第3章　流体および磁気流体力学方程式の風上差分

花輪知幸（千葉大先進）

3.1　はじめに

私たちは初日に移流方程式や Burgers 方程式の数値解法として、風上差分法を習った。風上差分法は衝撃波の取り扱いに優れていることや、非物理的な数値振動を起こさない (=TVD 条件を遵守する) ことを学んだ。昨日は、流体力学方程式や磁気流体力学方程式は波動方程式の集合体—システム方程式—であることを学んだ。この 2 日間の学習成果を総合すると、風上差分法は流体力学方程式や磁気流体力学方程式の数値解法としても有効であろうと容易に想像できる。実際、衝撃波を伴う (磁気) 流れを解析する方法として多くの数値計算コードに採用されている。

「流束は風上で評価せよ」という風上差分法の原理 (概念) は単純であるが、これを実際に流体力学方程式や磁気流体力学方程式に応用することは簡単ではない。最初に習った線型波動方程式は 1 成分で波の位相速度が一定であったのに対し、流体力学方程式は連立であり波の速度も時間や場所によって異なるためである。これらの違いをまとめたのが表 3.1 である。

名称	変数	自由度	線型/非線型	方程式
移流方程式	u	1	線型	3.1
Burgers 方程式	u	1	非線型	3.2, 3.3
Maxwell 方程式	E_y, E_z, B_x, B_y	4	線型	3.4, 3.5
流体力学方程式	ρ, v, P	3	非線型	3.6
磁気流体力学方程式	ρ, v_x, v_y, v_z, B_y, B_z	7	非線型	3.7

表 3.1: さまざまな波動方程式の比較。変数の数は独立変数を (x, t) とした 1 次元の場合で数えた。

移流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{3.1}$$

Burgers 方程式 [波の速度を明示した形式 (上) と流束を明示した形式 (下)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0 \tag{3.3}$$

(真空中の)Maxwell 方程式　[ベクトル形式と成分ごとに分解した形式]

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} &= 0 \\ \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} &= 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial t} + c\frac{\partial B_z}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} - c\frac{\partial B_y}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} - c\frac{\partial E_z}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} + c\frac{\partial E_y}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

流体力学方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ \dfrac{\rho v^2}{2} + \dfrac{P}{\gamma - 1} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + P \\ \dfrac{\rho v^3}{2} + \dfrac{\gamma P v}{\gamma - 1} \end{pmatrix} = 0 \tag{3.6}$$

磁気流体力学方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ B_y \\ B_z \\ \rho E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P + \dfrac{{B_y}^2 + {B_z}^2 - {B_x}^2}{8\pi} \\ \rho uv - \dfrac{B_x B_y}{4\pi} \\ \rho uw - \dfrac{B_x B_z}{4\pi} \\ B_y u - vB_x \\ B_z u - wB_x \\ \rho Hu - \dfrac{B_x\left(B_x u + B_y v + B_z w\right)}{4\pi} \end{pmatrix} = 0 \tag{3.7}$$

$$E = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{P}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{{B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2}{8\pi\rho} \tag{3.8}$$

$$H = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{\gamma P}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{{B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2}{4\pi\rho} \tag{3.9}$$

この表では波動方程式が数学的に易しいほうから難しい方へと並べられている。Burgers 方程式は非線型なので移流方程式より難しい。Maxwell 方程式は連立方程式で変数が多いので難し

い。流体力学方程式は非線型である上に連立なので一層難しい。また変数が増えるので、磁気流体力学方程式はさらに一層難しい。

最初から流体力学方程式や磁気流体力学方程式の風上差分を考えるのは難しいので、本講義では最初に Maxwell 方程式を例にとり、連立方程式の解き方を学ぶ。次に Burgers 方程式の風上差分を簡単におさらいし、流体力学および磁気流体力学の風上差分を学ぶ。

3.2 Maxwell 方程式の数値解法

Maxwell 方程式 (3.5) の 1 段目と 4 段目の和と差、2 段目と 3 段目の和と差は

$$\frac{\partial}{\partial t}(E_y + B_z) + c\frac{\partial}{\partial x}(E_y + B_z) = 0 \tag{3.10}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(E_y - B_z) - c\frac{\partial}{\partial x}(E_y - B_z) = 0 \tag{3.11}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(E_z + B_y) - c\frac{\partial}{\partial x}(E_z + B_y) = 0 \tag{3.12}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(E_z - B_y) + c\frac{\partial}{\partial x}(E_z - B_y) = 0 \tag{3.13}$$

と表される。このように書き換えると 1 段目の従属変数は $E_y + B_z$ だけとなる。従って改めて $u = E_y + B_z$ と置き換えると、この方程式は移流方程式に変形できることが分かる。2 段目以降も同様なので、

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + c\frac{\partial w_1}{\partial x} = 0 \tag{3.14}$$
$$\frac{\partial w_2}{\partial t} - c\frac{\partial w_2}{\partial x} = 0 \tag{3.15}$$
$$\frac{\partial w_3}{\partial t} - c\frac{\partial w_3}{\partial x} = 0 \tag{3.16}$$
$$\frac{\partial w_4}{\partial t} + c\frac{\partial w_4}{\partial x} = 0 \tag{3.17}$$
$$w_1 = E_y + B_z \tag{3.18}$$
$$w_2 = E_y - B_z \tag{3.19}$$
$$w_3 = E_z + B_y \tag{3.20}$$
$$w_4 = E_z - B_y \tag{3.21}$$
$$E_y = \frac{w_1 + w_2}{2} \tag{3.22}$$
$$E_z = \frac{w_3 + w_4}{2} \tag{3.23}$$
$$B_y = \frac{w_3 - w_4}{2} \tag{3.24}$$
$$B_z = \frac{w_1 - w_2}{2} \tag{3.25}$$

