熱伝導数値解法

横山 央明（国立天文台）

1．はじめに —— コード開発の動機

2．基礎方程式

3．差分化

4．具体的な計算例

5．まとめ

参考文献：藤井孝蔵「流体力学の数値計算法」東京大学出版会

０、熱伝導方程式　だけ解くならば

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

陽解法で十分。たとえば中心差分法

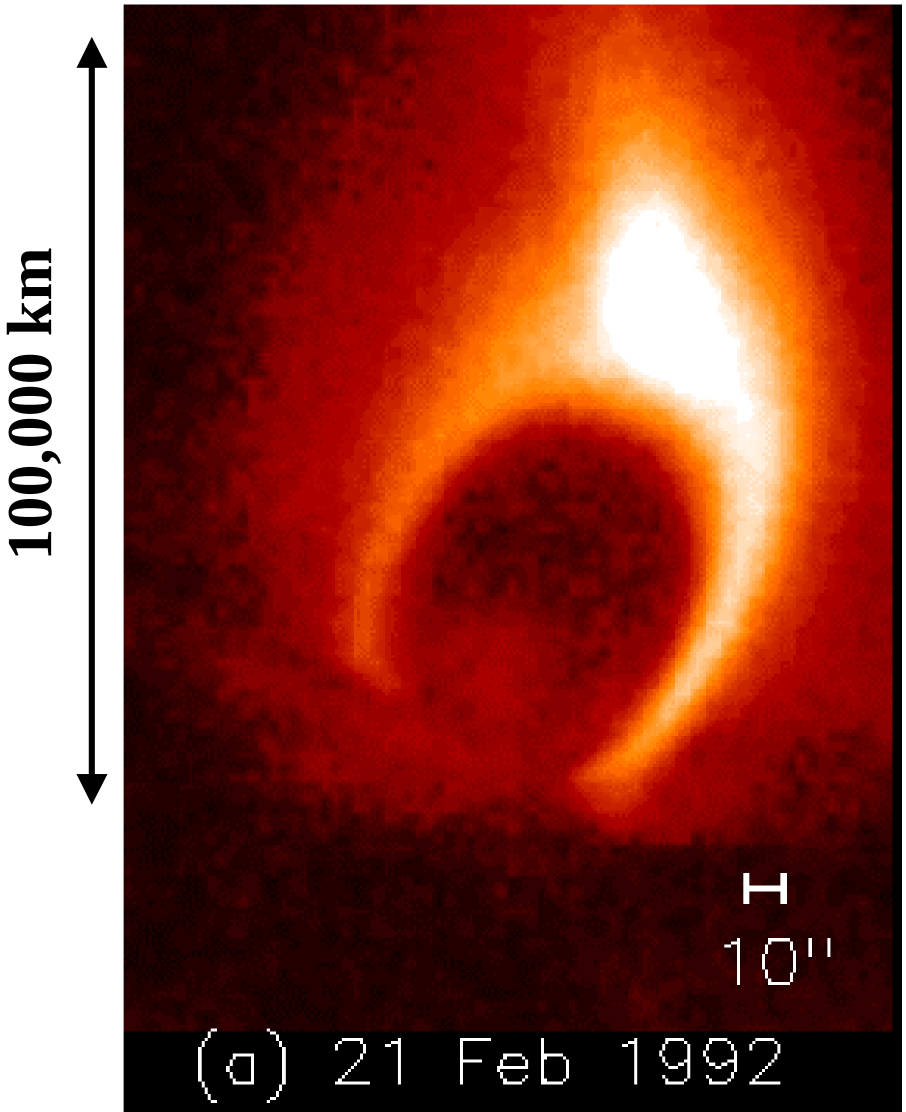
$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} = \frac{\kappa}{\Delta z}\left[\frac{T^n_{i+1} - T^n_i}{\Delta z} - \frac{T^n_i - T^n_{i-1}}{\Delta z}\right]$$

