

プラズマ線形分散関係ソルバー emdisp について

羽田 亨⁽¹⁾、白石岳雄⁽²⁾、関 光弘⁽²⁾

1:九州大学大学院総合理工学研究院流体環境理工学専攻

2:九州大学大学院総合理工学府大気海洋環境システム学専攻

August 10, 2002

要旨：無衝突プラズマ中のプラズマ波動の線形分散関係を数値計算するプログラム **emdisp** の使用方法および計算の背景となる理論の概要について紹介する。このプログラムでは、プラズマに関する各種パラメータ（分布関数、イオン種数など）と波数ベクトル（の組）を入力することにより、対話型操作を通して、複素角周波数（実角周波数および線形成長率）、波動の偏波指数、波動が電磁的/静電的かを表す指数、などの出力を得ることができる。プラズマ分布関数は、ドリフト速度を持ち得るマックスウェル分布の重ね合わせとして表現する。操作の実例を、いくつかの例題を用いて解説する。なお、ここで紹介するプログラムは、「宇宙シミュレーション・ネットラボラトリーシステム開発」(科学技術振興事業団) の一部として整備が行われているものの簡約化されたバージョンである。

1 はじめに

宇宙・天体で起きている様々な興味深い現象を議論する際、これらの環境を満たす媒質である無衝突プラズマ中に、どのような性質をもつどのような線形波動が存在し得るかを知る、つまり線形分散関係を得る、ことは極めて重要な意味を持つ。これは、議論の対象が宇宙・天体プラズマ波動である場合には勿論のこと、それ以外の場合でも、例えば衝撃波、磁気再結合過程、といった一見、線形波動とは関係のなさそうなダイナミックな物理現象においても、その核心的部分で（異常）散逸をまかなっているのがプラズマ波動を媒介とした効果的な粒子拡散であるように、数多くの宇宙・天体現象において、プラズマ波動が本質的な役割を果たしているからである。さらに一般的な立場から見ても、ある物理系の性質を理解するためには、まずその定常状態を議論し、その上で系の微少擾乱に対する反応（線形応答）を求めるのが筋道であるが、これは媒質中の線形波動を求めることに他ならない。

この様に無衝突プラズマ中の線形分散関係を計算する機会は、宇宙・天体プラズマの研究に携わっている限り、かなり頻繁にあるものと思う。しかしその一方、他の数値計算コードの場合と同

様、線形分散関係を計算するプログラム（線形分散関係ソルバー）の汎用バージョンは、少なくとも筆者達の知る限りにおいては、手軽に使える形では世の中に出回っていないようである（実際、過去数年の間に筆者らが複数の研究グループから、我々の使用している線形分散関係ソルバーを使いたいとの依頼があった）。大きな研究組織では、計算機ライブラリーの一部としてプログラムが整備されているところも多くあるのだろうが、宇宙・天体研究者の多くがそうであるように、スタッフ数が数人程度の小さな研究グループでは、むしろ小回りのきくプログラムの方が使い勝手がよいであろう。本稿で紹介するプログラム **emdisp** は、分散関係ソルバーのなかでは必要最小限の機能のみを備える基本的なものだが、今回のワークショップのように、とりあえず数値シミュレーションの結果と照合したい、というような目的には、十分役にたつはずである。また、必要に応じて新しい問題に適応できるよう、プログラムに修正・変更を逐次加えていくことも可能である（利用者からのフィードバックを期待したい）。以下、必要最低限の計算の背景の説明に続き、与えられた条件のプラズマの中に存在する波動の線形分散関係を、具体的な題材を例にとって説明する。

2 計算の背景

ここでは、各種物理量の定義と物理的意味を明確にすることも兼ねて、**emdisp** を使用する際に必要と思われる最低限の理論的なバックグラウンドとして、線形分散関係式を求める過程をごく簡単に振り返っておく。詳細は多くのプラズマ物理の教科書に解説してある（例えば [1], [2], [3]）のでこれらを参照してほしい。

2.1 線形分散関係の導出

プラズマ波動の線形分散関係式を導くために使用する式は、ヴラソフ方程式

$$\frac{\partial f_{\sigma}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{\sigma} + \frac{q_{\sigma}}{m_{\sigma}} (\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_{\sigma}}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (1)$$

