

# 流体・磁気流体方程式の差分解法

松元亮治、富阪幸治、花輪知幸



# 目次

<b>第1章</b>	<b>差分法の基礎</b>	<b>7</b>
1.1	偏微分方程式の型	7
1.2	差分近似	8
1.3	線形スカラー移流方程式の差分解法	9
1.3.1	1次元線形スカラー移流方程式	9
1.3.2	FTCS スキーム	10
1.3.3	FTCS スキームの数値的安定性	12
1.3.4	Lax-Friedrich のスキーム	14
1.3.5	1次精度風上差分法	15
1.3.6	Lax-Wendroff のスキーム	18
1.4	保存形表示と数値流束	20
1.5	Burgers 方程式の数値解法	21
1.6	流束制限関数	24
1.7	TVD スキーム	26
1.8	放物型方程式の差分解法	26
<b>第2章</b>	<b>システム方程式の解法</b>	<b>31</b>
2.1	基礎方程式	31
2.1.1	質量	31
2.1.2	運動量	32
2.1.3	エネルギー	32
2.1.4	磁気流体力学	34
2.1.5	保存形式	35
2.2	円筒座標、球座標	36
2.2.1	1次元球対称	36
2.2.2	2次元軸対称円筒座標	36
2.3	波動	37
2.3.1	線形的气体ダイナミクス	38
2.3.2	Riemann 問題	40
2.3.3	非線形的气体ダイナミクス	41
2.4	衝撃波	43

2.4.1	ランキン・ユゴニオ関係	46
2.4.2	磁気流体力学	47
2.5	衝撃波管問題	47
2.5.1	等温衝撃波	48
2.5.2	等温の場合の Riemann 不変量	48
2.5.3	等温の場合の衝撃波管の解析解	50
2.5.4	断熱気体の衝撃波管問題	52
2.5.5	断熱気体の衝撃波管問題解析解*	54
<b>第3章</b>	<b>流体および磁気流体力学方程式の風上差分</b>	<b>61</b>
3.1	はじめに	61
3.2	Maxwell 方程式の数値解法	63
3.3	Burgers 方程式の復習と Maxwell 方程式の風上数値流束	67
3.4	流体力学方程式の風上差分	68
3.5	磁気流体力学方程式の風上差分化	71
3.6	さらに勉強する人へ	77

# はじめに

流体・磁気流体方程式を差分近似にもとづいて数値的に解くことにより、さまざまな宇宙現象をシミュレートすることができる。このテキストでは、シミュレーションの初心者を対象として差分法の基礎から風上差分にもとづく磁気流体方程式の解法に至るまでを解説した。各章の内容は以下の通りである。

- 1章：差分法の基礎（松元亮治）

線形及び非線形の1変数の波動方程式を例にして差分法の基礎を学ぶ。差分のとりかたや時間きざみの選び方によっては数値的な不安定性が生ずることを示し、安定性のために満たすべき条件について解説する。また、数値的な安定性に優れ、数値振動を起こさない解法として1次精度の風上差分を導入する。2次精度以上の解法では解の単調性が維持されず数値振動が発生することを示し、単調性を維持するための流束制限関数についても解説する。

- 2章：システム方程式の解法（富阪幸治）

流体・磁気流体力学の方程式系にあらわれる2変数以上の非線形連立偏微分方程式の解法について解説する。これらの方程式が波動方程式の集合であることを示し、特性線および特性線に沿って一定に保たれるリーマン不変量について解説する。これらの準備をした上で、初期に圧力、密度などに不連続な分布を持つ気体の時間発展を解析的に求める方法を説明し、この手法を衝撃波管に適用する。

- 3章：流体および磁気流体力学方程式の風上差分（花輪知幸）

システム方程式に対して風上差分を適用する方法について解説する。最初に線形のマックスウェル方程式を例にして4変数の場合の風上差分の方法を説明し、続いて流体力学・磁気流体力学方程式にも風上差分を適用する。流体・磁気流体方程式では特性速度が場所によって変化するため適切な平均の取り方が問題となる。平均量の計算方法の例としてRoe平均についても紹介する。

シミュレーションサマースクールでは、このテキストを用いた講義と、宇宙流体・磁気流体シミュレーションの統合ソフトウェアCANS（Coordinated Astronomical Numerical Softwares）を用いた実習がセットになっている。数値不安定性の発生や衝撃波の伝播など、講義で習った内容を実際にシミュレーションを行って確認することにより、理解が深まるであろう。



# 第1章 差分法の基礎

松元亮治 (千葉大理)

この章では流体・磁気流体方程式を差分法を用いて数値的に解く際に必要になる基礎的事項について解説する。波の伝播をあらわす線形移流方程式や非線形の Burgers 方程式をとりあげ、差分法の数値的な安定性や数値振動について論じる。特に、数値的な安定性に優れ、非物理的な数値振動を起こさない差分法として風上差分法を紹介する。

## 1.1 偏微分方程式の型

流体・磁気流体现象をはじめとする自然現象の多くは、以下の2次元2階偏微分方程式で記述される。

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + f u + g = 0. \quad (1.1)$$

この方程式は以下のように分類できる。

条件	型	例
$b^2 - 4ac > 0$	双曲型	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 波動方程式
$b^2 - 4ac = 0$	放物型	$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 熱伝導方程式
$b^2 - 4ac < 0$	楕円型	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4\pi G\rho$ ポアソン方程式

波動方程式、熱伝導の式、ポアソン方程式は、それぞれ双曲型、放物型、楕円型偏微分方程式の例になっている。以下では主として双曲型方程式を例にして、差分近似にもとづく偏微分方程式の数値解法を解説する。

## 1.2 差分近似

変数  $u$  が空間座標  $x, y$  に依存するという2次元問題を考える。

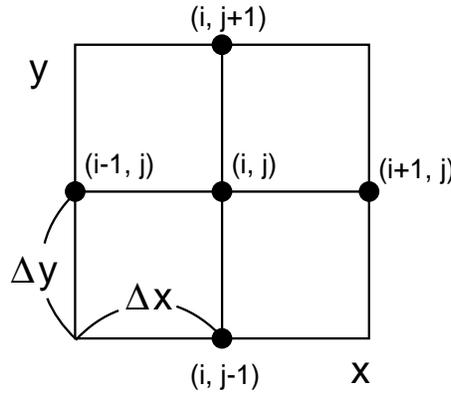


図 1.1: 2次元メッシュの図

2次元空間を図のような格子に区切り、各格子点の座標を  $(x_i, y_j)$  とする。格子間隔は  $x$  方向が  $\Delta x$ 、 $y$  方向が  $\Delta y$  とする。 $x_{i\pm 1} = x_i \pm \Delta x$ 、 $y_{j\pm 1} = y_j \pm \Delta y$  である。以下、格子点番号  $(i, j)$  を用いて  $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$  のように略記する。

着目している点  $(x_i, y_j)$  のまわりでテイラー展開すると、

$$u_{i+1,j} = u(x_i + \Delta x, y_j) = u_{i,j} + \Delta x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + \frac{\Delta x^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i + \dots \quad (1.2)$$

$$u_{i-1,j} = u(x_i - \Delta x, y_j) = u_{i,j} - \Delta x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i - \frac{\Delta x^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i + \dots \quad (1.3)$$

式 (1.2) から式 (1.3) を引くと

$$u_{i+1,j} - u_{i-1,j} = 2\Delta x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + O(\Delta x^3) \quad (1.4)$$

したがって、

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (1.5)$$

すなわち、 $(i, j)$  点における  $u$  の  $x$  方向の微分係数  $(\partial u / \partial x)_i$  が  $\Delta x^2$  の誤差を含む近似のもとで ( $\Delta x$  について2次の精度で) 以下のように求まる

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (1.6)$$

これを中心差分の式と言う。

同様に、 $\Delta x$  について1次の精度で以下の差分近似式が得られる。

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \quad (\text{前進差分}) \quad (1.7)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} \quad (\text{後退差分}) \quad (1.8)$$

式(1.2)と式(1.3)を加えると

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} = 2u_{i,j} + \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + O(\Delta x^4) \quad (1.9)$$

したがって、

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (1.10)$$

これより、 $u$  の  $x$  に関する2階微分の係数  $(\partial^2 u / \partial x^2)_i$  を  $\Delta x$  について2次の精度で以下のように近似することができる

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad (1.11)$$

同様に、

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_j = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} \quad (1.12)$$

## 1.3 線形スカラー移流方程式の差分法

### 1.3.1 1次元線形スカラー移流方程式

流体・磁気流体方程式の本質は波の伝播にある。この部分だけを取り出して次のような方程式を考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.13)$$

ただし、 $c$  は定数で  $c > 0$  とする。この方程式は、スカラー量  $u$  の空間分布が、一定の速度  $c$  で伝播することをあらわす波動方程式である。

方程式(1.13)の厳密解は

$$u(x, t) = u(x - ct, 0) \quad (1.14)$$

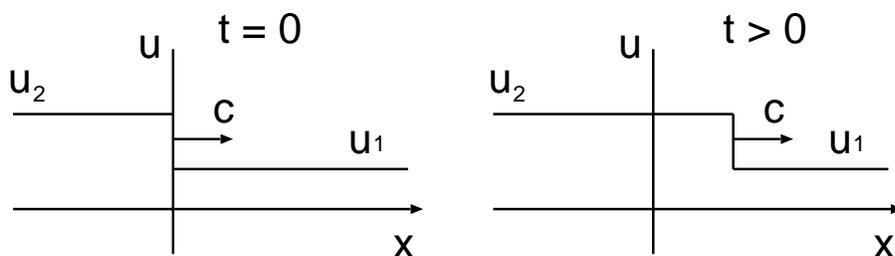


図 1.2: 1次元スカラー移流問題の初期条件と時間発展

である。これは、時刻  $t > 0$  におけるスカラー量  $u$  のプロフィールは  $t = 0$  のスカラー量  $u$  のプロフィールが形を保って  $ct$  だけ平行移動した形になることをあらわす。

いま、図 1.2 のように初期に  $x \geq 0$  で  $u = u_1$ 、 $x < 0$  で  $u = u_2$  のように  $x = 0$  で不連続な分布を考えてみると  $t > 0$  での厳密解は右図のような形になる。

### 1.3.2 FTCS スキーム

1次元線形スカラー移流方程式 (1.13) を時間について現在の時刻  $t_n$  と  $\Delta t$  後の時刻  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  の間で前進差分、空間については中心差分をとって差分化すると次式を得る。ここで、 $u_j^n = u(x_j, t_n)$  である。

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (1.15)$$

このような差分のとり方を FTCS スキーム (Forward in Time and Centered Difference in Space) と言う。これを整理すると、

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}\nu(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (1.16)$$

ここで、 $\nu$  は次式で定義される数であり、クーラン数 と呼ばれる。

$$\nu \equiv c \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (1.17)$$

式 (1.16) の右辺は時刻  $t_n$  での値、左辺は時刻  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  での値だけで書けている。したがって、時刻  $t_n$  での各格子点での値がわかっているならば直ちに 1 タイムステップ後 ( $t_{n+1}$ ) の各格子点での値を計算することができる。このような解法のことを 陽解法 と言う。FTCS スキームにおける変数の依存関係を図示すると図 1.3 のようになる。矢印は時刻  $t_{n+1}$  の白丸の点の値を計算するのに時刻  $t_n$  の黒丸の格子点の値を使うことを示す。

1次元波動伝播のシミュレーションを行うアルゴリズムは一般に次のようになる。

1. 各メッシュ点の座標値  $x_j$  をセットする (メッシュ生成)

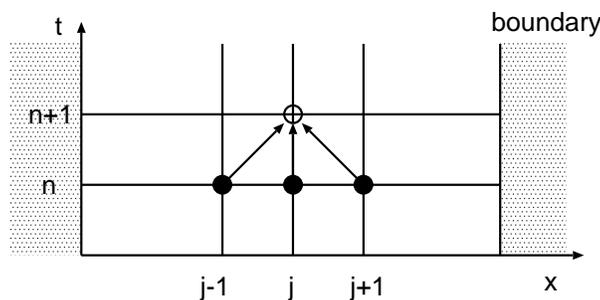


図 1.3: FTCS スキームにおける変数の依存関係

2. 各メッシュ点の初期値  $u_j(t=0)$  をセットする (初期条件)
3. 時刻  $t$  が、あらかじめ決められた終了時刻  $t_{\text{end}}$  に達するまで、あるいは決められた回数だけ、以下を繰り返す
  - (a) 左右の境界を除く各格子点について  $\Delta t$  後の値を差分式にもとづいて計算する (時間積分)。たとえば FTCS スキームの場合には計算式 (1.16) を用いる。
  - (b) 左右の境界の値を境界条件から決める。たとえば隣接点と同じ値を入れる (境界条件の適用)
  - (c) 時刻を  $\Delta t$  だけ進める

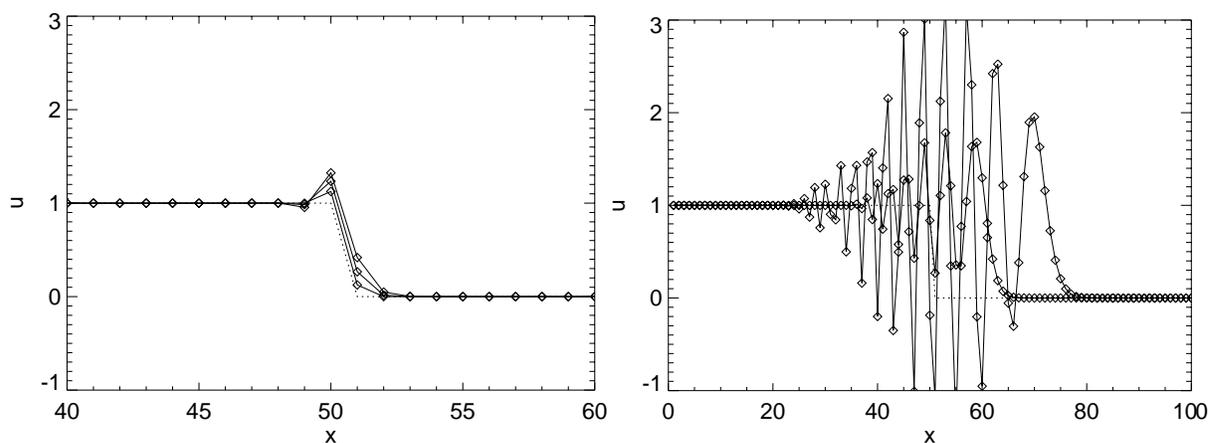


図 1.4: 左図 : FTCS スキームで、初期値として、 $j = 1, \dots, 50$  に対して  $u = 1$ 、 $j = 51, \dots, 100$  に対して  $u = 0$  とし、クーラン数  $\nu = c\Delta t/\Delta x = 0.25$  で 1 ステップ、2 ステップ、3 ステップ 計算したときの  $u$  をプロットした図。右図 : 50 ステップ、100 ステップ計算したときの  $u$  をプロットした図。

FTCS スキームを用いて 1 次元線形スカラー移流方程式を解いた結果を図 1.4 に示す。波は形を保って伝わらずに振動が発生してしまっている。この振動は物理的な理由で発生している

のではなく、数値的不安定性によるものである。なぜこのような数値振動が発生してしまうのか、次節で説明する。

### 1.3.3 FTCSスキームの数値的安定性

#### Von Neumann の安定性解析

前節の FTCS スキームによって 1 次元波動伝播のシミュレーションを行ってみると解が激しく振動して数値的に不安定になってしまうことがわかった (図 1.4)。この不安定性の原因を調べるために

$$u_j^n = \cos(j\theta) \quad (1.18)$$

を差分式 (1.16) に代入してみる。ここで  $\theta$  は、波の波数を  $k$  として  $\theta = k\Delta x$  であらわされる量である。たとえば  $\theta = \pi$  のとき  $u_j^n$  は図 1.5 左図のように 2 メッシュで 1 波長の波、 $\theta = \pi/3$  のときは右図のように 6 メッシュで 1 波長の波をあらわす。

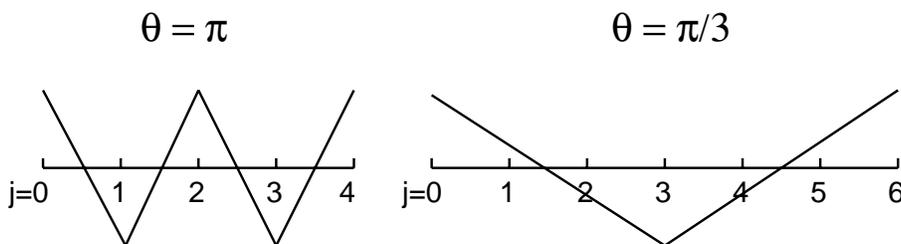


図 1.5: メッシュ番号を  $j$  としたときの  $u_j^n = \cos(j\theta)$  のプロフィール。左図:  $\theta = \pi$  の場合。右図:  $\theta = \pi/3$  の場合。

その結果は

$$u_j^{n+1} = \cos(j\theta) + \nu \sin\theta \sin(j\theta) \quad (1.19)$$

これをもう一度差分式に代入すると

$$u_j^{n+2} = (1 - \nu^2 \sin^2\theta) \cos(j\theta) + 2\nu \sin\theta \sin(j\theta) \quad (1.20)$$

$$= \operatorname{Re} \left[ (1 - i\nu \sin\theta)^2 e^{ij\theta} \right] \quad (1.21)$$

である。ここで、 $i$  は虚数単位、 $\operatorname{Re}$  は実部をとることをあらわす。以上からわかるように、

$$u_j^{n+k} = \operatorname{Re} \left[ (1 - i\nu \sin\theta)^k e^{ij\theta} \right] \quad (1.22)$$

が成り立つ。

差分法 (差分スキーム) の数値的安定性を導くひとつの方法として、式 (1.18) を複素数に拡張した

$$u_j^n = g^n e^{ij\theta} \quad (1.23)$$

を差分式に代入して複素増幅率  $g$  を求め、1 タイムステップ間の振幅の増幅率  $|g| \leq 1$  となる条件を求める方法がある。これを Von Neumann の安定性解析と言う。

$u_j^n = g^n \exp(ij\theta)$  を FTCS 差分式に代入すると

$$g = 1 - \frac{1}{2}\nu(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \quad (1.24)$$

$$= 1 - i\nu\sin\theta \quad (1.25)$$

したがって

$$|g|^2 = 1 + \nu^2 \sin^2\theta \geq 1 \quad (1.26)$$

以上の結果より、 $\theta = 0$  の場合を除いて FTCS スキームは常に不安定になる。

### テイラー展開による方法

この節は最初に読む際には読み飛ばしてもかまわない。

差分化した式にテイラー展開を適用して差分式が満たす偏微分方程式を導くことによって、FTCS スキームが数値的に不安定であることを示すことができる。 $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ 、 $x_{j\pm 1} = x_j \pm \Delta x$  を用いると、

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t^2 + \dots \quad (1.27)$$

$$u_{j+1}^n = u_j^n + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Delta x^3 + \dots \quad (1.28)$$

$$u_{j-1}^n = u_j^n - \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Delta x^3 + \dots \quad (1.29)$$

FTCS スキームの差分式

$$u_j^{n+1} - u_j^n = -\frac{1}{2}\nu(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (1.30)$$

の左辺に (1.27)、右辺に (1.28)、(1.29) を代入すると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t^2 = -\nu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Delta x^3 + \dots \right) \quad (1.31)$$

これを整理すると

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t - \frac{c}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Delta x^2 + \dots \quad (1.32)$$

ここで、解くべき偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.33)$$

より

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.34)$$

であることを用いると

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta t - \frac{c}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Delta x^2 + \dots \quad (1.35)$$

右辺が差分化によって新たに加わった項である。右辺第1項は負の拡散係数を持つ拡散項になっている。「正の拡散」は物理量の値のピークをなまらせる働きがあるが、「負の拡散」では物理量が周囲よりもわずかに高い値を持つ部分があるとこのピークがどんどん大きくなるという不安定性を生ずる。

よって、テイラー展開法からもスカラー移流方程式の FTCS スキームは数值的に不安定であることがわかる。

### 1.3.4 Lax-Friedrich のスキーム

この方法では FTCS スキームの右辺の  $u_j^n$  を  $(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)/2$  で置き換え、以下のように差分化する。

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{\nu}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (1.36)$$

$u_j^n = g^n \exp(ij\theta)$  を代入して増幅率  $g$  を求めると

$$g = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) - \frac{1}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \quad (1.37)$$

$$= \cos\theta - i\nu\sin\theta \quad (1.38)$$

したがって

$$|g|^2 = \cos^2\theta + \nu^2\sin^2\theta \quad (1.39)$$

図 1.6 に増幅率  $|g|$  を  $\theta$  の関数として極座標  $(g, \theta)$  で示す。Lax-Friedrich のスキームでは、クーラン数  $\nu = c\Delta t/\Delta x$  が  $|\nu| \leq 1$  を満たす場合、安定に計算を進めることができる。この条件のことを Courant, Friedrich, Lewy 条件 (CFL 条件あるいはクーラン条件) と言う。

クーラン条件の意味を考えてみよう。差分式 (1.36) を書き換えると以下の式を得る。

$$u_j^{n+1} = \frac{1-\nu}{2}u_{j+1}^n + \frac{1+\nu}{2}u_{j-1}^n \quad (1.40)$$

クーラン条件  $|\nu| \leq 1$  が満たされている場合、時刻  $t = t_{n+1}$  の値  $u_j^{n+1}$  は  $t = t_n$  の  $j-1$  点の値  $u_{j-1}^n$  と  $j+1$  点の値  $u_{j+1}^n$  の内挿値になっている。

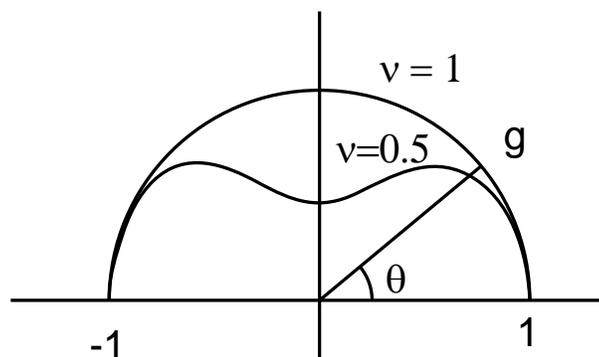


図 1.6: Lax-Friedrich スキームの場合の増幅率

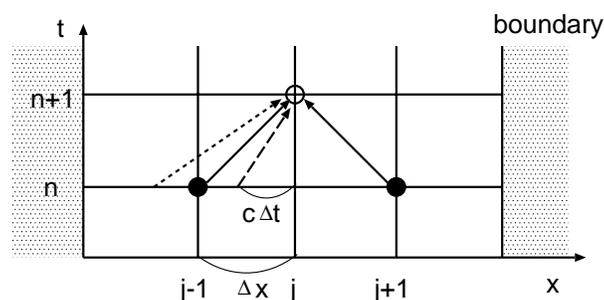
図 1.7: Lax-Friedrich スキームにおける依存関係。破線と点線はそれぞれ  $\nu < 1$ 、 $\nu > 1$  の場合の波の伝播を示す。

図 1.7 に Lax-Friedrich スキームにおける変数の依存関係を示す。実線は時刻  $t = t_{n+1}$  の白丸の格子点の値を計算する際に用いられる時刻  $t = t_n$  の格子点、破線は  $\nu = c\Delta t/\Delta x < 1$  の場合、点線は  $\nu > 1$  の場合の波の伝播を示す。

クーラン条件は  $|c|\Delta t < \Delta x$ 、すなわち時間間隔  $\Delta t$  の間に波が 1 メッシュ以上伝わってはいけないことを意味する。 $u_j^{n+1}$  は  $u_{j-1}^n$  と  $u_{j+1}^n$  だけから計算されるが、時間間隔が  $\Delta t > \Delta x/|c|$  となると  $x_{j-1} \leq x \leq x_{j+1}$  より外側からも情報が伝わってくるため計算を安定に進めることができなくなるのである。

図 1.8 に Lax-Friedrich スキームを用いて 1 次元線形スカラー移流方程式の解を求めた結果を示す。数値振動のない解が得られている。Lax-Friedrich スキームの欠点は数値散逸が大きく、不連続面が時間とともになまってしまうことである。

### 1.3.5 1 次精度風上差分法

図 1.9 のように波が正の方向に伝わっている場合を考える。このとき、 $j$  点での空間微分を、 $j$  点と風上にあたる  $j-1$  点の間の差分で近似する方法が風上差分である。

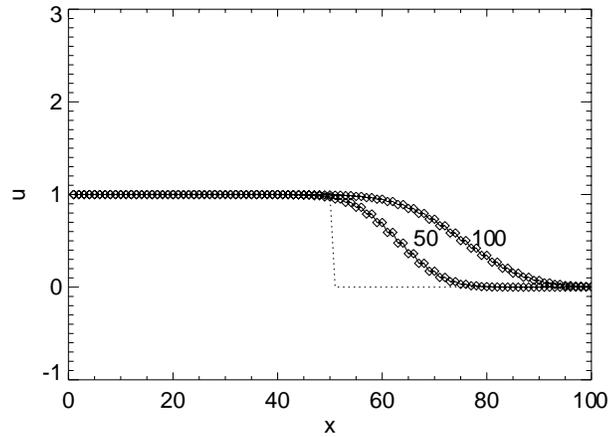


図 1.8: Lax-Friedrich スキームを用いた 1 次元線形スカラー移流問題のシミュレーション結果。クーラン数  $\nu = 0.25$  で 50 ステップ、100 ステップ計算した結果を示す。