ただし

$$\boxed{\Delta t < \frac{(\Delta z)^2}{2\kappa}}$$

「**CFL**」条件

1. はじめに —— コード開発の動機



「ようこう」による

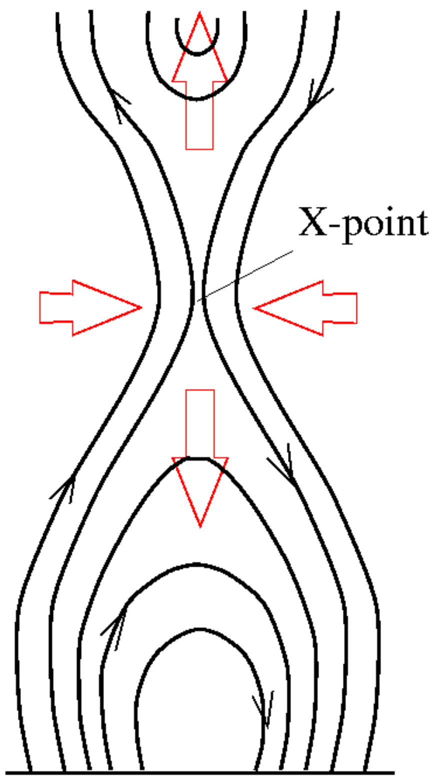
太陽フレア観測

- カスプ型ループ

(Tsuneta et al. 1992)

太陽フレアの磁気リコネクションモデル

Carmichael (1964); Sturrock (1966);
Hirayama (1974); Kopp & Pneuman (1976)