と書き換えられる。Maxwell 方程式は式 (3.14)-(3.17) のような移流方程式の集まりである。これらはそれぞれ独立なので、初日に習った風上差分法で解くことができる。この移流方程式の

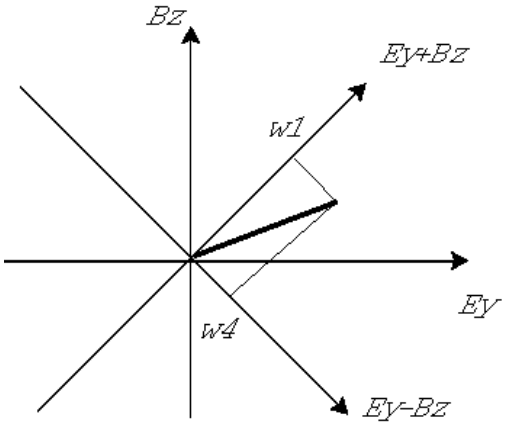

図 3.1: 変数 E_y, B_z, w_1, w_4 の関係を幾何学的に示した図。

変数 w_1, w_2, w_3, w_4 は式 (3.18)- (3.21) より求めることができる。また式 (3.22)-(3.25) を用いれば、E_y, E_z, B_y, B_z を求めることができる (図 3.2)。

[**発展問題**] 変数 $E_y + B_z$ や $E_y - B_z$ の物理的な意味を述べよ。

上記の結果を見通しよくするために、行列を使って計算してみよう。

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} E_y \\ E_z \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & -c & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} E_y \\ E_z \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = 0 \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = 0 \tag{3.27}$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} E_y \\ E_z \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & -c & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

方程式 (3.27) を移流方程式 [式 (3.1)] と比較すると、変数 u がベクトルになったのに伴い、波の速度 c が行列 $\boldsymbol{A}$ に変化していることに気づく。Maxwell の方程式に現れる波の速度 $\pm c$ は、行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値として求めることができる。

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0 \tag{3.30}$$

ここで $\boldsymbol{I}$ は単位行列を表す。具体的に計算すると

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & c \\ 0 & -\lambda & -c & 0 \\ 0 & -c & -\lambda & 0 \\ c & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad (\lambda - c)^2 (\lambda + c)^2 = 0 \tag{3.31}$$

このようにして求まった固有値 (λ_k) と右固有ベクトル $(\boldsymbol{r}_k)$

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{r}_k = \lambda_k \boldsymbol{r}_k \tag{3.32}$$

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1 = c \tag{3.33}$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = -c \tag{3.34}$$

$$\boldsymbol{r}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_3 = -c \tag{3.35}$$

$$\boldsymbol{r}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_4 = c \tag{3.36}$$

が求められる。この右固有ベクトルと式 (3.22)-(3.25) が類似しているので、ベクトル $\boldsymbol{u}$ を右固有ベクトルの線型結合

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} E_y \\ E_z \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = w_1 \boldsymbol{r}_1 + w_2 \boldsymbol{r}_2 + w_3 \boldsymbol{r}_3 + w_4 \boldsymbol{r}_4 = \sum_{k=1}^{4} w_k \boldsymbol{r}_k \tag{3.37}$$

で表すことができる。これからの計算を簡単にするため、縦ベクトル $\boldsymbol{w}$、横ベクトル ${}^t\boldsymbol{w}$、行列 R を

$$\boldsymbol{w} \;=\; \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

$${}^t\boldsymbol{w} \;=\; (w_1,\, w_2,\, w_3,\, w_4) \tag{3.39}$$

$$\boldsymbol{R} \;=\; \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{r}_1 \\ {}^t\boldsymbol{r}_2 \\ {}^t\boldsymbol{r}_3 \\ {}^t\boldsymbol{r}_4 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \tag{3.40}$$

と定義すると

$$\boldsymbol{u} \;=\; \boldsymbol{R}\boldsymbol{w} \tag{3.41}$$

と表すことができる。この行列 $\boldsymbol{R}$ の逆行列を $\boldsymbol{L}$ とすると、

$$\boldsymbol{L} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \boldsymbol{\ell}_1 \\ \boldsymbol{\ell}_2 \\ \boldsymbol{\ell}_3 \\ \boldsymbol{\ell}_4 \end{pmatrix} \tag{3.42}$$

$$\boldsymbol{\ell}_1 \;=\; (1/2,\, 0,\, 0,\, 1/2) \;=\; 2\,{}^t\boldsymbol{r}_1 \tag{3.43}$$

$$\boldsymbol{\ell}_2 \;=\; (1/2,\, 0,\, 0,\, -1/2) \;=\; 2\,{}^t\boldsymbol{r}_2 \tag{3.44}$$

$$\boldsymbol{\ell}_3 \;=\; (0,\, 1/2,\, 1/2,\, 0) \;=\; 2\,{}^t\boldsymbol{r}_3 \tag{3.45}$$

$$\boldsymbol{\ell}_4 \;=\; (0,\, 1/2,\, -1/2,\, 0) \;=\; 2\,{}^t\boldsymbol{r}_4 \tag{3.46}$$

従って逆行列 $\boldsymbol{L}$ は、$\boldsymbol{R}$ の行と列を入れ替え 2 倍したものに他ならない。これは固有ベクトルが互いに直行していて、その長さが $|\boldsymbol{r}_k|^2 \;=\; 2$ だからである。このため逆行列 $\boldsymbol{L}$ の各行もやはり行列 $\boldsymbol{A}$ の (左) 固有ベクトルとなる。

$$\boldsymbol{\ell}_k\boldsymbol{A} \;=\; \lambda_k\,\boldsymbol{\ell}_k \tag{3.47}$$