およびマクスウェルの方程式

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi \mathbf{j}}{c} = \nabla \times \mathbf{B} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho \quad , \quad (2a, 2b)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3a, 3b)$$

である。ここに、 $f_{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ はプラズマの分布関数、 σ は粒子種、その他の記号は標準的なものである。単位系はガウス単位系を用いている。

3次元空間内に一様にひろがるプラズマを考え（0次量）ここに微少擾乱（1次量）を与える。2次以降のオーダー量は無視できると仮定し（線形近似）さらに1次の擾乱を、空間・時間に関

してフーリエ変換する ($\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$, $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$)。ここに、 $\omega = \omega_r + i\gamma$ は波動の複素角周波数、 ω_r は実角周波数、 γ は線形成長率 (正が不安定)、 $\mathbf{k}$ は波数ベクトルである。

これらの操作により、マックスウェルの方程式 (2a) と (3a) は、屈折率ベクトル $\mathbf{n} = c\mathbf{k}/\omega$ を用いて

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1) + \mathbf{E}_1 = -\frac{4\pi i}{\omega} \mathbf{j}_1 \quad (4)$$

と書ける。ただし磁場の摂動は、 $\mathbf{B}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_1$ によって電場の摂動と関係づけられている。式 (4) の右辺、つまり電流が、電場 $\mathbf{E}_1$ の関数として書ければ式は閉じ、分散関係式が得られる。(4) を導くにあたって (2b), (3b) を使わなくてすんだのは、 $\omega \neq 0$ の波動を考える場合には、(2a), (3a) と電荷保存の式が (2b) と (3b) を含んでいるからである。 $\omega = 0$ の波動 (構造) を考える場合には注意が必要である (例えば エントロピー波)。

一方、ヴラソフ方程式を線形化し、分布関数の 1 次の摂動を粒子の軌道に沿った積分としてあらわすと

$$f_{\sigma 1} = \frac{-q_\sigma}{m_\sigma} \int_{-\infty}^t (\mathbf{E}_1 + \frac{1}{\omega} \mathbf{v} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_1)) \cdot \frac{\partial f_{\sigma 0}}{\partial \mathbf{v}} dt \quad (5)$$

となるが、この積分を実行するためには、ゼロ次オーダーでの粒子の軌道を指定する必要がある。一様・定常な磁場のもとでは、粒子はスパイラル軌道をとるから、これを用いて実際に (5) を評価することができる (ランダウの積分)。それ以外の軌道の場合にでも $f_{\sigma 1}$ が計算できる場合がある。また数値的には、一般的なゼロ次オーダー軌道に対して (5) の積分が計算でき、例えばニュートラルシート近傍でのテアリング不安定性の解析に応用されている)。

分布関数の 1 次摂動がわかれば、電流の 1 次摂動は

$$\mathbf{j}_1 = \sum_{\sigma} q_{\sigma} \int f_{\sigma 1} d\mathbf{v} \equiv \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}_1 \quad (6)$$

により求められる。ここに $\boldsymbol{\sigma}$ は電気伝導度テンソルである。線形波動に対するプラズマの効果は、すべてこの $\boldsymbol{\sigma}$ の中に集約されている。実際、(6) を (フーリエ空間でなく) 実空間で書けば、与えられた摂動電場に対する、非局所的かつ時間の遅れをともなうプラズマの線形応答が摂動電流を作ること示す畳み込み積分となり、直感的である。プラズマの応答 (6) を用いて (4) を書き直せば、

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_1 \equiv \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1) + (1 + \frac{4\pi i}{\omega} \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{E}_1 = 0 \quad (7)$$

となり、これが $\mathbf{E}_1$ に関して自明でない解を持つ条件、

$$\det(\mathbf{D}) \equiv D(\omega, \mathbf{k}) = 0 \quad (8)$$

が線形分散関係である。ここに、 $\mathbf{D}$ は線形分散関係テンソルであり、また (7) にあらわれる $\epsilon \equiv 1 + 4\pi i \boldsymbol{\sigma} / \omega$ を誘電率テンソルと呼ぶ。