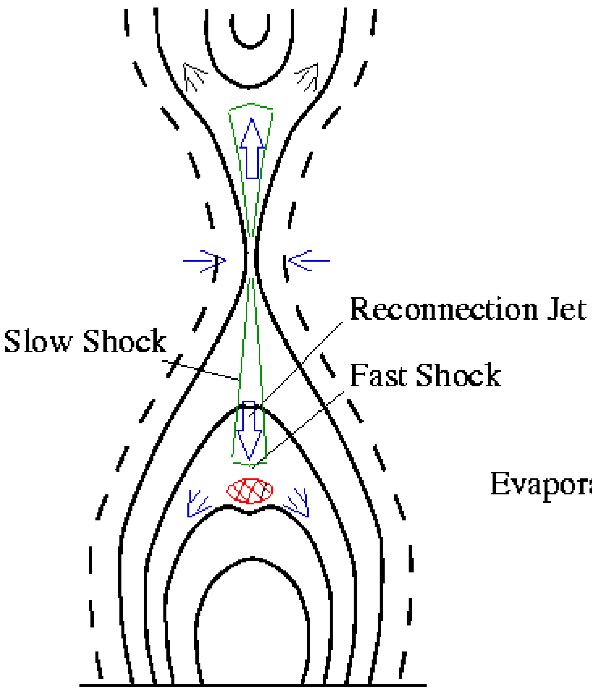


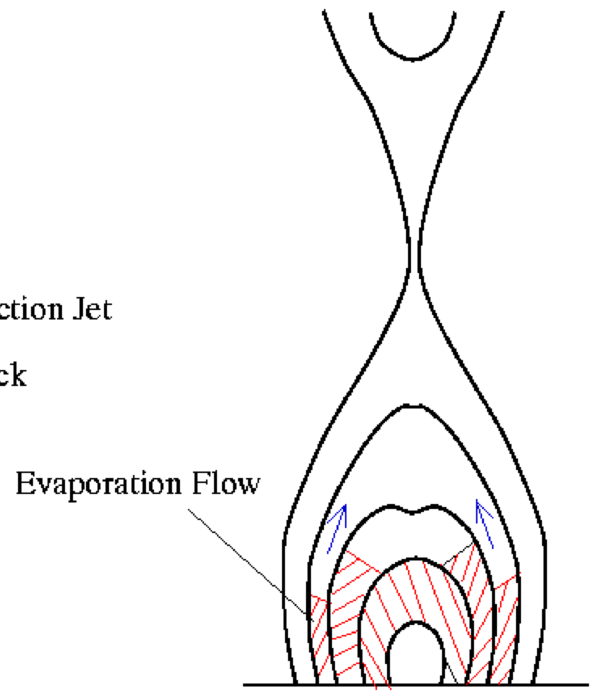
コロナ磁場の磁気エネルギー

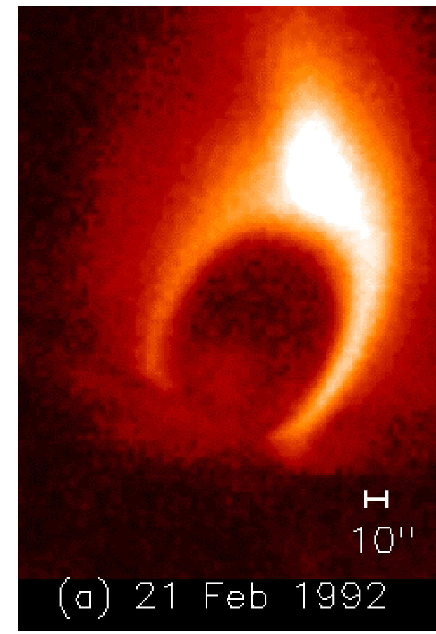
↓ 磁気リコネクション

プラズマの運動と熱エネルギー

非等方熱伝導によって引き起こされる現象　彩層蒸発







「ようこう」スペクトル計による青色偏移（上昇流）観測

「ようこう」軟X線望遠鏡による高密プラズマ観測

解きたい現象（方程式）は流れと熱伝導とがカップルした現象

熱伝導・放射冷却とMHD基礎方程式

エネルギー方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho \boldsymbol{V}^2 + \frac{\boldsymbol{B}^2}{8\pi}\right] + \nabla\cdot\left[\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}p + \frac{1}{2}\rho\boldsymbol{V}^2\right)\boldsymbol{V} + \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} - \kappa_{\|}\nabla_{\|}T\right] - L + H = 0$$

熱伝導項　放射項

陽解法でといてみる。 たとえば、、、

流体部分を**Lax-Wendroff** 熱伝導部分を中心差分

$$\Delta t_{\mathrm{HD}} < \frac{\Delta z}{C_{\mathrm{A}}}$$ 流体部の安定条件

$$\Delta t_{\mathrm{cond}} < \frac{(\Delta z)^2}{2\kappa}$$ 熱伝導部の安定条件

$$\frac{\Delta t_{\mathrm{cond}}}{\Delta t_{\mathrm{MHD}}} \approx \frac{(\Delta z)^2}{2\kappa}\frac{C_{\mathrm{A}}}{\Delta z} = \frac{L^2}{2\kappa}\frac{C_{\mathrm{A}}}{L}\frac{1}{I_{\mathrm{x}}} = \frac{\tau_{\mathrm{cond}}}{\tau_{\mathrm{A}}}\frac{1}{I_{\mathrm{x}}}$$

ただし$L=I_{\mathrm{x}}\cdot\Delta z$

太陽フレアにおける物理的時間スケールの比較

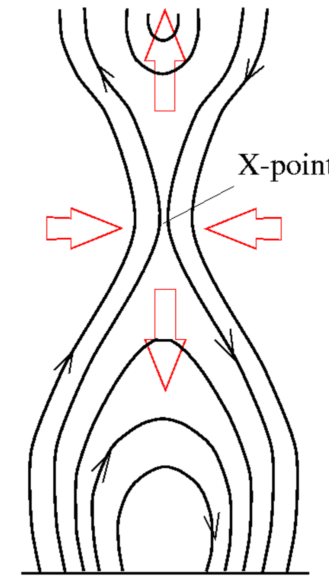
リコネクション時間（運動時間）

$$\tau_{\rm rec} \approx 10\tau_A = 1000\ \sec \left(\frac{L}{100,000{\rm km}}\right)\left(\frac{C_A}{1,000{\rm km/sec}}\right)^{-1}$$