この逆行列を使うと、式 (3.18)-(3.21) は、

$$\boldsymbol{w} \;=\; \boldsymbol{L}\boldsymbol{u} \tag{3.48}$$

とまとめられる。これは式 (3.41) に $\boldsymbol{L}$ を掛け、右辺と左辺を取り替えたものとも等しい。

このようにして決められた行列 $\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{L}$ を使うと、

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \;+\; \boldsymbol{A}\,\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \;=\; 0 \tag{3.49}$$

$$\frac{\partial(\boldsymbol{Lu})}{\partial t} + \boldsymbol{\Lambda}\frac{\partial(\boldsymbol{Lu})}{\partial x} = 0 \tag{3.50}$$

$$\boldsymbol{RL} = \boldsymbol{LR} = \boldsymbol{I} \tag{3.51}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{LAR} = \begin{pmatrix} -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c \end{pmatrix} \tag{3.52}$$

ここまでの一連の計算は、線型代数の時間に習った**行列の対角化**である。[1]

変数 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{Lu}$ についての方程式は独立で線型な移流方程式の集まりなので、これらはそれぞれ 1 章で習った風上差分で解ける。求まった値を変換により $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Lw}$ に戻せば Maxwell 方程式も解ける。

この節の教訓: 連立方程式 (システム方程式) では波の速度が行列で表されるので、行列の固有値・固有ベクトルを計算し、成分ごとの簡単な方程式にすると良い。

3.3 Burgers 方程式の復習と Maxwell 方程式の風上数値流束

Burgers 方程式では変数 u の値により波の位相速度が変わる。また Maxwell 方程式では成分により位相速度が $\pm c$ の値をとる。このように位相速度が一定で無い場合の風上数値流束を復習しよう。

Burgers 方程式の場合

$$u_j(t+\Delta t) = u_j(t) - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\tilde{f}_{j+1/2} - \tilde{f}_{j-1/2}) \tag{3.53}$$

$$\tilde{f}_{j+1/2} = \begin{cases} \dfrac{[u_j(t)]^2}{2} & [u_{j+1}(t) + u_j(t) > 0] \\ \dfrac{[u_{j+1}(t)]^2}{2} & [u_{j+1}(t) + u_j(t) \le 0] \end{cases} \tag{3.54}$$

式 (3.54) は

$$\tilde{f}_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left[\frac{[u_{j+1}(t)]^2 + [u_j(t)]^2}{2} - \left|\frac{u_{j+1}+u_j}{2}\right|(u_{j+1}-u_j)\right] \tag{3.55}$$

この結果から類推すると、対角化された Maxwell 方程式は

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + \boldsymbol{LAR}\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x} = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{f}_w}{\partial x} = 0 \tag{3.56}$$

$$\boldsymbol{f}_w = \boldsymbol{LARw} = \boldsymbol{\Lambda w} \tag{3.57}$$

[1] 第 2 章でも同様に行列の対角化を行った。

なので、これを風上差分化した公式は

$$\boldsymbol{w}_j(t\,+\,\Delta t)\;=\;\boldsymbol{w}_j(t)\;-\;\frac{\Delta t}{\Delta x}\,(\tilde{\boldsymbol{f}}_{w,j+1/2}\,-\,\tilde{\boldsymbol{f}}_{w,j-1/2}) \tag{3.58}$$

$$\tilde{\boldsymbol{f}}_{w,j+1/2}\;=\;\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{f}_{w,j+1}\,+\,\boldsymbol{f}_{w,j}\;-\;|\boldsymbol{\Lambda}|\;(\boldsymbol{w}_{j+1}\,-\,\boldsymbol{w}_j)\right] \tag{3.59}$$

と予想される。ここで行列 $|\boldsymbol{\Lambda}|$ は対角行列の絶対値なので、対角要素の絶対値をとったもの

$$|\boldsymbol{\Lambda}|\;=\;\begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}\;=\;c \tag{3.60}$$

と定義する。

元の変数で考えると

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\,+\,\boldsymbol{A}\,\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}\;=\;\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\,+\,\frac{\partial \boldsymbol{f}_u}{\partial x}\;=\;0 \tag{3.61}$$

$$\boldsymbol{f}_u\;=\;\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{u} \tag{3.62}$$

なので、これを風上差分化した公式は

$$\boldsymbol{u}_j(t\,+\,\Delta t)\;=\;\boldsymbol{u}_j(t)\;-\;\frac{\Delta t}{\Delta x}\,(\tilde{\boldsymbol{f}}_{u,j+1/2}\,-\,\tilde{\boldsymbol{f}}_{w,j-1/2}) \tag{3.63}$$

$$\tilde{\boldsymbol{f}}_{u,j+1/2}\;=\;\boldsymbol{R}\,\tilde{\boldsymbol{f}}_{w,j+1/2} \tag{3.64}$$

$$=\;\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{f}_{u,j+1}\,+\,\boldsymbol{f}_{u,j}\;-\;\boldsymbol{R}\,|\boldsymbol{\Lambda}|\,\boldsymbol{L}\,(\boldsymbol{u}_{j+1}\,-\,\boldsymbol{u}_j)\right] \tag{3.65}$$

式 (3.65) は流体力学で使う数値流束と形の上でそっくりとなる。

3.4　流体力学方程式の風上差分

これまでに見てきたように、風上差分の計算では波の位相速度を求める操作が欠かせない。具体的には

1. 微分方程式を $\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\,+\,\boldsymbol{A}\,\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}\;=\;0$ の形に書き直し、「速度行列」$\boldsymbol{A}$ を求める。
2. 速度行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を求める。
3. 速度行列 $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルを求める。
4. 固有値と固有ベクトルより数値流束を求める。

