

MOCCT 法入門

(2000 年 9 月 19 日改訂版)

工藤哲洋

数値 MHD 入門セミナー

日時：2000 年 9 月 11 日 9 月 15 日

場所：野辺山太陽電波観測所

1 MOC-CT 法

磁気流体力学の誘導方程式を解く方法．時間発展の方程式に現れない

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

を満たすように工夫され (CT 法)，また，流体力学に現れない

アルフベン波 (横波)

を安定に解くため (MOC 法) に開発された．歴史的には，CT 法が先に開発され [1]，その後その欠点を補う形で MOC 法が開発された [2][3]．

2 CT 法

磁気流体方程式の誘導方程式

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} \quad (1)$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{J} \quad (2)$$

を解く方法．以下では簡単のため $\eta = 0$ とする．CT 法は数値計算の差分の範囲内で $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ を満たすように考えられた方法である．

簡単のため，2次元デカルト座標で考える．このとき，式(1)を成分で書くと，

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = -\frac{\partial \epsilon}{\partial y}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial \epsilon}{\partial x}, \quad (4)$$

となる．ここで，

$$\epsilon = -(v_x B_y - v_y B_x) \quad (5)$$

である．

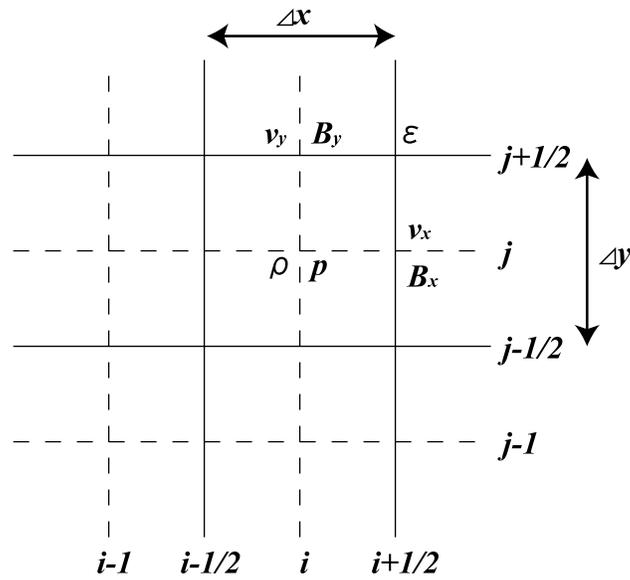


図 1: 2次元 MHD コード (CIP-MOCCT 法) で用いる互い違い格子．

CT 法では，図 1 のような互い違い格子を張り，磁場や速度場の x 成分と y 成分は異なる点で定義する．また， ϵ も磁場や速度場と異なる点で定義する．このとき， $(i+1/2, j)$ と $(i-1/2, j)$ において，式(3)を差分すると，

$$\frac{1}{\Delta t} [B_{x(i+1/2, j)}^{n+1} - B_{x(i+1/2, j)}^n] = -\frac{1}{\Delta y} [\epsilon_{(i+1/2, j+1/2)}^{n+1/2} - \epsilon_{(i+1/2, j-1/2)}^{n+1/2}], \quad (6)$$

$$\frac{1}{\Delta t}[B_{x(i-1/2,j)}^{n+1} - B_{x(i-1/2,j)}^n] = -\frac{1}{\Delta y}[\epsilon_{(i-1/2,j+1/2)}^{n+1/2} - \epsilon_{(i-1/2,j-1/2)}^{n+1/2}], \quad (7)$$

