第1章　テスト粒子解析

与えられた時間変化しない電磁場の中を、荷電粒子がどのような運動をするかを解析する時に用いられる計算方法である。通常の粒子シミュレーションと違い、荷電粒子の運動による電磁場への影響を考えないという仮定は、軌道を追跡する粒子のエネルギーが、周囲の電磁場のエネルギーよりも十分小さい場合に有効である。その仮定のもとでは、この方法で近似的に解析可能である。

1.1　基本方程式と変数の規格化

一般に宇宙プラズマは、十分稀薄であるため粒子間の衝突は無視できる。したがって、相対論効果を含まない場合の個々の粒子の運動は、

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = (\frac{Z}{M})(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{1.1}$$

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{v} \tag{1.2}$$

を解けば求まる。電磁場 $\boldsymbol{E}$ や $\boldsymbol{B}$ は一定値であるから、$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{x}$ を問題に合わせた初期値から、時間積分するのみである。

さて、変数の値としては、実際の物理量を代入するということは行なわず、規格化した値を用いる。規格化には、いくつかの方法があり、解析したい時空間のスケールに合わせた規格化定数を用いれば良い。ここでは、イオンの運動を追跡する場合の変数を用いる。

速度	$\boldsymbol{v}$	$\rightarrow$	$\tilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}}\, V_A$ アルフヴェン速
時間	t	$\rightarrow$	$\frac{\tilde{t}}{\Omega_i}$ ジャイロ周期
長さ	x	$\rightarrow$	$\tilde{x}_i\, \frac{V_A}{\Omega_i}$
磁場	$\boldsymbol{B}$	$\rightarrow$	$\tilde{\boldsymbol{B}}\, B_0$ 背景磁場強度
電場	$\boldsymbol{E}$	$\rightarrow$	$\tilde{\boldsymbol{E}}\, V_A B_0$
電荷	Z	$\rightarrow$	$\tilde{Z}_i\, e$ 電荷素量
質量	M	$\rightarrow$	$\tilde{M}_i\, M$ 陽子質量

規格化した結果の解くべき方程式は、

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}}}{d\tilde{t}} = (\frac{\tilde{Z}_i}{\tilde{M}_i})(\tilde{\boldsymbol{E}} + \tilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}} \times \tilde{\boldsymbol{B}}) \tag{1.3}$$

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}}{d\tilde{t}} = \tilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}} \tag{1.4}$$

規格化する前と形式的には同じであるが、意味合いが全く異なる。

1.2　微分方程式を解くスキーム

式 (1.3,1.4) を用いて粒子の速度と位置を時間ステップ Δt 毎に解き進めて行く数ある方法の中のいくつかを以下に説明する。

1.2.1　Euler 法

変数 t、t の関数 $v(t)$ として、$v(t)$ の満たすべき微分方程式と初期条件

$$\frac{dv(t)}{dt} = f(v,t) \tag{1.5}$$

$$v(t=0) = v_0 \tag{1.6}$$

を与えて、$v(t)$ を求める問題を考える。離散的に解くもっとも簡単な方法は、

$$\frac{dv}{dt} \sim \frac{v^{n+1}-v^n}{t^{n+1}-t^n} = \frac{v^{n+1}-v^n}{\Delta t} \tag{1.7}$$

から、

$$v^{n+1} = v^n + f(v^n,t^n)\Delta t \tag{1.8}$$

として計算するもので、Euler 法という。しかし、この方法は、後述の方法に比べ誤差が大きい。

1.2.2　修正 Euler 法

t^n から t^{n+1} まで積分するとき、$f(v^n,t^n)$ だけを用いるのではなく、$f(v^n,t^n)$ と予測した $f(v^{n+1},t^{n+1})$ を用いると精度が良くなる。この方法は、修正 Euler 法という。予測の方法は、