という演算が必要である。以下ではそれぞれについて説明する。

ステップ 1　速度行列を求める。

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x} = 0 \tag{3.66}$$

を合成関数の微分則を使って書き換えると、

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = 0 \tag{3.67}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}} \tag{3.68}$$

$$(\boldsymbol{A})_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \tag{3.69}$$

が得られる。

流体力学方程式では

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ \dfrac{\rho v^2}{2} + \dfrac{P}{\gamma - 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix} \tag{3.70}$$

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + P \\ \dfrac{\rho v^3}{2} + \dfrac{\gamma P v}{\gamma - 1} \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \dfrac{3-\gamma}{2}\dfrac{(\rho v)^2}{\rho} + (\gamma - 1)\left(\dfrac{\rho v^2}{2} + \dfrac{P}{\gamma - 1}\right) \\ \dfrac{\rho v}{\rho}\left[\dfrac{1-\gamma}{2}\dfrac{(\rho v)^2}{\rho} + \gamma(\rho E)\right] \end{Bmatrix} \tag{3.71}$$

$$E = \frac{v^2}{2} + \frac{P}{(\gamma - 1)\rho} \tag{3.72}$$

$$H = \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma P}{(\gamma - 1)\rho} \tag{3.73}$$

上記の変形は $\boldsymbol{f}$ を $\boldsymbol{u}$ で偏微分するため。2 章でも等温の場合に同様の変形を行った。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{3-\gamma}{2}v^2 & (3-\gamma)v & \gamma - 1 \\ \left(\dfrac{\gamma - 1}{2}v^2 - H\right)v & H - (\gamma - 1)v^2 & \gamma v \end{bmatrix} \tag{3.74}$$

ステップ 2 固有値を求める。

$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0$ より、

$$\lambda_1 = v + c_{\mathrm{s}} \tag{3.75}$$

$$\lambda_2 = v \tag{3.76}$$

$$\lambda_3 = v - c_{\mathrm{s}} \tag{3.77}$$

$$c_{\mathrm{s}} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \tag{3.78}$$

ステップ 3　固有ベクトルを求める。

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ v + c_{\rm s} \\ H + v\,c_{\rm s} \end{pmatrix} \tag{3.79}$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ \dfrac{v^2}{2} \end{pmatrix} \tag{3.80}$$

$$\boldsymbol{r}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ v - c_{\rm s} \\ H - v\,c_{\rm s} \end{pmatrix} \tag{3.81}$$

$$\boldsymbol{\ell}_1 = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{2}\frac{\gamma-1}{c_{\rm s}^2} - \frac{u}{c_{\rm s}}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c_{\rm s}} - \frac{\gamma-1}{c^2}v\right), \quad \frac{\gamma-1}{2\,c_{\rm s}^2}\right] \tag{3.82}$$

$$\boldsymbol{\ell}_2 = \left[\quad 1 - \frac{v^2}{2}\frac{\gamma-1}{c_{\rm s}^2} \quad , \qquad \frac{\gamma-1}{c_{\rm s}^2}v \qquad , -\frac{\gamma-1}{c_{\rm s}^2}\right] \tag{3.83}$$

$$\boldsymbol{\ell}_3 = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{2}\frac{\gamma-1}{c_{\rm s}^2} + \frac{u}{c_{\rm s}}\right), -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c_{\rm s}} + \frac{\gamma-1}{c^2}v\right), \quad \frac{\gamma-1}{2\,c_{\rm s}^2}\right] \tag{3.84}$$

ここまでに見てきたように、流体力学方程式では速度行列 $\boldsymbol{A}$ が密度・速度・圧力の関数なので、場所によりその値が異なる。従って固有値や固有ベクトルも場所によって異なる。このため数値流束を計算する際に、**どこの密度・速度・圧力を使って計算するのか**という疑問がうまれる。これに対して Roe (1981) は

$$\bar{\rho} = \sqrt{\rho_{j+1}\rho_j} \tag{3.85}$$

$$\bar{v} = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}}v_{j+1} + \sqrt{\rho_j}v_j}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} \tag{3.86}$$

$$\bar{H} = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}}H_{j+1} + \sqrt{\rho_j}H_j}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} \tag{3.87}$$

$$\bar{c}_{\rm s}^2 = (\gamma - 1)\left(\bar{H} - \frac{\bar{v}^2}{2}\right) \tag{3.88}$$

を使って「平均量」を計算すれば良いことを見いだした。この平均の取り方を Roe 平均と呼ぶこともある。

Roe 平均で速度や単位質量当たりのエネルギーは $\sqrt{\rho}$ で重みをとった平均。一方、密度や圧力は $1/\sqrt{\rho}$ で重みをとった平均。ちょっと予想外なのは平均化された音速 ($\bar{c}_{\rm s}$)。音速は温度 (=

圧力と密度の比) によって決まるのだが、なぜか音速 $\bar{c}_{\rm s}$ の計算に速度 v も使う。式 (3.88) を計算すると、

$$\bar{c}_{\rm s}^2 \;=\; \gamma\,\frac{\dfrac{P_{j+1}}{\sqrt{\rho_{j+1}}}+\dfrac{P_j}{\sqrt{\rho_j}}}{\sqrt{\rho_{j+1}}+\sqrt{\rho_j}} \;+\; \frac{\gamma\,-\,1}{2}\,\frac{\sqrt{\rho_{j+1}\,\rho_j}}{(\sqrt{\rho_{j+1}}+\sqrt{\rho_j})^2}\,(v_{j+1}\,-\,v_j)^2 \tag{3.89}$$