2.2 0 次の分布関数

線形分散関係を解くためには、プラズマの 0 次の分布関数を指定する必要がある。人工衛星によって観測された分布関数や、数値実験により得られた分布関数は、任意の形をしているが、これを (5) の積分が評価しやすい関数の重ね合わせとして表わすのが、分布関数の標準的な表現方法である。**emdisp** では分布関数を、ドリフトと温度異方性を持つマックスウェル分布の重ね合わせとして書く。

$$f_{\sigma 0}(v_{\parallel}, v_{\perp}) = \sum_j f_{\sigma 0,j} = \sum_j \frac{n_{\sigma j}}{(2\pi)^{3/2} a_{\sigma \parallel} a_{\sigma \perp}^2} \exp\left(-\frac{(v_{\parallel} - u_{\sigma})^2}{2a_{\sigma \parallel}^2} - \frac{v_{\perp}^2}{2a_{\sigma \perp}^2}\right) \quad (9a)$$

ここに、 $n_{\sigma j}$ は密度、 $a_{\sigma \parallel}^2 = T_{\parallel}/m_{\sigma}$ と $a_{\sigma \perp}^2 = T_{\perp}/m_{\sigma}$ は磁力線に平行および垂直方向の熱速度の 2 乗、 $u_{\sigma j}$ は沿磁力線方向のドリフト速度である。マックスウェル分布の線形重ね合わせとして 0 次分布関数を表現することの利点は、性質がよくわかっていて数値計算の比較的容易な「プラズマ分散関数」を用いて線形分散関係を評価することができるからである。

上式の温度が低い場合の極限として、冷たいプラズマの分布関数、

$$f_{\sigma 0,j} = \frac{n_{\sigma j}}{\pi v_{\perp}} \delta(v_{\parallel} - u_{\sigma}) \delta(v_{\perp}) \quad (9b)$$

および、冷たいリング分布、

$$f_{\sigma 0,j} = \frac{n_{\sigma j}}{\pi v_{\perp}} \delta(v_{\parallel} - u_{\sigma \parallel}) \delta(v_{\perp} - u_{\sigma \perp}) \quad (9c)$$

も扱うことができる (但し、夏の学校バージョンではサポートしていない)。

2.3 計算出力

入力パラメータを与え、与えられた波数ベクトル $\mathbf{k}$ に対して線形分散関係 (8) を解けば、解として ω が得られ、実周波数および線形成長率が求められる。一方、ひとたび ω が求められると、(7) の固有ベクトルとして、 $\mathbf{E}_1$ (の方向) が定まるが、これを用いて波動の固有の性質をあらわす物理量を計算することができる。

いま、一般性を失うことなく、磁場の 0 次成分が z 軸に平行であり、 $\mathbf{k}$ が $x-z$ 平面に含まれるように座標系をとり、求められた $\mathbf{E}_1$ から以下の量を評価する。

- 偏波 (Polarization) : $P = iE_{1,x}/E_{1,y}$
- 電磁静電指数 (EM/ES index) : $S = |\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1 / \mathbf{k} \times \mathbf{E}_1|$

偏波はその定義からわかるように、 $\mathbf{E}_1$ の回転の向きを表している。磁力線のまわりを、電子と同じ向きにまわるか、陽子と同じ向きにまわるか、をそれぞれ「右回り」および「左回り」と定義する。ここで「まわる」と言っているのは、ある空間上の点で観測したベクトルが時間的にど

のように回転するか、のことである。(一方、例えば真空中の光の伝搬に対しては、電子も陽子も関与しないから磁力線の方向に対して定義するのは無意味であるため、波動の伝搬方向に対する電場の回転方向(波動が進むにつれて右ネジの方向に電場が回転するか、あるいは左ネジの方向か)で定義することが普通である)。