熱伝導時間

$$\tau_{\rm con} \approx nk_B L^2/\kappa$$

$$\approx 100\ \sec \left(\frac{L}{100,000{\rm km}}\right)^2 \left(\frac{T}{10{\rm MK}}\right)^{-\frac{5}{2}} \left(\frac{n}{10^9{\rm cm}^{-3}}\right)$$



太陽フレアの場合　　I_x=100とすると

$$\frac{\Delta t_{\mathrm{cond}}}{\Delta t_{\mathrm{MHD}}} \approx \frac{\tau_{\mathrm{cond}}}{\tau_{\mathrm{A}}}\frac{1}{I_{\mathrm{x}}} \approx 0.001 \ll 1$$

熱伝導なしのMHD計算の1000倍時間がかかる！

陽解法で解いたことに原因

$$\Delta t_{\mathrm{HD}} < \frac{\Delta z}{C_{\mathrm{A}}}$$ 流体部の安定条件

~~$\Delta t_{\mathrm{cond}} < \frac{(\Delta z)^2}{2\kappa}$ 熱伝導部の安定条件~~

陰解法を導入 ⟶ 「ほぼ無条件に」安定

エネルギー方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{p}{\gamma-1}\right. &+ \left.\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{V}^2+\frac{\boldsymbol{B}^2}{8\pi}\right] \\
&+ \nabla\cdot\left[\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}p+\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{V}^2\right)\boldsymbol{V}+\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}-\underbrace{\kappa_{\|}\nabla_{\|}T}_{\text{熱伝導項}}\right]=0
\end{aligned}
$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\nabla\cdot[\boldsymbol{F}_{\mathrm{MHD}}+\boldsymbol{F}_{\mathrm{HC}}]=0$$

時間ステップ分割法 (e.g. Dahlburg et al. 1987)

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [\boldsymbol{F}_{\mathrm{MHD}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{HC}}] = 0$$

差分化 →

$$\frac{1}{\Delta t}(E^{\mathrm{n+1}} - E^{\mathrm{n}}) + (\nabla \cdot \boldsymbol{F}_{\mathrm{MHD}})^{n+1/2} + (\nabla \cdot \boldsymbol{F}_{\mathrm{HC}})^{n+1/2} = 0$$

ステップ 1　MHD部分を陽解法で

$$(E_*^{n+1} - E^n)/\underline{\Delta t} = -(\nabla \cdot \boldsymbol{F}_{\mathrm{MHD}})^{n+1/2}$$

ステップ 2　熱伝導部分を陰解法で

$$(E^{n+1} - E_*^{n+1})/\underline{\Delta t} = -(\nabla \cdot \boldsymbol{F}_{\mathrm{HC}})^{n+1/2}$$

- Δt はステップ 1 と共通
- T （温度）以外は固定

陽解法

$$\frac{T^{n+1} - T^{n}}{\Delta t} = \frac{\kappa}{\Delta z}\left[\frac{T^{n}_{i+1} - T^{n}_{i}}{\Delta z} - \frac{T^{n}_{i} - T^{n}_{i-1}}{\Delta z}\right]$$

陰解法 (Backward Euler差分 時間1次精度)

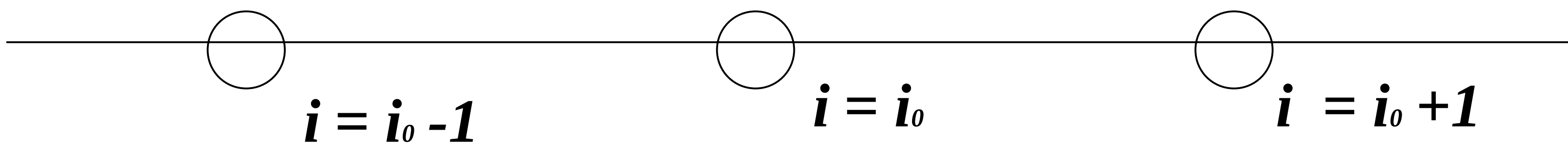
$$\frac{T^{n+1}_{i} - T^{n}_{i}}{\Delta t} = \frac{\kappa}{\Delta z}\left[\frac{T^{n+1}_{i+1} - T^{n+1}_{i}}{\Delta z} - \frac{T^{n+1}_{i} - T^{n+1}_{i-1}}{\Delta z}\right]$$