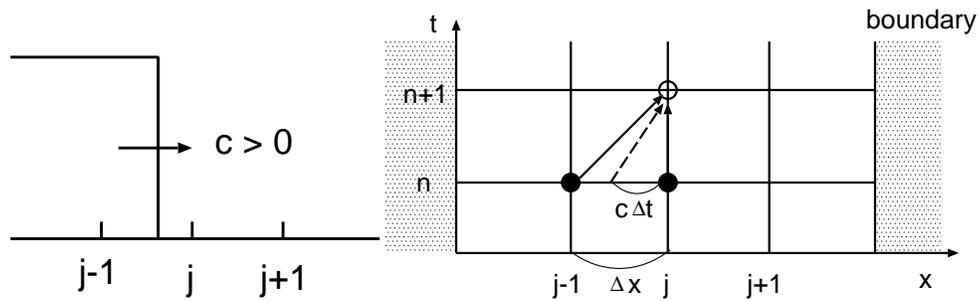


図 1.9: 左図：右方向に伝わる波、右図：1 次精度風上差分における依存関係。破線は波による情報の伝達を示す。

1 次元スカラー移流方程式を時間については前進差分、空間については風上差分として差分化すると、 $c > 0$  の場合、以下の差分式を得る。

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (1.41)$$

したがって

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n) \quad (1.42)$$

図 1.9 右図に 1 次精度風上差分における変数の依存関係を示す。黒丸は時刻  $t_{n+1}$  の白丸の格子点の値を計算する際に用いられる時刻  $t_n$  の格子点、破線は時刻  $t_{n+1}$  に白丸の格子点に到達する波の伝播を示す。

増幅率は

$$g = 1 - \nu(1 - e^{-i\theta}) \quad (1.43)$$

$$= (1 - \nu + \nu \cos \theta) - i\nu \sin \theta \quad (1.44)$$

したがって

$$|g|^2 = (1 - \nu + \nu \cos \theta)^2 + \nu^2 \sin^2 \theta \quad (1.45)$$

$$= 1 - 2\nu(1 - \nu)(1 - \cos \theta) \quad (1.46)$$

これより、 $0 \leq \nu \leq 1$  の場合、任意の  $\theta$  について  $|g| \leq 1$  であり、安定であることがわかる。

風上差分の差分式 (1.42) は次のようにも書ける。

$$u_j^{n+1} = (1 - \nu)u_j^n + \nu u_{j-1}^n. \quad (1.47)$$

クーラン条件  $0 \leq \nu \leq 1$  が満たされている場合、 $u_j^{n+1}$  は時刻  $t = t_{n+1}$  に  $j$  番目の格子点に到達する波の  $t = t_n$  での位置 (図 1.9 の破線矢印の出発点) における値  $u(x_j - c\Delta t, t_n)$  を  $u_{j-1}^n$  と  $u_j^n$  から線形内挿した値になっている。

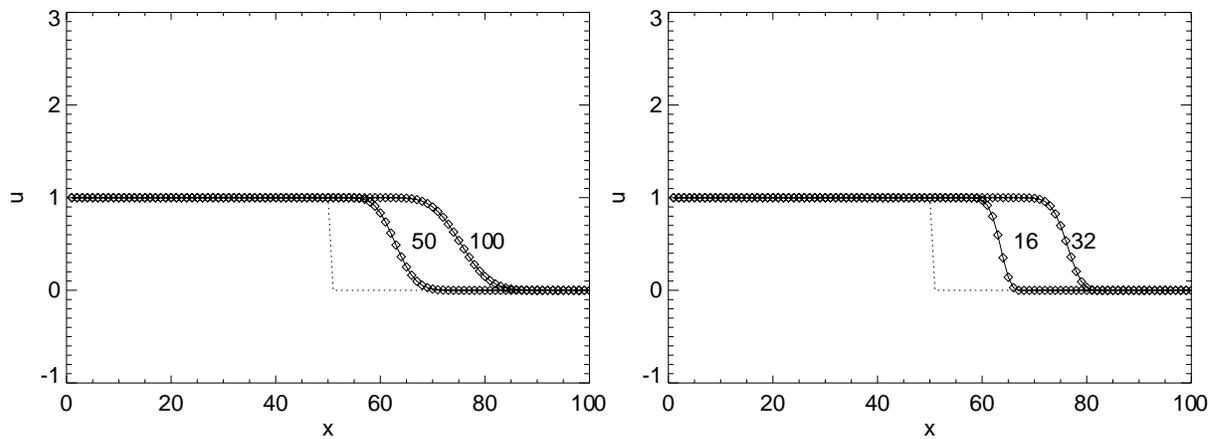


図 1.10: 1 次精度風上差分法を用いた 1 次元線形スカラー移流問題のシミュレーション結果。左: クーラン数  $\nu = 0.25$  で 50 ステップ、100 ステップ計算した結果。右:  $\nu = 0.80$  で 16 ステップ、32 ステップ計算した結果。

図 1.10 に 1 次精度風上差分法を用いたシミュレーション結果を示す。

### 練習問題

- クーラン数  $\nu$  が 1, 0.75, 0.5 の場合について 1 次精度風上差分の増幅率  $|g|$  を位相  $\theta$  の関数として求め、極座標  $(|g|, \theta)$  でプロットせよ。
- 1 次精度風上差分法の差分式 (1.42) にテイラー展開を適用することによって、以下の偏微分方程式が得られることを示せ。右辺第 1 項が拡散項であることに注意して、クーラン条件を導け。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} c \Delta x (1 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{6} c (\Delta x)^2 (2\nu^2 - 3\nu + 1) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dots \quad (1.48)$$

### 1.3.6 Lax-Wendroff のスキーム

Lax-Wendroff スキームはテイラー展開にもとづく差分法であり、以下のようにして導かれる。

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\Delta t^3) \quad (1.49)$$

右辺第2項、第3項に  $\partial u / \partial t = -c \partial u / \partial x$ 、 $\partial^2 u / \partial t^2 = c^2 \partial^2 u / \partial x^2$  を代入すると

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c \Delta t \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} c^2 \Delta t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta t^3) \quad (1.50)$$

空間微分  $\partial u / \partial x$ 、 $\partial^2 u / \partial x^2$  をそれぞれ中心差分で近似すると

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2} c \Delta t \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} + \frac{1}{2} c^2 \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (1.51)$$

これが Lax-Wendroff スキームである。以上の導出過程からわかるように、Lax-Wendroff スキームは空間、時間についていずれも2次精度の解法になっている。

Lax-Wendroff スキームの安定性を von Neumann の方法で調べてみる。増幅率は

$$g = 1 - \frac{\nu}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) + \frac{\nu^2}{2}(e^{i\theta} - 2 + e^{-i\theta}) \quad (1.52)$$

$$= 1 - i\nu \sin\theta + \nu^2 \cos\theta - \nu^2 \quad (1.53)$$

したがって、

$$|g|^2 = [1 - \nu^2(1 - \cos\theta)]^2 + \nu^2 \sin^2\theta \quad (1.54)$$

$$= 1 - 2\nu^2(1 - \nu^2)(1 - \cos\theta) \quad (1.55)$$

これより、 $|\nu| \leq 1$  であれば任意の  $\theta$  について  $|g| \leq 1$  であり、安定であることがわかる。

1次元スカラー方程式の場合、Lax-Wendroff スキームは以下のように2段階に分けたスキームと同等である。この方法を 2段階 Lax-Wendroff 法 と呼ぶ。

$$u_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{u_{j+1}^n + u_j^n}{2} - \frac{1}{2} c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n) \quad (1.56)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j-1/2}^{n+1/2}) \quad (1.57)$$

これを図示すると図 1.11 のようになる。

図 1.12 に Lax-Wendroff 法を用いて1次元線形スカラー移流方程式の数値解を求めた結果を示す。

Lax-Wendroff 法は空間、時間についていずれも2次精度の方法であるが、不連続面近傍で数値振動を生じるという欠点を持つ。これに関して、以下の定理が知られている。

#### Godunov の定理

1次元スカラー移流方程式  $\partial u / \partial t + c \partial u / \partial x = 0$  に対して、

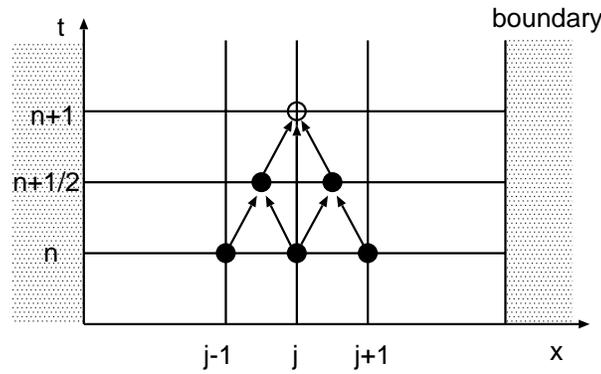


図 1.11: 2 段階 Lax-Wendroff スキームにおける依存関係。第一段階で時刻  $t_n$  における格子点  $j-1$ 、 $j$ 、 $j+1$  の値から時刻  $t_{n+1/2}$  における格子点  $j-1/2$ 、 $j+1/2$  の値が計算される。第二段階ではこれらの点の値を用いて時刻  $t_{n+1}$  の白丸の格子点の値が求まる。

$$u_j^{n+1} = \sum_k a_k u_{j+k}^n \quad (1.58)$$

の形の 2 次精度以上の精度を持つどのようなスキームも解の単調性を維持することはできない。

ここで、「解の単調性を維持する」とは、時刻  $t_n$  におけるプロフィール  $u(x, t_n)$  が  $x$  に関して単調増加または単調減少する関数であるならば時刻  $t_{n+1}$  における関数  $u(x, t_{n+1})$  も単調増加または単調減少関数でなければならないことを意味する。たとえば 1 次精度風上差分の場合、 $0 \leq \nu \leq 1$  なら  $u_j^{n+1}$  は必ず  $u_{j-1}^n$  と  $u_j^n$  の間の値をとるため、もしも  $u_{j-1}^n \leq u_j^n \leq u_{j+1}^n$  なら  $u_j^{n+1} \leq u_{j+1}^{n+1}$  となり、単調性が維持される。Godunov の定理の証明については、たとえば藤井 (1994) を参照されたい。

数値振動を抑える方法には以下のものがある。

- 人工粘性を加える

粘性係数を  $\kappa$  として、

$$\tilde{u}_j^{n+1} = u_j^{n+1} + \kappa \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (1.59)$$

とする。

拡散係数  $\kappa$  は、たとえば以下のように不連続面付近で大きな値をとるように決める。 $Q_v$  はパラメータである。

$$\kappa_{j+1/2} = Q_v \Delta x |u_{j+1}^n - u_j^n| \quad (1.60)$$

- 流束制限関数を用いる

これについては後述する。

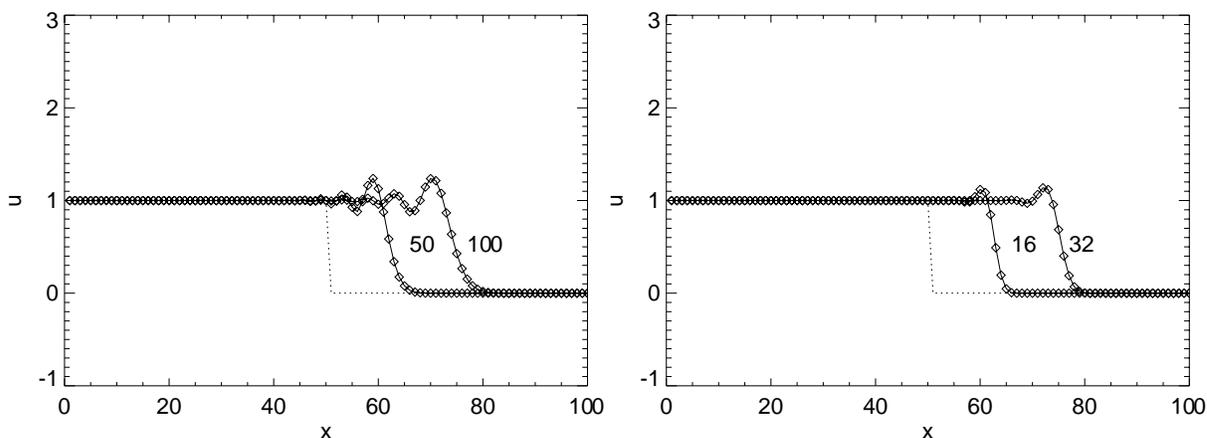


図 1.12: 2 段階 Lax-Wendroff 法による 1 次元線形スカラー移流方程式のシミュレーション結果。左図: クーラン数  $\nu = 0.25$  で 50 ステップ、100 ステップ計算した結果。右図: クーラン数  $\nu = 0.80$  で 16 ステップ、32 ステップ計算した結果。

## 1.4 保存形表示と数値流束

1 次元スカラー移流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.61)$$

を以下の形に変形する

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (1.62)$$

ここで、

$$f = cu \quad (1.63)$$

は流束をあらわす。式 (1.62) の形を保存形と呼ぶ。

保存形式の物理的意味を考えるために、図 1.13 に四角で囲って示した領域 ( $x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2}$ ) における保存量  $u$  の時間変化を求めてみよう。方程式 (1.62) を  $x = x_{j-1/2}$  から  $x = x_{j+1/2}$  まで積分すると次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u dx + f(x_{j+1/2}) - f(x_{j-1/2}) = 0. \quad (1.64)$$

したがって、保存量  $u$  の積分量

$$u_j^n = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t_n) dx \quad (1.65)$$

の時間変化は、この時間の間に左右の境界  $x_{j\pm 1/2}$  を通って出入りする流束  $f_{j\pm 1/2}$  の差に等しい。これより次式を得る。

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n) \quad (1.66)$$

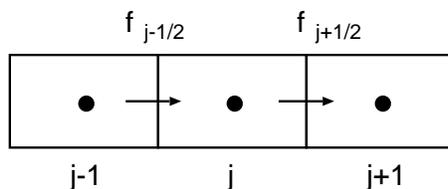


図 1.13: メッシュ点とメッシュ境界を通して出入りする流束の関係

差分式 (1.66) は保存則を厳密に満たす。これが保存形式を用いる利点である。

メッシュ境界の流束  $f_{j\pm 1/2}^n$  は各メッシュ点での流束から近似的に計算することができる。これを 数値流束 と言い、 $\tilde{f}_{j\pm 1/2}^n$  であらわす。各種差分スキームの差分式から数値流束を求めると以下ようになる。

- FTCS

$$\tilde{f}_{j+1/2}^n = \frac{1}{2}(f_{j+1}^n + f_j^n) \quad (1.67)$$

- Lax-Friedrich

$$\tilde{f}_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{1}{\nu}\right) f_{j+1}^n + \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) f_j^n \right] \quad (1.68)$$

- Upwind (風上差分)

$$\tilde{f}_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} \left[ (f_{j+1}^n + f_j^n) - |c|(u_{j+1}^n - u_j^n) \right] \quad (1.69)$$

この式は、 $c > 0$  の場合は  $\tilde{f}_{j+1/2}^n = f_j^n$ 、 $c < 0$  の場合は  $\tilde{f}_{j+1/2}^n = f_{j+1}^n$  と一致する。

- Lax-Wendroff

$$\tilde{f}_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} \left[ (1 - \nu) f_{j+1}^n + (1 + \nu) f_j^n \right] \quad (1.70)$$

## 1.5 Burgers 方程式の数値解法

ここまでは、移流の速さ  $c$  が一定の場合の 1 次元線形スカラー移流方程式を扱ってきた。本節では、以下のような 非線形 波動方程式を差分近似によって解くことを考える。これは、非粘性の場合の Burgers 方程式である。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.71)$$

この方程式は流線に沿うラグランジュ微分  $d/dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial x$  を用いると次のように表現できる。

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad (1.72)$$

粒子的な描像に立てば、この方程式は力を受けていない粒子の運動を記述しており、その解はもちろん  $u = \text{一定}$  である。初期速度分布が正弦波の場合、図 1.14 に示すように、振幅が正の領域は  $+x$  方向に、負の領域は  $-x$  方向に移動してしまい、波が突っ立ち、有限の時刻で後からきた粒子が前の粒子に追いついてしまう。連続系では空間の 1 点で速度が多価になることはできないため、このような場合に解に不連続が生じる。

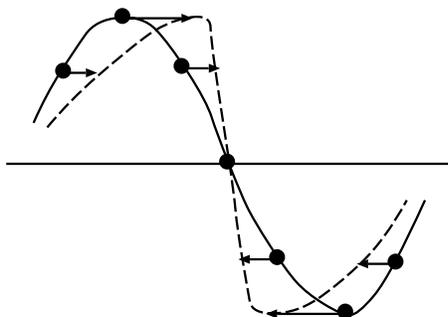


図 1.14: Burgers 方程式の解の様子。ある有限の時刻で後ろからきた粒子が前の粒子に追いつく。

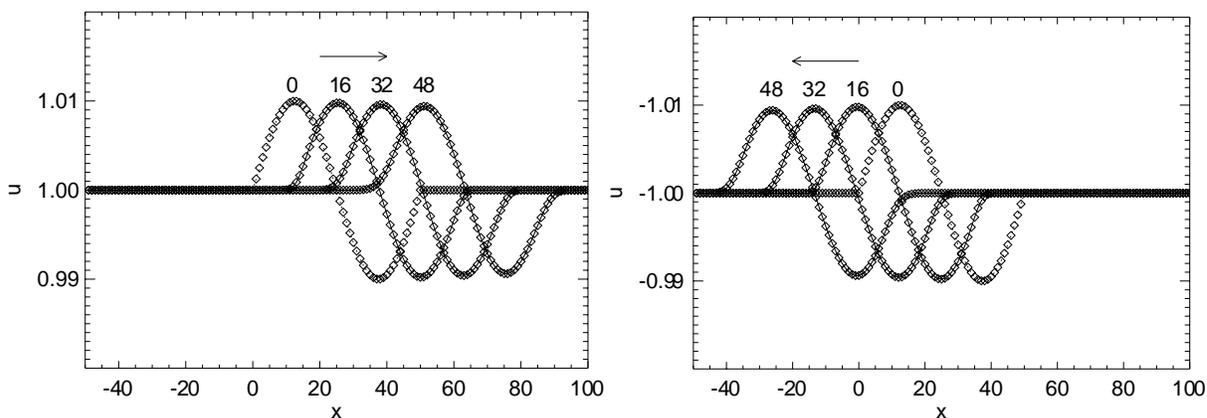


図 1.15: Burgers 方程式を 1 次精度風上差分法で解いた結果の例。左: 初期に  $u > 0$  の場合。右: 初期に  $u < 0$  の場合。図中の数字は時間ステップ数。時間きざみは  $\Delta t/\Delta x = 0.8$  とした。

Burgers 方程式を差分法によって解くため、方程式をまず、以下のような保存系に変形する。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad (1.73)$$

これは、流束  $f(x)$  が  $f(x) = u^2/2$  の場合に相当し、各種差分スキームを適用することができる。たとえば1次精度の風上差分法を適用する場合、線形スカラー方程式で移流の速さ  $c$  が一定である場合には  $c > 0$  のとき  $f_{j+1/2}^n = f_j^n$  であったことに注意し、メッシュ境界の  $j + 1/2$  点での速さを  $(u_j(t) + u_{j+1}(t))/2$  で近似すると、

- $u_{j+1}(t) + u_j(t) > 0$  のとき、 $f_{j+1/2}^n = f_j^n = |u_j(t)|^2/2$

- $u_{j+1}(t) + u_j(t) \leq 0$  のとき、 $f_{j+1/2}^n = f_{j+1}^n = |u_{j+1}(t)|^2/2$

図 1.15 に初期に  $u(x) = 1 + \epsilon \sin(kx)$  ( $\epsilon = 0.01, 0 \leq kx \leq 2\pi$ ) のような速度分布を与えた場合の Burgers 方程式の解を1次精度の風上差分法で計算した結果を示す。図 1.15 左図の場合、初期に  $u \sim 1$  であることから予想できるように非線形効果が小さい間の解は波の速さが  $c = 1$  の場合の線形スカラー移流方程式の解とほぼ一致し、波はほぼその形を保ちながら右側に伝わっていく。図 1.15 右図では初期に  $u \sim -1$  であり、波は左に伝わる。

非線形性が強くなる場合の Burgers 方程式の数値解の例を図 1.16 に示す。この例では初期に  $u(x) = 1 + 0.1\sin(kx)$  のような速度分布を与え、その後の時間発展を1次精度の風上差分法によって解いた。Burgers 方程式の非線形項  $u\partial u/\partial x$  の効果により波がしだいに突っ立ち、不連続(衝撃波)が形成されることがわかる。

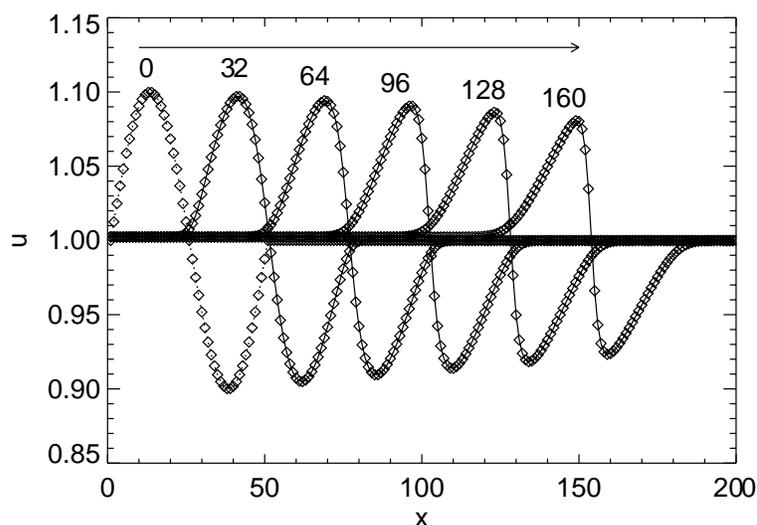


図 1.16: 初期に  $u(x) = 1 + 0.1\sin(kx)$  の速度分布から始めた場合の Burgers 方程式の数値解。図中の数字は時間ステップ数。1次精度風上差分法で時間きざみは  $\Delta t/\Delta x = 0.8$  とした。

## 1.6 流束制限関数

以上、線形スカラー移流方程式と Burgers 方程式を例にして差分解法について解説してきた。1次精度の風上差分法を用いるとこれらの方程式の解にあらわれる不連続面を数値振動を起こすことなくとらえることができる。しかしながら、Godunov の定理が示すように、空間2次精度以上の解法では数値振動があらわれてしまうことがわかった。

Lax-Wendroff 法の数値流束を補正することによって、不連続面近傍での振動を抑えることができるかどうか考えてみよう。Lax-Wendroff 法の数値流束は次のようにも書ける。

$$\tilde{f}_{j+1/2}^n = c[u_j^n + \frac{1}{2}(1-\nu)(u_{j+1}^n - u_j^n)] \quad (1.74)$$

数値振動が生じない1次精度の風上差分の数値流束は  $c > 0$  のとき  $\tilde{f}_{j+1/2}^n = cu_j$  であり、Lax-Wendroff 法の数値流束の右辺第1項と一致している。そこで、Lax-Wendroff 法の数値流束の右辺第2項を次のように補正してみる。

$$\tilde{f}_{j+1/2}^n = c[u_j^n + \frac{1}{2}(1-\nu)B_{j+1/2}(u_{j+1}^n - u_j^n)] \quad (1.75)$$

ここで導入した  $B_{j+1/2}$  のことを 流束制限関数 と呼ぶ。数値流束 (1.75) を差分式 (1.66) に代入して変形すると次式を得る。

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{u_{j-1}^n - u_j^n} = \nu[1 - \frac{1}{2}(1-\nu)B_{j-1/2}] + \frac{1}{2}\nu(1-\nu)\frac{B_{j+1/2}}{r_j} \quad (1.76)$$

ここで、

$$r_j \equiv \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{u_{j+1}^n - u_j^n} \quad (1.77)$$

である。

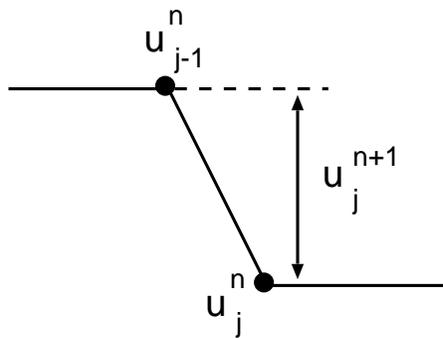


図 1.17: 数値振動が生じないようにするために  $u_j^{n+1}$  の値を制限する範囲

数値振動が生じないようにするために、図 1.17 に示したように  $u_j^{n+1}$  が  $u_j^n$  と  $u_{j-1}^n$  の間の値をとるように制限を加えることにしよう。これには、式 (1.76) の左辺の値を以下のように制限

すればよい。

$$0 \leq \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{u_{j-1}^n - u_j^n} \leq 1 \quad (1.78)$$

式(1.76)の右辺を代入すると以下の条件を得る。

$$-\frac{2}{\nu} \leq B_{j-1/2} - \frac{B_{j+1/2}}{r_j} \leq \frac{2}{1-\nu} \quad (1.79)$$

CFL条件が満たされている場合  $0 \leq \nu \leq 1$  なので、

$$-2 \leq B_{j-1/2} - \frac{B_{j+1/2}}{r_j} \leq 2 \quad (1.80)$$

この関係式は、以下のふたつの条件がともに満たされれば成立する。

$$0 \leq B_{j+1/2} \leq 2 \quad (1.81)$$

かつ

$$0 \leq \frac{B_{j+1/2}}{r_j} \leq 2 \quad (1.82)$$

この範囲を図示すると図1.18の斜線のない領域になる。 $r < 0$ の場合は  $B_{j+1/2} = 0$  のみが許される。

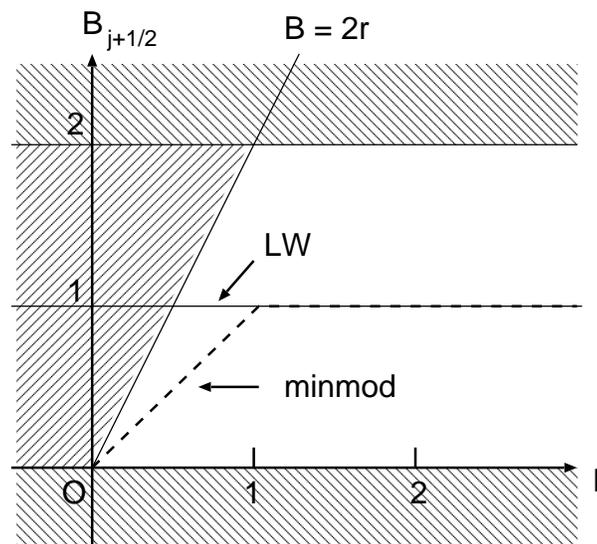


図 1.18: 流束制限関数  $B_{j+1/2}(r)$  の許容範囲。LW は Lax-Wendroff スキームの数値流束に対応する制限関数。minmod は minmod 関数。