また、電磁静電指数を、上の様に定義した。定義の分子および分母をそれぞれゼロとした場合が、純粋な電磁波($\mathbf{k} \perp \mathbf{E}_1$)および純粋な静電波($\mathbf{k} \parallel \mathbf{E}_1$)に対応している。したがって、波動が静電的(例えば音波、プラズマ振動)なほど S は 1 を越えて大きな値をとり、波動が電磁的であるほど(例えば平行伝搬アルフヴェン波) S は 0 に近い値をとる。なお静電波の場合、磁場摂動は $\mathbf{B}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = 0$ であり、また線形分散関係式 (7) は、 $\epsilon \cdot \mathbf{E}_1 = 0$ と書ける。さらに $\mathbf{k} \parallel \mathbf{E}_1$ をもちいてこれを書き直すと静電波の線形分散関係、 $\epsilon_{es}(\omega, \mathbf{k}) \equiv \mathbf{k} \cdot \epsilon \cdot \mathbf{k} = 0$ が得られる。このスカラー方程式は (7) の一部分であり、したがって **emdisp** にも含まれている。

3 計算の手順

3.1 計算手順の概略

与えられたプラズマ条件のもとでの線形分散関係を求めるためには、以下の手続きを踏む。

Step 1. プラズマのパラメータ指定

プラズマに関する情報を粒子種ごとに、分布関数をマックスウェル分布 (9a) で表現する際のパラメータの組(密度、ドリフト速度など)として与え、また磁場の強さをプラズマ周波数とサイクロトロン周波数の比として与える。これにより、線形分散関係 (8) の具体的な表式が決まる。

Step 2. シード解の探索

与えられた波数ベクトル $\mathbf{k}$ に対して、これを満たす ω を見つけることが目標であるが、線形分散関係 (8) は ω に関して著しく非線形なので、解を見つけるための一般的な方法は存在しない。本プログラムでは、期待される解が存在する領域を指定し、 $D(\omega, \mathbf{k})$ の「地図」を描く、あるいはこの領域内でのトライアル・アンド・エラーによる方法により、まずシード解(波数の組に対して解を求めていくための元になる解)を見つける。

Step 3. 分散関係を求める

シード解が見つければ、それを起点として外挿を繰り返すことにより、 ω と $\mathbf{k}$ の組を比較的効率よく求めていくことができる。この際、偏波、電磁静電指数、計算誤差も評価する。

以下、実際に **emdisp** を走らせながら、各手続きを解説する。

3.2 Step 1. プラズマのパラメータ指定

プラズマのパラメータは、データセットを作成し、その中で `namelist` 文を用いて指定する。例えば、データセット `data1` を以下のように作る。

```
cat data1
&input

  ns   = 3,
  pc   = 1.0000d+04,

  ds   = 0.9900d-00,   1.0000d-00,   0.0100d-00,
  el   = 1.0000d+00,  -1.0000d+00,   1.0000d-00,
  rm   = 1.8360d+03,   1.0000d+00,   1.8360d+03,
  aba  = 0.2200d+00,   0.5400d+00,   0.2200d+00,
  abe  = 0.2200d+00,   0.5400d+00,   0.2200d+00,
  ud   = 0.0000d+00,   0.0000d+00,   1.0000d+01,

&end
```

ここでは、電子、プロトン、およびプロトンのビームから構成されるプラズマを考えている。使われているパラメータは、以下の通りである。

変数	意味	規格化
<code>ns</code>	マックスウェル分布の数	---
<code>pc</code>	規格化定数	---
<code>ds(i)</code>	数密度	<code>ds(i)</code> の総和=1
<code>el(i)</code>	電荷	素電荷 = 1
<code>rm(i)</code>	質量	電子 = 1
<code>aba(i)</code>	平行熱速度	$c / \sqrt{pc}$
<code>abe(i)</code>	垂直熱速度	$c / \sqrt{pc}$
<code>ud(i)</code>	ドリフト速度	$c / \sqrt{pc}$

上の例では、プラズマは3つのマックスウェル分布の重ね合わせ（プロトン、電子、プロトンビーム）として表現しているのが、`ns=3` である。`ns` は 20 以下とする。分布数 `ns` と、規格化定数 `pc`（詳細は後述）のあとにならんでいるのが、各マックスウェル分布（添字 `i` で表すことにする）を特徴づけるパラメータ群である。数密度 `ds(i)` は、`i` についての総和が 1 となるように指定する。電荷 `el(i)` は、例えば陽子ならば 1、電子ならば -1 である。これらの 2 つに対して、プラズマの中性条件、つまり `ds(i)*el(i)` の総和が 0 となるようにする。但し、パラメータ入力時の

