第1章　近似的リーマン解法 — 磁気流体計算入門

福田尚也

2001/09/12

この節では磁気流体方程式に対する Roe 法を取り上げる。まず、磁気流体方程式と流体方程式との違いについて述べ、開発の歴史、具体的な手法について述べる。

1.1　流体方程式との違い

1.1.1　計算量

流体方程式と磁気流体方程式 (MHD 方程式) の違いは、磁場が加わることにより基本量の成分の数が増えることである。成分の数が異なることで、Roe 法の解法に大きな差は生じない。しかしながら、行列の成分が多くなったため流体方程式の場合よりずっと複雑になる。ここで、MHD 方程式に対する計算量をイメージしてみよう。3 次元計算で断熱気体を扱う時、流体の基本量は (ρ, v_x, v_y, v_z, p) の 5 変数であったのが、磁気流体の基本量は $(\rho, v_x, v_y, v_z, p, B_x, B_y, B_z)$ の 8 変数になる。Roe 法の定式化には、固有ベクトルの計算が必要であり、変数の自乗の要素の行列演算が必要である。つまり、流体では 5×5 の行列演算であったのが、磁気流体では 8×8 の行列演算になる。ただし、1 次元に伝わる波を考えた場合は $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0$ の条件より B_x は一定になり、7×7 の行列計算になる。

1.1.2　波の縮退

磁気流体方程式の Roe 法を開発する場合にもう一つ注意しないといけない点がある。それは波の縮退である。代数的にいえば、ヤコビ行列の固有値[1] がすべて異ならないため対角化の計算ができなくなるということである。そのため、MHD に対する Roe 法では固有行列を場合分けする必要が生じる。縮退する場合は以下である。

- 進行方向に平行な磁場 (B_x) が 0 ならば、slow 磁気音波と Alfvén 波が 0 になり、縮退する。

[1] 磁気流体方程式の固有値は $(u \pm c_f,\ u \pm c_s,\ u \pm v_a,\ u)$, すなわち、fast 磁気音波、slow 磁気音波、Alfvén 波、物質の速度である。

- 進行方向に垂直な磁場 $({B_y}^2 + {B_z}^2)$ が 0、かつ、音速 $\neq$Alfvén 速度ならば、磁気音波と Alfvén 波が縮退する。
- 進行方向に垂直な磁場 $({B_y}^2 + {B_z}^2)$ が 0、かつ、音速$=$Alfvén 速度ならば、fast 磁気音波と slow 磁気音波が縮退する。

1.1.3　Alfvén 波

流体方程式で出てくる波はすべて縦波である。ところが MHD 方程式で現れる Alfvén 波は横波である。高次精度化の際に、横波を精度良く計算する場合は若干工夫が必要になる。

1.2　MHD 方程式に対する Roe 法の発展

MHD の天体数値シミュレーションで (近似的)Roe 法が開発され、使われるようになったのは 1990 年代後半である。比較的最近に発達した手法であるが、その歴史をふりかえってみよう。

MHD 方程式の Roe 法の開発の基礎は固有行列の計算である。Brio & Wu (1988) は比熱比 $\gamma \neq 2$ の理想気体の場合に限り固有行列を見つけた。一般の比熱比の場合については、Ryu & Jones (1996) らが任意の γ について近似的に固有行列を求めている。Ryu & Jones (1996) らの手法は Roe 平均の代わりに代数平均を使用しており、Original の Roe 法の近似法である。その後、Roe 平均を用いているが一部の Property U [2] を満たさない近似的な手法に関しては Nakajima & Hanawa (1996) らが等温気体の場合、Cargo & Gallice (1997) らが理想気体の場合に固有行列を求めている。Roe 法を厳密に求めているのは Balsara (1996, 1998a,b) である。

近似手法と厳密手法との違いであるが、実際の計算では大きな違いは見られないようである。どれも成功をおさめているといえる。近似手法であっても Lax-Wendroff 法+人工粘性より衝撃波、接触不連続面などを数値振動がなく安定に、鋭くとらえることができる。

1.3　定式化

固有行列の記述は冗長になるため基本的な量のみ記す。詳しくは、Balsara (1998) ApJS, 116, 119-131 を参照されたい。

[2] Roe の property U は

1. $\boldsymbol{U}$ から $\boldsymbol{F}$ は線形結合であらわされる。
2. $\boldsymbol{U}_L = \boldsymbol{U}$ かつ $\boldsymbol{U}_R = \boldsymbol{U}$ のとき、$\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}$。
3. $\bar{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{U}_L - \boldsymbol{U}_R) = \boldsymbol{F}_L - \boldsymbol{F}_R$。
4. $\bar{\boldsymbol{A}}$ の固有値は線形独立。