が得られる。この式は、速度勾配があると ($v_{j+1}\,\neq\,v_j$)、その分だけ平均音速が上昇することを示している。

この Roe 平均で計算した $\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{u}_{j+1},\,\boldsymbol{u}_j)$ は任意 $\boldsymbol{u}_j$ と $\boldsymbol{u}_{j+1}$ に対して、**Property U** とよばれる以下の 3 条件、

i) $(\boldsymbol{f}_{j+1}\,-\,\boldsymbol{f}_j)\,=\,\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{u}_{j+1},\,\boldsymbol{u}_j)\,(\boldsymbol{u}_{j+1},-\boldsymbol{u}_j)$

ii) 固有値はすべて実数 (波の速度はすべて実数)

iii) $\boldsymbol{u}_{j+1}=\boldsymbol{u}_j$ の場合、$\boldsymbol{A}\;=\;\partial\boldsymbol{f}/\partial\boldsymbol{u}$

を満たす。時間の関係で省略するが、Property U を満たす平均の取り方はこれ一つに限られることも証明できる。詳しくは Hirsch あるいは藤井の教科書に書かれている。

$$\boldsymbol{u}_j(t\,+\,\Delta t)\;=\;\boldsymbol{u}_j(t)\;-\;\frac{\Delta t}{\Delta x}\,(\tilde{\boldsymbol{f}}_{u,j+1/2}\,-\,\tilde{\boldsymbol{f}}_{u,j-1/2}) \tag{3.90}$$

$$\tilde{\boldsymbol{f}}_{u,j+1/2} \;=\; \boldsymbol{R}\,\tilde{\boldsymbol{f}}_{w,j+1/2} \tag{3.91}$$

$$\;=\; \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{f}_{u,j+1}\,+\,\boldsymbol{f}_{u,j}\;-\;\boldsymbol{R}\,|\boldsymbol{\Lambda}|\,\boldsymbol{L}\,(\boldsymbol{u}_{j+1}\,-\,\boldsymbol{u}_j)\right] \tag{3.92}$$

形式的には Maxwell 方程式の風上差分と同じであるが、波の速度行列 $\boldsymbol{\Lambda}\;=\;\boldsymbol{LAR}$ は流れにより変化する量である。絶対値をとると

$$|\boldsymbol{\Lambda}|\;=\;\begin{pmatrix} |v\,+\,c| & 0 & 0 \\ 0 & |v| & 0 \\ 0 & 0 & |v\,-\,c| \end{pmatrix} \tag{3.93}$$

この節の教訓: 数値流束の計算に必要なものは、波の位相速度 (固有値 λ_k) と波の固有モード (固有ベクトル $\boldsymbol{r}_k$ と $\boldsymbol{\ell}_k$) である。これらの量は場所とともに変化するので、適切な平均量 (Roe 平均) を使う。

3.5 磁気流体力学方程式の風上差分化

流体力学方程式のところで分かったように数値流束に直接現れる量は、固有値と固有ベクトルである。磁気流体力学方程式では変数が増えるので計算がさらに厄介になる。ここでは計算結果だけを述べる。固有値や固有ベクトルは、流体力学方程式の時と同様に特殊な平均量を使って計算する。

ベクトル形式で記述した 1 次元磁気流体力学方程式

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ B_y \\ B_z \\ \rho E \end{pmatrix} \tag{3.94}$$

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P + \dfrac{{B_y}^2 + {B_z}^2 - {B_x}^2}{8\pi} \\ \rho uv - \dfrac{B_x B_y}{4\pi} \\ \rho uw - \dfrac{B_x B_z}{4\pi} \\ B_y u - v B_x \\ B_z u - w B_x \\ \rho H u - \dfrac{B_x \left(B_x u + B_y v + B_z w \right)}{4\pi} \end{pmatrix}, \tag{3.95}$$

$$E = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{P}{(\gamma - 1)\,\rho} + \frac{{B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2}{8\pi\rho}, \tag{3.96}$$

$$H = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{\gamma P}{(\gamma - 1)\,\rho} + \frac{{B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2}{4\pi\rho}, \tag{3.97}$$

1 次元の磁気流体力学方程式には、fast 波 (右向きと左向き)、slow 波 (右向きと左向き)、Alfvén 波 (右向きと左向き)、エントロピー波の 7 種類の波 (固有値・固有ベクトル) が存在する。流体力学で見てきたように、右向きと左向きの固有値と固有ベクトルは速度の符号が違うだけでよく似ている。紙数を節約するために以下では次のように fast 波、slow 波、Alfvén 波の固有値・固有ベクトルを次のようにまとめて記述する。

固有値と (右) 固有ベクトル

$$\boldsymbol{r}_{1,7} = \boldsymbol{R}_{u \pm c_f}, \quad \boldsymbol{r}_{2,6} = \boldsymbol{R}_{u \pm b_x}, \quad \boldsymbol{r}_{3,5} = \boldsymbol{R}_{u \pm c_s}, \quad \boldsymbol{r}_4 = \boldsymbol{R}_u, \tag{3.98}$$

$$\lambda_{1,7} = \bar{u} \pm c_f, \quad \lambda_{2,6} = \bar{u} \pm b_x, \quad \lambda_{3,5} = \bar{u} \pm c_s, \quad \lambda_4 = \bar{u}, \tag{3.99}$$

流体力学の時と同様に、これらの固有値と固有ベクトルは $\boldsymbol{u}_j$ と $\boldsymbol{u}_{j+1}$ の平均量を使って評価する必要がある。Brio & Wu (1988) は $\gamma = 2$ の場合に、Property U を満たす平均が存在することを示した。Brio & Wu (1988) に比べて少し複雑ではあるが、現在は一般の γ に対して Property U を満たす固有値・固有ベクトルも知られている。以下では一般の γ について Property U を満たす固有値・固有ベクトルを示す。[2]