$$-\frac{\kappa}{\Delta z}T^{n+1}_{i+1} + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t} + 2\frac{\kappa}{\Delta z}\right)T^{n+1}_{i} - \frac{\kappa}{\Delta z}T^{n+1}_{i-1} = \frac{\Delta z}{\Delta t}T^{n}_{i}$$

$$c \cdot T^{n+1}_{i-1} + e \cdot T^{n+1}_{i} + d \cdot T^{n+1}_{i+1} = \mathcal{S}(T^{n})$$

$c \cdot T_{i-1}^{n+1} + e \cdot T_{i}^{n+1} + d \cdot T_{i+1}^{n+1} = \mathcal{S}(T^n)$

$c \cdot T_{i-1}^{n+1} + e \cdot T_{i}^{n+1} + d \cdot T_{i+1}^{n+1} = \mathcal{S}(T^n)$



$$c \cdot T_{i-1}^{n+1} + e \cdot T_{i}^{n+1} + d \cdot T_{i+1}^{n+1} = \mathcal{S}(T^n)$$

連立1次方程式系 または 線形行列

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ & \cdots & \cdots & & & \\ & c & e & d & & \\ & & \cdots & \cdots & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & \cdots & \cdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ T_{i-1}^{n+1} \\ T_{i}^{n+1} \\ T_{i+1}^{n+1} \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \mathrm{RHS} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

緩和 法（Jacobi法）

$$T_i^{(m=0)} = T_i^n$$

$$\mathcal{R}_i^{(m)} = c \cdot T_{i+1}^{(m)} + e \cdot T_i^{(m)} + d \cdot T_{i-1}^{(m)} - \mathcal{S}$$

$$T_i^{(m+1)} = T_i^{(m)} - \mathcal{R}_i^{(m)} / e$$

until $$\frac{\sum |\mathcal{R}_i^{(m)}|}{\sum |\mathcal{R}_i^{(0)}|} < \epsilon \approx O(\Delta t)$$

くりかえし

$$T_i^{n+1} = T_i^{(m+1)}$$

過緩和 法（Over-Relaxation法）

$$T_i^{(m=0)} = T_i^n$$

$$\mathcal{R}_i^{(m)} = c \cdot T_{i+1}^{(m)} + e \cdot T_i^{(m)} + d \cdot T_{i-1}^{(m)} - \mathcal{S}$$

$$T_i^{(m+1)} = T_i^{(m)} - \omega \cdot \mathcal{R}_i^{(m)} / e$$

until $$\frac{\sum |\mathcal{R}_i^{(m)}|}{\sum |\mathcal{R}_i^{(0)}|} < \epsilon \approx O(\Delta t)$$

くりかえし

$$T_i^{n+1} = T_i^{(m+1)}$$

Red-n-Black SOR（Successive Over-Relaxation）法

$$T_i^{(m=0)} = T_i^n$$

$$\mathcal{R}_i^{(m)} = c \cdot T_{i+1}^{(m)} + e \cdot T_i^{(m)} + d \cdot T_{i-1}^{(m)} - \mathcal{S} \qquad (i = 1, 3, 5...)$$

$$T_i^{(m+1)} = T_i^{(m)} - \omega \cdot \mathcal{R}_i^{(m)} / e \qquad (i = 1, 3, 5...)$$

$$\mathcal{R}_i^{(m)} = c \cdot T_{i+1}^{(m+1)} + e \cdot T_i^{(m)} + d \cdot T_{i-1}^{(m+1)} - \mathcal{S} \qquad (i = 2, 4, 6...)$$

$$T_i^{(m+1)} = T_i^{(m)} - \omega \cdot \mathcal{R}_i^{(m)} / e \qquad (i = 2, 4, 6...)$$

until $$\frac{\sum |\mathcal{R}_i^{(m)}|}{\sum |\mathcal{R}_i^{(0)}|} < \epsilon \approx O(\Delta t)$$