である。

保存形式で理想 MHD 方程式を書くと、保存量 $\boldsymbol{U}$ と数値流速 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ e \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \rho v_x \\ \rho {v_x}^2 + p + \dfrac{1}{8\pi}({B_y}^2 + {B_z}^2 - {B_x}^2) \\ \rho v_x v_y - \dfrac{1}{4\pi} B_x B_y \\ \rho v_x v_z - \dfrac{1}{4\pi} B_x B_z \\ \rho H v_x - \dfrac{1}{4\pi} B_x (B_x v_x + B_y v_y + B_z v_z) \\ B_y v_x - B_x v_y \\ B_z v_x - B_x v_z \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

と書かれ、

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} = 0 \tag{1.3}$$

となる。

保存量 $\boldsymbol{U}$ の各成分は、上から順に密度、運動量密度、磁束密度、エネルギー密度であり、数値流束 $\boldsymbol{F}$ の各成分は質量流束、運動量流束、磁束流束、エネルギー流束と呼ばれる量である。また、e と H はそれぞれエネルギーとエンタルピーであり、

$$e = \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{{B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2}{8\pi} \tag{1.4}$$

$$H = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} + \frac{{B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2}{4\pi\rho} \tag{1.5}$$

をみたす。すなわち、エネルギーとエンタルピー密度と圧力には、

$$\rho H = E + p + \frac{{B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2}{8\pi} \tag{1.6}$$

の関係がある。

パラメータベクトル

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\rho} \\ \sqrt{\rho} v_x \\ \sqrt{\rho} v_y \\ \sqrt{\rho} v_z \\ \sqrt{\rho} H \\ B_y \sqrt{\rho} \\ B_z \sqrt{\rho} \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

を用いて保存量と流速ベクトルをあらわすと、

$$
\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} {w_1}^2 \\ w_1 w_2 \\ w_1 w_3 \\ w_1 w_4 \\ \frac{1}{\gamma} w_1 w_5 + \frac{\gamma-1}{2\gamma}({w_2}^2 + {w_3}^2 + {w_4}^2) + \frac{\gamma-2}{\gamma}\frac{1}{8\pi}({B_x}^2 + {w_1}^2{w_6}^2 + {w_1}^2{w_7}^2) \\ w_1 w_6 \\ w_1 w_7 \end{bmatrix} \tag{1.8}
$$

$$
\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} w_1 w_2 \\ \frac{\gamma-1}{\gamma} w_1 w_5 + {w_1}^2 - \frac{\gamma-1}{2\gamma}({w_2}^2 + {w_3}^2 + {w_4}^2) - \frac{\gamma-2}{\gamma}\frac{1}{8\pi}({B_x}^2 + {w_1}^2{w_6}^2 + {w_1}^2{w_7}^2) - \frac{1}{4\pi}{B_x}^2 \\ w_2 w_3 - \frac{1}{4\pi} B_x w_1 w_6 \\ w_2 w_4 - \frac{1}{4\pi} B_x w_1 w_7 \\ w_2 w_5 - \frac{1}{4\pi} B_x \left(B_x \frac{w_2}{w_1} + w_3 w_6 + w_4 w_7 \right) \\ w_2 w_6 - B_x \frac{w_3}{w_1} \\ w_2 w_7 - B_x \frac{w_4}{w_1} \end{bmatrix}, \tag{1.9}
$$

となる。あとはこれを用いて定式化すればよい。

参考文献 —年順—

- Brio, M. & Wu, C. C. 1988, JCP, 75, 400
  理想気体 ($\gamma = 2$ のみ)
- Ryu, D. & Jones, T. W. 1995, ApJ, 442, 228
  理想気体 (Property U の 3 を大きく満たさず)
- Nakajima, Y. & Hanawa, T. 1996, ApJ, 467, 321
  等温気体 (Property U を多少満たさず)
- Roe, P. L. & Balsara 1996, SIAM J. Numer. Anal., 56, 57
  理想気体 (formalism のみ)
- Cargo, P. & Gallice, G. 1997, JCP, 136, 446
  理想気体 (Property U を多少満たさず)
- Balsara, D. S. 1998, ApJS, 116, 119
  理想気体、等温気体 (MHD の Roe 法の勉強にはこれをよみましょう)
- Balsara, D. S. 1998, ApJS, 116, 133
  上記の計算結果