数値誤差のため、この値が厳密に 0 になるとは限らないので、プログラム内部で、最も数密度の大きい粒子種の数密度を調整することで、中性条件を満たすようにしている。質量 $rm(i)$ は、電子を 1 とし、(現実の) 陽子ならば 1836、あるいは計算機実験で使った値を指定すればよい。平行熱速度 $aba(i)$ 、垂直熱速度 $abe(i)$ 、およびドリフト速度 $ud(i)$ は、(9a) で定義している。

*変数の規格化について

線形分散関係の計算に限らず、計算はなるべく無次元量を用いて行った方が効率も、見通しもよい。しかし、プログラムにデータを渡す際に、少なくとも周波数と速度 (つまり時間と空間) をどのように規格化しているか、を指定する必要がある。例えば、時間は必ず電子のサイクロトロン角周波数、速度は光速を用いる、と決めておけば簡単であるが、実際にはプロトンの時間スケールや MHD 波動の速度スケールなど、指定するパラメータの値が余りに大きくなったり小さくなったりすることを避けるために、**emdisp** では以下のように変数の規格化を行っている。

- ・時間は、データを入力する際の、マックスウェル分布の初めの列の粒子種のサイクロトロン角周波数を基準として、これを用いて規格化する。以下、これを Ω_0 とする。
- ・空間は、考えている問題に都合のよい任意の長さを基準とする。これを L_0 とする。
- ・上の 2 つにより、速度スケールは、 $L_0\Omega_0$ で規格化される。
- ・規格化定数 $PC = c^2/L_0^2\Omega_0^2$ と指定する。

例えば、 Ω_0 としてプロトンのサイクロトロン角周波数 Ω_i を選び、 L_0 として V_A/Ω_i (V_A はアルフヴェン速度) を選ぶと、PC の値は

$$\frac{c^2}{V_A^2} = \frac{\omega_i^2}{\Omega_i^2}(1 + \mu) \sim \frac{\omega_i^2}{\Omega_i^2} \quad (10)$$

となり (ω_i はプロトンプラズマ角周波数、 $\mu = m_e/m_i$ はプロトンと電子の質量比) また、 Ω_0 として電子のサイクロトロン角周波数 Ω_e 、 L_0 として電子の慣性長 c/ω_e を選ぶと、PC の値は

$$\frac{c^2}{L_0^2\Omega_e^2} = \frac{\omega_e^2}{\Omega_e^2} \quad (11)$$

となる。実際には、考えている現象が MHD スケールに近いのか、電子スケールに近いのかを見極めて、上の 2 つのどちらかを選んでおけば良い。

上の入力データを用いて、実際にプログラムを走らせてみる。端末から、

```
./emdi817.exe
```

と入力すると (プログラム名は変更になっている可能性あり)

Step 1: Input plasma parameters

Input the dataset name

と聞いてくるので、先ほどのデータセット名

data1

を入力する。すると、以下の表が表示されるはずである。

```
new ds(1)= 0.990000D+00
```

```
# of species          3
```

```
pc          0.100000D+05
```

species #	1	2	3

density	0.990000D+00	0.100000D+01	0.100000D-01
el charge	0.100000D+01	-0.100000D+01	0.100000D+01
mass	0.183600D+04	0.100000D+01	0.183600D+04
para thml vel	0.333300D+00	0.222600D+02	0.331600D+01
perp thml vel	0.333300D+00	0.222600D+02	0.331600D+01
drift vel	0.000000D+00	0.000000D+00	0.100000D+02
cycl freq	0.100000D+01	-0.183600D+04	0.100000D+01
plsm freq **2	0.100000D+05	0.185455D+08	0.101010D+03
para beta	0.222178D+00	0.545221D+00	0.222139D+00
perp beta	0.222178D+00	0.545221D+00	0.222139D+00
larmor radius	0.333300D+00	0.121242D-01	0.331600D+01