くりかえし

$$T_i^{n+1} = T_i^{(m+1)}$$

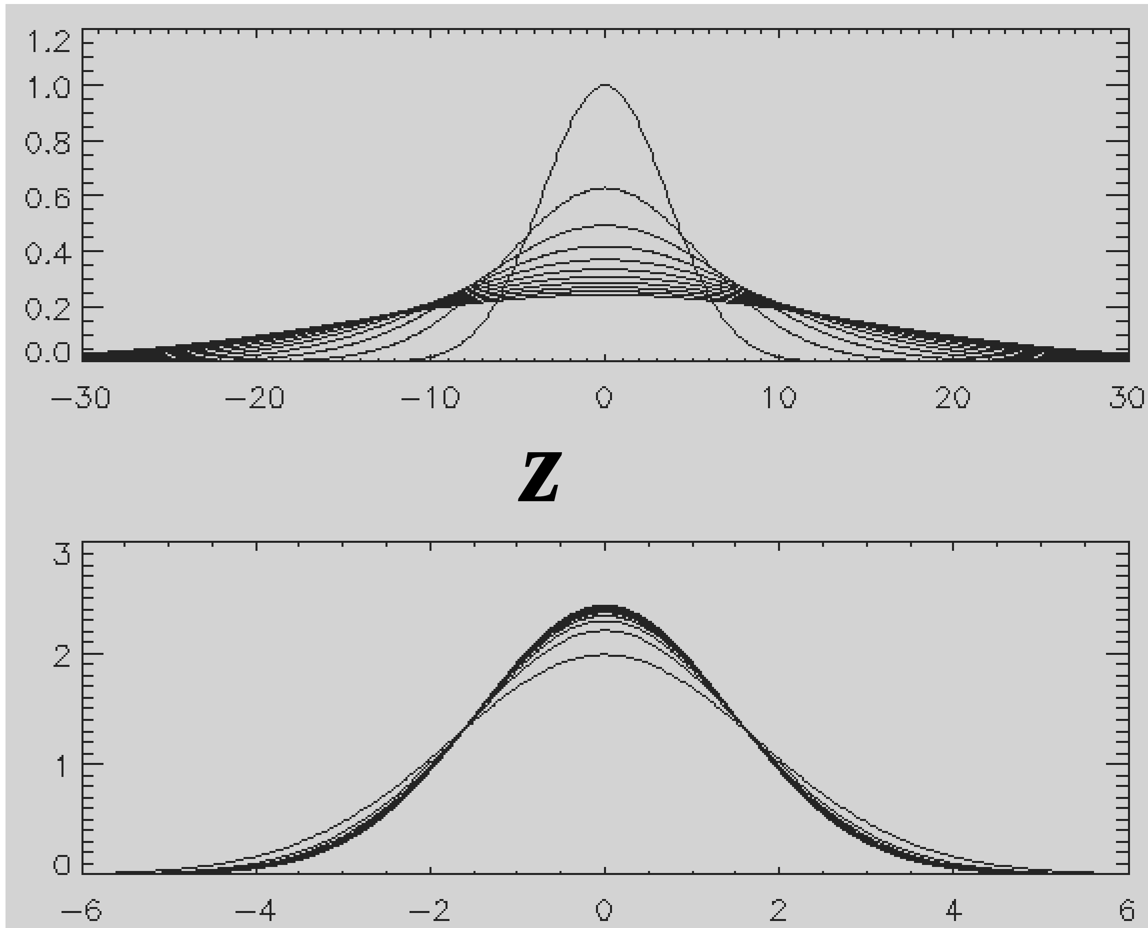
熱伝導･放射冷却計算法まとめ

- 熱伝導を流体と解くなら陰解法（時間分割法）
  （熱伝導方程式だけなら陽解法でじゅうぶん）
- 陰解法は連立1次方程式系を解く（行列反転）必要あり
  ここではBlack-n-Red SOR法を紹介

