

CIPMOCCT 法入門

(2000 年 9 月 19 日改訂版)

工藤哲洋

数値 MHD 入門セミナー

日時：2000 年 9 月 11 日 - 9 月 15 日

場所：野辺山太陽電波観測所

1 CIPMOCCT 法を用いた MHD 方程式の解法

流体の部分の時間発展を CIP 法で解き，磁場の時間発展を MOCCT 法で解く手順の一例をフローチャートとして図 1 に示した [1] .

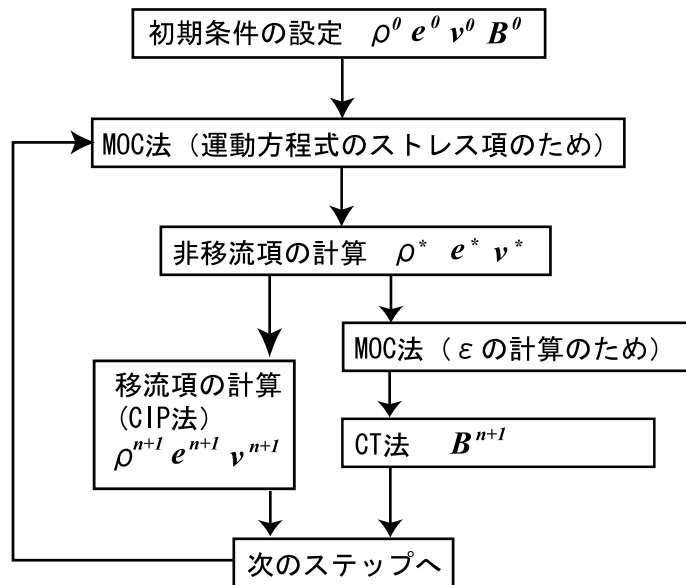


図 1: CIP-MOCCT 法を用いて MHD 方程式を解法するときの大まかな手順

1.1 1.5 次元 MHD 方程式

デカルト座標における基礎方程式は，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{4\pi\rho} B_y \frac{\partial B_y}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi\rho} B_x \frac{\partial B_y}{\partial x} \quad (3)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + v_x \frac{\partial e}{\partial x} = -\frac{p}{\rho} \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (4)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (v_x B_y - v_y B_x) \quad (5)$$

$$e = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \quad (6)$$

となる．ここで， ρ は密度， v_x, v_y はそれぞれ x 方向と y 方向の速度， B_x, B_y はそれぞれ x 方向と y 方向の磁場， p は圧力， e は単位質量あたりの内部エネルギーである．1.5 次元とは， $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$ で $v_z = B_z = 0$ であるが， $v_y \neq 0, B_y \neq 0$ であるような近似のことをいう．このとき $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ から， $B_x = \text{constant}$ となる．

1.2 非移流フェイズ (物理量)

図2のような互い違い格子を用いると，非移流フェイズの差分式は，

$$\frac{\rho_i^* - \rho_i^n}{\Delta t} = -\rho_i^n \frac{(v_x)_{i+1/2}^n - (v_x)_{i-1/2}^n}{\Delta x} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{(v_x)_{i+1/2}^* - (v_x)_{i+1/2}^n}{\Delta t} &= -\frac{2}{\rho_{i+1}^n + \rho_i^n} \frac{(p_{i+1}^n + q_{i+1}^n) - (p_i^n + q_i^n)}{\Delta x} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \frac{2}{\rho_{i+1}^n + \rho_i^n} \frac{(B_y)_i^n + (B_y)_{i+1}^n}{2} \frac{(B_y)_{i+1}^n - (B_y)_i^n}{\Delta x} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{(v_y)_i^* - (v_y)_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{4\pi\rho_i^n} B_x \frac{(B_y)_{i+1/2}^* - (B_y)_{i-1/2}^*}{\Delta x} \quad (9)$$

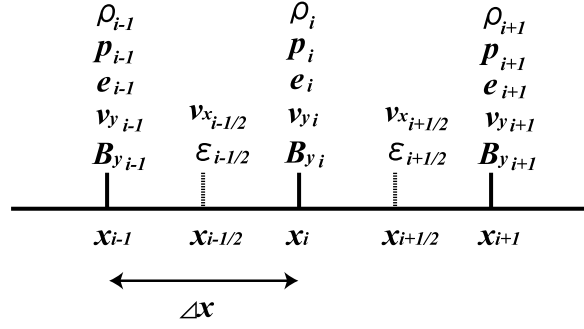


図 2: 1.5 次元 MHD コードで用いる互い違い格子 .