$$k_1 = f(v^n,t^n) \tag{1.9}$$

$$v^{n+1} = v^n + k_1\Delta t \tag{1.10}$$

$$k_2 = f(v^{n+1},t^n+\Delta t) \tag{1.11}$$

と予測値を求め、

$$v^{n+1} = v^n + \frac{1}{2}(k_1+k_2)\Delta t \tag{1.12}$$

と、v^{n+1} を求めなおす。

1.2.3 Runge-Kutta 法

さらに、4つの予測値を使う方法が、ルンゲクッタ法である。

$$\begin{aligned} k_1 &= f(v^n, t^n) && (1.13)\\ v_2 &= v^n + k_1\frac{\Delta t}{2} && (1.14)\\ k_2 &= f(v_2, t^n + \frac{\Delta t}{2}) && (1.15)\\ v_3 &= v^n + k_2\frac{\Delta t}{2} && (1.16)\\ k_3 &= f(v_3, t^n + \frac{\Delta t}{2}) && (1.17)\\ v_4 &= v^n + k_3\Delta t && (1.18)\\ k_4 &= f(v_4, t^n + \Delta t) && (1.19) \end{aligned}$$

と予測値を求め、

$$v^{n+1} = v^n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\Delta t \quad (1.20)$$

と、v^{n+1} 求める。

1.2.4 Buneman-Boris 法

式 (1.3) の差分表現は以下のようになる。

$$\frac{\boldsymbol{v}^{n+1/2} - \boldsymbol{v}^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{q}{m}(\boldsymbol{E}^n + \frac{\boldsymbol{v}^{n+1/2} + \boldsymbol{v}^{n-1/2}}{2} \times \boldsymbol{B}^n) \quad (1.21)$$

式を見てわかるように、時間 $n\Delta t$ における式展開になっている。ただし、$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ は粒子位置での電界値および磁界値である。この式から $\boldsymbol{v}^{n+1/2}$ の値を計算するには以下のような方法を用いる。

まず、新しい変数として $\boldsymbol{v}^-$ と $\boldsymbol{v}^+$ を以下のように定義し導入する。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}^- &= \boldsymbol{v}^{n-1/2} + \frac{q}{m}\boldsymbol{E}^n\frac{\Delta t}{2} && (1.22)\\ \boldsymbol{v}^+ &= \boldsymbol{v}^{n+1/2} - \frac{q}{m}\boldsymbol{E}^n\frac{\Delta t}{2} && (1.23) \end{aligned}$$

すなわち、$\boldsymbol{v}^{n-1/2}$ から電界 $\boldsymbol{E}^n$ で $\Delta t/2$ だけ加速を受けた後の速度、および $\boldsymbol{v}^{n+1/2}$ から電界 $\boldsymbol{E}^n$ で $\Delta t/2$ だけ加速を受ける前の速度を意味する。これらの変数を用いて式 (1.21) を書き換えると以下のようになる。

$$\frac{\boldsymbol{v}^+ - \boldsymbol{v}^-}{\Delta t} = \frac{1}{2}\frac{q}{m}(\boldsymbol{v}^+ + \boldsymbol{v}^-) \times \boldsymbol{B}^n \quad (1.24)$$

この意味は、$\boldsymbol{v}^+$ から $\boldsymbol{v}^-$ へ変化する間に $\frac{q}{m}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ のローレンツ力によるサイクロトロン回転のみが作用するということである。