Lax-Wendroff 法の数値流束では  $B_{j+1/2} = 1$  (図の LW) であるため、 $r < 1/2$  の領域で許容範囲外となり、数値振動が生じる。図の許容範囲内にある流束制限関数を用いることにより、数

値振動が起こらないようにすることができる。その一例は以下の minmod 関数 (図の minmod) である。

$$\text{minmod}(r) = \begin{cases} 0 & (r < 0) \\ r & (0 \leq r \leq 1) \\ 1 & (r > 1) \end{cases} \quad (1.83)$$

## 1.7 TVD スキーム

前節では、数値振動をおさえる方法として流束制限関数を導入した。ここでは、数値振動の発生を定量化する方法について考える。

このために、1次元線形スカラー移流方程式において以下の量を定義する。

$$U = \int \left| \frac{du}{dx} \right| dx. \quad (1.84)$$

この量は波の振幅の総和に等しく、移流方程式の厳密解では波のプロフィールが保たれるため、 $dU/dt = 0$  である。

以上との類推により、メッシュ点ごとの物理量の変化量の総和を次式のように定義し、これを Total Variation (TV) と言う。

$$TV(u^n) \equiv \sum_j |u_{j+1}^n - u_j^n| \quad (1.85)$$

Total Variation が時間とともに増大しないという条件

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n) \quad (1.86)$$

のことを Total Variation Diminishing (TVD) 条件と呼ぶ。

流束制限関数を導入することによって、差分スキームが TVD 条件を満たすようにすることができる。

## 1.8 放物型方程式の差分解法

天体シミュレーションにあらわれる放物型方程式

- 熱伝導方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T$$

- 磁気拡散方程式

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \mathbf{B}$$

以下のような1次元拡散方程式を差分近似によって初期値問題として解くことを考えてみよう。すなわち、時刻  $t = 0$  における  $u(x, t)$  の値  $u(x, 0)$  を与えて、任意の時刻  $t (> 0)$  における  $u(x, t)$  を求める。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.87)$$

拡散係数  $\kappa$  は  $x$  に依らないとする。よく知られているように、この方程式の解は初期条件をフーリエ変換することによって解析的に求めることができる。解のおおまかな様子を図に示す。

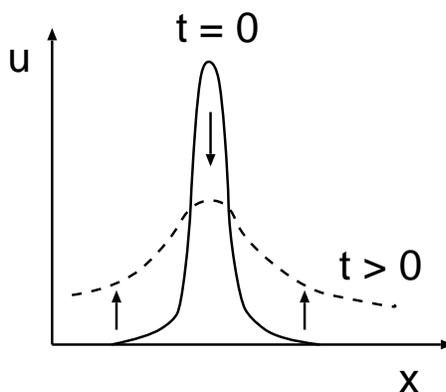


図 1.19: 拡散方程式の解の時間発展の様子

### 拡散方程式の陽解法 (explicit 法)

1次元拡散方程式 (1.87) を時間について現在の時刻  $t_n$  と  $\Delta t$  後の時刻  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  の間で前進差分、空間については中心差分 (FTCS 差分) をとって差分化すると次式を得る。ここで、 $u_j^n = u(x_j, t_n)$  である。

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \kappa \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (1.88)$$

式 (1.88) を変形して次式を得る

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (1.89)$$

右辺は時刻  $t_n$  での値、左辺は時刻  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  での値だけで書いている。したがって、時刻  $t_n$  での各格子点での値がわかっているならば直ちに1タイムステップ後 ( $t_{n+1}$ ) の各格子点での値を計算することができる (陽解法)。

## Von Neumann の安定性解析

FTCS スキームの数値的安定性を調べるために  $u_j^n = g^n \exp(ij\theta)$  を FTCS 差分式に代入すると

$$g^{n+1} e^{ij\theta} = g^n e^{ij\theta} + \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} g^n [e^{i(j+1)\theta} - 2e^{ij\theta} + e^{i(j-1)\theta}]. \quad (1.90)$$

よって、

$$g = 1 - 2 \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} (1 - \cos\theta). \quad (1.91)$$

増幅率が  $|g| \leq 1$  であるためには

$$-1 \leq 1 - 2 \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} (1 - \cos\theta) \leq 1. \quad (1.92)$$

したがって、

$$0 \leq \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} (1 - \cos\theta) = \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \leq 1. \quad (1.93)$$

任意の  $\theta$  (任意の波長の波) について安定であるためには

$$0 \leq \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (1.94)$$

以上により、FTCS スキームにより 1 次元拡散方程式のシミュレーションを行う場合、時間ステップ  $\Delta t$  が上式を満たすようにコントロールする必要があることがわかる。たとえばメッシュサイズを半分にした場合、 $\Delta t$  は 1/4 にしなければならない。

## 拡散方程式の陰解法 (implicit 法)

拡散方程式を差分化する際に右辺の空間差分の部分に、求めるべき  $t_{n+1}$  での  $u$  の値を含めて差分化する方法がある。このような方法を 陰解法(implicit) 法と呼び、explicit 法とは安定性条件が異ってくる。代表的な陰解法である Crank-Nicolson 法では、パラメータ  $\lambda$  を導入して、以下のように差分化する。

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \kappa \left[ \lambda \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + (1 - \lambda) \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right] \quad (1.95)$$

これを整理すると次のような行列を含む式になる。

$$\mathbf{A} \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{b}(\mathbf{u}^n). \quad (1.96)$$

これを解いて  $\mathbf{u}^{n+1}$  を求めればよい。

## 練習問題

1. 行列  $\mathbf{A}$  とベクトル  $\mathbf{b}$  の各要素を求めなさい。

2. Von Neumann の安定性解析により、 $\lambda > 1/2$  ならば  $\kappa\Delta t/\Delta x^2 > 0$  を満たす任意の  $\Delta t$  について Crank-Nicolson スキームは数値的に安定であることを示しなさい。

## 参考文献

- (1) 流体力学の数値計算法 (1994) 東京大学出版会、藤井孝蔵著
- (2) 数値天体物理学サマースクールのテキスト (2000)、富阪幸治、花輪知幸著
- (3) Numerical Computation of Internal and External Flows, C. Hirsch, John Wiley & Sons, 1990

(1) は、数値流体力学全般についてまとめられたテキストであり、必読文献である。



## 第2章 システム方程式の解法

富阪幸治（国立天文台）

第1章では、線形、非線形の一変数の波動方程式の数値解法について学んだ。ここでは、流体力学、磁気流体力学の方程式系について学び、ここにあらわれる非線系連立方程式の解法が第1章のそれと同じようにして得られることを示す。

### 2.1 基礎方程式

ここでは、まず流体力学の基礎方程式を導出する。その後、磁場の効果を考慮し、磁気流体力学の基礎方程式を得る。

#### 2.1.1 質量

まず最初の基礎方程式は、ある体積の中に含まれる流体の質量が単位時間に流れ込む質量流速によって増減するという連続の式

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.1)$$

から得られる。これに Gauss の定理

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV \quad (2.2)$$

を用いて右辺を体積積分に変換すると、

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV = 0 \quad (2.3)$$

が得られる。この式は空間中にある体積を固定した時にその内部に含まれる質量の保存を表す式である。

$V$  として微小体積を考えれば、微分形で表した質量保存の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.4)$$

が得られる。

### 2.1.2 運動量

つぎに、ある体積の中に含まれる流体の運動量は、質量と同じように、単位時間に流れ込む運動量流束によって増減するが、それに加えて運動量の場合は、この流体の体積に加わっている「力」によっても増減する。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{v} dV = - \int_S \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS - \int_S p \mathbf{n} dS + \int_V \rho \mathbf{g} dV \quad (2.5)$$

右辺第2項は、表面に加わる力で、ここでは圧力による運動量変化を表している。第3項は体積力で、ここでは重力  $\rho \mathbf{g}$  ( $\mathbf{g}$  は重力加速度) による運動量変化を表している。もう一つの Gauss の定理

$$\int_S f \mathbf{n} dS = \int_V \text{grad} f dV \quad (2.6)$$

を用いて右辺第2項を体積積分に変換すると、

$$\int_V \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} dV + \int_V \text{div}(\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) dV = - \int_V \text{grad} p dV + \int_V \rho \mathbf{g} dV \quad (2.7)$$

ここで  $V$  として微小体積を考えれば、

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = - \text{grad} p + \rho \mathbf{g} \quad (2.8)$$

が得られる。 $\rho \mathbf{v} \mathbf{v}$  はテンソル積で

$$\rho \mathbf{v} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \rho v_x v_x & \rho v_x v_y & \rho v_x v_z \\ \rho v_y v_x & \rho v_y v_y & \rho v_y v_z \\ \rho v_z v_x & \rho v_z v_y & \rho v_z v_z \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

をあらわす。この式は添字をつけて書くと、

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i \quad (2.10)$$

と書ける。もちろん、 $x_1 = x$ 、 $x_2 = y$ 、 $x_3 = z$  を表している。

### 2.1.3 エネルギー

エネルギーの保存を考える。単位体積あたりの全エネルギー  $e$  は運動エネルギーと内部エネルギー  $\epsilon$  の和で

$$e = \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \epsilon, \quad (2.11)$$

で与えられる。理想気体の場合、単位質量あたりの内部エネルギーは温度に比例するので、単位体積あたりのそれは温度  $\times$  密度に比例し、

$$\epsilon = \frac{p}{\gamma - 1}, \quad (2.12)$$

( $\gamma$  は気体の比熱比) とかける。質量と同じように、全エネルギーの増減はエネルギー流束によるだけなら、 $\partial e/\partial t + \text{div}(e\mathbf{v}) = 0$  となるはずであるが、そうではない。

熱力学の第 1 法則で断熱の場合を考えると、内部エネルギー  $U$  と体積  $V$  は

$$\frac{dU}{dt} + p \frac{dV}{dt} = 0 \quad (2.13)$$

という関係で変化する。これは次のように書き換えられる。

$$\frac{d}{dt} \int_V \epsilon dV + p \int_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dS = 0, \quad (2.14)$$

第 2 項を変形するのに、単位時間あたりの体積変化が  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})dS$  の積分に比例することを用いた。ここで、第 1 項の時間微分が空間に固定された体積に含まれる内部エネルギーでなく、時間  $t = 0$  で体積  $V(t = 0)$  にあった物質の時間  $t > 0$  での体積  $V(t)$  に含まれる内部エネルギーの時間変化 (ラグランジェによる微分と呼ぶ) を表していることに注意し、時間微分が空間に固定された体積に含まれる内部エネルギーの時間変化 (オイラーによる微分と呼ぶ) に書き換える。

$$\frac{d}{dt} \int_V \epsilon dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \epsilon dV + \int_S \epsilon (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dS, \quad (2.15)$$

であるから、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \epsilon dV + \int_S \epsilon (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dS = -p \int_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dS \quad (2.16)$$

となる。この微分形として、単位体積あたりの熱エネルギー  $\epsilon$  は

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \text{div}(\epsilon \mathbf{v}) = -p \text{div} \mathbf{v} \quad (2.17)$$

という関係にしたがって変化することが簡単な計算でわかる。これと式 (2.8) から得られる運動エネルギーの変化を表す方程式 (この式の右辺が単位体積・単位時間に流体素片になされた仕事を表すことに注意)

$$\frac{\partial \rho |\mathbf{v}|^2 / 2}{\partial t} + \text{div} \left( \frac{\rho |\mathbf{v}|^2}{2} \mathbf{v} \right) = -\mathbf{v} \cdot \text{grad} p + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}, \quad (2.18)$$

の和をとれば全エネルギーに関する方程式が得られる。断熱の場合のエネルギーに関する方程式は、

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \text{div} [(e + p)\mathbf{v}] = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} \quad (2.19)$$

ここで  $e$  は単位体積あたりの全エネルギーで

$$e = \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \epsilon, \quad (2.20)$$

で与えられる。

流体力学の基礎方程式は、式 (2.4)、(2.8) および (2.19) である。このようにして得られた、流体力学の基礎方程式は、ガリレイ変換不変であることに注意しておこう。

### 2.1.4 磁気流体力学

磁場の効果を取り入れよう。ローレンツ力を外力として加えると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\mathbf{j} \times \mathbf{B} &= -\frac{1}{4\pi}\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}), \\ &= -\nabla \left( \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B},\end{aligned}\quad (2.21)$$

だから、式(2.8)は

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} - \nabla \left( \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (2.22)$$

もしくは、流束の項に Maxwell の応力テンソルを加える形にして、

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i v_j + p \delta_{ij} - \frac{1}{4\pi} B_i B_j + \frac{1}{8\pi} B^2 \delta_{ij}) = \rho g_i \quad (2.23)$$

のように書き直せる。またエネルギー方程式は、エネルギーに磁場のエネルギーを加え、流束にポインティングベクトルを加えることによって、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( e + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \nabla \cdot \left[ (e + p) \mathbf{v} + \frac{1}{4\pi} \{ \mathbf{B} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \} \right] = 0 \quad (2.24)$$

のようになる。

さらに、電磁気学のファラデーの法則

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.25)$$

とアンペールの法則

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{j} \quad (2.26)$$

オームの法則

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.27)$$

から磁場の誘導方程式

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (2.28)$$

が得られる。ここで、電気伝導度  $\sigma \rightarrow \infty$  を理想磁気流体力学 (ideal MHD) 極限とよぶ。

これから、磁気流体力学の基礎方程式は、式(2.4)、(2.22)もしくは(2.23)、(2.24)と(2.28)になる。

## 2.1.5 保存形式

流体力学の基礎方程式をまとめると、以下のようになる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = 0, \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x^2 + p}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_x v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_x v_z}{\partial z} = \rho g_x, \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \rho v_y}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_y v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y^2 + p}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_y v_z}{\partial z} = \rho g_y, \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \rho v_z}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_z v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_z v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z^2 + p}{\partial z} = \rho g_z, \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial (e+p)v_x}{\partial x} + \frac{\partial (e+p)v_y}{\partial y} + \frac{\partial (e+p)v_z}{\partial z} = \rho(v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z), \quad (2.33)$$

ここで、体積力の外力が働いていない（通常の流体力学が主に対象とする）場合は密度、運動量密度、全エネルギー密度は、それらの流束の発散で与えられる。このため、このような形式の基礎方程式を保存形式と呼ぶ。

これは、保存量

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ e \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

に対して、その  $x$  方向、 $y$  方向、 $z$  方向に流れる流束、

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + p \\ \rho v_x v_y \\ \rho v_x v_z \\ (e+p)v_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v_y \\ \rho v_y v_x \\ \rho v_y^2 + p \\ \rho v_y v_z \\ (e+p)v_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \rho v_z \\ \rho v_z v_x \\ \rho v_z v_y \\ \rho v_z^2 + p \\ (e+p)v_z \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

を用いて、

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{U})}{\partial z} = \mathbf{S}(\mathbf{U}), \quad (2.36)$$

$\mathbf{S}$  はソース項で体積力である重力のみが働いている時は

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho g_x \\ \rho g_y \\ \rho g_z \\ \rho(v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z) \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

のように与えられる。

## 2.2 円筒座標、球座標

軸対称、球対称などの対称性を持つ問題については、空間の独立変数の数（次元）を減らすことにより、計算量を減少させる。そのため、1次元球対称の場合の球座標や、2次元軸対称の場合の円筒座標で書いた基礎方程式を見ておくことにする。

### 2.2.1 1次元球対称

1次元球対称の場合は、基礎方程式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 \rho v_r}{\partial r} = 0, \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial \rho v_r}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 \rho v_r^2}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r}, \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 (e + p) v_r}{\partial r} = 0, \quad (2.40)$$

であるが、 $r^2$  を掛けた以下の量を保存量と流束にとることによって

$$\bar{U} = r^2 U = r^2 \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_r \\ e \end{pmatrix}, \quad \bar{F} = r^2 F = r^2 \begin{bmatrix} \rho v_r \\ \rho v_r^2 + p \\ (e + p) v_r \end{bmatrix}, \quad \bar{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2rp \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

基礎方程式は、

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}(\bar{U})}{\partial r} = \bar{S}(\bar{U}), \quad (2.42)$$

のようになる。

### 2.2.2 2次元軸対称円筒座標

2次元軸対称の問題を円筒座標  $(z, r)$  を用いて解く場合は良く行なわれる。円筒座標  $(z, r)$  について考えると、 $\text{div A}$  が  $\partial A_x / \partial x + \partial A_y / \partial y$  から  $(1/r) \partial (r A_r) / \partial r + \partial A_z / \partial z$  などの表式が変わるので流束とソース項がデカルト座標のそれとは違うことになる。保存量、流束、ソース項を

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_r \\ \rho v_z \\ e \end{pmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho v_r \\ \rho v_r^2 + p \\ \rho v_r v_z \\ (e + p) v_r \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \rho v_z \\ \rho v_z v_r \\ \rho v_z^2 + p \\ (e + p) v_z \end{bmatrix}, \quad S = -\frac{1}{r} \begin{pmatrix} \rho v_r \\ \rho v_r^2 \\ \rho v_r v_z \\ v_r (e + p) \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

のように取ると、基礎方程式は、

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial r} + \frac{\partial G(U)}{\partial z} = S(U), \quad (2.44)$$

のようになる。この形式で書くと、ソース項は  $r \rightarrow 0$  で形式的には発散する（実際には同時に  $v_r \rightarrow 0$  となるから発散はしないが）形をしているので、特別な取り扱いが必要になる。

もう一つの方法は

$$\bar{U} = rU, \quad \bar{F} = rF, \quad \bar{G} = rG, \quad \bar{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

のように、保存量、流束に  $r$  を掛けた量を用いると、基礎方程式は、

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}(\bar{U})}{\partial r} + \frac{\partial \bar{G}(\bar{U})}{\partial z} = \bar{S}(\bar{U}), \quad (2.46)$$

のようになる。

## 2.3 波動

一次元の流体力学を考える。基礎方程式は

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0, \quad (2.47)$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ e \end{pmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + p \\ (e + p)v_x \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

であるが、ここでは特にエントロピー一定のガスに対する1次元流体力学を考える。エントロピー一定でなくとも  $p = p(\rho)$  のように圧力が密度だけに依存して変化するバロトロピー気体でも議論は同じである。エネルギー保存に関する  $e$  の変化を考える第3成分の式はポアッソンの関係式  $p = K\rho^\gamma$ （バロトロピー気体なら  $p = p(\rho)$ ）で置き換えられる。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0, \quad (2.49)$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + p \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

この2本の式と  $p = K\rho^\gamma$  で方程式系が閉じることは容易にわかる。

ここで、 $\partial p / \partial x = (\partial p / \partial \rho)_{\text{ad}} (\partial \rho / \partial x) = c_s^2 \partial \rho / \partial x$  [  $(\partial p / \partial \rho)_{\text{ad}} = c_s^2$  にあられる  $c_s$  を音速と呼ぶ ] であることに注意して、上の式を書き直すと

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} = 0, \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x^2)}{\partial x} + c_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (2.52)$$

となる。

### 2.3.1 線形的气体ダイナミクス

系が一様（密度  $\rho_0$ ）で静止（速度  $v_x = 0$ ）しており、変化が微小である場合（ $|\delta\rho| \ll \rho_0$ 、 $|v_x| \ll c_s$ ）式 (2.51)、(2.52) は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{c_s^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (2.54)$$

となる。

これは第1章で学んだ1成分の移流方程式のように書き直すと

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ v_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \rho_0 \\ c_s^2/\rho_0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho \\ v_x \end{pmatrix} = 0 \quad (2.55)$$

のようになる。この式を、象徴的に、

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (2.56)$$

あるいは、さらに1成分の移流方程式に近い形にして

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (2.57)$$

のように書くことにする。ここで出てくる行列  $\mathbf{A}$  を対角化することを考える。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \rho_0 \\ c_s^2/\rho_0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

の固有値を求めると二つの相異なる実固有値は  $\lambda_1 = -c_s$ 、および  $\lambda_2 = +c_s$  であること、また行列  $\mathbf{A}$  を対角行列

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

に対角化するには、行列  $\mathbf{A}$  の固有値  $\lambda_i$  とその固有値に属する行列  $\mathbf{A}$  の右固有ベクトル  $\mathbf{r}^{(i)}$  を用いると、

$$\mathbf{A} \mathbf{r}^{(i)} = \lambda_i \mathbf{r}^{(i)}, \quad (2.60)$$

( $\mathbf{r}^{(i)}$  は縦ベクトル  $(\alpha, \beta)^t$ )。また、その固有値に属する行列  $\mathbf{A}$  の左固有ベクトル  $\ell^{(i)}$  を用いると、

$$\ell^{(i)} \mathbf{A} = \lambda_i \ell^{(i)}, \quad (2.61)$$

( $\ell^{(i)}$  は横ベクトル  $(\gamma, \delta)$ ) で、

$$\ell^{(i)} \mathbf{A} \mathbf{r}^{(i)} = \lambda_i, \quad (2.62)$$

と書ける。これを、 $i = 1, 2$  について両方考える。つまり、右固有ベクトルを横に並べて作った右固有行列

$$\mathbf{R} = (\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}) \quad (2.63)$$

および、左固有ベクトルを縦に並べて作った左固有行列

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \ell^{(1)} \\ \ell^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (2.64)$$

を用いると、

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \mathbf{L}\mathbf{A}\mathbf{R}, \quad (2.65)$$

もしくは、

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{L}, \quad (2.66)$$

のように対角化されることがわかる。もちろん、 $\ell^{(i)} \cdot \mathbf{r}^{(j)} = \delta_{ij}$  であるから、 $\mathbf{L}\mathbf{R} = \mathbf{I}$  で  $\mathbf{L}$  と  $\mathbf{R}$  は逆行列の関係にある。  $\mathbf{R}$ 、 $\mathbf{L}$  を具体的に書くと、

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \rho_0 & \rho_0 \\ -c_s & c_s \end{pmatrix}, \quad (2.67)$$

また

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2c_s\rho_0} \begin{pmatrix} c_s & -\rho_0 \\ c_s & \rho_0 \end{pmatrix}, \quad (2.68)$$

である。これは、式 (2.55) が以下のように書き直せることを意味する。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0. \quad (2.69)$$

ここで、行列  $\mathbf{R}$ 、逆行列  $\mathbf{L}$  が一定であり 微分演算と交換することを用いると、この式は、以下のように書き換えられる。

$$\frac{\partial \mathbf{L}\mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{L}\mathbf{U}}{\partial x} = 0, \quad (2.70)$$

すなわち、 $\mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{L}(\rho, v_x)^t = \mathbf{W} \equiv (w_1, w_2)^t$  という新しい変数に対しては、基礎方程式は独立な二つの式に分解できることがわかる。すなわち、

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} - c_s \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0 \quad \text{と} \quad \frac{\partial w_2}{\partial t} + c_s \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0, \quad (2.71)$$

である。

$t = 0$  での  $w$  に対する初期条件は  $u$  に対するそれから  $w(x, t = 0) = \mathbf{L}u(x, t = 0)$  のようにして求められ、移流方程式はその  $w(x, t = 0) \equiv (w_1^0, w_2^0)^t$  の値を  $w_1^0$  は左へ、 $w_2^0$  は右へ、速度  $c_s$  で移動させて行く。すなわちこの解は、

$$\begin{aligned} w_1(x, t) &= w_1(x + c_s t, 0), \\ &= \mathbf{L}u(x + c_s t, 0), \\ &= \frac{1}{2\rho_0 c_s} [c_s \rho(x + c_s t, 0) - \rho_0 v_x(x + c_s t, 0)], \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned}
w_2(x, t) &= w_2(x - c_s t, 0), \\
&= Lu(x - c_s t, 0), \\
&= \frac{1}{2\rho_0 c_s} [c_s \rho(x - c_s t, 0) + \rho_0 v_x(x - c_s t, 0)],
\end{aligned} \tag{2.73}$$

で与えられることになる。最後に、この解を、 $U = RW$  で逆変換すれば、 $\rho$ 、 $v_x$  の時間発展が得られ、

$$\begin{aligned}
\rho(x, t) &= \rho_0 w_1(x, t) + \rho_0 w_2(x, t), \\
&= \frac{1}{2c_s} [c_s \rho(x + c_s t, 0) - \rho_0 v_x(x + c_s t, 0)] \\
&\quad + \frac{1}{2c_s} [c_s \rho(x - c_s t, 0) + \rho_0 v_x(x - c_s t, 0)],
\end{aligned} \tag{2.74}$$

$$\begin{aligned}
v_x(x, t) &= -c_s w_1(x, t) + c_s w_2(x, t), \\
&= -\frac{1}{2\rho_0} [c_s \rho(x + c_s t, 0) - \rho_0 v_x(x + c_s t, 0)] \\
&\quad + \frac{1}{2\rho_0} [c_s \rho(x - c_s t, 0) + \rho_0 v_x(x - c_s t, 0)],
\end{aligned} \tag{2.75}$$

のように得られる。

### 2.3.2 Riemann 問題

線形ガスダイナミクス方程式のような定係数の双曲型方程式系の初期値問題で、初期値に存在した不連続が進化する形の解を考える。つまり、

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \tag{2.76}$$

というシステムを、初期条件、

$$U(x, t = 0) = \begin{cases} U_L & (x < 0) \\ U_R & (x > 0) \end{cases}, \tag{2.77}$$

の元に解くようなものである。式 (2.74)、(2.75) から、図 2.1 で、点 P、Q、R は影響を受ける初期状態  $\rho(x \pm c_s t, t = 0)$ 、 $v_x(x \pm c_s t, t = 0)$  が  $U_L$  であるか  $U_R$  であるかが異なっている。

すなわち、点 P は右に進む音波  $\lambda_2 = +c_s$  では  $U_L$  と、左に進む音波  $\lambda_1 = -c_s$  では  $U_R$  に影響を受けており、点 Q は右に進む音波でも左に進む音波でも  $U_L$  に影響を受けており、点 R は右に進む音波でも左に進む音波でも  $U_R$  に影響を受けていることがわかる。

$U = RW$  という関係は

$$\begin{aligned}
U(x, t) &= \sum_{i=1}^2 w_i(x, t) \mathbf{r}^{(i)}, \\
&= \sum_{i=1}^2 w_i(x - \lambda_i t, t = 0) \mathbf{r}^{(i)},
\end{aligned} \tag{2.78}$$