[2]Property U の条件 (i) は第 2 章で習った衝撃波のランキンユゴニオ条件と関係がある。どちらも非線型性を考慮している。

$$\boldsymbol{R}_{u\pm c} = \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{u} \pm c \\ \bar{v} \mp \dfrac{B_x \bar{B}_y c}{4\pi\bar{\rho}(c^2 - {b_x}^2)} \\ \bar{w} \mp \dfrac{B_x \bar{B}_z c}{4\pi\bar{\rho}(c^2 - {b_x}^2)} \\ \dfrac{\bar{B}_y c^2}{\bar{\rho}(c^2 - {b_x}^2)} \\ \dfrac{\bar{B}_z c^2}{\bar{\rho}(c^2 - {b_x}^2)} \\ \dfrac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2}{2} + \dfrac{c^2}{\gamma - 1} \pm c\bar{u} + \chi + \delta b^2 \end{bmatrix}, \tag{3.100}$$

$$\boldsymbol{R}_{u\pm b_x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mp\bar{B}_z \operatorname{sgn}(Bx) \\ \pm\bar{B}_y \operatorname{sgn}(B_x) \\ \bar{B}_z \sqrt{\dfrac{4\pi}{\bar{\rho}}} \\ -\bar{B}_y \sqrt{\dfrac{4\pi}{\bar{\rho}}} \\ \mp(\bar{B}_z\bar{v} - \bar{B}_y\bar{w}) \operatorname{sgn}(B_x) \end{bmatrix} \tag{3.101}$$

$$\boldsymbol{R}_u = \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2}{2} + \delta b^2 \end{bmatrix} \tag{3.102}$$

$$\chi = \mp\frac{B_x c\,(\bar{B}_y\bar{v} + \bar{B}_z\bar{w})}{4\pi\bar{\rho}\,(c^2 - b_x^2)} + \frac{\gamma - 2}{\gamma - 1}(c^2 - a^2) \tag{3.103}$$

$$\delta b^2 = \frac{\gamma - 2}{\gamma - 1}\,\frac{(B_{y,\,j+1} - B_{y,\,j})^2 + (B_{z,\,j+1} - B_{z,\,j})^2}{8\pi\,(\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j})^2} \tag{3.104}$$

$${c_{f,\,s}}^2 = \frac{{a_*}^2 \pm \sqrt{a_*^4 - 4a^2{b_x}^2}}{2} \tag{3.105}$$

$$b_x = \frac{|B_x|}{\sqrt{4\pi\bar{\rho}}} \tag{3.106}$$

$${a_*}^2 = (\gamma - 1)\Big(\bar{H} - \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2}{2} - \delta b^2\Big) - (\gamma - 2)\Big(\frac{{B_x}^2 + {\bar{B}_y}^2 + {\bar{B}_z}^2}{4\pi\bar{\rho}}\Big) \tag{3.107}$$

$$a^2 \,=\, (\gamma \,-\, 1)\left(\bar{H} \,-\, \frac{\bar{u}^2 \,+\, \bar{v}^2 \,+ \bar{w}^2}{2} \,-\, \delta b^2 \,-\, \frac{{B_x}^2 \,+\, {\bar{B}_y}^2 \,+ {\bar{B}_z}^2}{4\pi\bar{\rho}}\right) \tag{3.108}$$

$$\bar{v} \,=\, \frac{\sqrt{\rho_j}v_j \,+\, \sqrt{\rho_{j+1}}v_{j+1}}{\sqrt{\rho_j} \,+\, \sqrt{\rho_{j+1}}} \tag{3.109}$$

$$\bar{w} \,=\, \frac{\sqrt{\rho_j}w_j \,+\, \sqrt{\rho_{j+1}}w_{j+1}}{\sqrt{\rho_j} \,+\, \sqrt{\rho_{j+1}}} \tag{3.110}$$

$$\bar{B}_y \,=\, \frac{\sqrt{\rho_{j+1}}B_{y,\,j} \,+\, \sqrt{\rho_j}B_{y,\,j+1}}{\sqrt{\rho_j} \,+\, \sqrt{\rho_{j+1}}} \tag{3.111}$$

$$\tilde{B}_y \,=\, \frac{B_{y,\,j} \,+\, B_{y,\,j+1}}{2} \tag{3.112}$$

$$\bar{B}_z \,=\, \frac{\sqrt{\rho_{j+1}}B_{z,\,j} \,+\, \sqrt{\rho_j}B_{z,\,j+1}}{\sqrt{\rho_j} \,+\, \sqrt{\rho_{j+1}}}\,, \tag{3.113}$$

$$\tilde{B}_z \,=\, \frac{B_{z,\,j} \,+\, B_{z,\,j+1}}{2} \tag{3.114}$$

上記の公式で (3.100) は、fast 波と slow 波の両方の固有ベクトルを表している。波の速度 c に c_f を代入すれば fast 波の固有ベクトルが、c_s を代入すれば slow 波の固有ベクトルが得られる。また c_s との混同を避けるため、音速は a で表されている。