となる．同様に， $(i, j + 1/2)$ と $(i, j - 1/2)$ において式(4)を差分すると，

$$\frac{1}{\Delta t}[B_{y(i,j+1/2)}^{n+1} - B_{y(i,j+1/2)}^n] = \frac{1}{\Delta x}[\epsilon_{(i+1/2,j+1/2)}^{n+1/2} - \epsilon_{(i-1/2,j+1/2)}^{n+1/2}], \quad (8)$$

$$\frac{1}{\Delta t}[B_{y(i,j-1/2)}^{n+1} - B_{y(i,j-1/2)}^n] = \frac{1}{\Delta x}[\epsilon_{(i+1/2,j-1/2)}^{n+1/2} - \epsilon_{(i-1/2,j-1/2)}^{n+1/2}], \quad (9)$$

となる．このとき，式[(6) $\times \Delta y$ - (7) $\times \Delta y$ + (8) $\times \Delta x$ - (9) $\times \Delta x$] $\times \Delta t$ を計算すると，

$$\begin{aligned} & [B_{x(i+1/2,j)}^{n+1} - B_{x(i+1/2,j)}^n - B_{x(i-1/2,j)}^{n+1} + B_{x(i-1/2,j)}^n] \Delta y \\ & + [B_{y(i,j+1/2)}^{n+1} - B_{y(i,j+1/2)}^n - B_{y(i,j-1/2)}^{n+1} - B_{y(i,j-1/2)}^n] \Delta x = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

となる．これを变形すると，

$$\begin{aligned} & \frac{B_{x(i+1/2,j)}^{n+1} - B_{x(i-1/2,j)}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{B_{y(i,j+1/2)}^{n+1} - B_{y(i,j-1/2)}^{n+1}}{\Delta y} \\ & = \frac{B_{x(i+1/2,j)}^n - B_{x(i-1/2,j)}^n}{\Delta x} + \frac{B_{y(i,j+1/2)}^n - B_{y(i,j-1/2)}^n}{\Delta y} \end{aligned} \quad (11)$$

となる．式(11)は，

$$\left[\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right]^{n+1} = \left[\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right]^n, \quad (12)$$

すなわち，

$$[\nabla \cdot \mathbf{B}]^{n+1} = [\nabla \cdot \mathbf{B}]^n \quad (13)$$

を意味しており，初期条件で $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ が満たされていれば，常にそれが差分式において満たされてることを意味する．

CT法のポイントは，図1のように，磁場と電場とを異なる場所で定義して差分式を作ることである．

3 MOC法

CT法では磁場や速度場と電場とが異なる場所で定義されている．従って，式(5)から磁場や速度場を用いて電場を求める時には，それらの値を電場の定義されている位置の値に焼きなおすことが必要．このとき単純な平均値を取っただけでは，アルフベン波の伝播過程で大きな振動が起こることが知られている．そこで，電場の位置での値の見積もりにアルフベン波に関する特性曲線を考慮した方法を用いる．

式(5)から ϵ を次のように書く．

$$\epsilon^{n+1/2} = -(v_x^* B_y^* - v_y^* B_x^*). \quad (14)$$

ここで， v_x^* ， B_y^* ， v_y^* ， B_x^* を特性曲線を考慮して見積もる．

3.1 特性方程式

1次元 x 方向の非圧縮 MHD の方程式は (y 成分)，

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{B_x}{4\pi\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x} - v_x \frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = B_x \frac{\partial v_y}{\partial x} - v_x \frac{\partial B_y}{\partial x}, \quad (16)$$

となる ($\rho = \text{constant}$ ， $v_x = \text{constant}$ ， $B_x = \text{constant}$)．式(16)に $(4\pi\rho)^{-1/2}$ を掛けて，式(15)と式(16)を引き算すると

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \left(v_x + \frac{B_x}{\sqrt{4\pi\rho}} \right) \frac{\partial}{\partial x} \right] \left(v_y - \frac{B_y}{\sqrt{4\pi\rho}} \right) = 0, \quad (17)$$

となり，足し算すると

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \left(v_x - \frac{B_x}{\sqrt{4\pi\rho}} \right) \frac{\partial}{\partial x} \right] \left(v_y + \frac{B_y}{\sqrt{4\pi\rho}} \right) = 0. \quad (18)$$