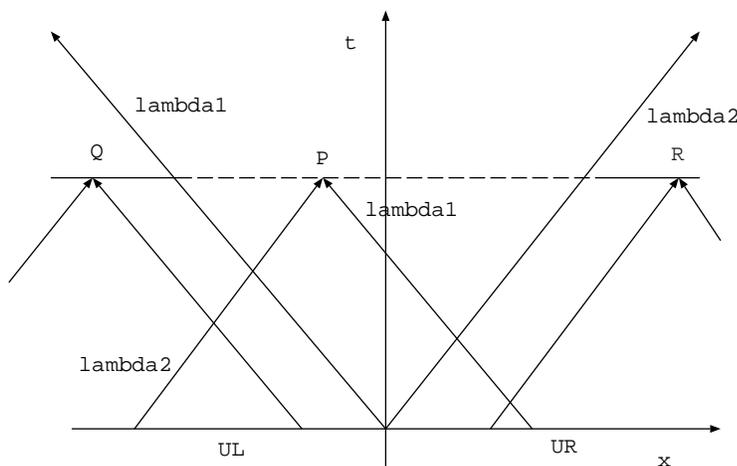


図 2.1: 特性線によって分けられた領域ごとに、いずれの初期値の影響下にあるかがわかる。

と書き直せる。ここで、 $r^{(i)}$  は  $\lambda_i$  に属する右固有ベクトルを表している。

同様に、初期状態  $U_L$  と  $U_R$  を  $\lambda_i$  に属する固有ベクトルで展開すると

$$U_L = \sum_{i=1}^2 \alpha_i r^{(i)}, \quad U_R = \sum_{i=1}^2 \beta_i r^{(i)} \quad (2.79)$$

となるが、図 2.1 で点 Q の属する領域では  $U_L = \alpha_1 r^{(1)} + \alpha_2 r^{(2)}$  であり、また、点 R の属する領域では  $U_R = \beta_1 r^{(1)} + \beta_2 r^{(2)}$  であるが、点 P の属する領域では  $U_* = \beta_1 r^{(1)} + \alpha_2 r^{(2)}$  となる。

ここで、注意すべき点は、この Riemann 問題で、左から右へ  $\lambda_1$  で伝搬する特性線を越えると、 $\Delta U = (\beta_1 - \alpha_1) r^{(1)}$  だけ変化し、またさらに  $\lambda_2$  で伝搬する特性線を越えると、 $\Delta U = (\beta_2 - \alpha_2) r^{(2)}$  だけ値が変化するということである。

### 2.3.3 非線形のガスダイナミクス

#### バーガーズ方程式

ここまでの例では、定数係数の行列  $A$  は一定値の特性スピード  $\pm c_s$  を与えたため、すべての特性線は同じ傾きを持ち、同じ種類の特性線が交わることはなかった。

第 1 章で、非線形の代表選手として非粘性バーガーズ方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (2.80)$$

を学んだ。ここでは行列  $A$  に相当するものは  $u$  となるから、一つだけ存在する特性スピード  $\lambda$  が空間、時間によって異なり、 $d\lambda(u)/du > 0$  であることがわかる (convex flux)。

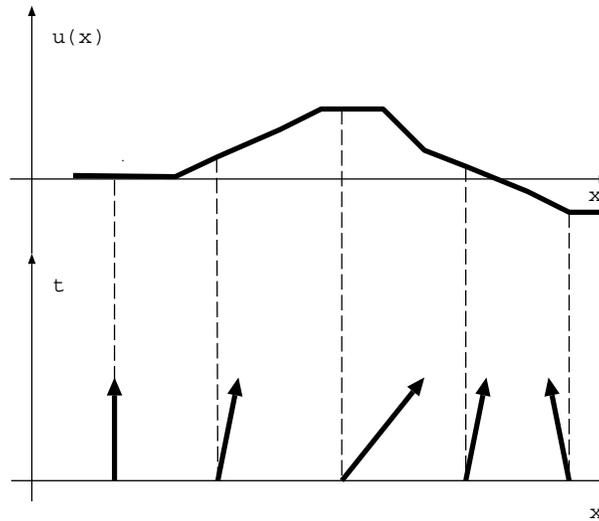


図 2.2: 非粘性バーガーズ方程式の波形（上）と特性線の傾き（下）の関係。振幅の大きな部分が早い特性スピードを持ち次第に波形がつたって来る。

振幅の大きな部分が早い特性スピードを持ち次第に波形がつたって来る。最終的に後ろから来た特性線が前からのものに追いつくところでは物理量が不連続になり実存の気体中では衝撃波を生じる。実際の衝撃波では、ここまで考慮していなかった熱伝導、粘性などの輸送現象が重要になって気体の平均自由行程程度で物理状態が変化するがその平均自由行程程度より大きな通常の気体のスケールで考えれば物理量が不連続になるように見える。

### 等温ガス

式 (2.52) で音速を一定とすると、等温ガスに対する基礎方程式が得られる。ここで  $\rho u = m$  と書いて従属変数を

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ m \end{pmatrix}, \quad (2.81)$$

と書き直すと、流束の方はこれらを使って

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} m \\ a^2 \rho + \frac{m^2}{\rho} \end{pmatrix}, \quad (2.82)$$

のように書ける。音速の値が一定であることを強調するためにここでは  $c_s = a$  と書いておくことにする。次に、基礎方程式を移流方程式型に書き換えると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - \frac{m^2}{\rho^2} & \frac{2m}{\rho} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho \\ m \end{pmatrix} = 0, \quad (2.83)$$

のようになる。

この式は線形のカスタミクス方程式で行なったのと同じ方法で対角化を行なうことができて、 $A$ のこの固有値は

$$\lambda_1 = \frac{m}{\rho} - a = u - a, \quad (2.84)$$

$$\lambda_2 = \frac{m}{\rho} + a = u + a, \quad (2.85)$$

であることがわかる。それぞれの固有値に属する固有ベクトルは、

$$\mathbf{r}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ u - a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ u + a \end{pmatrix}, \quad (2.86)$$

なので、対角化する行列は

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ u - a & u + a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{u+a}{2a} & -\frac{1}{2a} \\ -\frac{u-a}{2a} & \frac{1}{2a} \end{pmatrix}, \quad (2.87)$$

で、

$$\mathbf{L}\mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{\Lambda}, \quad \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{L} = \mathbf{A}, \quad (2.88)$$

のように対角化される。

## 2.4 衝撃波

非粘性バーガーズ方程式 (2.3.3 節) に関してリーマン問題を考える。ここでは簡単のために  $u > 0$  の場合のみを考えるが、 $u < 0$  の場合についても容易に理解できよう。

初期条件で左右の物理量の値の差が小さい場合は、 $u_R > u_L$  であっても  $u_R < u_L$  であっても図 2.4 下に見るように、物理量の不連続は、 $u$  で右に伝搬する。ところが、不連続が非線形の場合には、(1) 初期に  $U_L = u_L$ 、 $U_R = u_R$  で  $u_L > u_R$  である場合は、 $x < 0$  からでる特性線が  $x > 0$  からでる特性線に追い付くことになる。 $u_L$  を運んでくる波と  $u_R$  を運んでくる波が同じ点に到達するので不連続が発生する (図 2.3 上)。流体力学の場合この不連続は衝撃波と呼ばれる。

その逆に、(2)  $u_L < u_R$  である場合 (図 2.3 下、図 2.4 上右) は、 $u_L$  と  $u_R$  の間の不連続が同様に右へ伝搬して行く可能性があるが、このような、特性線の重なりによらない不連続の生成は物理的には起こり得ず、また、流体力学で生ずる衝撃波に当てはめると不連続を前面から後面に通り過ぎる間に気体のエントロピーが減少する場合に相当しており、物理的には起こり得ない (エントロピー条件)。

$u_L < u_R$  である場合は、希薄波と呼ばれる構造が出現し、位相空間で希薄波の Head と示された点から希薄波の Tail と示された点まで  $u$  の値が線形に変化しそれに応じて特性線の傾きも次第に変化する流れを生ずる。

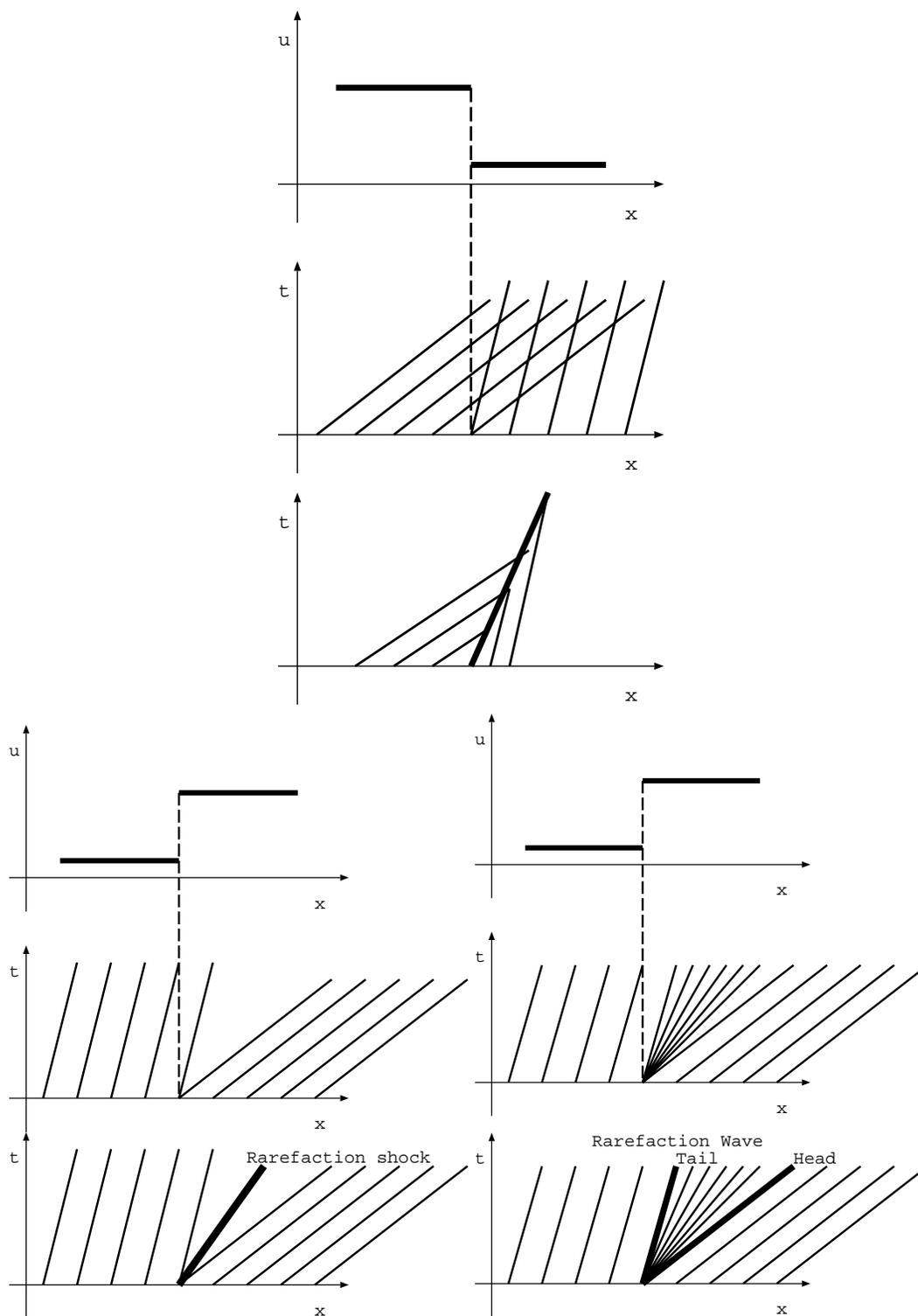


図 2.3: 非粘性バーガーズ方程式のリーマン問題。(上)  $u_L > u_R$  の場合、特性線の重なりが衝撃波を形成する。(左下)  $u_L < u_R$  の場合、特性線は遠ざかって行く、この場合、 $u_L$  と  $u_R$  を不連続で接続する解（膨張衝撃波）は、非物理的で、(右下)の希薄波をはさんで物理量が  $u_L$  から  $u_R$  まで連続的に変化する現象が実現する。

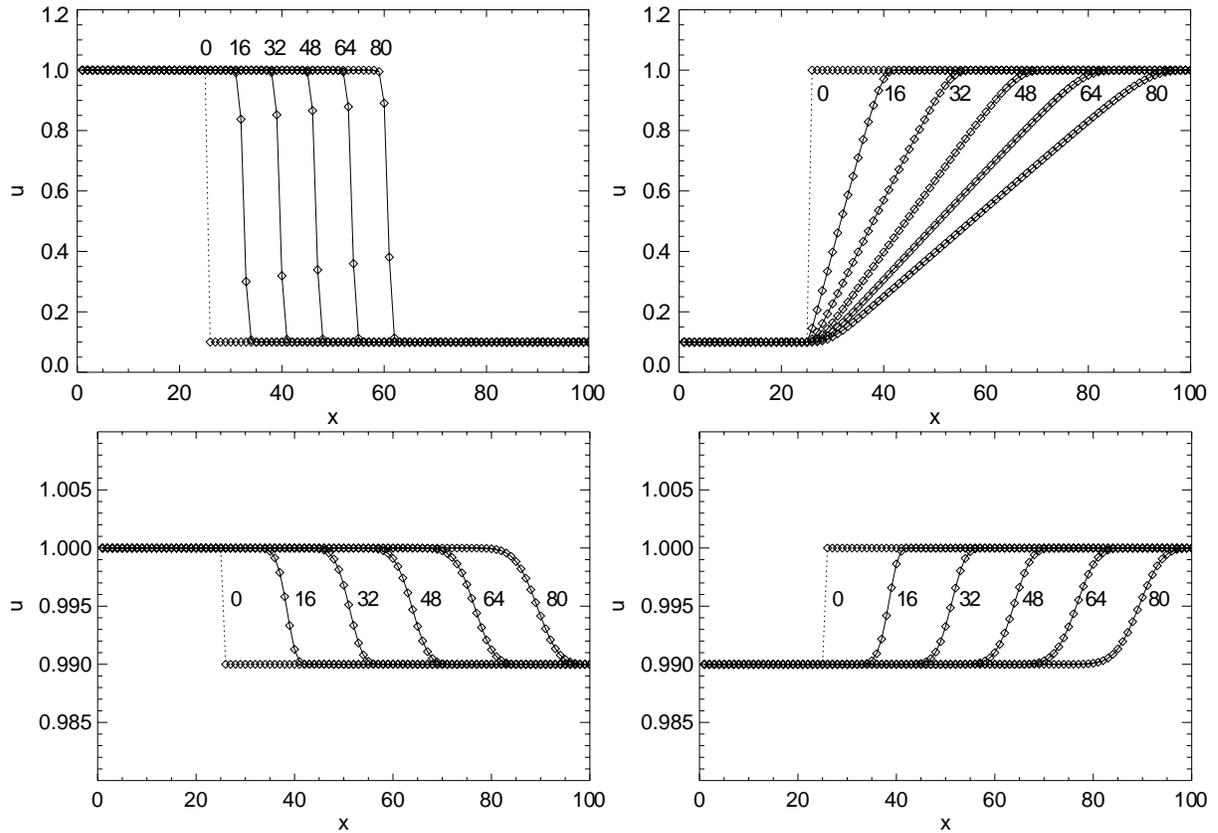


図 2.4: 非粘性バーガーズ方程式のリーマン問題。(左)  $u_L = 1$ 、 $u_R = 0.1$  の場合、衝撃波型 ( $t = 0.8 \times [0, 16, 32, 48, 64, 80]$ )。 (右)  $u_L = 0.1$ 、 $u_R = 1$  の場合、希薄波型 ( $t = 0.8 \times [0, 16, 32, 48, 64, 80]$ )。下はそれぞれ、振幅が微小で線形な系としてふるまう場合で、(左)  $u_L = 1$ 、 $u_R = 0.99$  の場合と (右)  $u_L = 0.99$ 、 $u_R = 1$  の場合。

### 2.4.1 ランキン・ユゴニオ関係

保存系の流体力学の1次元の基礎方程式

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad (2.89)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + p \\ (e + p)v_x \end{bmatrix}, \quad (2.90)$$

を、空間の決まった2点  $x_L$  から  $x_R$  まで積分する。その間に衝撃波を含みその位置  $x_S(t)$  は時間とともに速度  $V = dx_S(t)/dt$  で移動するとする。

$$\frac{d}{dt} \int_{x_L}^{x_S} \mathbf{U}(x, t) dx + \frac{d}{dt} \int_{x_S}^{x_R} \mathbf{U}(x, t) dx = \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_L, t)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_R, t)), \quad (2.91)$$

のようになる。左辺を書き換えると、

$$[\mathbf{U}(x_{S_L}) - \mathbf{U}(x_{S_R})] V + \int_{x_L}^{x_S} \frac{\partial \mathbf{U}(x, t)}{\partial t} dx + \int_{x_S}^{x_R} \frac{\partial \mathbf{U}(x, t)}{\partial t} dx = \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_L, t)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_R, t)), \quad (2.92)$$

となる。ここで、 $\mathbf{U}(x_{S_L})$  は衝撃波面へ左から近付いた  $x = x_S - \epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ) での値、 $\mathbf{U}(x_{S_R})$  は衝撃波面へ右から近付いた  $x = x_S + \epsilon$  での値を表す。左辺の2つの積分は  $x_L \rightarrow x_S$ 、 $x_R \rightarrow x_S$  のように近付ければ小さくなるので、

$$[\mathbf{U}(x_{S_L}) - \mathbf{U}(x_{S_R})] V = \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_L, t)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_R, t)), \quad (2.93)$$

これをランキン・ユゴニオ関係と呼ぶ。流体力学の基礎方程式はガリレイ変換不変であるので、速度  $V$  で移動する座標系に移っても式の形は変化しない。そこで、普通は衝撃波の伝搬速度と同じ速度で移動する座標系に移って、その座標系での速度  $\hat{v}_x = v_x - V$  を用いると、この系では

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}(x_L, t)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_R, t)) = 0, \quad (2.94)$$

であるから、

$$(\rho \hat{v}_x)_L = (\rho \hat{v}_x)_R \quad (2.95)$$

$$(\rho \hat{v}_x^2 + p)_L = (\rho \hat{v}_x^2 + p)_R \quad (2.96)$$

$$[(\hat{e} + p)\hat{v}_x]_L = [(\hat{e} + p)\hat{v}_x]_R \quad (2.97)$$

という衝撃波前面と後面の物理量の関係をつけるものをランキン・ユゴニオ関係と呼ぶ。

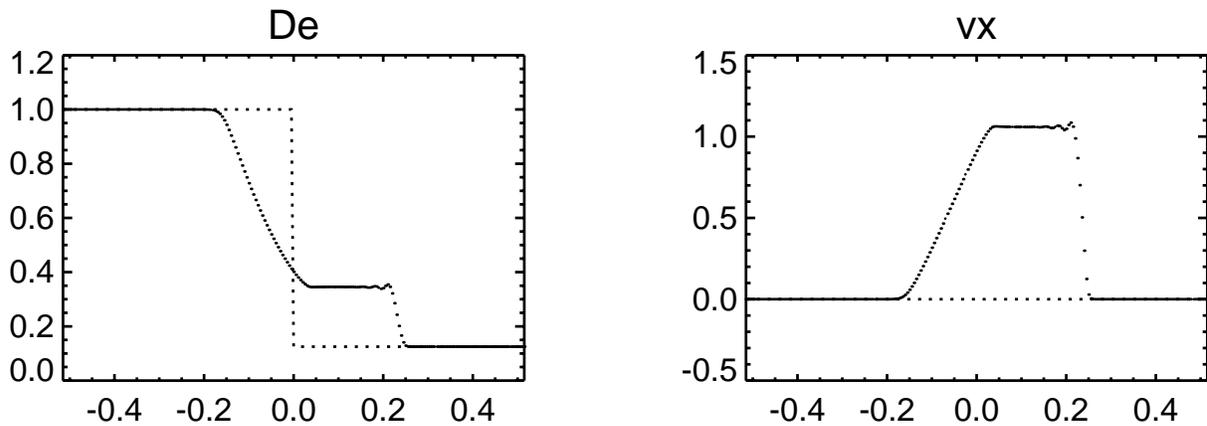


図 2.5: 等温の衝撃波管問題。点線は初期値  $\rho_L = 1(-0.5 < x < 0)$ 、 $\rho_R = 0.125(0 < x < 0.5)$ 、 $v_{xL} = v_{xR} = 0$ 、 $c_s = 1$ 、実線は  $t = 0.142$  の構造。計算法は修正ラックス・ベンドルフ法。右側に進んで行く等温衝撃波と、左側に進んで行く希薄波が生じていることがわかる。

## 2.4.2 磁気流体力学

結果のみを示すと流れの速度が衝撃波面に垂直な垂直衝撃波を考え、かつ磁場が衝撃波面に平行な向きをしている時、質量流束、運動量流束、エネルギー流束の表式から、

$$(\rho v_x)_L = (\rho v_x)_R \quad (2.98)$$

$$\left( \rho v_x + p + \frac{B^2}{8\pi} \right)_L = \left( \rho v_x + p + \frac{B^2}{8\pi} \right)_R \quad (2.99)$$

$$\left[ \left( e + p + \frac{B^2}{4\pi} \right) v_x \right]_L = \left[ \left( e + p + \frac{B^2}{4\pi} \right) v_x \right]_R \quad (2.100)$$

$$(v_x B)_L = (v_x B)_R \quad (2.101)$$

のようになる。

## 2.5 衝撃波管問題

時間  $t = 0$  での初期状態で圧力、密度などに不連続な分布を持っており時間発展をすると衝撃波を生ずるものを衝撃波管とよぶ。

ここではまず等温ガスに対して、初期に左側 ( $x < 0$ ) に  $\rho = \rho_L$ 、右側 ( $x > 0$ ) に  $\rho = \rho_R$  ただし、 $\rho_L > \rho_R$  のような分布を考え、そこに生じる流れを調べる。

### 2.5.1 等温衝撃波

衝撃波に止まった系で、衝撃波前面の速度を  $u_1$ 、衝撃波後面の速度を  $u_2$ 、それぞれの密度を、 $\rho_1$ 、 $\rho_2$ 、とおくと、ランキン・ユゴニオ関係から、

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2, \quad (2.102)$$

$$\rho_1(u_1^2 + a^2) = \rho_2(u_2^2 + a^2), \quad (2.103)$$

ここで、式 (2.102) から

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = x, \quad (2.104)$$

と置くと、式 (2.103) は

$$x^2 - (\mathcal{M}_1^2 + 1)x + \mathcal{M}_1^2 = 0, \quad (2.105)$$

となる。ただし、ここで  $\mathcal{M}$  はマッハ数で  $\mathcal{M} \equiv u/a$  をあらわす。これから、

$$x = \mathcal{M}_1^2 = \left(\frac{u_1}{a}\right)^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad (2.106)$$

よって、

$$u_1 u_2 = a^2 \quad (2.107)$$

となる。衝撃波の前方は静止していたとき、静止系から見た時の衝撃波後面の速度  $U_2$  は、衝撃波面の進む速度を  $V_s = u_1$  として

$$U_2 = V_s - u_2 = V_s - \frac{a^2}{V_s}, \quad (2.108)$$

であり、衝撃波後面の密度は

$$\rho_2 = \rho_1 \left(\frac{V_s}{a}\right)^2 \quad (2.109)$$

となる。

### 2.5.2 等温の場合の Riemann 不変量

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (2.110)$$

を  $\rho$  で割ったもの

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} = 0, \quad (2.111)$$

と、運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (2.112)$$

を等温音速  $a$  で割ったもの、

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x} + a \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} = 0, \quad (2.113)$$

から、式 (2.111) と式 (2.113) を加えると、

$$\frac{\partial(\ln \rho + \mathcal{M})}{\partial t} + (u + a) \frac{\partial(\ln \rho + \mathcal{M})}{\partial x} = 0, \quad (2.114)$$

また、式 (2.111) から式 (2.113) を引くと、

$$\frac{\partial \ln(\rho - \mathcal{M})}{\partial t} + (u - a) \frac{\partial(\ln \rho - \mathcal{M})}{\partial x} = 0, \quad (2.115)$$

が得られる。すなわち、

$$\text{特性線 } \frac{dx}{dt} = u + a \text{ 上で、 } J_+ = \ln \rho + \mathcal{M} = \text{一定} \quad (2.116)$$

$$\text{特性線 } \frac{dx}{dt} = u - a \text{ 上で、 } J_- = \ln \rho - \mathcal{M} = \text{一定} \quad (2.117)$$

この  $J_{\pm}$  が等温の場合の Riemann 不変量である。

先に基礎方程式を対角化した時の変形を思いだそう (式 2.83-2.88)。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0, \quad (2.118)$$

を

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0, \quad (2.119)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0, \quad (2.120)$$

$$(2.121)$$

のように書き換えた。この等温のガスダイナミクスでは、 $dx/dt = u - a$  にそって、 $w_1$  が一定、 $dx/dt = u + a$  にそって、 $w_2$  が一定に進化する。

流束ヤコビアン  $A$  が一定で、微分演算と交換する時は、

$$\mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{W}, \quad (2.122)$$

でこのベクトル  $\mathbf{W}$  の成分 ( $w^{(1)}, w^{(2)}, \dots$ ) が、特性線  $dx/dt = \lambda_1$ 、 $dx/dt = \lambda_2$ 、 $\dots$  の上で一定 (リーマン不変量と呼ぶ) つまり

$$d\mathbf{W} = d(\mathbf{L}\mathbf{U}) = 0, \quad (2.123)$$

になるが、一般に、流束ヤコビアン  $A$  が一定ではないが対角化できる時、どのような量が一定に保たれるかを考える。

式 (2.122) に対応するものが、

$$\mathbf{L}d\mathbf{U} = d\mathbf{W}, \quad (2.124)$$

であることは容易に理解できよう。これを成分表示すると、

$$(L)_{ii} du_i = dw_i, \quad (2.125)$$

で、これは、 $du_j$  の間に関係があることをしめしている。 $i$  番めの特性線に沿っては

$$(\ell^{(i)})_i du_i = 0, \quad (2.126)$$

が成り立つ。

これを、等温ガスの場合に適応して、式 (2.116) と (2.117) の  $J_{\pm}$  が不変量になっていることを示してみよう。式 (2.87) より、 $\lambda_1 = u - a$  に対しては、左固有ベクトル ( $L$  の第1行目のベクトル  $\ell^{(1)}$ ) は、

$$\ell^{(1)} = \left( \frac{u+a}{2a} \quad -\frac{1}{2a} \right), \quad (2.127)$$