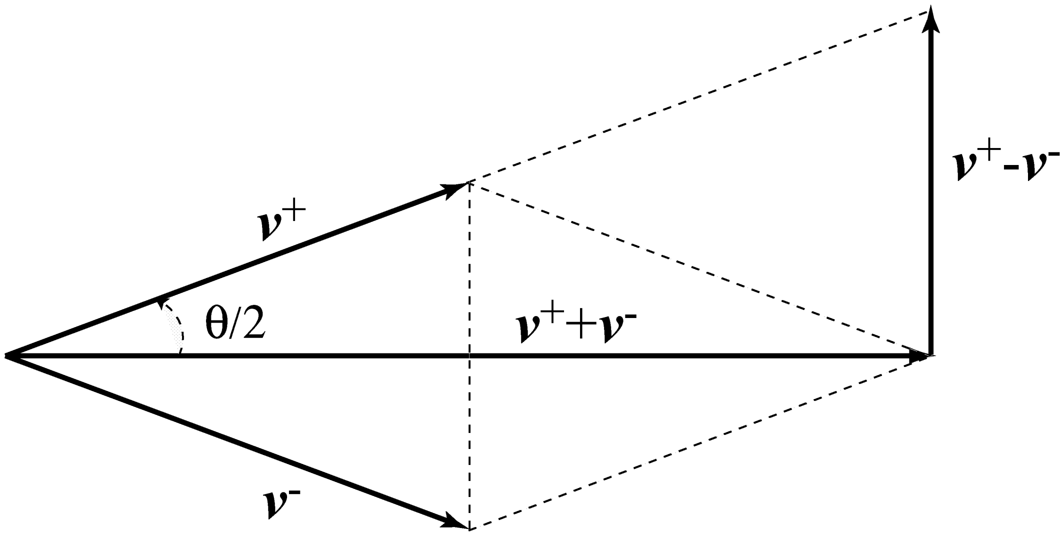

図 1.1: Vector relation in Byneman-Boris method

この式の両辺について $(\boldsymbol{v}^+ + \boldsymbol{v}^-)$ との内積をとると $(\boldsymbol{v}^+)^2 = (\boldsymbol{v}^-)^2$ となる。すなわち、図 1.1 に示されたように、式 (1.24) は $\boldsymbol{v}^+$ は $\boldsymbol{v}^-$ は大きさが同じで、角度 θ だけ回転させたものであることを示す。つまり、式 (1.21) を $\Delta t/2$ 分の電界による加速 2 回と、Δt 分のサイクロトロン回転とに分離したことになる。

詳細は省くが、式 (1.24) を整理すると、

$$\boldsymbol{v}^+ = \boldsymbol{v}^- + \frac{2}{1+\boldsymbol{T}^2}(\boldsymbol{v}^- + \boldsymbol{v}^- \times \boldsymbol{T}) \times \boldsymbol{T} \tag{1.25}$$

となる。ただし、$\boldsymbol{T} = (q/m)\Delta t \boldsymbol{B}^n/2$ と定義する。上の式で括弧内を $\boldsymbol{v}^o$ とすると、$\boldsymbol{v}^-$ から $\boldsymbol{v}^+$ への計算は

$$\boldsymbol{v}^o = \boldsymbol{v}^- + \boldsymbol{v}^- \times \boldsymbol{T} \tag{1.26}$$

$$\boldsymbol{v}^+ = \boldsymbol{v}^- + \boldsymbol{v}^o \times \boldsymbol{S} \tag{1.27}$$

ただし、$\boldsymbol{S} = 2\boldsymbol{T}/(1+\boldsymbol{T}^2)$ とする。

以上をまとめると、粒子の速度更新には以下の 4 ステップの計算を行うことになる。

$$\boldsymbol{v}^- = \boldsymbol{v}^{n-1/2} + \frac{q}{m}\boldsymbol{E}^n\frac{\Delta t}{2} \tag{1.28}$$

$$\boldsymbol{v}^o = \boldsymbol{v}^- + \boldsymbol{v}^- \times \boldsymbol{T} \tag{1.29}$$

$$\boldsymbol{v}^+ = \boldsymbol{v}^- + \boldsymbol{v}^o \times \boldsymbol{S} \tag{1.30}$$

$$\boldsymbol{v}^{n+1/2} = \boldsymbol{v}^+ + \frac{q}{m}\boldsymbol{E}^n\frac{\Delta t}{2} \tag{1.31}$$

この計算方法を Buneman-Boris 法という。

速度がわかれば粒子位置 r は速度 v を時間的に積分することにより得られる。

$$x^{n+1} = x^n + v_x^{n+1/2}\Delta t \tag{1.32}$$

1.2.5 相対論効果を考慮した Buneman-Boris 法

相対論効果を考慮した場合の運動方程式は

$$\frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{1.33}$$

$$m = \gamma m_0 \tag{1.34}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{1.35}$$

