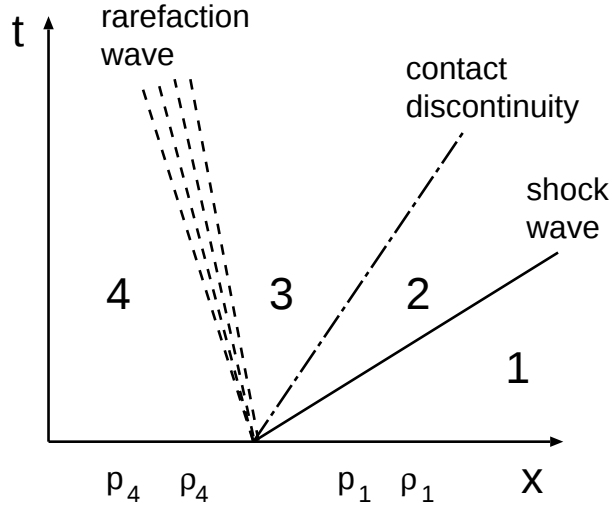


図 2.3: $x-t$ 面上での時間発展

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} (U - v_2)^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} U^2 \quad (2.72)$$

これらより、

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \quad (2.73)$$

$$v_2 = \frac{2c_1}{\gamma+1} \frac{M_1^2 - 1}{M_1} \quad (2.74)$$

ただし

$$c_1 = (\gamma p_1 / \rho_1)^{1/2} \quad (2.75)$$

は領域 1 での音速、

$$M_1 = v_1 / c_1 \quad (2.76)$$

はマッハ数である。

接触不連続面前後では速度と圧力が等しく

$$v_3 = v_2 \quad (2.77)$$

$$p_3 = p_2. \quad (2.78)$$

図の 3 と 4 の領域の間では特性曲線 C_+ に沿ってリーマン不変量

$$v + \frac{2}{\gamma-1} c \quad (2.79)$$

が一定に保たれるため、

$$v_3 + \frac{2}{\gamma-1} c_3 = \frac{2}{\gamma-1} c_4, \quad (2.80)$$

ここで、 c_3, c_4 は領域 3、4 での音速である。また、領域 3 と 4 の間でエントロピーが一定に保たれる (断熱膨張) ことから

$$\frac{p_3}{\rho_3^\gamma} = \frac{p_4}{\rho_4^\gamma} \quad (2.81)$$

以上の関係式より、 $\rho_2, p_2, v_2, \rho_3, p_3, v_3$ 等を決定することができる。

基本課題のデモンストレーションページに、ショックチューブの計算結果がアニメーションで示されているので参照されたい。

練習問題

本節で導いた関係式にもとづき、衝撃波管問題の解を解析的に求め、シミュレーション結果と比較せよ。

2.8 磁気流体における初期不連続の分解

磁気流体衝撃波前後での物理量の関係についても、保存系で書いた磁気流体の基礎方程式をもとにして、流体衝撃波の場合と同様にして求めることができる。磁気流体衝撃波には速い衝撃波 (fast shock)、遅い衝撃波 (slow shock) がある。また、磁気流体では、ある面を通して磁場方向が不連続に変化する回転不連続面 (rotational discontinuity) などもある。

磁気流体コードのテストとして、Brio and Wu (1988) が用いた初期不連続分解の計算がよく行われる。基本課題の Web ページに彼らのモデルをシミュレートした結果のアニメーションがあるので参照されたい。

参考文献

1. 「流体力学の数値計算法」 藤井孝蔵著、東京大学出版会 (1994)
2. 昨年度の数値天体物理学サマースクールの富阪さんのテキスト (2000)
3. 「気体力学」 森岡茂樹著、朝倉書店 (1982)
4. 「発展方程式の数値解析」、矢嶋、野木著、岩波応用数学叢書 (1977)