実際に磁気流体力学方程式の数値流束を計算するためには、上記の式に少し工夫を加える必要がある。工夫が必要となるのは、固有値が等しくなる (縮退する) 場合である。気をつけて上記の式を運用しないと、固有ベクトルが独立でなくなる場合がある。この問題を回避するために、Ryu & Jones (1995) は変数に工夫を凝らした。上記の公式にこの工夫を加えると以下のようになる。

$$\boldsymbol{R}_{1,7} \,=\, \begin{bmatrix} \alpha_f \\ \alpha_f\,(\bar{u} \,\pm\, c_f) \\ \alpha_f\bar{v} \,\mp\, \alpha_s\beta_y b_x\,\mathrm{sgn}\,(B_x) \\ \alpha_f\bar{w} \,\mp\, \alpha_s\beta_z b_x\,\mathrm{sgn}\,(B_x) \\ \alpha_s\beta_y c_f\sqrt{4\pi/\bar{\rho}} \\ \alpha_s\beta_z c_f\sqrt{4\pi/\bar{\rho}} \\ \alpha_f\left\{\dfrac{\bar{u}^2 \,+\, \bar{v}^2 \,+\, \bar{w}^2}{2} \,+\, \delta b^2 \,\pm\, c_f\bar{u} \,+\, \dfrac{{c_f}^2}{\gamma \,-\, 1}\right. \\ \left. +\,\dfrac{\gamma \,-\, 2}{\gamma \,-\, 1}({c_f}^2 \,-\, a^2)\right\} \mp\, \alpha_s b_x \mathrm{sgn}(B_x)\,(\beta_y\bar{v} \,+\, \beta_z\bar{w}) \end{bmatrix} \tag{3.115}$$

$$\boldsymbol{R}_{2,6} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mp\beta_z \,\mathrm{sgn}(B_x) \\ \pm\beta_y \,\mathrm{sgn}(B_x) \\ \beta_z \sqrt{4\pi/\bar{\rho}} \\ -\beta_y \sqrt{4\pi/\bar{\rho}} \\ \mp\left(\beta_z \bar{v} - \beta_y \bar{w}\right) \mathrm{sgn}(B_x) \end{bmatrix} \tag{3.116}$$

$$\boldsymbol{R}_{3,5} = \begin{bmatrix} \alpha_s \\ \alpha_s \left(\bar{u} \pm c_s\right) \\ \alpha_s \bar{v} \pm \alpha_f \beta_y a \,\mathrm{sgn}\left(B_x\right) \\ \alpha_s \bar{w} \pm \alpha_f \beta_z a \,\mathrm{sgn}\left(B_x\right) \\ -\dfrac{\alpha_f \,\beta_y a^2 \sqrt{4\pi}}{c_f \sqrt{\bar{\rho}}} \\ -\dfrac{\alpha_f \,\beta_z a^2 \sqrt{4\pi}}{c_f \sqrt{\bar{\rho}}} \\ \alpha_s \Big\{ \dfrac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2}{2} + \delta b^2 \pm c_s \bar{u} + \dfrac{{c_s}^2}{\gamma - 1} + \dfrac{\gamma - 2}{\gamma - 1} ({c_s}^2 - a^2) \Big\} \\ \pm\alpha_f a \mathrm{sgn}(B_x) \left(\beta_y \bar{v} + \beta_z \bar{w}\right) \end{bmatrix} \tag{3.117}$$

$$\boldsymbol{R}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2}{2} + \delta b^2 \end{bmatrix} \tag{3.118}$$

$$\alpha_f = \frac{\sqrt{{c_f}^2 - {b_x}^2}}{\sqrt{{c_f}^2 - {c_s}^2}} \tag{3.119}$$

$$\alpha_s = \frac{\sqrt{{c_f}^2 - a^2}}{\sqrt{{c_f}^2 - {c_s}^2}} = \frac{c_f}{b_x} \frac{\sqrt{{b_x}^2 - {c_s}^2}}{\sqrt{{c_f}^2 - {c_s}^2}} \tag{3.120}$$

$$\beta_z = \frac{\bar{B}_z}{\sqrt{{\bar{B}_y}^2 + {\bar{B}_z}^2}}\,, \tag{3.121}$$

$$\beta_y = \frac{\bar{B}_y}{\sqrt{{\bar{B}_y}^2 + {\bar{B}_z}^2}} \tag{3.122}$$

平均磁場が 0 の場合 ($\bar{B}_y = \bar{B}_z = 0$) は β_y と β_z は

$$\beta_y = 1 \quad \text{and} \quad \beta_z = 0 \tag{3.123}$$

と定義される。また $c_f = c_s = a = b_x$ の場合、α_f と α_s は

$$\alpha_f = 1 \quad \text{and} \quad \alpha_s = 0 \tag{3.124}$$

$$\beta_y{}^2 + \beta_z{}^2 = 1 \,, \tag{3.125}$$

$$\alpha_f{}^2 + \frac{b_x{}^2}{c_f{}^2}\,\alpha_s{}^2 = 1 \tag{3.126}$$

と定義される。

$$w_2 = \frac{1}{2}\Big[-\bar{\rho}\,(\beta_z\Delta v - \beta_y\Delta w)\,\mathrm{sgn}(B_x) + \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{4\pi}}\,(\beta_z\Delta B_y - \beta_y\Delta B_z)\Big] \tag{3.127}$$

$$w_6 = \frac{1}{2}\Big[\bar{\rho}\,(\beta_z\Delta v - \beta_y\Delta w)\,\mathrm{sgn}(B_x) + \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{4\pi}}\,(\beta_z\Delta B_y - \beta_y\Delta B_z)\Big] \tag{3.128}$$

$$\begin{aligned} w_1 + w_7 &= \frac{\alpha_f}{c_f{}^2}\Big(\Delta P + \frac{\tilde{B}_y\Delta B_y + \tilde{B}_z\Delta B_z}{4\pi}\Big) \\ &+ \Big\{\frac{\alpha_s}{a^2 c_f}\Big[(\gamma-1)\,c_s^2 - (\gamma-2)\,a^2\Big]\sqrt{4\pi\bar{\rho}} \\ &+ (\gamma-2)\sqrt{\bar{B}_y{}^2 + \bar{B}_z{}^2}\,\frac{\alpha_f}{c_f{}^2}\Big\}\,\frac{\beta_y\Delta B_y + \beta_z\,\Delta B_z}{4\pi}\,, \end{aligned} \tag{3.129}$$