となる。ここで、$\boldsymbol{u} = \gamma\boldsymbol{v}$ という変数を導入する。すなわち、

$$\boldsymbol{u} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - |\boldsymbol{v}|^2}}\boldsymbol{v} \tag{1.36}$$

と定義される $\boldsymbol{u}$ を用意する。$\boldsymbol{v}$ に書き直すと、

$$\boldsymbol{v} = \frac{c}{\sqrt{c^2 + |\boldsymbol{u}|^2}}\boldsymbol{u} \tag{1.37}$$

となる。これを 1.33 に代入して整理すると、

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \frac{q}{m_0}(\boldsymbol{E} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + |\boldsymbol{u}|^2}}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) \tag{1.38}$$

上式において、修正磁場を次のように定義する。

$$\boldsymbol{B}_u = \frac{c}{\sqrt{c^2 + |\boldsymbol{u}|^2}}\boldsymbol{B} \tag{1.39}$$

そうすると、運動方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \frac{q}{m_0}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}_u) \tag{1.40}$$

となり、$\boldsymbol{u}$ について前述の Bunema-Boris 法を用いて速度更新を行うことができる。つまり、事前に

$$\boldsymbol{u}^{n-1/2} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - |\boldsymbol{v}^{n-1/2}|^2}}\boldsymbol{v}^{n-1/2} \tag{1.41}$$

として $\boldsymbol{v}$ から $\boldsymbol{u}$ へ変換しておき、この $\boldsymbol{u}$ と修正磁場 $\boldsymbol{B}_u$ を用いて Buneman-Boris 法で $\boldsymbol{u}$ を時間更新し、

$$\boldsymbol{v}^{n+1/2} = \frac{c}{\sqrt{c^2 + |\boldsymbol{u}^{n+1/2}|^2}}\boldsymbol{u}^{n+1/2} \tag{1.42}$$

で $\boldsymbol{u}$ から $\boldsymbol{v}$ に戻す。

1.2.6 逆行列

一般性を欠くが、以下のような方法もある。荷電粒子の運動の場合、

$$m\frac{v^{n+1/2} - v^{n-1/2}}{\Delta t} = q\boldsymbol{E}^n + q\frac{v^{n+1/2} + v^{n-1/2}}{2} \times \boldsymbol{B}^n \tag{1.43}$$

と、運動方程式は書かれる。成分で書くと、

$$m\begin{pmatrix} v_x^{n+1/2} - v_x^{n-1/2} \\ v_y^{n+1/2} - v_y^{n-1/2} \\ v_z^{n+1/2} - v_z^{n-1/2} \end{pmatrix}\Delta t = q\begin{pmatrix} E_x^n \\ E_y^n \\ E_z^n \end{pmatrix} + q\frac{1}{2}\begin{pmatrix} v_x^{n+1/2} + v_x^{n-1/2} \\ v_y^{n+1/2} + v_y^{n-1/2} \\ v_z^{n+1/2} + v_z^{n-1/2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x^n \\ B_y^n \\ B_z^n \end{pmatrix} \tag{1.44}$$

これを $\boldsymbol{v^{n+1/2}}$ について解くと、

$$\boldsymbol{v^{n+1/2}} = \boldsymbol{A}(\frac{q}{m}\boldsymbol{E}\Delta t + 2\boldsymbol{v^{n-1/2}}) - \boldsymbol{v^{n-1/2}} \tag{1.45}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} 4 + B_x^2 & B_xB_y + 2B_z & B_zB_x + 2B_y \\ B_xB_y + 2B_z & 4 + B_y^2 & B_yB_z + 2B_x \\ B_zB_x + 2B_y & B_yB_z + 2B_x & 4 + B_z^2 \end{pmatrix} \tag{1.46}$$

$$D = 4 + B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 \tag{1.47}$$

$$B_x = \frac{q}{m}B_x^n\Delta t \tag{1.48}$$

$$B_y = \frac{q}{m}B_y^n\Delta t \tag{1.49}$$

$$B_z = \frac{q}{m}B_z^n\Delta t \tag{1.50}$$

となり、時間を進めることができる。