一番上の行は、中性条件に合うように、数密度の調整を（表示されていない桁に対して）行った結果である。以下、入力されたパラメータのエコーが続き、最後の4行は、サイクロトロン角周波数、プラズマ角周波数、平行、垂直方向のベータ値、およびラーマ半径である。

3.3 Step 2. シード解の探索

前節までで、分散方程式 (8) の具体的な関数が定まったので、次にこれを、与えられた k に対して解かなければならない。前に述べたように、まずシード解をもとめ、これをもとにして外挿により (k, ω) の組を計算していく方法をとる。

分散方程式 (8) は、実際には次の 2 つの式からなる連立方程式である。

$$D_r(\omega, \mathbf{k}) = 0 \quad ; \quad D_i(\omega, \mathbf{k}) = 0 \quad (12a, b)$$

ここに、 D_r 、 D_i はそれぞれ D の実数部、虚数部である。解を確実に探すためには、 ω 複素平面上で、 $D_r = 0$ の曲線と $D_i = 0$ の曲線を描き、これらの交点を求めればよい。同じことであるが、 D_r と D_i のそれぞれの正負に応じて、 ω 平面を 4 通りに「色分け」し、4 色が集まるところを探してもよい。関数 D が ω に関して正則であること（例えば $|\omega|$ は D に含まれない）等の性質をうまく利用して、シード解を効率よく見つけることができる。（夏の学校バージョンでは、この機能は省略している）

しかし、高速の計算機が身近に使える今日では、上の方法よりもむしろトライアル・アンド・エラー（もぐらたたき）によって、力まかせでシード解を探すほうが効率がよいようである。これは、解があると推測される ω の領域内のランダムに選んだ点を起点として、逐次近似（ニュートン法など）により、点を移動させ、解に収束させる、というものである。多くの場合、点は領域内にとどまらず、遠くに発散してしまうが、シード解に収束する場合もある。以下、例の続きを示す。

Step 2: find seed root

```
Input wkk(=wave number) and wth(=prop angle)
.1,.1
```

シード解を見つける際の、波数ベクトルを入力している。wkk は波数の絶対値 ($|\mathbf{k}| = k$)、wth は $\mathbf{k}$ と定磁場とのなす角度 (θ) で、単位は度である。

```
Specify the frequency domain for the seed roots.
Input real(o1), real(o2), imag(o1), imag(o2)
0,1,-.02,.1
```

シード解を探す $\omega = \omega_r + i\gamma$ の領域を、 $\text{real}(o1) < \omega_r < \text{real}(o2)$ 、 $\text{imag}(o1) < \gamma < \text{imag}(o2)$ と指定している。

注意： $\text{imag}(o1)$ 、 $\text{imag}(o2)$ を負で、とても小さい値にすると、強減衰モードが多数現れ、計算が困難になることがある（プラズマ粒子の数だけ波動モードの自由度もある！）

多少の時間経過の後、シード解が表示される。

```
... now searching the roots.
```

10 root(s) are found

rt#	real w	imag w	residue	iter	itry

1	-0.200970D+00	-0.880320D-01	0.69349D-14	83	121
2	-0.126941D+00	-0.232688D-08	0.78023D-14	33	4
3	-0.832901D-01	-0.175863D-01	0.56708D-13	21	2
4	0.832902D-01	-0.175856D-01	0.13754D-13	23	1
5	0.116475D+00	-0.800347D-01	0.26313D-11	26	36
6	0.118361D+00	0.105746D-07	0.46397D-14	37	5
7	0.125838D+00	0.111404D+00	0.22495D-14	31	3
8	0.264957D+00	-0.247404D+00	0.10834D-11	68	27
9	0.544976D+00	-0.444636D+00	0.13168D-09	72	28
10	0.846275D+00	-0.131343D+00	0.75697D-11	34	26

上の例では、10個のシード解が見つかった。表の左側より、根の番号、根の実・虚部、計算誤差 ($=|D(\omega, k)|$) である (右の2つはイテレーションに関連した情報を与えている)。これらのシード解をざっと見ると、根番号=7が $\gamma > 0$ の不安定モード、また根番号=2と6が減衰率の小さなモードを与えていることがわかる。

3.4 Step 3. 分散関係を求める

上に引き続いて、正の成長率を持つ7番目の根について、分散関係を求めることにしよう。

Step 3: computation mode ?