$$\frac{e_i^* - e_i^n}{\Delta t} = - \frac{p_i^n + q_i^n}{\rho_i^n} \frac{(v_x)_{i+1/2}^* - (v_x)_{i-1/2}^* + (v_x)_{i+1/2}^n - (v_x)_{i-1/2}^n}{2\Delta x} \quad (10)$$

となる . 磁場の時間発展の方程式 (5) は別に CT 法で解くのでここには現れない . ここで , q_i^n は人工粘性で

$$q_i^n = \begin{cases} \alpha(-\rho_i^n C_s \Delta v_x + \frac{\gamma+1}{2} \rho_i^n \Delta v_x^2) & (\text{if } \Delta u < 0) \\ 0 & (\text{if } \Delta u \geq 0) \end{cases} \quad (11)$$

のように与えられる . ここで , $C_s = \sqrt{\gamma p_i^n / \rho_i^n}$ は音速 , $\Delta v_x = (v_x)_{i+1/2}^n - (v_x)_{i-1/2}^n$ である . α はパラメータで $a = 0.6 - 1$ くらいの値が使われる .

また , 式 (9) の中に現れる , $(B_y)_{i+1/2}^*$ は MOC 法によって求められた値で具体的には以下の式で与えられる .

$$(B_y)_{i+1/2}^* = \frac{-v_y^+ + v_y^- + B_y^+ / \sqrt{4\pi\rho^+} + B_y^- / \sqrt{4\pi\rho^-}}{1/\sqrt{4\pi\rho^+} + 1/\sqrt{4\pi\rho^-}}. \quad (12)$$

ここで ,

$$v_y^+ = \begin{cases} v_{y(i)}^n + \frac{1}{2}(\Delta x - C_{i+1/2}^+ \Delta t) \frac{dv_y}{dx}(i) & \text{if } C_{i+1/2}^+ > 0 \\ v_{y(i+1)}^n - \frac{1}{2}(\Delta x + C_{i+1/2}^+ \Delta t) \frac{dv_y}{dx}(i+1) & \text{if } C_{i+1/2}^+ < 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$\frac{dv_y}{dx}(i) = \begin{cases} \frac{2\Delta v_{y(i-1/2)} \Delta v_{y(i+1/2)}}{\Delta v_{y(i-1/2)} + \Delta v_{y(i+1/2)}} & \text{if } \Delta v_{y(i-1/2)} \Delta v_{y(i+1/2)} > 0 \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (14)$$

$$\Delta v_{y(i+1/2)} = (v_{y(i+1)}^n - v_{y(i)}^n) / \Delta x \quad (15)$$

$$C^+ = \frac{B_x}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad (16)$$

である． B_y^+ に関しては式 (13)-(15) において， v_y を B_y に置き換えた式で与えられる． v_y^- ， B_y^- は，式 (13) の C^+ を

$$C^- = -\frac{B_x}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad (17)$$

に置き換えて同様に求められる．密度に関しては簡単のため， $\rho^+ = \rho_{i-1}^n$ ， $\rho^- = \rho_{i+1}^n$ とする．

1.3 非移流フェイズ (微分量)

微分量の非移流フェイズは， $f = (\rho, v_x, v_y, e)$ ， $\dot{f} = (\dot{\rho}, \dot{v}_x, \dot{v}_y, \dot{e})$ としたとき (' は x に関する微分)，

$$\dot{f}_i^* = \dot{f}_i^n + \frac{(f_{i+1}^* - f_{i+1}^n) - (f_{i-1}^* - f_{i-1}^n)}{2\Delta x} - \dot{f}_i^n \frac{(v_x)_{i+1} - (v_x)_{i-1}}{2\Delta x} \Delta t \quad (18)$$