$$w_1 - w_7 = \frac{\alpha_f}{c_f}\,\bar{\rho}\Delta u - \frac{\alpha_s c_s}{c_f a}\,\mathrm{sgn}(B_x)\bar{\rho}(\beta_y\Delta v + \beta_z\Delta w)\,, \tag{3.130}$$

$$\begin{aligned} w_3 + w_5 &= \frac{\alpha_s}{a^2}\Big(\Delta P + \frac{\tilde{B}_y\Delta B_y + \tilde{B}_z\Delta B_z}{4\pi}\Big) \\ &+ \Big\{\alpha_f\Big[\frac{\gamma-2}{c_f} - (\gamma-1)\,\frac{c_f}{a^2}\Big]\sqrt{4\pi\bar{\rho}} \\ &+ (\gamma-2)\sqrt{\bar{B}_y{}^2 + \bar{B}_z^2}\,\frac{\alpha_s}{a^2}\Big\}\,\frac{\beta_y\Delta B_y + \beta_z\,\Delta B_z}{4\pi}\,, \end{aligned} \tag{3.131}$$

$$w_3 - w_5 = \frac{\alpha_s b_x}{c_f a}\bar{\rho}\Delta u + \frac{\alpha_f}{a}\,\mathrm{sgn}(B_x)\bar{\rho}(\beta_y\Delta v + \beta_z\Delta w)\,, \tag{3.132}$$

$$w_4 = \rho_{j+1} - \rho_j - \alpha C_f\,(w_1 + w_7) - \alpha_s\,(w_3 + w_5)\,, \tag{3.133}$$

$$\Delta P = P_{j+1} - P_j\,, \tag{3.134}$$

$$\Delta B_y = B_{y,\,j+1} - B_{y,\,j}\,, \tag{3.135}$$

$$\Delta B_z = B_{z,\,j+1} - B_{z,\,j}\,. \tag{3.136}$$

$$\boldsymbol{R}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2}{2} + \delta b^2 + \varepsilon \end{bmatrix}, \tag{3.137}$$

and

$$\varepsilon = \frac{\rho_{j+1} e_j - \rho_j e_j - (P_{j+1} - P_j)/(\gamma - 1)}{w_1}. \tag{3.138}$$

3.6 さらに勉強する人へ

時間が限られているので、講義内容は基本的な概念に絞った。そのため実用的なコードを作成するのに必要な知識のいくつかを割愛せざるを得なかった。ここでは割愛した中でも重要な項目と、それについての参考書を示す。

1. 膨張衝撃波 (expansion shock) の回避

   ポイント 波の位相速度 λ_k が、$\lambda_{k,j} < 0$ かつ $\lambda_{k,j+1} > 0$ である時に、Roe の方法は不自然な解 (expansion shock) を生むことがある。回避法は良く知られている。

   参考書 Hirsch の教科書 pp. 467–469

2. 数値流束の 2 次精度化

   ポイント ここで講義した風上差分法は時間空間ともに 1 次精度であるが、これ時間空間ともに 2 次精度に拡張して使うのが普通である。よく用いられる方法として MUSCL 法がある。

   参考書 藤井の教科書 第 3 章

3. Godunov の定理と TVD 条件

   ポイント 高次精度の数値流束を使うと、1 次精度風上差分では回避された数値振動が現れやすくなる。Godunov の定理はこれを回避するための基礎理論として有名。また TVD 条件は数値振動が起こさないための十分条件として有名。簡単な解説は 1 章に掲載されている。

   参考書 藤井の教科書 第 3 章

4. 流速制限関数 (flux limiter)

   ポイント MUSCL 法で使われる。流速制限関数が必要であることは Godunov の定理より導かれる。1 章で紹介された minmod 関数はその 1 例。

参考書 藤井の教科書 第 3 章

5. MUSCL 法の (磁気) 流体力学方程式への適用

   ポイント システム方程式に MUSCL を適用する手順は予想外に面倒である。特に磁気流体力学の場合は工夫が必要である。具体的な手順の例は Fukuda & Hanawa (2000) に載っている。

6. Property U

   ポイント Property U が何故必要なのか。また Roe の平均はどのようにして導かれたのか。原理的な理解のために学習することは益。

   参考書 Hirsch の教科書 pp. 463–465

7. 円筒座標および極座標での計算

   ポイント 2 次元シミュレーションでは円筒座標や極座標が役に立つ場合が多い。これらの座標を用いるときは少し工夫が必要である。

8. 一般的な状態方程式への拡張

   ポイント この講義や普通の教科書で扱うのは理想的な状態方程式だけである。しかし一般的な状態方程式の場合にも風上差分を拡張することができる。

   参考書 Nobuta & Hanawa (1999)

参考文献

(1) 藤井孝藏, 1994, 流体力学の数値計算法, 東大出版会
(2) M. Brio and C. C. Wu, 1988, J. Comput. Phys., vol. 75, p. 400
(3) N. Fukuda and T. Hanawa, 2000, Astrophys. J., vol. 533, p. 911
(4) C. Hirsch, 1990, Numerical Computation of Internal and External Flows, vol. 2: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows, Wiley
(5) K. Nobuta & T. Hanawa 1999, Astrophys. J., vol. 510, p. 614
(6) P. L. Roe, 1981, J. Comput. Phys., vol. 43, p. 357
(7) D. Ryu and T. W. Jones, Astrophys. J., vol. 442, p. 228