で、式 (2.125) で、 $u_1 = \rho$ 、 $u_2 = \rho u$  であることに注意すると、

$$dw_1 = \frac{u+a}{2a} d\rho - \frac{1}{2a} d(\rho u) = 0, \quad (2.128)$$

展開すると

$$a d\rho - \rho du = 0, \quad (2.129)$$

これから

$$d(\mathcal{M} - \log \rho) = 0, \quad (2.130)$$

となり、式 (2.117) の  $J_-$  が保存量であることが確かめられた。式 (2.116) の  $J_+$  については演習課題として残しておく。

問題 同じようにして、特性線  $dx/dt = u + a$  に沿って、 $J_+$  が保存量であることを示せ。

### 2.5.3 等温の場合の衝撃波管の解析解

図 2.5 のような、等温の衝撃波管問題を考える。これを例に、衝撃波管問題を解析的に解くことを考えよう。

この初期値の設定に対しては、マイナス方向に希薄波が伝搬する。その上では右向きに伝わる特性線  $dx/dt = u + a$  ( $C_+$ ) に沿って、 $J_+$  が一定である。特性線  $C_+$  は、もっとも左側の静止している部分につながっていることに注意すると、

$$J_+ = \ln \rho + \mathcal{M} = \ln \rho_L, \quad (2.131)$$

ここで  $\rho_L$  はもっとも左側の静止している部分の密度である。これから、

$$\frac{\rho}{\rho_L} = \exp(-\mathcal{M}), \quad (2.132)$$



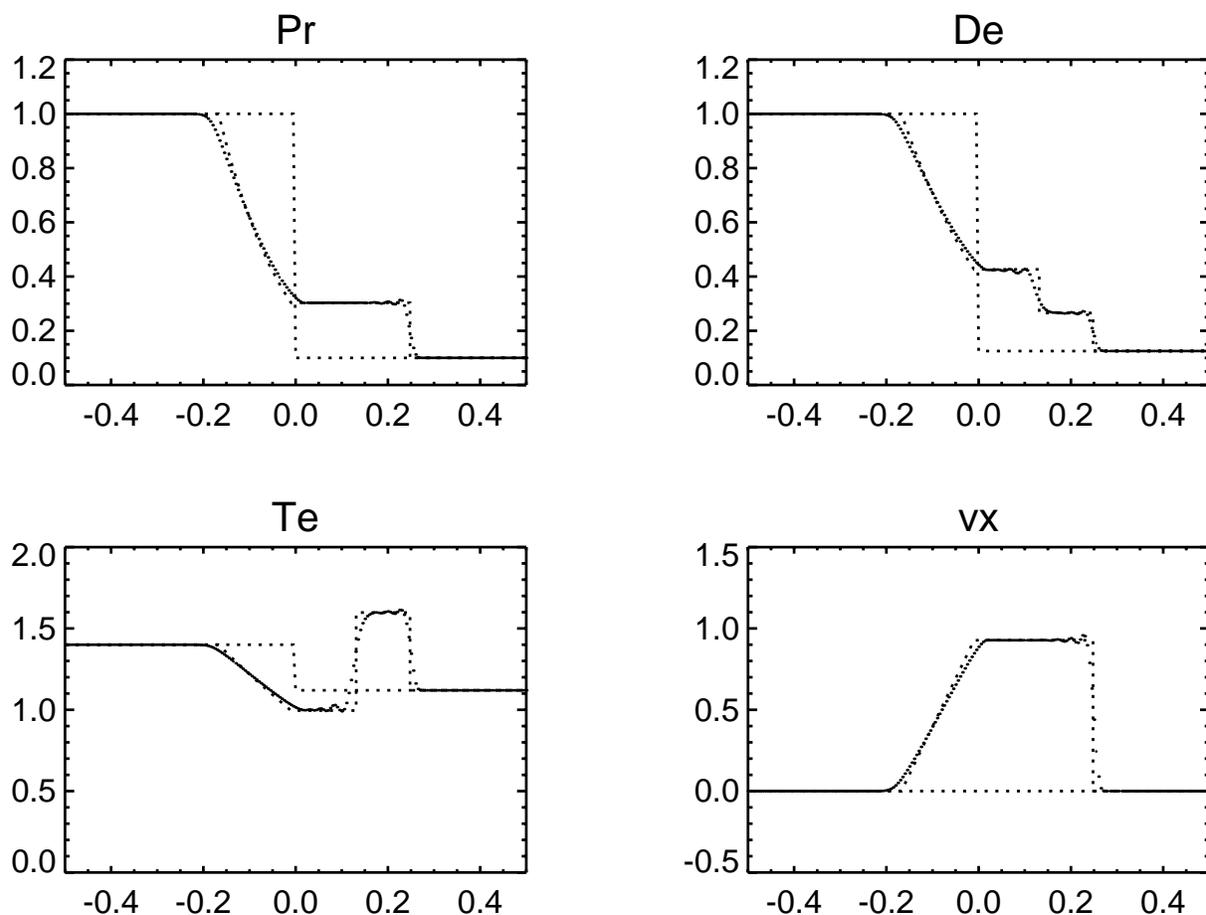


図 2.7: 断熱気体の衝撃波管問題。点線は初期値  $\rho_L = 1(-0.5 < x < 0)$ 、 $\rho_R = 0.125(0 < x < 0.5)$ 、 $p_L = 1(-0.5 < x < 0)$ 、 $p_R = 0.1(0 < x < 0.5)$ 、 $v_{xL} = v_{xR} = 0$ 、 $\gamma = 1.4$ 、実線は  $t = 0.142$  の構造。計算法は修正ラックス・ベンドルフ法。右側に進んで行く衝撃波と、左側に進んで行く希薄波、その間に接触不連続面が生じていることがわかる。

#### 2.5.4 断熱気体の衝撃波管問題

一般の断熱気体については、第3章でその流束ヤコビアン固有値、固有ベクトルなどを学ぶが、結果だけを述べると、

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0, \quad (2.138)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ v_x \\ p \end{pmatrix}, \mathbf{M} = \begin{pmatrix} v_x & \rho & 0 \\ 0 & v_x & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & v_x \end{pmatrix}, \quad (2.139)$$

は、固有値は音速  $c_s = (\gamma p / \rho)^{1/2}$  を使って、

$$\lambda_1 = u - c_s, \quad (2.140)$$

$$\lambda_2 = u, \quad (2.141)$$

$$\lambda_3 = u + c_s, \quad (2.142)$$

$$(2.143)$$

であることがわかる。等温の場合との違いは、 $u \pm c_s$ に加えて、 $\lambda_2 = u$ で伝搬する波が加わったことである。

初期に不連続を持つ分布から進化した衝撃波管問題では、第3の特性線に対応して、衝撃波、希薄波以外に第3の不連続である接触不連続面が発生する場合がある。

固有値  $\lambda_i$  に属する、左固有ベクトル  $\ell^{(i)}$  は、

$$\ell^{(1)} = \frac{1}{2\rho c_s^2} (0, -\rho c_s, 1) \quad (2.144)$$

$$\ell^{(2)} = \frac{1}{\rho c_s^2} (c_s^2, 0, -1) \quad (2.145)$$

$$\ell^{(3)} = \frac{1}{2\rho c_s^2} (0, \rho c_s, 1) \quad (2.146)$$

になるから、先に導いたように、 $LdU$  を作ると、

$$\frac{dx}{dt} = u - c_s \text{ にそって } \ell^{(1)} dU = \frac{1}{2\rho c_s^2} (-\rho c_s du + dp) = 0 \quad (2.147)$$

$$\frac{dx}{dt} = u \text{ にそって } \ell^{(2)} dU = \frac{1}{\rho c_s^2} (c_s^2 dp - dp) = 0 \quad (2.148)$$

$$\frac{dx}{dt} = u + c_s \text{ にそって } \ell^{(3)} dU = \frac{1}{2\rho c_s^2} (\rho c_s du + dp) = 0 \quad (2.149)$$

( $\lambda_2$  に属する波である) 接触不連続面を越えては、 $dx/dt = u - c_s$  と  $dx/dt = u + c_s$  の特性線が左右を結んでいる。したがって接触不連続面越の左右で、

$$-\rho c_s du + dp = 0 \quad (2.150)$$

$$\rho c_s du + dp = 0 \quad (2.151)$$

となっていなければならないことがわかる。これから  $dp = 0$ 、 $du = 0$  すなわち接触不連続面では圧力と速度のとびは許されず、密度 (及び温度) のみが不連続になることがわかる。

#### 断熱気体の流体力学での Riemann 不変量

$\lambda_1$  に属する (つまり  $dx/dt = u - c_s$  の特性線が関係する) 希薄波では、 $J_+ = u + 2c_s/(\gamma - 1)$  および、エントロピー  $s$  が一定、 $\lambda_3$  に属する希薄波では、 $J_- = u - 2c_s/(\gamma - 1)$  および、エントロピー  $s$  が一定となる。

これは以下のようにして示すことができる。 $\lambda_1$  に属する特性線を跨いで、

$$\frac{dx}{dt} = u \text{ にそって } \ell^{(2)} dU = \frac{1}{\rho c_s^2} (c_s^2 d\rho - dp) = 0 \quad (2.152)$$

$$\frac{dx}{dt} = u + c_s \text{ にそって } \ell^{(3)} dU = \frac{1}{2\rho c_s^2} (\rho c_s du + dp) = 0 \quad (2.153)$$

が成り立つが、これから、

$$\rho c_s du + c_s^2 d\rho = 0, \quad (2.154)$$

これから、

$$\int du + \int \frac{c_s}{\rho} d\rho = 0, \quad (2.155)$$

が得られる。 $c_s$  が  $\rho^{(\gamma-1)/2}$  に比例することをを用いると、第2項も積分できて、

$$u + \frac{2c_s}{\gamma-1} = J_+, \quad (2.156)$$

が一定値をとる。

$\lambda_3$  に属する特性線を跨いでも同様の議論ができて、

$$u - \frac{2c_s}{\gamma-1} = J_-, \quad (2.157)$$

が一定値をとることが示せる。

### 2.5.5 断熱気体の衝撃波管問題解析解\*

等温の時に示したように、断熱ガスの衝撃波管問題についても、iteration を用いて解析的に解を求めることができる（リーマン解法プログラムと呼ぶ）。興味ある方々は以下を読んでいただきたい。

初期の密度、圧力、速度が、 $x < 0$  に対しては、 $U_L = (\rho_L, p_L, u_L)$ 、 $x > 0$  に対しては、 $U_R = (\rho_R, p_R, u_R)$  である Riemann 問題を考える（図 2.8 参照）。これらの値の組合せによって、左右には衝撃波もしくは希薄波が伝搬する。左側に伝わる波（衝撃波もしくは希薄波）の先の領域は  $U_L$  の状態が、右側に伝わる波（衝撃波もしくは希薄波）の先の領域は  $U_R$  の状態が、保たれている。その間、 $U_L$  と  $U_R$  両方に依存する中間（希薄波のテールの外、衝撃波の後ろ面）の領域の速度と圧力が  $u_*$  と  $p_*$  を求めよう。

$p_*$  は、次の方程式の解  $p$  で与えられる。

$$f(p, U_L, U_R) \equiv f_L(p, U_L) + f_R(p, U_R) + \Delta u = 0, \quad (2.158)$$

ここで、

$$\Delta u \equiv u_R - u_L, \quad (2.159)$$

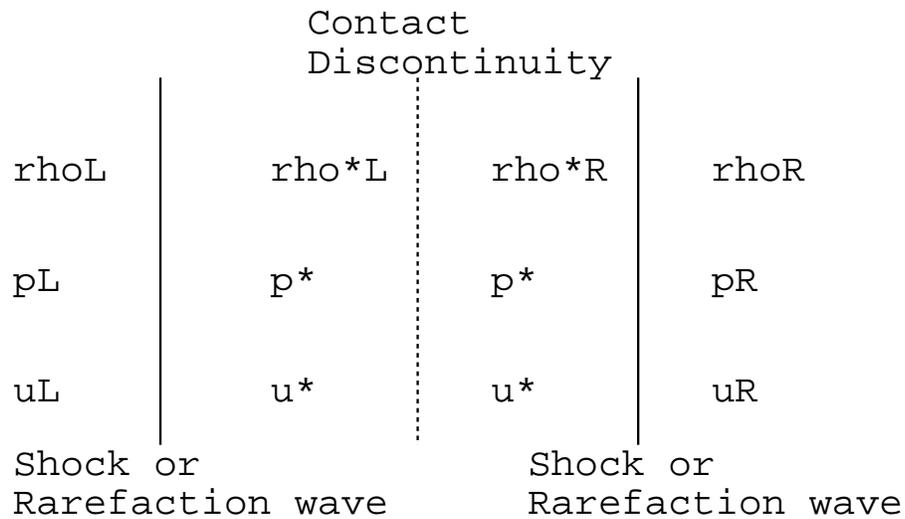


図 2.8: 断熱気体の衝撃波管問題。断熱気体の場合は、真空が現れない普通の問題については、 $dx/dt = u \pm c_s$  の特性線に関連した非線形の波が衝撃波か希薄波として現れ、その中間に、接触不連続面を生じる。初期の密度、圧力、速度が、 $x < 0$  に対しては、 $\rho_L$ 、 $p_L$ 、 $u_L$ 、 $x > 0$  に対しては、 $\rho_R$ 、 $p_R$ 、 $u_R$  であるとき、中間（希薄波のテールの外、衝撃波の後ろ面）の速度と圧力が  $u^*$  と  $p^*$ 、接触不連続面の左側の密度が  $\rho^*L$ 、右側の密度が  $\rho^*R$ 、衝撃波の速度が  $V_s$  であるとして、それらの間の関係を求めることによって、衝撃波管問題の解を求めることができる。

である。ここで、 $f_L$  と  $f_R$  は左、右に進む不連続が衝撃波か希薄波かによって次のように与えられる。

$$f_L(p, \mathbf{U}_L) = \begin{cases} (p - p_L) \left( \frac{A_L}{p + B_L} \right)^{1/2} & \text{if } p > p_L \text{ (shock)} \\ \frac{2a_L}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{p}{p_L} \right)^{(\gamma-1)/(2\gamma)} - 1 \right] & \text{if } p < p_L \text{ (rarefaction)} \end{cases} \quad (2.160)$$

$$f_R(p, \mathbf{U}_R) = \begin{cases} (p - p_R) \left( \frac{A_R}{p + B_R} \right)^{1/2} & \text{if } p > p_R \text{ (shock)} \\ \frac{2a_R}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{p}{p_R} \right)^{(\gamma-1)/(2\gamma)} - 1 \right] & \text{if } p < p_R \text{ (rarefaction)} \end{cases} \quad (2.161)$$

ここで、

$$\begin{aligned} A_L &= \frac{2}{(\gamma + 1)\rho_L}, \\ A_R &= \frac{2}{(\gamma + 1)\rho_R}, \\ B_L &= \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} p_L, \\ B_R &= \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} p_R, \end{aligned} \quad (2.162)$$

である。

この解を使って、 $u_*$  は

$$u_* = \frac{u_L + u_R}{2} + \frac{f_R(p_*) - f_L(p_*)}{2} \quad (2.163)$$

で与えられる。

### 左に進む衝撃波

左に進む衝撃波の場合の  $f_L$  を求めてみよう。左に進む衝撃波の速度を  $V_L < 0$  とする。 $V_L$  で動く座標での、ガスの速度は、 $\hat{u}_L = u_L - V_L$ 、 $\hat{u}_* = u_* - V_L$  である。ランキン・ユゴニオ条件 (式 2.97) は

$$\rho_L \hat{u}_L = \rho_{*L} \hat{u}_*, \quad (2.164)$$

$$\rho_L \hat{u}_L^2 + p_L = \rho_{*L} \hat{u}_*^2 + p_*, \quad (2.165)$$

$$(\hat{e}_L + p_L) \hat{u}_L = (\hat{e}_{*L} + p_*) \hat{u}_*, \quad (2.166)$$

で与えられる。ここで、 $\rho_{*L}$  は接触不連続面の左側で左へ進む衝撃波の右側の密度を、 $\hat{e}_{*L}$  は接触不連続面の左側で左へ進む衝撃波の右側のガスの  $V_L$  で動く座標で見た全エネルギーである。

通常行なうように、質量流束（式 2.164）を

$$Q_L = \rho_L \hat{u}_L = \rho_{*L} \hat{u}_* \quad (2.167)$$

とにおいて、他の式を書き換える。運動量流束の式 (2.165) から、

$$Q_L = -\frac{p_* - p_L}{\hat{u}_* - \hat{u}_L} = -\frac{p_* - p_L}{u_* - u_L}, \quad (2.168)$$

したがって、 $u_*$  を求める式として

$$u_* = u_L - \frac{p_* - p_L}{Q_L}, \quad (2.169)$$

が得られる。

また、 $\hat{u}_L = Q_L/\rho_L$ 、 $\hat{u}_* = Q_L/\rho_{*L}$  を式 (2.168) に代入すると、

$$Q_L^2 = -\frac{p_* - p_L}{\frac{1}{\rho_{*L}} - \frac{1}{\rho_L}} \quad (2.170)$$

となる。ランキン・ユゴニオ関係から密度と圧力の不連続の間の関係

$$\frac{\rho_L}{\rho_{*L}} = \frac{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{p_*}{p_L}}{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{p_*}{p_L}} \quad (2.171)$$

を、この式 (2.170) に代入すると、

$$Q_L^2 = \frac{\gamma + 1}{2} \left( p_* + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} p_L \right) \rho_L \quad (2.172)$$

がえられる。これを式 (2.169) に代入すると、 $u_*$  と  $p_*$  の間の関係を表す式が得られ、

$$u_* = u_L - (p_* - p_L) \left[ \frac{\gamma + 1}{2} \left( p_* + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} p_L \right) \rho_L \right]^{-1/2}, \quad (2.173)$$

となり、この式は

$$u_* = u_L - f_L(p_*, \mathbf{U}_L), \quad (2.174)$$

で

$$f_L(p_*, \mathbf{U}_L) = (p_* - p_L) \left[ \frac{A_L}{p_* + B_L} \right]^{1/2} \quad (2.175)$$

および

$$A_L = \frac{2}{(\gamma + 1)\rho_L}, \quad B_L = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} p_L \quad (2.176)$$

これは、衝撃波を通り抜けた後の  $u_*$  と  $p_*$  の間の関係を表す式で、先に上げた式 (2.160) の衝撃波の場合に一致する。

## 左に進む希薄波

希薄波の内部ではエントロピーの生成は起こらないので（起こるのは衝撃波のみ）、希薄波をはさんで

$$\rho_{*L} = \rho_L \left( \frac{p_*}{p_L} \right)^{1/\gamma} \quad (2.177)$$

が成り立つ。

式(2.156)のリーマン不変量  $J_+$  が左に進む希薄波を越えて一定であることを用いると、

$$u_L + \frac{2c_{sL}}{\gamma - 1} = u_* + \frac{2c_{s*L}}{\gamma - 1} \quad (2.178)$$

が成り立つ。ここで、音速  $c_{s*L}$  を

$$c_{s*L} = c_{sL} \left( \frac{p_*}{p_L} \right)^{(\gamma-1)/(2\gamma)}, \quad (2.179)$$

で書き換えると、

$$u_* = u_L + \frac{2c_{sL}}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{p_*}{p_L} \right)^{(\gamma-1)/(2\gamma)} \right] \quad (2.180)$$

となる。これは、希薄波を通り抜けたガスがもつ  $u_*$  と  $p_*$  の間の関係を記述している。最初に上げた式で希薄波の場合、すなわち、

$$u_* = u_L - f_L(p_*, \mathbf{U}_L), \quad (2.181)$$

$$f_L(p_*, \mathbf{U}_L) = \frac{2c_{sL}}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{p_*}{p_L} \right)^{(\gamma-1)/(2\gamma)} - 1 \right], \quad (2.182)$$

と一致している。

## 右に進む衝撃波

左に進む場合と同様の計算を行えば、

$$u_* = u_R + f_R(p_*, \mathbf{U}_R), \quad (2.183)$$

で

$$f_R(p_*, \mathbf{U}_R) = (p_* - p_R) \left[ \frac{A_R}{p_* + B_R} \right]^{1/2} \quad (2.184)$$

および

$$A_R = \frac{2}{(\gamma + 1)\rho_R}, \quad B_R = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} p_R \quad (2.185)$$

右に進む希薄波

左に進む場合と同様の計算を行なえば、

$$u_* = u_R + f_R(p_*, \mathbf{U}_R), \quad (2.186)$$

$$f_R(p_*, \mathbf{U}_R) = \frac{2c_{sR}}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{p_*}{p_R} \right)^{(\gamma-1)/(2\gamma)} - 1 \right], \quad (2.187)$$

断熱ガスのリーマン解法

左側の波が与える  $u_*$  と右側のそれが等しい条件から、

$$u_R + f_R(p_*, \mathbf{U}_R) = u_L - f_L(p_*, \mathbf{U}_L), \quad (2.188)$$

書き換えると、

$$f_R(p_*, \mathbf{U}_R) + f_L(p_*, \mathbf{U}_L) + u_R - u_L = 0, \quad (2.189)$$

で、この式を、満足する  $p_*$  の値が実現する中間の領域の圧力である。  $p_*$  が一旦、求まれば、

$$u_* = u_R + f_R(p_*, \mathbf{U}_R), \quad (2.190)$$

または

$$u_* = u_L - f_L(p_*, \mathbf{U}_L), \quad (2.191)$$

を用いれば、中間の領域の速度が求められる。

最後に、衝撃波、希薄波の伝搬速度を求めておこう。左に進む衝撃波面の速度は

$$\rho_L(u_L - V_L) = \rho_{*L}(u_* - V_L) = Q_L \quad (2.192)$$

から

$$V_L = u_L - \frac{Q_L}{\rho_L}, \quad (2.193)$$

であり、式 (2.168) を用いれば、衝撃波の速度を決めることができる。

次に希薄波についても同じように左に進むものを考えると、希薄波の頭 (Head) と尾 (Tail) はそれぞれ異なるリーマン不変量を持つ  $dx/dt = u - c_s$  で進む特性線に一致している。すなわち、希薄波の頭と尾の進行速度、 $S_{HL}$  および  $S_{TL}$  は

$$S_{HL} = u_L - a_L, \quad S_{TL} = u_* - a_{*L}, \quad (2.194)$$

となる。また、接触不連続面は

$$S_0 = u_*, \quad (2.195)$$

で伝搬する。

## 例題

図 2.7 に示した衝撃波管問題を解析的に解いてみよう。

$\rho_L = 1$ 、 $\rho_R = 0.125$ 、 $p_L = 1$ 、 $p_R = 0.1$ 、 $u_L = u_R = 0$ 、 $\gamma = 1.4$  から、式 (2.158) を満足する  $p$  を数値的に求めると、 $p_* = 0.30313$ 、 $u_* = 0.92745$  のようになる。

これから、 $\rho_{*L} = 0.42632$ 、 $\rho_{*R} = 0.26557$ 、 $S_{HL} = -1.18322$ 、 $S_{TL} = -0.07027$ 、 $S_0 = u_* = 0.92745$ 、 $V_R = 1.75216$ 、 $t = 0.142$  での位置を求めると、希薄波の頭  $x = -0.16802$ 、希薄波の尾の位置  $x = -0.00998$ 、衝撃波の位置  $x = 0.24881$  のように求めることができる。

練習問題：図 2.7 に示した衝撃波管問題の解析解を求めるプログラムを作成せよ。

## 参考文献

この章の参考文献として、以下のものを上げておく。

- (1) 宇宙流体力学 坂下志郎、池内了 培風館
- (2) 流体力学 巽友正 培風館
- (3) 流体力学の数値計算法 藤井孝蔵 東京大学出版会 (初期の版には誤植が多いので注意必要)
- (4) Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics 2nd Edition E.F. Toro Springer  
誤りあるので注意必要)

(1)、(2) はここで取り扱う圧縮性の流体力学についても詳しく記述してある教科書で、基礎方程式の導出、ランキン・ユゴニオ関係の導出など、ここで記述をはしよった部分について参考にして欲しい。(3)、(4) は数値流体力学の教科書。

# 第3章 流体および磁気流体力学方程式の風上差分

花輪知幸（千葉大先進）

## 3.1 はじめに

私たちは初日に移流方程式や Burgers 方程式の数値解法として、風上差分法を習った。風上差分法は衝撃波の取り扱いに優れていることや、非物理的な数値振動を起こさない(=TVD 条件を遵守する)ことを学んだ。昨日は、流体力学方程式や磁気流体力学方程式は波動方程式の集合体—システム方程式—であることを学んだ。この2日間の学習成果を総合すると、風上差分法は流体力学方程式や磁気流体力学方程式の数値解法としても有効であろうと容易に想像できる。実際、衝撃波を伴う(磁気)流れを解析する方法として多くの数値計算コードに採用されている。

「流束は風上で評価せよ」という風上差分法の原理(概念)は単純であるが、これを実際に流体力学方程式や磁気流体力学方程式に応用することは簡単ではない。最初に習った線型波動方程式は1成分で波の位相速度が一定であったのに対し、流体力学方程式は連立であり波の速度も時間や場所によって異なるためである。これらの違いをまとめたのが表 3.1 である。

名称	変数	自由度	線型/非線型	方程式
移流方程式	$u$	1	線型	3.1
Burgers 方程式	$u$	1	非線型	3.2, 3.3
Maxwell 方程式	$E_y, E_z, B_x, B_y$	4	線型	3.4, 3.5
流体力学方程式	$\rho, v, P$	3	非線型	3.6
磁気流体力学方程式	$\rho, v_x, v_y, v_z, B_y, B_z$	7	非線型	3.7

表 3.1: さまざまな波動方程式の比較。変数の数は独立変数を  $(x, t)$  とした 1 次元の場合で数えた。

移流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

Burgers 方程式 [波の速度を明示した形式(上)と流束を明示した形式(下)]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad (3.3)$$