で与えられる．

1.4 移流フェイズ

移流フェイズは， $f = (\rho, v_x, v_y, e)$ ， $\dot{f} = (\dot{\rho}, \dot{v}_x, \dot{v}_y, \dot{e})$ としたとき (' は x に関する微分) CIP 法を用いて，

$$f_i^{n+1} = [(a_i \xi + b_i) \xi + \dot{f}_i^*] \xi + f_i^* \quad (19)$$

$$\dot{f}_i^{n+1} = (3a_i \xi + 2b_i) \xi + \dot{f}_i^* \quad (20)$$

である．ここで， $u > 0$ なら

$$a_i = \frac{\dot{f}_i^* + \dot{f}_{i-1}^*}{\Delta x^2} - \frac{2(f_i^* - f_{i-1}^*)}{\Delta x^3} \quad (21)$$

$$b_i = \frac{3(f_{i-1}^* - f_i^*)}{\Delta x^2} + \frac{2\dot{f}_i^* + \dot{f}_{i-1}^*}{\Delta x} \quad (22)$$

$$\xi = -u \Delta t \quad (23)$$

となる． $u < 0$ なら， $\Delta x \rightarrow -\Delta x$ とし， $i-1 \rightarrow i+1$ と書きかえた式を用いる．

1.5 CT 法

磁場の時間発展の方程式 (5) の差分式は ,

$$\frac{1}{\Delta t}[(B_y)_i^{n+1} - (B_y)_i^n] = \frac{1}{\Delta x}(\epsilon_{i+1/2}^{n+1/2} - \epsilon_{i-1/2}^{n+1/2}) \quad (24)$$

となり , ここで ,

$$\epsilon_{i+1/2}^{n+1/2} = -((v_x)_{i+1/2}^*(B_y)_{i+1/2}^* - (v_y)_{i+1/2}^* B_x). \quad (25)$$

である . ここで私は

$$(v_x)_{i+1/2}^* = (v_x)_{i+1/2} \quad (26)$$

として移流フェイスで計算された値を使っている . 単に $(v_x)_{i+1/2}^* = (v_x)_{i+1/2}^n$ とすると衝撃波管問題がうまく解けなかった .

$(v_y)_{i+1/2}^*$, $(B_y)_{i+1/2}^*$ に関しては MOC 法によって求められた値で具体的には以下の式で与えられる .

$$v_y^* = \frac{v_y^+ \sqrt{4\pi\rho^+} + v_y^- \sqrt{4\pi\rho^-} - B_y^+ + B_y^-}{\sqrt{4\pi\rho^+} + \sqrt{4\pi\rho^-}}, \quad (27)$$

$$B_y^* = \frac{-v_y^+ + v_y^- + B_y^+/\sqrt{4\pi\rho^+} + B_y^-/\sqrt{4\pi\rho^-}}{1/\sqrt{4\pi\rho^+} + 1/\sqrt{4\pi\rho^-}}. \quad (28)$$

ここで、

$$v_y^+ = \begin{cases} v_{y(i)}^n + \frac{1}{2}(\Delta x - C_{i+1/2}^+ \Delta t) \frac{dv_y}{dx}(i) & \text{if } C_{i+1/2}^+ > 0 \\ v_{y(i+1)}^n - \frac{1}{2}(\Delta x + C_{i+1/2}^+ \Delta t) \frac{dv_y}{dx}(i+1) & \text{if } C_{i+1/2}^+ < 0 \end{cases} \quad (29)$$

$$\frac{dv_y}{dx}(i) = \begin{cases} \frac{2\Delta v_{y(i-1/2)}\Delta v_{y(i+1/2)}}{\Delta v_{y(i-1/2)} + \Delta v_{y(i+1/2)}} & \text{if } \Delta v_{y(i-1/2)}\Delta v_{y(i+1/2)} > 0 \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (30)$$

$$\Delta v_{y(i+1/2)} = (v_{y(i+1)}^n - v_{y(i)}^n)/\Delta x \quad (31)$$

$$C^+ = v_x + \frac{B_x}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad (32)$$

である . B_y^+ に関しては式 (29)-(31) において , v_y を B_y に置き換えた式で与えられる . v_y^- , B_y^- は , 式 (29) の C^+ を

$$C^- = v_x - \frac{B_x}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad (33)$$

に置き換えて同様に求められる . 密度に関しては簡単のため , $\rho^+ = \rho_{i-1}^n$, $\rho^- = \rho_{i+1}^n$ とする .