熱伝導方程式の計算例 その1

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

T

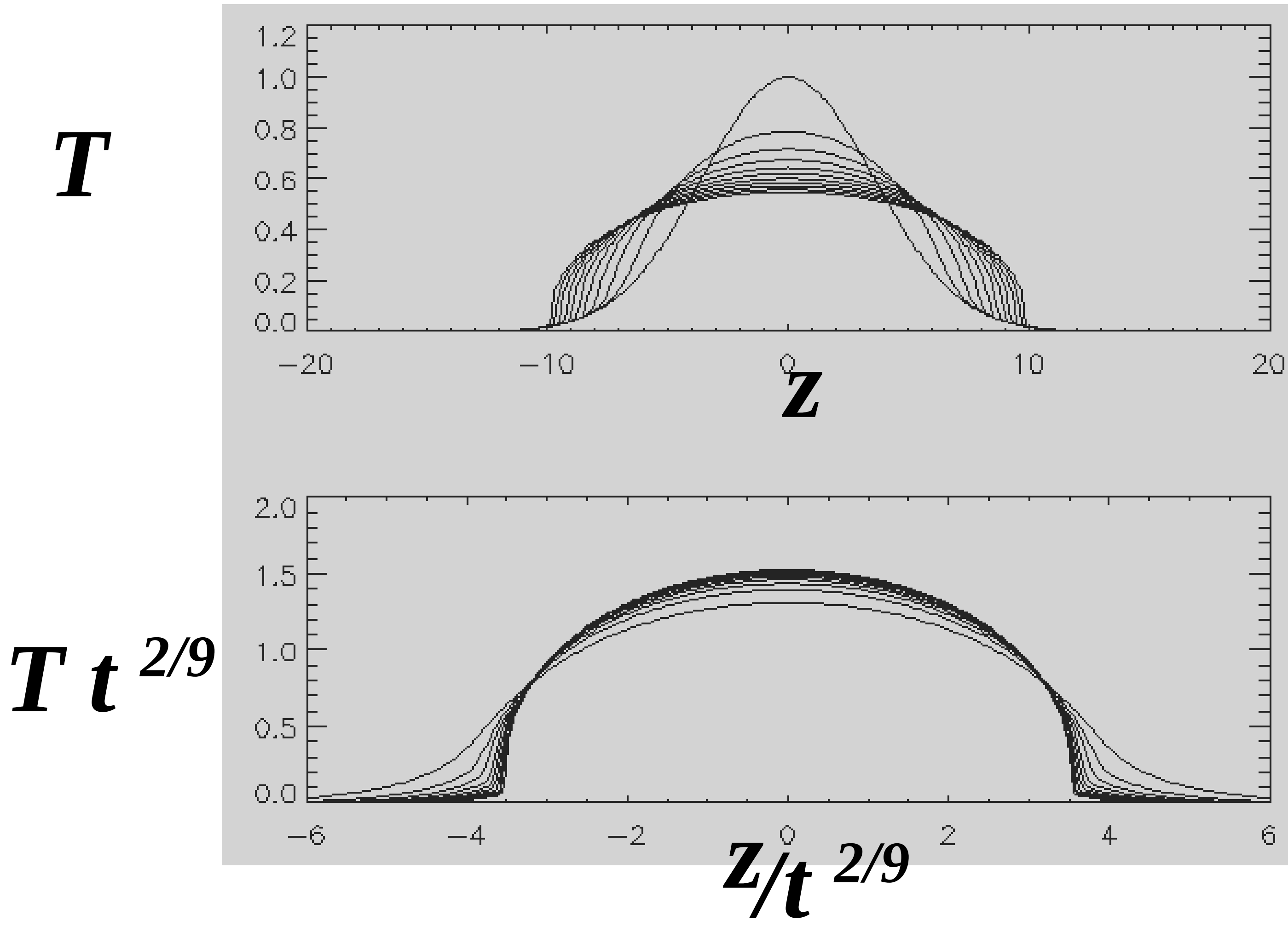


$T\,t^{1/2}$

$z/t^{1/2}$

熱伝導方程式の計算例 その2

$$\frac{\partial T}{\partial t} = T^{5/2}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$



あとはコードを具体的にみながら、、、