(真空中の)Maxwell 方程式 [ベクトル形式と成分ごとに分解した形式]

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{B} &= 0 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial t} + c \frac{\partial B_z}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} - c \frac{\partial B_y}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} - c \frac{\partial E_z}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} + c \frac{\partial E_y}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

流体力学方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \begin{array}{c} \rho \\ \rho v \\ \frac{\rho v^2}{2} + \frac{P}{\gamma - 1} \end{array} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \begin{array}{c} \rho v \\ \rho v^2 + P \\ \frac{\rho v^3}{2} + \frac{\gamma P v}{\gamma - 1} \end{array} \right) = 0 \quad (3.6)$$

磁気流体力学方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \begin{array}{c} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ B_y \\ B_z \\ \rho E \end{array} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \begin{array}{c} \rho u^2 + P + \frac{\rho u}{B_y^2 + B_z^2 - B_x^2} \\ \rho u v - \frac{B_x B_y}{4\pi} \\ \rho u w - \frac{B_x B_z}{4\pi} \\ B_y u - v B_x \\ B_z u - w B_x \\ \rho H u - \frac{B_x (B_x u + B_y v + B_z w)}{4\pi} \end{array} \right) = 0 \quad (3.7)$$

$$E = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{P}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}{8\pi\rho} \quad (3.8)$$

$$H = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{\gamma P}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}{4\pi\rho} \quad (3.9)$$

この表では波動方程式が数学的に易しいほうから難しい方へと並べられている。Burgers 方程式は非線型なので移流方程式より難しい。Maxwell 方程式は連立方程式で変数が多いので難し

い。流体力学方程式は非線型である上に連立なので一層難しい。また変数が増えるので、磁気流体力学方程式はさらに一層難しい。

最初から流体力学方程式や磁気流体力学方程式の風上差分を考えるのは難しいので、本講義では最初に Maxwell 方程式を例にとり、連立方程式の解き方を学ぶ。次に Burgers 方程式の風上差分を簡単におさらいし、流体力学および磁気流体力学の風上差分を学ぶ。

## 3.2 Maxwell 方程式の数値解法

Maxwell 方程式 (3.5) の 1 段目と 4 段目の和と差、2 段目と 3 段目の和と差は

$$\frac{\partial}{\partial t}(E_y + B_z) + c \frac{\partial}{\partial x}(E_y + B_z) = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(E_y - B_z) - c \frac{\partial}{\partial x}(E_y - B_z) = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(E_z + B_y) - c \frac{\partial}{\partial x}(E_z + B_y) = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(E_z - B_y) + c \frac{\partial}{\partial x}(E_z - B_y) = 0 \quad (3.13)$$

と表される。このように書き換えると 1 段目の従属変数は  $E_y + B_z$  だけとなる。従って改めて  $u = E_y + B_z$  と置き換えると、この方程式は移流方程式に変形できることが分かる。2 段目以降も同様なので、

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + c \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0 \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} - c \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial t} - c \frac{\partial w_3}{\partial x} = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial w_4}{\partial t} + c \frac{\partial w_4}{\partial x} = 0 \quad (3.17)$$

$$w_1 = E_y + B_z \quad (3.18)$$

$$w_2 = E_y - B_z \quad (3.19)$$

$$w_3 = E_z + B_y \quad (3.20)$$

$$w_4 = E_z - B_y \quad (3.21)$$

$$E_y = \frac{w_1 + w_2}{2} \quad (3.22)$$

$$E_z = \frac{w_3 + w_4}{2} \quad (3.23)$$

$$B_y = \frac{w_3 - w_4}{2} \quad (3.24)$$

$$B_z = \frac{w_1 - w_2}{2} \quad (3.25)$$

と書き換えられる。Maxwell 方程式は式 (3.14)-(3.17) のような移流方程式の集まりである。これらはそれぞれ独立なので、初日に習った風上差分法で解くことができる。この移流方程式の

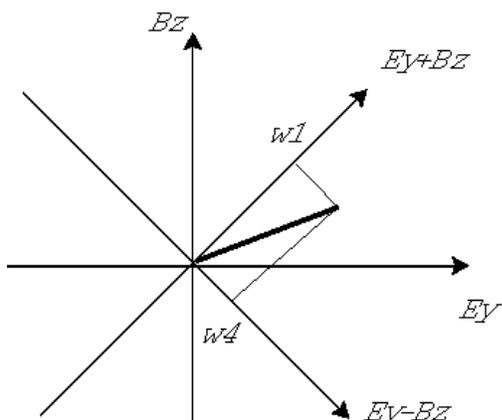


図 3.1: 変数  $E_y$ ,  $B_z$ ,  $w_1$ ,  $w_4$  の関係を幾何学的に示した図。

変数  $w_1, w_2, w_3, w_4$  は式 (3.18)-(3.21) より求めることができる。また式 (3.22)-(3.25) を用いれば、 $E_y, E_z, B_y, B_z$  を求めることができる (図 3.2)。

[発展問題] 変数  $E_y + B_z$  や  $E_y - B_z$  の物理的な意味を述べよ。

上記の結果を見通しよくするために、行列を使って計算してみよう。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} E_y \\ E_z \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & -c & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} E_y \\ E_z \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = 0 \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0 \quad (3.27)$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} E_y \\ E_z \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & -c & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

方程式 (3.27) を移流方程式 [式 (3.1)] と比較すると、変数  $u$  がベクトルになったのに伴い、波の速度  $c$  が行列  $A$  に変化していることに気づく。Maxwell の方程式に現れる波の速度  $\pm c$  は、行列  $A$  の固有値として求めることができる。

$$|A - \lambda I| = 0 \quad (3.30)$$

ここで  $I$  は単位行列を表す。具体的に計算すると

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & c \\ 0 & -\lambda & -c & 0 \\ 0 & -c & -\lambda & 0 \\ c & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \leftrightarrow \quad (\lambda - c)^2 (\lambda + c)^2 = 0 \quad (3.31)$$

このようにして求めた固有値 ( $\lambda_k$ ) と右固有ベクトル ( $r_k$ )

$$A r_k = \lambda_k r_k \quad (3.32)$$

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = c \quad (3.33)$$

$$r_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -c \quad (3.34)$$

$$r_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = -c \quad (3.35)$$

$$r_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = c \quad (3.36)$$

が求められる。この右固有ベクトルと式 (3.22)-(3.25) が類似しているので、ベクトル  $u$  を右固有ベクトルの線型結合

$$u = \begin{pmatrix} E_y \\ E_z \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = w_1 r_1 + w_2 r_2 + w_3 r_3 + w_4 r_4 = \sum_{k=1}^4 w_k r_k \quad (3.37)$$

で表すことができる。これからの計算を簡単にするため、縦ベクトル  $w$ 、横ベクトル  ${}^t w$ 、行列  $R$  を

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

$${}^t w = (w_1, w_2, w_3, w_4) \quad (3.39)$$

$$R = \begin{pmatrix} {}^t r_1 \\ {}^t r_2 \\ {}^t r_3 \\ {}^t r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

と定義すると

$$u = R w \quad (3.41)$$

と表すことができる。この行列  $R$  の逆行列を  $L$  とすると、

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \\ \ell_4 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

$$\ell_1 = (1/2, 0, 0, 1/2) = 2{}^t r_1 \quad (3.43)$$

$$\ell_2 = (1/2, 0, 0, -1/2) = 2{}^t r_2 \quad (3.44)$$

$$\ell_3 = (0, 1/2, 1/2, 0) = 2{}^t r_3 \quad (3.45)$$

$$\ell_4 = (0, 1/2, -1/2, 0) = 2{}^t r_4 \quad (3.46)$$

従って逆行列  $L$  は、 $R$  の行と列を入れ替え 2 倍したものに他ならない。これは固有ベクトルが互いに直行していて、その長さが  $|r_k|^2 = 2$  だからである。このため逆行列  $L$  の各行もやはり行列  $A$  の (左) 固有ベクトルとなる。

$$\ell_k A = \lambda_k \ell_k \quad (3.47)$$

この逆行列を使うと、式 (3.18)-(3.21) は、

$$w = L u \quad (3.48)$$

とまとめられる。これは式 (3.41) に  $L$  を掛け、右辺と左辺を取り替えたものとも等しい。

このようにして決められた行列  $R$  と  $L$  を使うと、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial(Lu)}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial(Lu)}{\partial x} = 0 \quad (3.50)$$

$$RL = LR = I \quad (3.51)$$

$$\Lambda = LAR = \begin{pmatrix} -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

ここまでの一連の計算は、線型代数の時間に習った行列の対角化である。<sup>1</sup>

変数  $w = Lu$  についての方程式は独立で線型な移流方程式の集まりなので、これらはそれぞれ1章で習った風上差分で解ける。求まった値を変換により  $u = Lw$  に戻せば Maxwell 方程式も解ける。

この節の教訓：連立方程式（システム方程式）では波の速度が行列で表されるので、行列の固有値・固有ベクトルを計算し、成分ごとの簡単な方程式にすると良い。

### 3.3 Burgers 方程式の復習と Maxwell 方程式の風上数値流束

Burgers 方程式では変数  $u$  の値により波の位相速度が変わる。また Maxwell 方程式では成分により位相速度が  $\pm c$  の値をとる。このように位相速度が一定で無い場合の風上数値流束を復習しよう。

Burgers 方程式の場合

$$u_j(t + \Delta t) = u_j(t) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{f}_{j+1/2} - \tilde{f}_{j-1/2}) \quad (3.53)$$

$$\tilde{f}_{j+1/2} = \begin{cases} \frac{[u_j(t)]^2}{2} & [u_{j+1}(t) + u_j(t) > 0] \\ \frac{[u_{j+1}(t)]^2}{2} & [u_{j+1}(t) + u_j(t) \leq 0] \end{cases} \quad (3.54)$$

式(3.54)は

$$\tilde{f}_{j+1/2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{[u_{j+1}(t)]^2 + [u_j(t)]^2}{2} - \left| \frac{u_{j+1} + u_j}{2} \right| (u_{j+1} - u_j) \right] \quad (3.55)$$

この結果から類推すると、対角化された Maxwell 方程式は

$$\frac{\partial w}{\partial t} + LAR \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f_w}{\partial x} = 0 \quad (3.56)$$

$$f_w = LARw = \Lambda w \quad (3.57)$$

<sup>1</sup>第2章でも同様に行列の対角化を行った。

なので、これを風上差分化した公式は

$$\mathbf{w}_j(t + \Delta t) = \mathbf{w}_j(t) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{\mathbf{f}}_{w,j+1/2} - \tilde{\mathbf{f}}_{w,j-1/2}) \quad (3.58)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_{w,j+1/2} = \frac{1}{2} [\mathbf{f}_{w,j+1} + \mathbf{f}_{w,j} - |\Lambda| (\mathbf{w}_{j+1} - \mathbf{w}_j)] \quad (3.59)$$

と予想される。ここで行列  $|\Lambda|$  は対角行列の絶対値なので、対角要素の絶対値をとったもの

$$|\Lambda| = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix} = c \quad (3.60)$$

と定義する。

元の変数で考えると

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_u}{\partial x} = 0 \quad (3.61)$$

$$\mathbf{f}_u = \mathbf{A} \mathbf{u} \quad (3.62)$$

なので、これを風上差分化した公式は

$$\mathbf{u}_j(t + \Delta t) = \mathbf{u}_j(t) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{\mathbf{f}}_{u,j+1/2} - \tilde{\mathbf{f}}_{u,j-1/2}) \quad (3.63)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_{u,j+1/2} = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{f}}_{w,j+1/2} \quad (3.64)$$

$$= \frac{1}{2} [\mathbf{f}_{u,j+1} + \mathbf{f}_{u,j} - \mathbf{R} |\Lambda| \mathbf{L} (\mathbf{u}_{j+1} - \mathbf{u}_j)] \quad (3.65)$$

式 (3.65) は流体力学で使う数値流束と形の上でそっくりとなる。

### 3.4 流体力学方程式の風上差分

これまでに見てきたように、風上差分の計算では波の位相速度を求める操作が欠かせない。具体的には

1. 微分方程式を  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0$  の形に書き直し、「速度行列」 $\mathbf{A}$  を求める。
2. 速度行列  $\mathbf{A}$  の固有値を求める。
3. 速度行列  $\mathbf{A}$  の固有ベクトルを求める。
4. 固有値と固有ベクトルより数値流束を求める。

という演算が必要である。以下ではそれぞれについて説明する。

ステップ1 速度行列を求める。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0 \quad (3.66)$$

を合成関数の微分則を使って書き換えると、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0 \quad (3.67)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \quad (3.68)$$

$$(\mathbf{A})_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \quad (3.69)$$

が得られる。

流体力学方程式では

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ \frac{\rho v^2}{2} + \frac{P}{\gamma - 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + P \\ \frac{\rho v^3}{2} + \frac{\gamma P v}{\gamma - 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \frac{3 - \gamma}{2} \frac{(\rho v)^2}{\rho} + (\gamma - 1) \left( \frac{\rho v^2}{2} + \frac{P}{\gamma - 1} \right) \\ \frac{\rho v}{\rho} \left[ \frac{1 - \gamma}{2} \frac{(\rho v)^2}{\rho} + \gamma (\rho E) \right] \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

$$E = \frac{v^2}{2} + \frac{P}{(\gamma - 1)\rho} \quad (3.72)$$

$$H = \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma P}{(\gamma - 1)\rho} \quad (3.73)$$

上記の変形は  $f$  を  $u$  で偏微分するため。2章でも等温の場合に同様の変形を行った。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3 - \gamma}{2} v^2 & (3 - \gamma)v & \gamma - 1 \\ \left( \frac{\gamma - 1}{2} v^2 - H \right) v & H - (\gamma - 1)v^2 & \gamma v \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

ステップ2 固有値を求める。

$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$  より、

$$\lambda_1 = v + c_s \quad (3.75)$$

$$\lambda_2 = v \quad (3.76)$$

$$\lambda_3 = v - c_s \quad (3.77)$$

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \quad (3.78)$$

ステップ3 固有ベクトルを求める。

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ v + c_s \\ H + v c_s \end{pmatrix} \quad (3.79)$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ \frac{v^2}{2} \end{pmatrix} \quad (3.80)$$

$$\mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ v - c_s \\ H - v c_s \end{pmatrix} \quad (3.81)$$

$$\ell_1 = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{v^2}{2} \frac{\gamma - 1}{c_s^2} - \frac{u}{c_s} \right), \frac{1}{2} \left( \frac{1}{c_s} - \frac{\gamma - 1}{c^2} v \right), \frac{\gamma - 1}{2 c_s^2} \right] \quad (3.82)$$

$$\ell_2 = \left[ 1 - \frac{v^2}{2} \frac{\gamma - 1}{c_s^2}, \frac{\gamma - 1}{c_s^2} v, -\frac{\gamma - 1}{c_s^2} \right] \quad (3.83)$$

$$\ell_3 = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{v^2}{2} \frac{\gamma - 1}{c_s^2} + \frac{u}{c_s} \right), -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{c_s} + \frac{\gamma - 1}{c^2} v \right), \frac{\gamma - 1}{2 c_s^2} \right] \quad (3.84)$$

ここまでに見てきたように、流体力学方程式では速度行列  $A$  が密度・速度・圧力の関数なので、場所によりその値が異なる。従って固有値や固有ベクトルも場所によって異なる。このため数値流束を計算する際に、どこの密度・速度・圧力を使って計算するのかという疑問がうまれる。これに対して Roe (1981) は

$$\bar{\rho} = \sqrt{\rho_{j+1} \rho_j} \quad (3.85)$$

$$\bar{v} = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}} v_{j+1} + \sqrt{\rho_j} v_j}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} \quad (3.86)$$

$$\bar{H} = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}} H_{j+1} + \sqrt{\rho_j} H_j}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} \quad (3.87)$$

$$\bar{c}_s^2 = (\gamma - 1) \left( \bar{H} - \frac{\bar{v}^2}{2} \right) \quad (3.88)$$

を使って「平均量」を計算すれば良いことを見いだした。この平均の取り方を Roe 平均と呼ぶこともある。

Roe 平均で速度や単位質量当たりのエネルギーは  $\sqrt{\rho}$  で重みをとった平均。一方、密度や圧力は  $1/\sqrt{\rho}$  で重みをとった平均。ちょっと予想外なのは平均化された音速 ( $\bar{c}_s$ )。音速は温度 (=

圧力と密度の比) によって決まるのだが、なぜか音速  $\bar{c}_s$  の計算に速度  $v$  も使う。式 (3.88) を計算すると、

$$\bar{c}_s^2 = \gamma \frac{\frac{P_{j+1}}{\sqrt{\rho_{j+1}}} + \frac{P_j}{\sqrt{\rho_j}}}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\sqrt{\rho_{j+1} \rho_j}}{(\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j})^2} (v_{j+1} - v_j)^2 \quad (3.89)$$

が得られる。この式は、速度勾配があると ( $v_{j+1} \neq v_j$ )、その分だけ平均音速が上昇することを示している。

この Roe 平均で計算した  $A(\mathbf{u}_{j+1}, \mathbf{u}_j)$  は任意  $\mathbf{u}_j$  と  $\mathbf{u}_{j+1}$  に対して、Property U とよばれる以下の 3 条件、

i)  $(\mathbf{f}_{j+1} - \mathbf{f}_j) = \mathbf{A}(\mathbf{u}_{j+1}, \mathbf{u}_j)(\mathbf{u}_{j+1} - \mathbf{u}_j)$

ii) 固有値はすべて実数 (波の速度はすべて実数)

iii)  $\mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_j$  の場合、 $\mathbf{A} = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{u}$

を満たす。時間の関係で省略するが、Property U を満たす平均の取り方はこれ一つに限られることも証明できる。詳しくは Hirsch あるいは藤井の教科書に書かれている。

$$\mathbf{u}_j(t + \Delta t) = \mathbf{u}_j(t) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{\mathbf{f}}_{u,j+1/2} - \tilde{\mathbf{f}}_{u,j-1/2}) \quad (3.90)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_{u,j+1/2} = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{f}}_{w,j+1/2} \quad (3.91)$$

$$= \frac{1}{2} [\mathbf{f}_{u,j+1} + \mathbf{f}_{u,j} - \mathbf{R} |\Lambda| \mathbf{L} (\mathbf{u}_{j+1} - \mathbf{u}_j)] \quad (3.92)$$

形式的には Maxwell 方程式の風上差分と同じであるが、波の速度行列  $\Lambda = \mathbf{L} \mathbf{A} \mathbf{R}$  は流れにより変化する量である。絶対値をとると

$$|\Lambda| = \begin{pmatrix} |v + c| & 0 & 0 \\ 0 & |v| & 0 \\ 0 & 0 & |v - c| \end{pmatrix} \quad (3.93)$$

この節の教訓: 数値流束の計算に必要なものは、波の位相速度 (固有値  $\lambda_k$ ) と波の固有モード (固有ベクトル  $\mathbf{r}_k$  と  $\ell_k$ ) である。これらの量は場所とともに変化するので、適切な平均量 (Roe 平均) を使う。

### 3.5 磁気流体力学方程式の風上差分

流体力学方程式のところでも分かったように数値流束に直接現れる量は、固有値と固有ベクトルである。磁気流体力学方程式では変数が増えるので計算がさらに厄介になる。ここでは計算結果だけを述べる。固有値や固有ベクトルは、流体力学方程式の時と同様に特殊な平均量を使って計算する。

ベクトル形式で記述した1次元磁気流体力学方程式

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ B_y \\ B_z \\ \rho E \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P + \frac{B_y^2 + B_z^2 - B_x^2}{4\pi} \\ \rho uv - \frac{B_x B_y}{4\pi} \\ \rho uw - \frac{B_x B_z}{4\pi} \\ B_y u - v B_x \\ B_z u - w B_x \\ \rho H u - \frac{B_x (B_x u + B_y v + B_z w)}{4\pi} \end{pmatrix}, \quad (3.95)$$

$$E = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{P}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}{8\pi\rho}, \quad (3.96)$$

$$H = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{\gamma P}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}{4\pi\rho}, \quad (3.97)$$

1次元の磁気流体力学方程式には、fast 波 (右向きと左向き)、slow 波 (右向きと左向き)、Alfvén 波 (右向きと左向き)、エントロピー波の7種類の波 (固有値・固有ベクトル) が存在する。流体力学で見てきたように、右向きと左向きの固有値と固有ベクトルは速度の符号が違っただけでよく似ている。紙数を節約するために以下では次のように fast 波、slow 波、Alfvén 波の固有値・固有ベクトルを次のようにまとめて記述する。

固有値と (右) 固有ベクトル

$$\mathbf{r}_{1,7} = \mathbf{R}_{u \pm c_f}, \quad \mathbf{r}_{2,6} = \mathbf{R}_{u \pm b_x}, \quad \mathbf{r}_{3,5} = \mathbf{R}_{u \pm c_s}, \quad \mathbf{r}_4 = \mathbf{R}_u, \quad (3.98)$$

$$\lambda_{1,7} = \bar{u} \pm c_f, \quad \lambda_{2,6} = \bar{u} \pm b_x, \quad \lambda_{3,5} = \bar{u} \pm c_s, \quad \lambda_4 = \bar{u}, \quad (3.99)$$

流体力学の時と同様に、これらの固有値と固有ベクトルは  $u_j$  と  $u_{j+1}$  の平均量を使って評価する必要がある。Brio & Wu (1988) は  $\gamma = 2$  の場合に、Property U を満たす平均が存在することを示した。Brio & Wu (1988) に比べて少し複雑ではあるが、現在は一般の  $\gamma$  に対して Property U を満たす固有値・固有ベクトルも知られている。以下では一般の  $\gamma$  について Property U を満たす固有値・固有ベクトルを示す。<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Property U の条件 (i) は第2章で習った衝撃波のランキンユゴニオ条件と関係がある。どちらも非線型性を考慮している。

$$\mathbf{R}_{u\pm c} = \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{u} \pm c \\ \bar{v} \mp \frac{B_x \bar{B}_y c}{4\pi \bar{\rho}(c^2 - b_x^2)} \\ \bar{w} \mp \frac{B_x \bar{B}_z c}{4\pi \bar{\rho}(c^2 - b_x^2)} \\ \frac{\bar{\rho}(c^2 - b_x^2)}{B_y c^2} \\ \frac{\bar{\rho}(c^2 - b_x^2)}{B_z c^2} \\ \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2}{2} + \frac{\bar{\rho}(c^2 - b_x^2)}{c^2} \pm c\bar{u} + \chi + \delta b^2 \end{bmatrix}, \quad (3.100)$$

$$\mathbf{R}_{u\pm b_x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mp \bar{B}_z \operatorname{sgn}(B_x) \\ \pm \bar{B}_y \operatorname{sgn}(B_x) \\ \bar{B}_z \sqrt{\frac{4\pi}{\bar{\rho}}} \\ -\bar{B}_y \sqrt{\frac{4\pi}{\bar{\rho}}} \\ \mp (\bar{B}_z \bar{v} - \bar{B}_y \bar{w}) \operatorname{sgn}(B_x) \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

$$\mathbf{R}_u = \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2}{2} + \delta b^2 \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

$$\chi = \mp \frac{B_x c (\bar{B}_y \bar{v} + \bar{B}_z \bar{w})}{4\pi \bar{\rho} (c^2 - b_x^2)} + \frac{\gamma - 2}{\gamma - 1} (c^2 - a^2) \quad (3.103)$$

$$\delta b^2 = \frac{\gamma - 2}{\gamma - 1} \frac{(B_{y,j+1} - B_{y,j})^2 + (B_{z,j+1} - B_{z,j})^2}{8\pi (\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j})^2} \quad (3.104)$$

$$c_{f,s}^2 = \frac{a_*^2 \pm \sqrt{a_*^4 - 4a^2 b_x^2}}{2} \quad (3.105)$$

$$b_x = \frac{|B_x|}{\sqrt{4\pi \bar{\rho}}} \quad (3.106)$$

$$a_*^2 = (\gamma - 1) \left( \bar{H} - \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2}{2} - \delta b^2 \right) - (\gamma - 2) \left( \frac{B_x^2 + \bar{B}_y^2 + \bar{B}_z^2}{4\pi \bar{\rho}} \right) \quad (3.107)$$

$$a^2 = (\gamma - 1) \left( \bar{H} - \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2}{2} - \delta b^2 - \frac{B_x^2 + \bar{B}_y^2 + \bar{B}_z^2}{4\pi\bar{\rho}} \right) \quad (3.108)$$

$$\bar{v} = \frac{\sqrt{\rho_j}v_j + \sqrt{\rho_{j+1}}v_{j+1}}{\sqrt{\rho_j} + \sqrt{\rho_{j+1}}} \quad (3.109)$$

$$\bar{w} = \frac{\sqrt{\rho_j}w_j + \sqrt{\rho_{j+1}}w_{j+1}}{\sqrt{\rho_j} + \sqrt{\rho_{j+1}}} \quad (3.110)$$

$$\bar{B}_y = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}}B_{y,j} + \sqrt{\rho_j}B_{y,j+1}}{\sqrt{\rho_j} + \sqrt{\rho_{j+1}}} \quad (3.111)$$

$$\tilde{B}_y = \frac{B_{y,j} + B_{y,j+1}}{2} \quad (3.112)$$

$$\bar{B}_z = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}}B_{z,j} + \sqrt{\rho_j}B_{z,j+1}}{\sqrt{\rho_j} + \sqrt{\rho_{j+1}}}, \quad (3.113)$$

$$\tilde{B}_z = \frac{B_{z,j} + B_{z,j+1}}{2} \quad (3.114)$$

上記の公式で (3.100) は、fast 波と slow 波の両方の固有ベクトルを表している。波の速度  $c$  に  $c_f$  を代入すれば fast 波の固有ベクトルが、 $c_s$  を代入すれば slow 波の固有ベクトルが得られる。また  $c_s$  との混同を避けるため、音速は  $a$  で表されている。