1: vary k, fix theta / 2: fix k, var theta

0: back to previous step / 999: end

1

key in the root number for tracing

7

Input wkk1, wkk2, nkk

0.01, 2, 50

emdisp では、分散関係としては、(1) θ を固定しておき、 k を変化させる、(2) k を固定しておき、 θ を変化させる、の2つの計算をするようになっている。上の例では、まず (1) を選択する。

次に、先のステップで求めたシード解の表の中の、どの解について計算を行うか、を指定する。

今の場合 7 を入力する。

最後に、変化させる k の範囲 ($wkk1 < k < wkk2$) と、計算する回数 (nkk) を指定する。

すると、結果が出力される (印刷できるように有効数字をおとして表示している)。

1	0.0100	0.1000	-0.0314	-0.0000	0.0000	-1.0000	0.0012	17
2	0.0506	0.1000	0.0168	0.0903	0.0000	1.0000	0.0012	13
3	0.0912	0.1000	0.1066	0.1154	0.0000	1.0000	0.0012	5
4	0.1318	0.1000	0.1842	0.0883	0.0000	1.0000	0.0012	7
5	0.1724	0.1000	0.2391	0.0588	0.0000	1.0000	0.0012	9
6	0.2131	0.1000	0.2850	0.0386	0.0000	1.0000	0.0012	7
7	0.2537	0.1000	0.3303	0.0263	0.0000	1.0000	0.0012	7

(以下省略)

左から順に、番号、 k 、 θ 、 ω_r 、 γ 、誤差 ($|D|$)、偏波指数 (2.3 章参照)、電磁静電指数 (2.3 章参照)、イテレーション数、である。計算結果は、データセット 'vary-k.txt' に保存される。

次に、伝搬角 θ に対する依存性を調べよう。

Step 3: computation mode ?

1: vary k, fix theta / 2: fix k, var theta

0: back to previous step / 999: end

2

key in the root number for tracing

7

Input wth1, wth2, nth

.1,60,50

1	0.1000	0.1000	0.1258	0.1114	0.0000	1.0000	0.0012	0
2	0.1000	1.3222	0.1258	0.1114	0.0000	0.9995	0.0164	3
3	0.1000	2.5456	0.1256	0.1114	0.0000	0.9980	0.0316	3
4	0.1000	3.7671	0.1254	0.1114	0.0000	0.9957	0.0469	3
5	0.1000	4.9900	0.1251	0.1114	0.0000	0.9925	0.0621	3
6	0.1000	6.2125	0.1247	0.1114	0.0000	0.9883	0.0774	3
7	0.1000	7.4358	0.1242	0.1114	0.0000	0.9833	0.0928	3

今度は、(2)を選び、同じ解(=7)を選択し、そして伝搬角の範囲($wth1 < \theta < wth2$)と計算数(nth)を指定すると、先ほどと同様に結果の表が出力され、また計算結果はデータセット'vary-th.txt'に保存される。