1.6 具体的計算結果

$$\begin{array}{c|c}
 \rho = 1.0 & \rho = 0.125 \\
 p = 1.0 & p = 0.1 \\
 \frac{B_y}{(4\pi)^{1/2}} = 1.0 & \frac{B_y}{(4\pi)^{1/2}} = -1.0 \\
 \hline
 v_x = 0 & \\
 v_y = 0 & \\
 \frac{B_x}{(4\pi)^{1/2}} = 0.75 &
 \end{array}$$

図 3: CIP-MOCCT 法を用いた MHD 衝撃波問題の初期条件 .

CIPMOCCT 法を用いた MHD の計算例として衝撃波管問題の結果を図 4 に示した . その初期条件は , 図 3 に図示してある . その他の計算結果は [2] [3] などを参照 .

参考文献

- [1] T.Kudoh and K.Shibata: Numerical MHD Simulation of Astrophysical Problems by Using CIP-MOCCT Method; CFD journal, vol.8, pp56-68, (1999)
- [2] T.Kudoh and K.Shibata: Alfvén Wave Model of Spicules and Coronal Heating; Astrophysical Journal, vol.514, pp493-505, (1999)
- [3] T.Kudoh and K.Shibata: Magnetically Driven Jets from Accretion Disks. II. Nonsteady Solutions and Comparison with Steady Solutions; Astrophysical Journal, vol.476, pp.612-648, (1997)

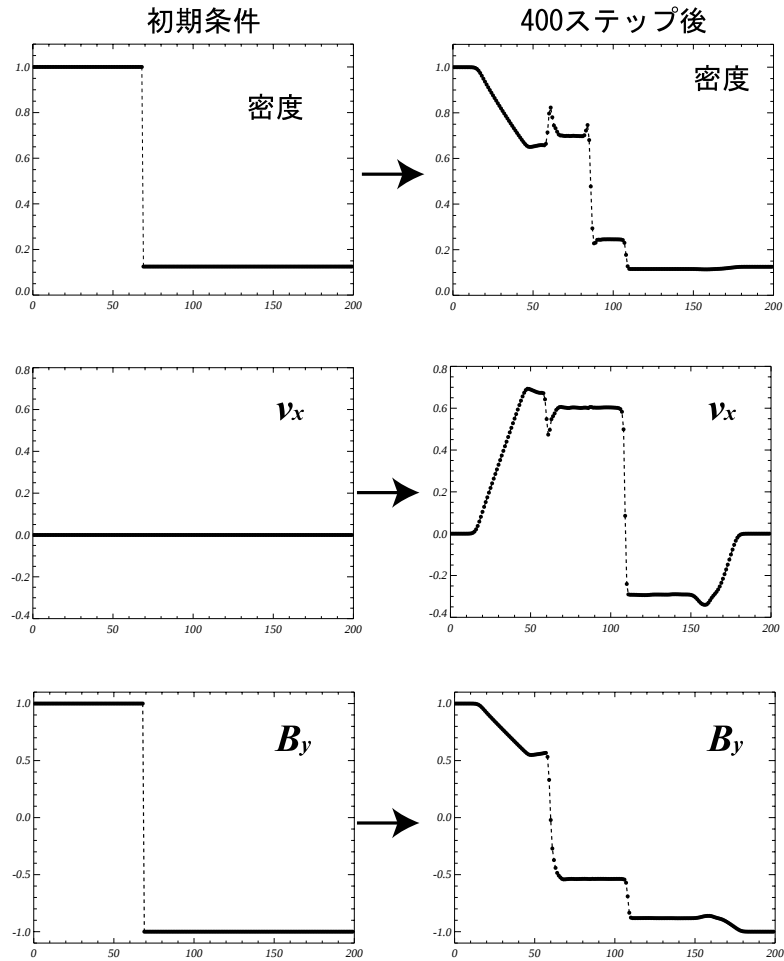


図 4: CIP-MOCCT 法を用いた MHD 衝撃波問題の計算結果． $\Delta x = 1$, $\Delta t = 0.2$, $\gamma = 2$, で 400 ステップ計算した結果．黒丸, 点線ともに計算結果．このケースでは厳密解は同時に書いていない．