実際に磁気流体力学方程式の数値流束を計算するためには、上記の式に少し工夫を加える必要がある。工夫が必要となるのは、固有値が等しくなる (縮退する) 場合である。気をつけて上記の式を運用しないと、固有ベクトルが独立でなくなる場合がある。この問題を回避するために、Ryu & Jones (1995) は変数に工夫を凝らした。上記の公式にこの工夫を加えると以下のようなになる。

$$\mathbf{R}_{1,7} = \begin{bmatrix} \alpha_f \\ \alpha_f (\bar{u} \pm c_f) \\ \alpha_f \bar{v} \mp \alpha_s \beta_y b_x \operatorname{sgn}(B_x) \\ \alpha_f \bar{w} \mp \alpha_s \beta_z b_x \operatorname{sgn}(B_x) \\ \alpha_s \beta_y c_f \sqrt{4\pi/\bar{\rho}} \\ \alpha_s \beta_z c_f \sqrt{4\pi/\bar{\rho}} \\ \alpha_f \left\{ \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2}{2} + \delta b^2 \pm c_f \bar{u} + \frac{c_f^2}{\gamma - 1} \right. \\ \left. + \frac{\gamma - 2}{\gamma - 1} (c_f^2 - a^2) \right\} \mp \alpha_s b_x \operatorname{sgn}(B_x) (\beta_y \bar{v} + \beta_z \bar{w}) \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

$$\mathbf{R}_{2,6} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mp \beta_z \operatorname{sgn}(B_x) \\ \pm \beta_y \operatorname{sgn}(B_x) \\ \beta_z \sqrt{4\pi/\bar{\rho}} \\ -\beta_y \sqrt{4\pi/\bar{\rho}} \\ \mp (\beta_z \bar{v} - \beta_y \bar{w}) \operatorname{sgn}(B_x) \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

$$\mathbf{R}_{3,5} = \begin{bmatrix} \alpha_s \\ \alpha_s (\bar{u} \pm c_s) \\ \alpha_s \bar{v} \pm \alpha_f \beta_y a \operatorname{sgn}(B_x) \\ \alpha_s \bar{w} \pm \alpha_f \beta_z a \operatorname{sgn}(B_x) \\ -\frac{\alpha_f \beta_y a^2 \sqrt{4\pi}}{c_f \sqrt{\bar{\rho}}} \\ -\frac{\alpha_f \beta_z a^2 \sqrt{4\pi}}{c_f \sqrt{\bar{\rho}}} \\ \alpha_s \left\{ \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2}{2} + \delta b^2 \pm c_s \bar{u} + \frac{c_s^2}{\gamma - 1} + \frac{\gamma - 2}{\gamma - 1} (c_s^2 - a^2) \right\} \\ \pm \alpha_f a \operatorname{sgn}(B_x) (\beta_y \bar{v} + \beta_z \bar{w}) \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

$$\mathbf{R}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2}{2} + \delta b^2 \end{bmatrix} \quad (3.118)$$

$$\alpha_f = \frac{\sqrt{c_f^2 - b_x^2}}{\sqrt{c_f^2 - c_s^2}} \quad (3.119)$$

$$\alpha_s = \frac{\sqrt{c_f^2 - a^2}}{\sqrt{c_f^2 - c_s^2}} = \frac{c_f}{b_x} \frac{\sqrt{b_x^2 - c_s^2}}{\sqrt{c_f^2 - c_s^2}} \quad (3.120)$$

$$\beta_z = \frac{\bar{B}_z}{\sqrt{\bar{B}_y^2 + \bar{B}_z^2}}, \quad (3.121)$$

$$\beta_y = \frac{\bar{B}_y}{\sqrt{\bar{B}_y^2 + \bar{B}_z^2}} \quad (3.122)$$

平均磁場が0の場合 ( $\bar{B}_y = \bar{B}_z = 0$ ) は  $\beta_y$  と  $\beta_z$  は

$$\beta_y = 1 \quad \text{and} \quad \beta_z = 0 \quad (3.123)$$

と定義される。また  $c_f = c_s = a = b_x$  の場合、 $\alpha_f$  と  $\alpha_s$  は

$$\alpha_f = 1 \quad \text{and} \quad \alpha_s = 0 \quad (3.124)$$

$$\beta_y^2 + \beta_z^2 = 1, \quad (3.125)$$

$$\alpha_f^2 + \frac{b_x^2}{c_f^2} \alpha_s^2 = 1 \quad (3.126)$$

と定義される。

$$w_2 = \frac{1}{2} \left[ -\bar{\rho} (\beta_z \Delta v - \beta_y \Delta w) \operatorname{sgn}(B_x) + \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{4\pi}} (\beta_z \Delta B_y - \beta_y \Delta B_z) \right] \quad (3.127)$$

$$w_6 = \frac{1}{2} \left[ \bar{\rho} (\beta_z \Delta v - \beta_y \Delta w) \operatorname{sgn}(B_x) + \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{4\pi}} (\beta_z \Delta B_y - \beta_y \Delta B_z) \right] \quad (3.128)$$

$$\begin{aligned} w_1 + w_7 &= \frac{\alpha_f}{c_f^2} \left( \Delta P + \frac{\tilde{B}_y \Delta B_y + \tilde{B}_z \Delta B_z}{4\pi} \right) \\ &+ \left\{ \frac{\alpha_s}{a^2 c_f} [(\gamma - 1) c_s^2 - (\gamma - 2) a^2] \sqrt{4\pi \bar{\rho}} \right. \\ &\left. + (\gamma - 2) \sqrt{\bar{B}_y^2 + \bar{B}_z^2} \frac{\alpha_f}{c_f^2} \right\} \frac{\beta_y \Delta B_y + \beta_z \Delta B_z}{4\pi}, \end{aligned} \quad (3.129)$$

$$w_1 - w_7 = \frac{\alpha_f}{c_f} \bar{\rho} \Delta u - \frac{\alpha_s c_s}{c_f a} \operatorname{sgn}(B_x) \bar{\rho} (\beta_y \Delta v + \beta_z \Delta w), \quad (3.130)$$

$$\begin{aligned} w_3 + w_5 &= \frac{\alpha_s}{a^2} \left( \Delta P + \frac{\tilde{B}_y \Delta B_y + \tilde{B}_z \Delta B_z}{4\pi} \right) \\ &+ \left\{ \alpha_f \left[ \frac{\gamma - 2}{c_f} - (\gamma - 1) \frac{c_f}{a^2} \right] \sqrt{4\pi \bar{\rho}} \right. \\ &\left. + (\gamma - 2) \sqrt{\bar{B}_y^2 + \bar{B}_z^2} \frac{\alpha_s}{a^2} \right\} \frac{\beta_y \Delta B_y + \beta_z \Delta B_z}{4\pi}, \end{aligned} \quad (3.131)$$

$$w_3 - w_5 = \frac{\alpha_s b_x}{c_f a} \bar{\rho} \Delta u + \frac{\alpha_f}{a} \operatorname{sgn}(B_x) \bar{\rho} (\beta_y \Delta v + \beta_z \Delta w), \quad (3.132)$$

$$w_4 = \rho_{j+1} - \rho_j - \alpha C_f (w_1 + w_7) - \alpha_s (w_3 + w_5), \quad (3.133)$$

$$\Delta P = P_{j+1} - P_j, \quad (3.134)$$

$$\Delta B_y = B_{y,j+1} - B_{y,j}, \quad (3.135)$$

$$\Delta B_z = B_{z,j+1} - B_{z,j}. \quad (3.136)$$

$$R_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2}{2} + \delta b^2 + \varepsilon \end{bmatrix}, \quad (3.137)$$

and

$$\varepsilon = \frac{\rho_{j+1}e_j - \rho_j e_j - (P_{j+1} - P_j)/(\gamma - 1)}{w_1}. \quad (3.138)$$

### 3.6 さらに勉強する人へ

時間が限られているので、講義内容は基本的な概念に絞った。そのため実用的なコードを作成するのに必要な知識のいくつかを割愛せざるを得なかった。ここでは割愛した中でも重要な項目と、それについての参考書を示す。

#### 1. 膨張衝撃波 (expansion shock) の回避

ポイント 波の位相速度  $\lambda_k$  が、 $\lambda_{k,j} < 0$  かつ  $\lambda_{k,j+1} > 0$  である時に、Roe の方法は不自然な解 (expansion shock) を生むことがある。回避法は良く知られている。

参考書 Hirsch の教科書 pp. 467–469

#### 2. 数値流束の 2 次精度化

ポイント ここで講義した風上差分法は時間空間ともに 1 次精度であるが、これ時間空間ともに 2 次精度に拡張して使うのが普通である。よく用いられる方法として MUSCL 法がある。

参考書 藤井の教科書 第 3 章

#### 3. Godunov の定理と TVD 条件

ポイント 高次精度の数値流束を使うと、1 次精度風上差分では回避された数値振動が現れやすくなる。Godunov の定理はこれを回避するための基礎理論として有名。また TVD 条件は数値振動が起こさないための十分条件として有名。簡単な解説は 1 章に掲載されている。

参考書 藤井の教科書 第 3 章

#### 4. 流速制限関数 (flux limiter)

ポイント MUSCL 法で使われる。流速制限関数が必要であることは Godunov の定理より導かれる。1 章で紹介された minmod 関数はその 1 例。

参考書 藤井の教科書 第3章

5. MUSCL 法の (磁気) 流体力学方程式への適用

ポイント システム方程式に MUSCL を適用する手順は予想外に面倒である。特に磁気流体力学の場合は工夫が必要である。具体的な手順の例は Fukuda & Hanawa (2000) に載っている。

6. Property U

ポイント Property U が何故必要なのか。また Roe の平均はどのようにして導かれたのか。原理的な理解のために学習することは益。

参考書 Hirsch の教科書 pp. 463–465

7. 円筒座標および極座標での計算

ポイント 2次元シミュレーションでは円筒座標や極座標が役に立つ場合が多い。これらの座標を用いるときは少し工夫が必要である。

8. 一般的な状態方程式への拡張

ポイント この講義や普通の教科書で扱うのは理想的な状態方程式だけである。しかし一般的な状態方程式の場合にも風上差分を拡張することができる。

参考書 Nobuta & Hanawa (1999)

## 参考文献

- (1) 藤井孝藏, 1994, 流体力学の数値計算法, 東大出版会
- (2) M. Brio and C. C. Wu, 1988, J. Comput. Phys., vol. 75, p. 400
- (3) N. Fukuda and T. Hanawa, 2000, Astrophys. J., vol. 533, p. 911
- (4) C. Hirsch, 1990, Numerical Computation of Internal and External Flows, vol. 2: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows, Wiley
- (5) K. Nobuta & T. Hanawa 1999, Astrophys. J., vol. 510, p. 614
- (6) P. L. Roe, 1981, J. Comput. Phys., vol. 43, p. 357
- (7) D. Ryu and T. W. Jones, Astrophys. J., vol. 442, p. 228

# Roe法の理解のために

富阪幸治

## 1 Godunov法

図1(a)のように区間で一様な分布を持つ初期分布に関して、双極型方程式(オイラー方程式)を考える。この問題を衝撃波管問題、あるいはリーマン問題という。

第2節で見たように、この問題の解は、書き下せないにしても計算で得ることができる。これを図1(b)のような格子間隔内は一定の値を持っているとし  $U_L = U_i$ 、 $U_R = U_{i+1}$  として  $x_{i+1/2}$  の境界での物理量の飛びにリーマン問題の解を適用する。図1(c)のように、時間  $t^n$  から  $t^{n+1}$  にかけて、右方向へは衝撃波が点線の方に接触不連続が左方向に膨張波が進行するとすると、 $x_{i-1/2} < x < x_{i+1/2}$  の  $t^{n+1}$  での物理量を平均して、 $x_i$  の格子での物理量は、この区間の平均値、すなわち、

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \tilde{U}(x, t^{n+1}) dx, \quad (1)$$

で与えられる。ここで、 $\tilde{U}$  は格子内部で  $U$  を一定とした時のその後の解を表す。この方法を、Godunovの方法と呼ぶ。

### 1.1 Godunovの方法の第2の表式

式(1)で表される Godunovの方法は以下で示すように、流束を用いて、

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2}), \quad (2)$$

ただし、格子境界上での数値流束は、

$$F_{i+1/2} = F(U_{i+1/2}(0)), \quad (3)$$

で与えられる。ここで  $U_{i+1/2}(0)$  は、 $U_L = U_i$ 、 $U_R = U_{i+1}$  のリーマン問題の解、 $U_{i+1/2}((x - x_{i+1/2})/(t - t_n))$  の解の  $x = x_{i+1/2}$  での値を表す。

これは、保存系の方程式、

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

を、 $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t^n, t^{n+1}]$  の区間で積分した式が、

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(x, t^{n+1}) dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(x, t^n) dx + \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(U(x_{i-1/2}, t)) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(U(x_{i+1/2}, t)) dt \quad (5)$$

であり、リーマン問題の解、 $U(x_{i-1/2}, t)$  が  $U_{i-1/2}((x - x_{i-1/2})/(t - t_n))$  の形をしていること、また  $U(x_{i+1/2}, t)$  が  $U_{i+1/2}((x - x_{i+1/2})/(t - t_n))$  の形をしていること、すなわち、

$$U(x_{i-1/2}, t) = U_{i-1/2}(0) = \text{const}, \quad (6)$$

$$U(x_{i+1/2}, t) = U_{i+1/2}(0) = \text{const}, \quad (7)$$

であることに注意すると、理解できる。式 (5) を  $\Delta x$  で割ると、

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(x, t^{n+1}) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(x, t^n) dx - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F(U_{i+1/2}(0)) - F(U_{i-1/2}(0))) \quad (8)$$

となるが、式 (1) のように区間内の平均値で物理量を評価すると、

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F(U_{i+1/2}(0)) - F(U_{i-1/2}(0))), \quad (9)$$

が得られる。この式は、Godunov 法の数値流束は、 $x = x_{i+1/2}$  における、リーマン問題の解を用いて表せることを意味している。

## 2 FDS 法

Godunov の方法はリーマン問題の厳密な解を要求するので、それを解く手間はばかにならない。そこで、リーマン問題の近似的な解を使って流束が評価できないかを考える。このような考えにもとづく計算法を近似リーマン解法に基づく方法と呼ぶ。

流束ヤコビアン  $A$  を用いて、オイラー方程式は

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

のように書ける。Roe が用いた方法は、ここで  $A(U)$  を格子境界に接する左右の物理量  $U_L$  と  $U_R$  の関数で、短い時間間隔では一定であると考え。もちろん、単に流束を  $F_{i+1/2} = A(U_i, U_{i+1})U$  としたのでは、リーマン解法を用いたという性質は持たない。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{A}(U_L, U_R) \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (11)$$

を考える。

### 2.1 Property U

ここで、 $U_L$  と  $U_R$  の非線形関数である  $\tilde{A}(U_L, U_R)$  の具体的な形は後から検討するが、次の性質を持たなければならない。

1.  $\tilde{A}(U_L, U_R)$  は  $A(U)$  の同じ数 ( $m$ ) の実固有値を持つこと。すなわち

$$\tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 \leq \dots \leq \tilde{\lambda}_m, \quad (12)$$

でこれらは独立な右固有ベクトル

$$\tilde{r}^{(1)}, \tilde{r}^{(2)}, \dots, \tilde{r}^{(m)}, \quad (13)$$

を持つ。

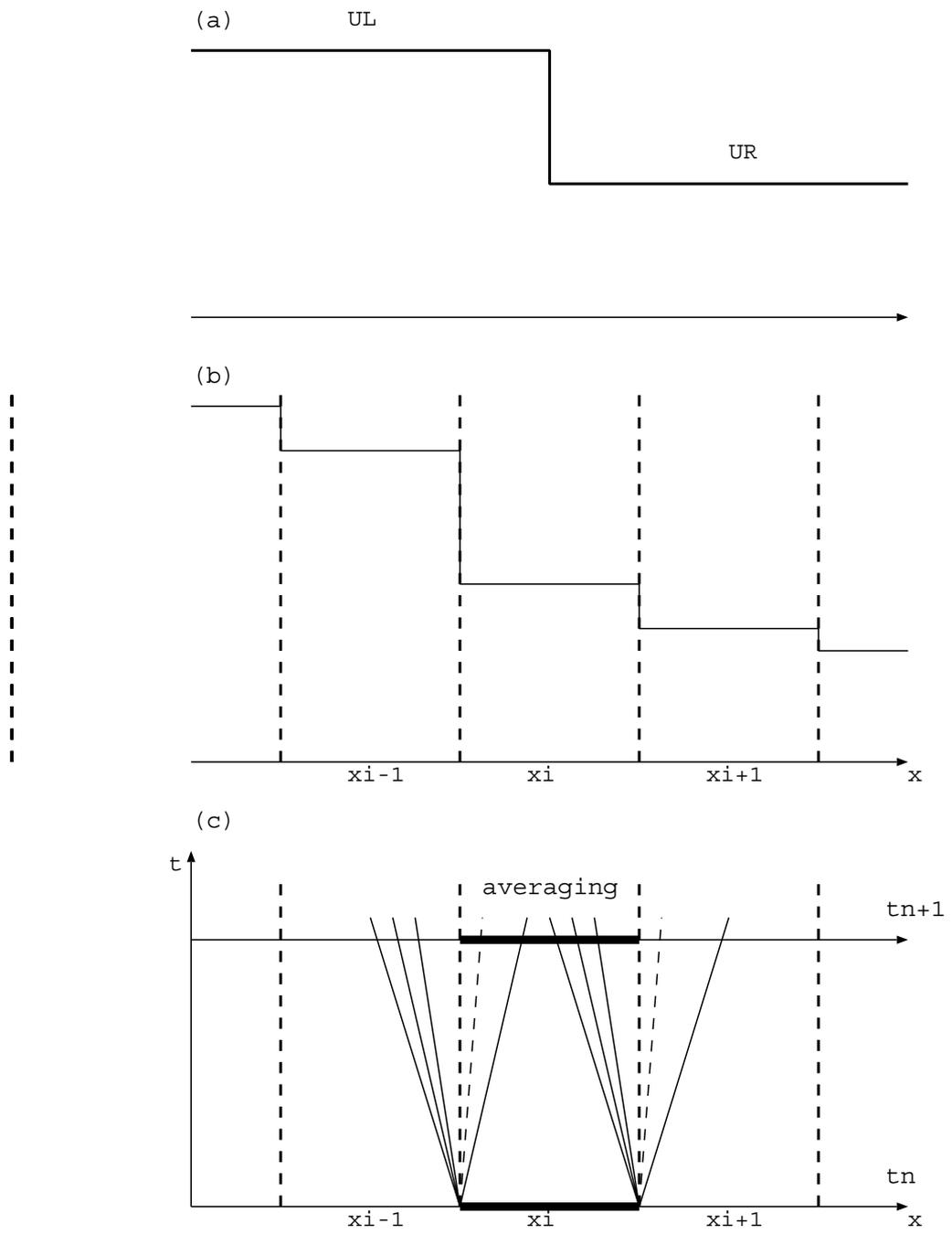


図 1: Godunov 法の説明

2. 近似ヤコビアンであること。すなわち、

$$\tilde{A}(U, U) = A(U). \quad (14)$$

3. 流束の差が正しく評価できること。すなわち、

$$F(U_R) - F(U_L) = \tilde{A}(U_R, U_L)[U_R - U_L]. \quad (15)$$

## 2.2 Roeの方法の数値流束

次に、流束をどのように書けば良いかを検討する。 $U_L$ 、 $U_R$ を $\tilde{A}(U_R, U_L)$ の固有ベクトル $\tilde{r}$ で展開すると、

$$\begin{aligned} U_L &= \sum_{i=1}^m \tilde{a}_i \tilde{r}^{(i)} \\ U_R &= \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i \tilde{r}^{(i)} \end{aligned} \quad (16)$$

のようになる。ここで、1から $I$ 番目の波が左に、 $I+1$ から $m$ 番目の波が右に伝搬するとすると、

$$U_{i+1/2} = \sum_{i=1}^I \tilde{b}_i \tilde{r}^{(i)} + \sum_{i=I+1}^m \tilde{a}_i \tilde{r}^{(i)} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} &= U_L + \sum_{i=1}^I (\tilde{b}_i - \tilde{a}_i) \tilde{r}^{(i)} \\ &= U_R - \sum_{i=I+1}^m (\tilde{b}_i - \tilde{a}_i) \tilde{r}^{(i)} \end{aligned} \quad (18)$$

同じように、

$$\Delta U = U_R - U_L, \quad (19)$$

を、 $\tilde{A}(U_R, U_L)$ の固有ベクトル $\tilde{r}$ で展開すると、

$$\Delta U = \sum_{i=1}^m \tilde{\alpha}_i \tilde{r}^{(i)}, \quad (20)$$

となる。ここで式(16)から、 $\tilde{\alpha}_i = \tilde{b}_i - \tilde{a}_i$ は波の強さを表す。つまり、 $\Delta U$ を固有ベクトルに分解した係数 $\tilde{\alpha}_i$ を用いて、式(18)から、

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{i+1/2} &= U_L + \sum_{\tilde{\lambda}_i < 0} \tilde{\alpha}_i \tilde{r}^{(i)} \\ &= U_R - \sum_{\tilde{\lambda}_i > 0} \tilde{\alpha}_i \tilde{r}^{(i)} \end{aligned} \quad (21)$$

これに、 $\tilde{A}$ を乗じてできる流束 $\tilde{F}(\tilde{U}_{i+1/2})$ は式(11)の流束ではあるが、正しい解の流束ではない。正しい解の流束 $F_{i+1/2L}$ および $F_{i+1/2R}$ が

$$\begin{aligned} F_{i+1/2L} &= \tilde{F}(\tilde{U}_{i+1/2}) + F(U_L) - \tilde{F}(U_L) \\ F_{i+1/2R} &= \tilde{F}(\tilde{U}_{i+1/2}) + F(U_R) - \tilde{F}(U_R) \end{aligned} \quad (22)$$

で与えられることを用いて左辺を計算する。式 (21) を用いると、式 (22) の右辺第 1 項は以下のように書き直せる。

$$\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{U}}_{i+1/2} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{U}_L + \sum_{\tilde{\lambda}_i < 0} \tilde{\lambda}_i \tilde{\alpha}_i \tilde{\mathbf{r}}^{(i)} \\ \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{U}_R - \sum_{\tilde{\lambda}_i > 0} \tilde{\lambda}_i \tilde{\alpha}_i \tilde{\mathbf{r}}^{(i)} \end{cases} \quad (23)$$

この右辺第 1 項は式 (22) の右辺第 3 項に当たる。この変形で、 $\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{r}}^{(i)} = \tilde{\lambda}_i \tilde{\mathbf{r}}^{(i)}$  を用いた。

式 (22) は、

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i+1/2L} &= \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) + \sum_{\tilde{\lambda}_i < 0} \tilde{\lambda}_i \tilde{\alpha}_i \tilde{\mathbf{r}}^{(i)} \\ \mathbf{F}_{i+1/2R} &= \mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \sum_{\tilde{\lambda}_i > 0} \tilde{\lambda}_i \tilde{\alpha}_i \tilde{\mathbf{r}}^{(i)} \end{aligned} \quad (24)$$

で与えられる。このままでも良いが、実質は同じだがこの 2 つの表現を加え合わせて対称化したもの

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \frac{\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1}}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m |\tilde{\lambda}_i| \tilde{\alpha}_i \tilde{\mathbf{r}}^{(i)} \quad (25)$$

が、求める Roe 法の数値流束の表式である。

### 2.2.1 もう一つの数値流束の表現

さらに、波の振幅を消去した表現に直すことを行なうと、右辺第 2 項の

$$\sum_{i=1}^m |\tilde{\lambda}_i| \tilde{\alpha}_i \tilde{\mathbf{r}}^{(i)} = \begin{pmatrix} r_1^{(1)} & r_1^{(2)} & \dots & r_1^{(m)} \\ r_2^{(1)} & r_2^{(2)} & \dots & r_2^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_m^{(1)} & r_m^{(2)} & \dots & r_m^{(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\lambda_1| \alpha_1 \\ |\lambda_2| \alpha_2 \\ \vdots \\ |\lambda_m| \alpha_m \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$= \begin{pmatrix} r_1^{(1)} & r_1^{(2)} & \dots & r_1^{(m)} \\ r_2^{(1)} & r_2^{(2)} & \dots & r_2^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_m^{(1)} & r_m^{(2)} & \dots & r_m^{(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\lambda_1| & 0 & \dots & \dots \\ 0 & |\lambda_2| & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & |\lambda_m| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{R} \begin{pmatrix} |\lambda_1| & 0 & \dots & \dots \\ 0 & |\lambda_2| & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & |\lambda_m| \end{pmatrix} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{R} |\Lambda| \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{U} \quad (27)$$

と書き直せる。ここで

$$\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L = \sum_{i=1}^m \tilde{\alpha}_i \tilde{\mathbf{r}}^{(i)}, \quad (28)$$

を用いた。したがって、求める波の振幅を消去した表現は、

$$F_{i+1/2} = \frac{F_i + F_{i+1}}{2} - \frac{1}{2} [R|\Lambda|R^{-1}]_{i+1/2} (U_{i+1} - U_i) \quad (29)$$

で与えられる。

### 2.3 Roe 平均

式(29)で、 $[R|\Lambda|R^{-1}]_{i+1/2}$ の部分をどのような平均値を用いて評価すべきかを考える。そのために、ここでは $\tilde{A}(U_L, U_R)$ の具体的な形を考えることにする。

$$\tilde{A}(U_L, U_R) = A(U_{ave}(U_L, U_R)), \quad (30)$$

のような、平均値 $U_{ave}$ が $U_L$ と $U_R$ のどのような関数になっていなければならないかを考える。結果のみを書くと、

$$\rho_{ave} = \sqrt{\rho_L \rho_R}, \quad (31)$$

$$u_{ave} = \frac{\sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad (32)$$

$$H_{ave} = \frac{\sqrt{\rho_L} H_L + \sqrt{\rho_R} H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad (33)$$

$$c_{s,ave} = \sqrt{(\gamma - 1)(H_{ave} - u_{ave}^2/2)}, \quad (34)$$

のようになるが、これがどのようにして得られるかを、等温ガスの場合について、見てみることにする。

#### 2.3.1 等温ガスの場合

基礎方程式は、

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (35)$$

で

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - u^2 & 2u \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho \\ m \end{pmatrix} = 0, \quad (36)$$