となる．式(17)と(18)がアルフベン波に関する特性方程式である．

$$C^+ = v_x + \frac{B_x}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad (19)$$

$$C^- = v_x - \frac{B_x}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad (20)$$

がそれぞれ，前向きと後ろ向きの特性速度で，それぞれの速度一定の線（特性曲線）上において， $v_y - \frac{B_y}{\sqrt{4\pi\rho}}$ と $v_y + \frac{B_y}{\sqrt{4\pi\rho}}$ とが保存する．

3.2 ϵ の見積もり

式 (17) と (18) を特性曲線に沿って差分し, それぞれの終点が $\epsilon^{n+1/2}$ の位置での値だとすると,

$$(v_y^* - v_y^+) - \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho^+}}(B_y^* - B_y^+) = 0, \quad (21)$$

$$(v_y^* - v_y^-) + \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho^-}}(B_y^* - B_y^-) = 0, \quad (22)$$

となる. ここで, $+$ と $-$ は, それぞれの特性曲線の始点の位置を示す. この 2 式より, v_y^* と B_y^* は,

$$v_y^* = \frac{v_y^+ \sqrt{4\pi\rho^+} + v_y^- \sqrt{4\pi\rho^-} - B_y^+ + B_y^-}{\sqrt{4\pi\rho^+} + \sqrt{4\pi\rho^-}}, \quad (23)$$

$$B_y^* = \frac{-v_y^+ + v_y^- + B_y^+/\sqrt{4\pi\rho^+} + B_y^-/\sqrt{4\pi\rho^-}}{1/\sqrt{4\pi\rho^+} + 1/\sqrt{4\pi\rho^-}}. \quad (24)$$

のように求められる.

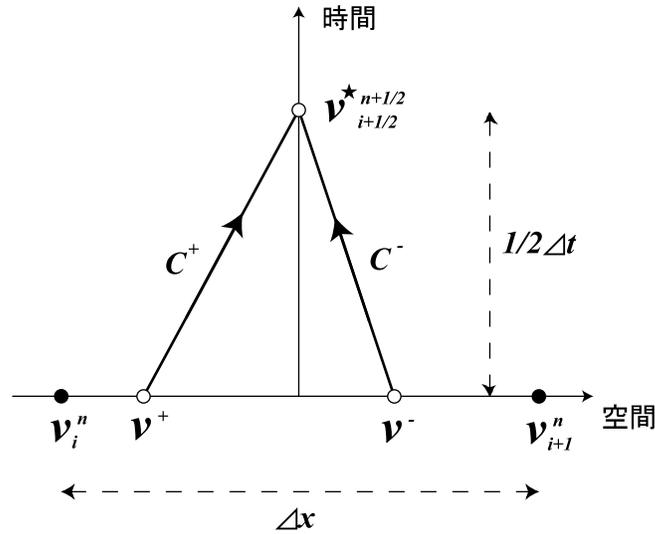


図 2: 1次元時空のダイアグラム.

特性曲線の始点での値は時刻 n での値から補間して求める (図 2) . 補間方法にはいろいろあるが (CIP 法も使える) , ここでは van Leer の方法で補間した場合の式を示す . 例えば v_y^+ は ,

$$v_y^+ = \begin{cases} v_{y(i)}^n + \frac{1}{2}(\Delta x - C_{i+1/2}^+ \Delta t) \frac{dv_y}{dx}(i) & \text{if } C_{i+1/2}^+ > 0 \\ v_{y(i+1)}^n - \frac{1}{2}(\Delta x + C_{i+1/2}^+ \Delta t) \frac{dv_y}{dx}(i+1) & \text{if } C_{i+1/2}^+ < 0 \end{cases} \quad (25)$$

で表される . ここで ,

$$\frac{dv_y}{dx}(i) = \begin{cases} \frac{2\Delta v_{y(i-1/2)} \Delta v_{y(i+1/2)}}{\Delta v_{y(i-1/2)} + \Delta v_{y(i+1/2)}} & \text{if } \Delta v_{y(i-1/2)} \Delta v_{y(i+1/2)} > 0 \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (26)$$

であり ,

$$\Delta v_{y(i+1/2)} = (v_{y(i+1)}^n - v_{y(i)}^n) / \Delta x \quad (27)$$

である .