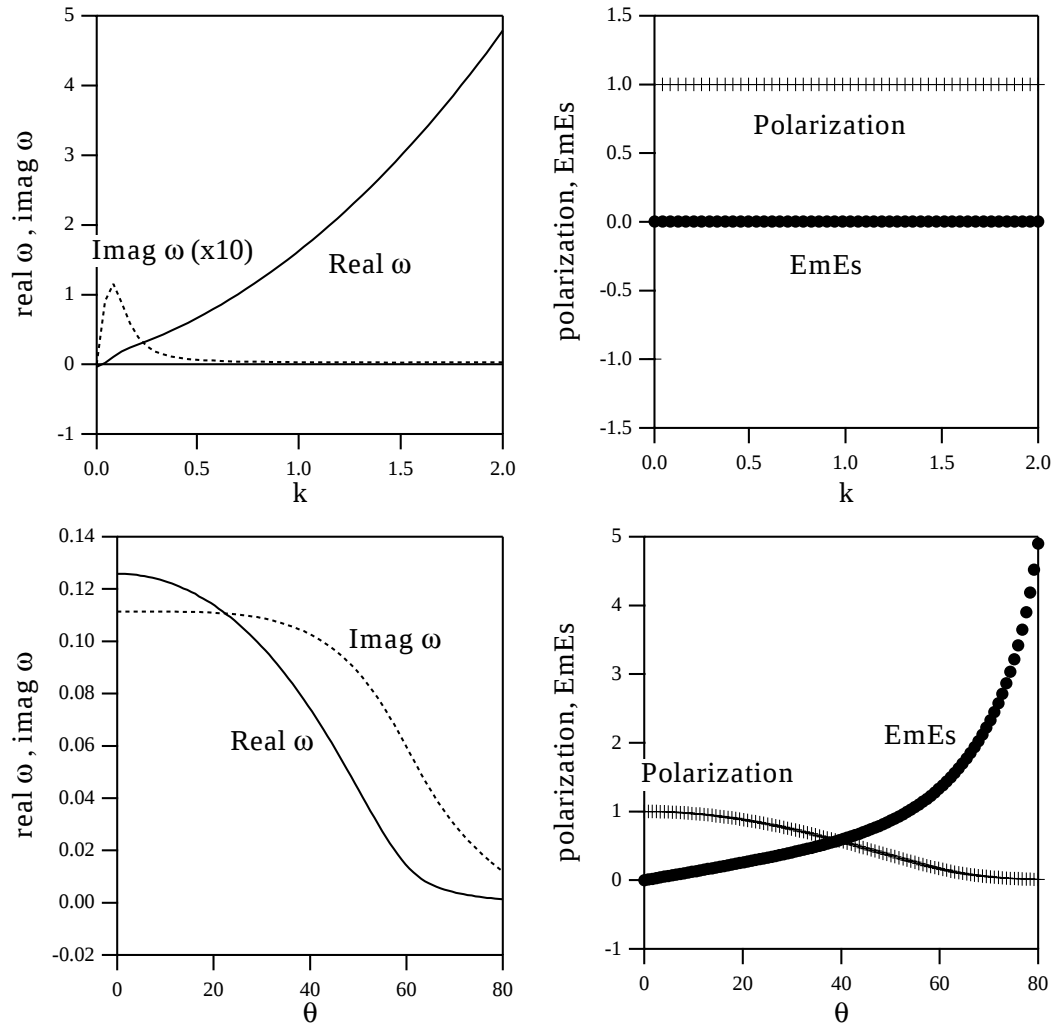


図 1: 計算結果のグラフ。上段は k に対する依存性($\theta = 0.1$), 下段は θ に対する依存性($k = 0.1$), また左側と右側にそれぞれ複素角周波数、偏波指数と電磁静電指数をプロットしている。

4 終わりに：WEB 公開版との相違

ここで紹介したプログラムは、「宇宙シミュレーション・ネットラボラトリーシステム開発」(科学技術振興事業団) の一部として WEB 上での公開を目指して整備が行われているものを、今回の宇宙・天体プラズマ夏の学校での使用のために準備したバージョンである。WEB 公開バージョンには、ここで紹介した機能の他に以下の項目を追加する予定である。

- ・マックスウェル分布以外に、冷たいプラズマ、リング・プラズマなどの分布関数の指定。

- ・トライアル・アンド・エラーによる方法に加え、複素角周波数平面でのマップを描いて効率よくシード解を見つけるルーチン。
- ・WEB ページ上での入出力。
- ・特に、WEB 上で、結果のグラフ出力。

その他、機能の強化、使い勝手の向上をはかっていきたいと考えている。ご意見、ご要望、その他何でも感じたことがあれば、ご連絡いただきたい。

参考文献

- [1] Ichimaru, S., *Basic Principles of Plasma Physics: A Statistical Approach*, Benjamin/Cummings Pub. Co., 1973.
- [2] Akhiezer, A. I., I. A. Akhiezer, R. V. Polovin, A. G. Sitenko, and K. N. Stepanov, *Plasma Electrodynamics, Vol. I. Linear Theory*, Pergamon Press, 1975.
- [3] Miyamoto, K., *Plasma physics for nuclear fusion*, The M.I.T. Press, 1976.