3.3 磁場の誘導方程式を解く手順

1. 式 (25) から , v_y^+ を求める . B_y^+ も全く同様に求めることができ , v_y^- , B_y^- は特性速度を C^- にすれば同様に求まる . 密度に関しては簡単のため , $\rho^+ = \rho_{i-1}^n$, $\rho^- = \rho_{i+1}^n$ とする .
2. v_y^+ , B_y^+ , v_y^- , B_y^- から , 式 (23) と (24) を使って , v_x^* , B_y^* が求まる . v_x^* と B_x^* も全く同様にして求めることができる .
3. v_y^* , B_y^* , v_x^* , B_x^* を使って , 式 (14) から $\epsilon^{n+1/2}$ が求まる .
4. 式 (6) , (8) , から磁場の時間発展を計算する .

3.4 運動方程式における磁気ストレス項

運動方程式を差分化して計算するとき , 磁気ストレスに関わる項には MOC 法を用いる . 2次元 MHD 方程式の運動方程式の y 成分は ,

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

$$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{4\pi\rho} (B_x \frac{\partial B_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial B_z}{\partial y}) + \frac{1}{4\pi\rho} B_x \frac{\partial B_y}{\partial x} \quad (28)$$

運動方程式を CIP 法で解く場合は，非移流フェイズと移流フェイズに分解する．右辺第 2 項と第 3 項は磁気圧の項であり，ここは非移流フェイズにおいて圧力と同様の差分式をつくれればよい．第 4 項が磁気ストレスに関する項である．式 (28) の非移流フェイズにおいて第 4 項のみを差分式で書くと，

$$\frac{(v_y)_{i,j+1/2}^* - (v_y)_{i,j+1/2}^n}{\Delta t} = \dots + \left(\frac{1}{4\pi}\right) \left(\frac{2}{\rho_{i,j+1}^n + \rho_{i,j}^n}\right) \langle B_x \rangle_{i,j+1/2}^n \frac{(B_y)_{i+1/2,j+1/2}^* - (B_y)_{i-1/2,j+1/2}^*}{\Delta x} \quad (29)$$

となる．ここで，

$$\langle B_x \rangle_{i,j+1/2} = \frac{1}{4} [(B_x)_{i+1/2,j} + (B_x)_{i+1/2,j+1} + (B_x)_{i-1/2,j+1} + (B_x)_{i-1/2,j}] \quad (30)$$

である．式 (29) における， B_y^* の値 (B_y の $i+1/2$ や $i-1/2$ での値) を見積もるために MOC 法を用いる．ただし，非移流の部分の差分であり後で移流部分は別に計算するので特性速度としては，

$$C^+ = \frac{B_x}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad (31)$$

$$C^- = -\frac{B_x}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad (32)$$

を用いて計算する．

運動方程式の x 成分に関しても同様の計算を行う．

参考文献

- [1] C.R.Evans and J.F.Hawley: Simulation of Magnetohydrodynamic Flows - A Constrained Transport Method; Astrophysical Journal, vol.332, pp.659-677, (1988)
- [2] J.M.Stone and M.L.Norman: ZEUS-2D: A Radiation Magnetohydrodynamics Code for Astrophysical Flows in Two Space Dimensions. II. The Magnetohydrodynamic Algorithms and Tests; Astrophysical Journal Supplement, vol.80, pp.791-818, (1992)

- [3] J.Hawley & J.M.Stone: MOCCT: A Numerical Technique for Astrophysical MHD; Computer Physics Communications, vol.89, pp.127-148, (1995)