のようになる。 $A$ の固有値は

$$\lambda_1 = \frac{m}{\rho} - a = u - a, \quad (37)$$

$$\lambda_2 = \frac{m}{\rho} + a = u + a, \quad (38)$$

であり、それぞれの固有値に属する固有ベクトルは、

$$\mathbf{r}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ u - a \end{pmatrix}, \mathbf{r}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ u + a \end{pmatrix}, \quad (39)$$

である。

### 2.3.2 線形化を用いた波の振幅の表現

線形化可能、すなわち左右の物理量の差  $\Delta U$  が小さく、その「平均量  $U_{ave}$  で」書かれた流束ヤコビアン  $A_{ave}$  をもち、線形化されたリーマン問題を考える。すなわち、

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A_{ave} \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (40)$$

$$U(x, t = 0) = \begin{cases} U_L, & x < 0 \\ U_R, & x > 0 \end{cases} \quad (41)$$

まず、左右の物理量の差  $\Delta U$  を  $A_{ave}$  の右固有ベクトル  $r_{ave}^{(i)}$  で展開した時の係数を求める。

$$\Delta U = U_R - U_L = \sum_{i=1}^2 \alpha_i r_{ave}^{(i)}, \quad (42)$$

$r_{ave}^{(i)}$  の具体的な形から、

$$\Delta \rho \equiv \rho_R - \rho_L = \alpha_1 + \alpha_2, \quad (43)$$

$$\Delta(\rho u) \equiv (\rho u)_R - (\rho u)_L = \alpha_1(u_{ave} - a) + \alpha_2(u_{ave} + a), \quad (44)$$

となる。線形化可能、 $|\Delta U| \ll |U|$  であると、式 (44) は

$$u_{ave} \Delta \rho + \rho_{ave} \Delta u = \alpha_1(u_{ave} - a) + \alpha_2(u_{ave} + a), \quad (45)$$

となる。式 (43) と (45) から、 $\alpha_1$  と  $\alpha_2$  を  $\Delta \rho$  と  $\Delta u$  で書くと、

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \left( \Delta \rho - \frac{\rho_{ave}}{a} \Delta u \right), \quad (46)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \left( \Delta \rho + \frac{\rho_{ave}}{a} \Delta u \right), \quad (47)$$

となる。この表式が、一般的になり立つとする。

### 2.3.3 Roe 平均の表式

1. 適当な平均量を用いることによって、式 (46) と (47) が、必ずしも左右の物理量の差が微小ではない時にもなり立ち、
2. 固有値と固有ベクトルが、元の表式に  $U = U_{ave}$  を代入したものを用いて、 $\lambda_{ave} = \lambda(U_{ave})$  や  $r_{ave}^{(i)} = r^{(i)}(U_{ave})$  の様に書ける。すなわち、

$$\lambda_{ave1} = u_{ave} - a, \quad \lambda_{ave2} = u_{ave} + a, \quad (48)$$

および

$$r_{ave}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ u_{ave} - a \end{pmatrix}, \quad r_{ave}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ u_{ave} + a \end{pmatrix}, \quad (49)$$

3. これらを用いて、

$$\Delta U \equiv U_R - U_L = \sum_{i=1}^2 \alpha_{ave} i \mathbf{r}_{ave}^{(i)} \quad (50)$$

および

$$\Delta \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L = \sum_{i=1}^2 \alpha_{ave} i \lambda_{ave} i \mathbf{r}_{ave}^{(i)} \quad (51)$$

がなり立つように、必要な  $U_{ave}$  の形を求める。

以下にその導出の細かい計算を掲げる。式 (50) は

$$\Delta \rho = \alpha_1 + \alpha_2, \quad (52)$$

$$\Delta(\rho u) = \alpha_1(u_{ave} - a) + \alpha_2(u_{ave} + a), \quad (53)$$

であるが、式 (52) の方は、式 (46) と (47) によって自動的に満足する。次に、式 (51) は、

$$\Delta(\rho u) = \lambda_{ave} 1 \alpha_1 + \lambda_{ave} 2 \alpha_2, \quad (54)$$

$$\Delta(\rho u^2 + a^2 \rho) = \lambda_{ave} 1 \alpha_1 (u_{ave} - a) + \lambda_{ave} 2 \alpha_2 (u_{ave} + a), \quad (55)$$

となるが、式 (54) は式 (53) と同等だから、第3番目の条件は、式 (54) と (55) を満足する  $U_{ave}$  の表式はなにか? という問題になる。

式 (54) または式 (53) は、式 (46) と (47) を用いると、

$$\Delta(\rho u) = \rho_{ave} \Delta u + u_{ave} \Delta \rho, \quad (56)$$

がなり立つことになる。式 (55) より

$$\begin{aligned} \Delta(\rho u^2) &= (\alpha_1 + \alpha_2)(u_{ave}^2 + a^2) + 2a u_{ave}(\alpha_2 - \alpha_1) - a^2 \Delta \rho, \\ &= u_{ave}^2 \Delta \rho + 2u_{ave} \rho_{ave} \Delta u \end{aligned} \quad (57)$$

となるが、ここで、 $\alpha_{ave}$  の表式 (46) と (47) を用いた。式 (56) に  $2u_{ave}$  を掛けて、式 (57) から引いて  $\rho_{ave}$  を消去すると、

$$\Delta \rho \cdot u_{ave}^2 - 2\Delta(\rho u) \cdot u_{ave} + \Delta(\rho u^2) = 0, \quad (58)$$

よって、 $u_{ave}$  について解くと、

$$u_{ave} = \frac{\Delta(\rho u) \pm \sqrt{[\Delta(\rho u)]^2 - \Delta \rho \Delta(\rho u^2)}}{\Delta \rho}, \quad (59)$$

判別式の部分は、

$$\begin{aligned} D &= (\rho_R u_R - \rho_L u_L)^2 - (\rho_R - \rho_L)(\rho_R u_R^2 - \rho_L u_L^2) \\ &= \rho_R \rho_L (u_R - u_L)^2, \end{aligned} \quad (60)$$

ゆえ、

$$\begin{aligned} u_{ave} &= \frac{(\rho_R u_R - \rho_L u_L) \pm |\Delta u| \sqrt{\rho_R \rho_L}}{\rho_R - \rho_L}, \\ &= \frac{(\sqrt{\rho_R} - \sqrt{\rho_L})(\sqrt{\rho_R} u_R + \sqrt{\rho_L} u_L) + \sqrt{\rho_R \rho_L} (u_R - u_L) \pm \sqrt{\rho_R \rho_L} |(u_R - u_L)|}{\rho_R - \rho_L}, \\ &= \frac{\sqrt{\rho_R} u_R + \sqrt{\rho_L} u_L}{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}} \end{aligned} \quad (61)$$

ここで、± は、第 2 項目と第 3 項目が消えるようにとることとする。

式 (61) を式 (56) に代入して整理すると、密度の平均値に対する表式

$$\rho_{ave} = \sqrt{\rho_R \rho_L}, \quad (62)$$

が得られる。

## 2.4 Roe の方法のプログラム例

プログラムは、第 1 に

```

for j:=0 to jm-1 do // Roe Average
begin
  rhop[j]:=Sqrt(rho[j]*rho[j+1]);
  up[j]:=(Sqrt(rho[j])*u[j]+Sqrt(rho[j+1])*u[j+1])/(Sqrt(rho[j])+Sqrt(rho[j+1])));
  Hp[j]:=(Sqrt(rho[j])*H[j]+Sqrt(rho[j+1])*H[j+1])/(Sqrt(rho[j])+Sqrt(rho[j+1])));
  cp[j]:=Sqrt(gam1*(Hp[j]-up[j]*up[j]/2))
end;

```

で  $\text{rhop}[j]$  などに Roe 平均  $j + 1/2$  の評価値を求める。次に、右固有行列  $R$  を  $R[1,m]$  に、その逆行列  $R^{-1}$  を  $L[1,m]$  に求める。 $w[n1,n2]$  は  $R|\Lambda|R^{-1}$  が格納される。最後に数値流束を  $E[j]$  に求めている。

```

for j:=0 to jm-1 do
begin
  Lambda[1]:=Abs(up[j]-cp[j]);
  Lambda[2]:=Abs(up[j]);
  Lambda[3]:=Abs(up[j]+cp[j]);

  R[1,1]:= 1;
  R[1,2]:= 1;
  R[1,3]:= 1;
  R[2,1]:= up[j]-cp[j];
  R[2,2]:= up[j];
  R[2,3]:= up[j]+cp[j];
  R[3,1]:= Hp[j]-up[j]*cp[j];
  R[3,2]:= Sqr(up[j])/2;
  R[3,3]:= Hp[j]+up[j]*cp[j];

  b1:=gam1/2*Sqr(up[j]/cp[j]);
  b2:=gam1/Sqr(cp[j]);

  L[1,1]:= 0.5*(b1+up[j]/cp[j]);
  L[1,2]:= -0.5*(1/cp[j]+b2*up[j]);

```

```

L[1,3]:= 0.5*b2;
L[2,1]:= 1-b1;
L[2,2]:= b2*up[j];
L[2,3]:= -b2;
L[3,1]:= 0.5*(b1-up[j]/cp[j]);
L[3,2]:= 0.5*(1/cp[j]-b2*up[j]);
L[3,3]:= 0.5*b2;

for n1:=1 to 3 do
begin
  for n2:=1 to 3 do
  begin
    w[n1,n2]:=0.0;
    for k:=1 to 3 do
    begin
      w[n1,n2]:=w[n1,n2]+R[n1,k]*Lambda[k]*L[k,n2];
    end;
  end;
end;
E1[j]:=0.5*(m[j+1]+m[j]
           -w[1,1]*(rho[j+1]-rho[j])
           -w[1,2]*(m[j+1]-m[j])
           -w[1,3]*(e[j+1]-e[j]));
E2[j]:=0.5*(gam1*(e[j+1]+e[j])+gam3/2*(Sqr(m[j+1])/rho[j+1]+Sqr(m[j])/rho[j])
           -w[2,1]*(rho[j+1]-rho[j])
           -w[2,2]*(m[j+1]-m[j])
           -w[2,3]*(e[j+1]-e[j]));
E3[j]:=0.5*(gamma*(e[j+1]*m[j+1]/rho[j+1]+e[j]*m[j]/rho[j])
           -gam1/2*(Sqr(m[j+1]/rho[j+1])*m[j+1]+Sqr(m[j]/rho[j])*m[j])
           -w[3,1]*(rho[j+1]-rho[j])
           -w[3,2]*(m[j+1]-m[j])
           -w[3,3]*(e[j+1]-e[j]));
end;

```

この数値流束を用いて時間進化を計算すれば良い。これを使って得られた解を図2に掲げた。

```

for j:=1 to jm-1 do
begin
  rho[j]:=rho[j]-nu*(E1[j]-E1[j-1]);
  m[j]:=m[j]-nu*(E2[j]-E2[j-1]);
  e[j]:=e[j]-nu*(E3[j]-E3[j-1]);
end;

```

```
end;
```

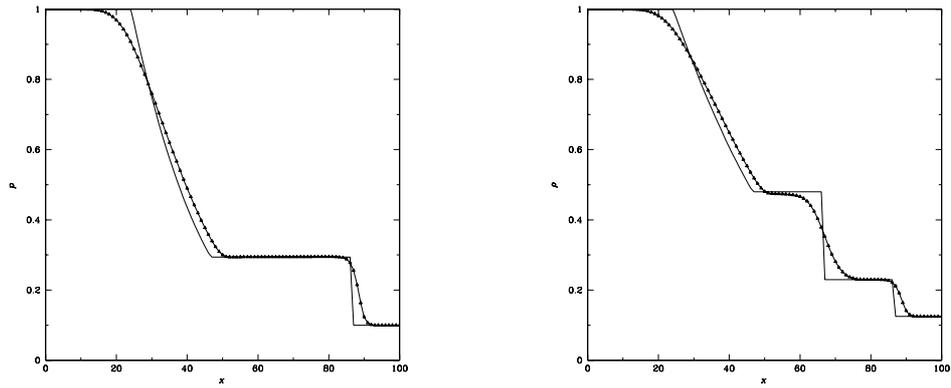


図 2: Roe の Flux Difference Splitting 法による衝撃波管問題の解。初期条件は、 $x < 50$  は  $p = 1$ 、 $\rho = 1$  で、 $x > 50$  は  $p = 0.125$ 、 $\rho = 0.1$  にとった。 $\gamma = 5/3$  で、 $\Delta t = 0.25$ 、 $\Delta x = 1$  で 80 ステップ後の解を示した。

# CIP 法入門

「天体とスペースプラズマのシミュレーションサマースクール」

2004年9月6日-9月10日

場所：千葉大学総合メディア基盤センター

## 1 CIP 法の基礎概念

双曲型の微分方程式を解く数値計算手法は、差分法だけでもこれまで様々な手法が提案されてきたが [1]、Yabe らによって提案された CIP (Cubic Interpolated Profile [2][3]) 法も高次精度差分法の一つであり、これまで流体力学を始め様々な分野で応用され、成果を上げている。本文ではこの CIP 法の導入とその応用、最後に最近提案された保存保証型 CIP 法について触れる事にする。関数  $f(x, t)$  に対する次の微分方程式を考える。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

例えば  $u$  が一定値の場合、この方程式の解析解は良く知られている様に次式で表される。

$$f(x, t) = f(x - ut, 0) \quad (2)$$

この解は初期条件のプロファイルが速度  $u$  で平行移動する事を意味している。(図 1)

この方程式を差分法で解く時は、格子間を補間関数 (多項式) で近似する事から始める。

実際の系では、速度  $u$  は時間的・空間的に一定値ではなく変化する事もあるが、短い時間  $\Delta t$  内であれば各格子点  $x_i$  上の速度  $u_i$  はそれぞれ一定値とみなせる。よって、式 (2) を用いて

$$f(x_i, t + \Delta t) \approx f(x_i - u_i \Delta t, t) \quad (3)$$

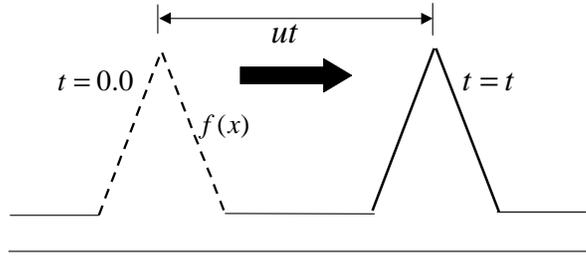


図 1: 関数の平行移動

としてよい。つまり、ある時刻  $t$  における格子点  $x_i$  上の物理量が分かっているならば  $\Delta t$  秒後の物理量は式 (3) で求まることになる。

最も簡単な例は 2 点間を 1 次関数で補間する「1 次風上差分法」である。しかしこの手法の場合、プロファイルが移動するに従って解が緩やかになってしまふ(図 2: 数値拡散)他にも 3 点を用いて 2 次関数で補間する「Lax-Wendroff 法」など様々な手法があるが、数値拡散・位相誤差による数値振動等が見ら

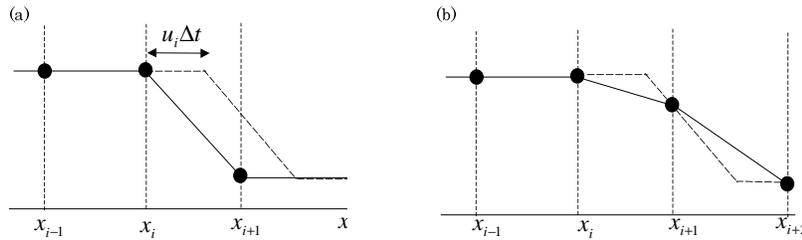


図 2: 1 次風上の例 (a) 初期条件 (実線) を  $u\Delta t$  動かす (点線)。 (b) 正しい解 (点線) と数値計算上の解 (実線)。

CIP 法は、格子 2 点間  $[i, i + 1]$  で 3 次補間関数  $F(x)$  を作る。この手法の大きな特徴として、従来の差分法は値のみを用いて格子点間を多項式で補間するが、CIP 法は格子点上の微分値も用いる。

$$F(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \quad X = x - x_i \quad (4)$$

補間関数の係数は条件「関数の値と微分値が格子点上で連続」という事を要

請すると (速度  $u < 0$  とする)

$$F(0) = f_i^n, F(\Delta x) = f_{i+1}^n, \partial_x F(0) = \partial_x f_i^n, \partial_x F(\Delta x) = \partial_x f_{i+1}^n \quad (5)$$

となる。式 (5) から、3 次関数の係数  $a, b, c, d$  は次の様に求まる。

$$a = \frac{\partial_x f_i^n + \partial_x f_{i+1}^n}{\Delta x^2} + \frac{2(f_i^n - f_{i+1}^n)}{\Delta x^3} \quad (6)$$

$$b = \frac{3(f_{i+1}^n - f_i^n)}{\Delta x^2} - \frac{2(\partial_x f_i^n + \partial_x f_{i+1}^n)}{\Delta x} \quad (7)$$

$$c = \partial_x f_i^n \quad (8)$$

$$d = f_i^n \quad (9)$$

ここで  $n$  は  $n$  ステップ目における値もしくは微分値という事を表している。速度が正の場合は  $i+1 \rightarrow i-1$ ,  $\Delta x \rightarrow -\Delta x$  と変更するだけでよい。

CIP 法では値と共に微分値も時間発展させなくてはならないが、速度  $u$  が一定値の場合は式 (1) を空間微分すると

$$\frac{\partial(\partial_x f)}{\partial t} + u \frac{\partial(\partial_x f)}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

となり、微分値は値と全く同じ方程式を満たす事が分かる。よって、 $\Delta t$  秒後 ( $n+1$  ステップ目) における値と微分値は次の様に求める事ができる。

$$f_i^{n+1} = F(x_i - u\Delta t) = a\xi^3 + b\xi^2 + \partial_x f_i^n \xi + f_i^n \quad (11)$$

$$\partial_x f_i^{n+1} = \frac{dF(x_i - u\Delta t)}{dx} = 3a\xi^2 + 2b\xi + \partial_x f_i^n \quad (12)$$

ここで  $\xi = -u\Delta t$  である。初期条件を与えれば式 (11),(12) から時間発展を求める事ができる。

矩形波が速度一定で移流する計算例を載せる。比較の為、1 次風上差分法と Lax-Wendroff 法の計算結果も載せた (図 3)。風上差分法は数値拡散が非常に大きい為、時間発展すると大きく崩れてしまう。また、Lax-Wendroff 法は数値振動が非常に大きい。それに対し、CIP 法は矩形が殆ど崩れる事がなく、解析解に近い形状を保っている事が分かる。

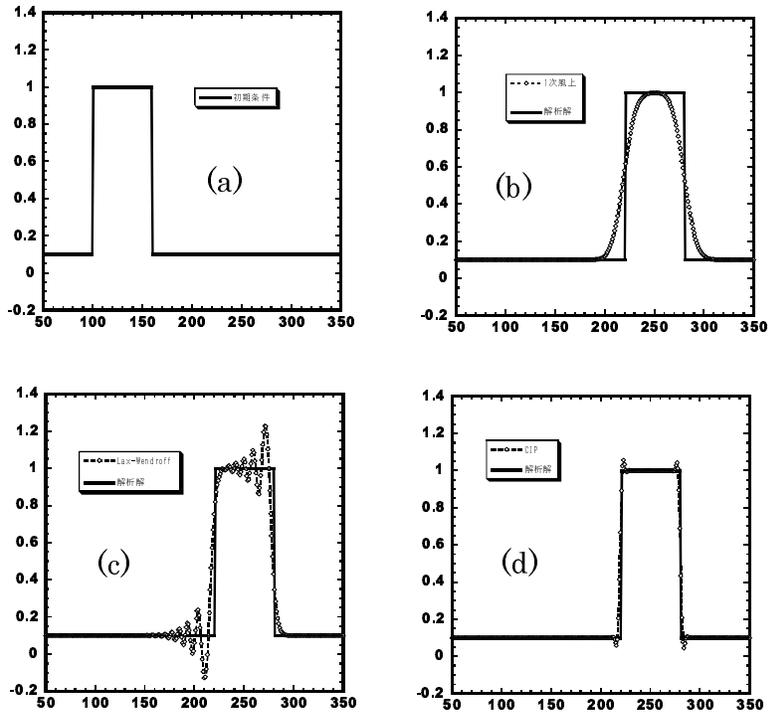


図 3: 矩形波の移流.  $u = 1, \Delta x = 1, \Delta t = 0.2, 600$  ステップ計算した結果. (a) 初期条件、(b)1 次風上差分、(c)Lax-Wendroff、(d)CIP. 実線が解析解、白丸が数値解.

ここで、各手法の計算精度についてちょっと触れる事にする。速度一定の移流方程式 (1) で、例えば一次風上差分法 (速度  $u > 0$  とする) では  $\partial f/\partial t \approx (f_i^{n+1} - f_i^n)/\Delta t$ ,  $\partial f/\partial x \approx (f_i^n - f_{i-1}^n)/\Delta x$  と近似して解くので、次の様な時間発展の式が容易に導かれる。

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{u\Delta t}{\Delta x} (f_i^n - f_{i-1}^n) \quad (13)$$

この式が元の正しい式 (1) に対して、どの程度の誤差があるのかは式 (13) の差分式内にある  $f_i^{n+1}$ ,  $f_{i-1}^n$  をそれぞれ  $t = n\Delta t, x = i\Delta x$  の周りで Taylor 展開すれば良い。この事は数値計算の本には大概書いてあり導出も簡単なので詳細は省略するが、最終的に式 (13) は

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = \mathcal{O}(\Delta t, \Delta x) \quad (14)$$

の様に書く事が出来る。 $\mathcal{O}(\Delta t, \Delta x)$  は誤差が  $\Delta t, \Delta x$  のオーダーである事を意味し (本当は右辺は 0)、一次風上差分法は "時間 1 次、空間 1 次精度" のスキームと言える。そこで、次の問題を解く事にする。

初期条件  $f(x, t = 0) = 2.0 + \sin(2\pi x)$ , 速度  $c = 1.0$ ,  $\Delta x = 1.0/NX$  (ここで  $NX$  は格子数),  $CFL \equiv c\Delta t/\Delta x = 0.2$  (=一定: ここが大事), 境界は周期境界として格子数  $NX$  (格子幅  $\Delta x$ ) を変えて解析解との誤差を取ったのが次の図 4 である。

誤差解析はテーラー展開をする事からも分かる様に、矩形波の様な "微分不連続" がある様な初期分布では意味が無い。

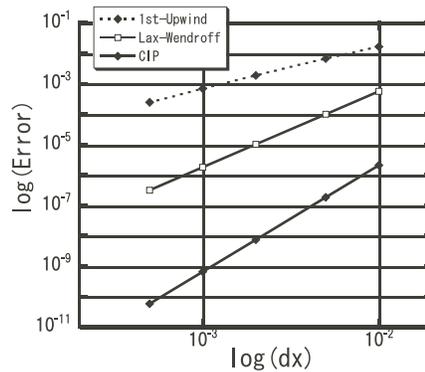


図 4: 各手法の誤差解析

グラフは誤差・格子幅を両対数軸で取っており、一次風上差分法は傾きが 1、Lax-Wendroff は傾きが 2、CIP は傾きが 3 である事が分かる。今、CFL を一定にしているのでこのグラフは時間刻みと誤差のグラフでもある事から、

Lax-Wendroff は "時間空間 2 次精度"、CIP は "時間空間 3 次精度" のスキームである事が分かる。

例えば同じ誤差 ( $error = 10^{-6}$ ) を得ようとする時、CIP と Lax-Wendroff では格子幅が約 1 桁、一次風上差分法では 2 桁以上 CIP は粗く出来る事が分かる。この事は 3 次元計算では大まかには CIP は Lax-Wendroff の  $1/10^3$  の格子数で計算出来る事を意味し、特に天文分野の様な大規模な計算においては非常に有効な性質である事は容易に想像が付く。(更に言えば、格子を細かくすれば CIP は 3 乗の速さで誤差は小さくなるので、非常に高精度な計算が可能になる事を意味する。)

また、実際の計算では CFL 条件がある以上、CFL の値がほぼ一定になる様に時間刻みを決定して計算する事が多い。しかし例えば空間が高次精度でも時間が 1 次のスキームだと、結局 1 次精度になってしまう事から CIP の様に時間・空間共に高次精度である事が重要であると言える。

## 2 非線形方程式への応用

次の様な方程式を考える。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(uf)}{\partial x} = g \quad (15)$$

これは速度が空間・時間依存し、右辺  $g$  も 0 ではない ( $f, x, t$  の関数)。このような場合、CIP 法では「移流相」「非移流相」と分ける事を行なう。式 (15) を変形すると

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = g - f \frac{\partial u}{\partial x} \equiv G \quad (16)$$

となり、また、式 (16) を空間微分すると

$$\frac{\partial(\partial_x f)}{\partial t} + u \frac{\partial(\partial_x f)}{\partial x} = \partial_x G - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (17)$$

式 (16),(17) の左辺は先述の移流部分であるが、ここに右辺の項の効果を加える。

移流相

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial(\partial_x f)}{\partial t} + u \frac{\partial(\partial_x f)}{\partial x} = 0 \quad (19)$$

非移流相

$$\frac{\partial f}{\partial t} = G \quad (20)$$

$$\frac{\partial(\partial_x f)}{\partial t} = \partial_x G - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (21)$$

計算手順はまず移流相を CIP 法で解いて  $(f^n, \partial_x f^n) \rightarrow (f^*, \partial_x f^*)$  と中間の値を求める。(式 (11),(12) で  $(f^{n+1}, \partial_x f^{n+1})$  ではなく、 $(f^*, \partial_x f^*)$  とする。)

次にその中間値を用いて、非移流相で単純な時間前進差分・空間中心差分により  $(f^*, \partial_x f^*) \rightarrow (f^{n+1}, \partial_x f^{n+1})$  を求め、次ステップの値とする。具体的な計算については次節で述べる。

## 2.1 非移流相の計算法

移流計算については先述したので、ここでは非移流計算について述べる。式 (20) は差分化すると

$$f_i^{n+1} = f_i^* + G_i \Delta t \quad (22)$$

となる。(今後、上添字 \* は移流相計算後の値を意味するものとする。) 次に式 (21) は差分化すると下式になる。

$$\partial_x f_i^{n+1} = \partial_x f_i^* + \frac{G_{i+1} - G_{i-1}}{2\Delta x} \Delta t - \partial_x f_i^* \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \Delta t \quad (23)$$

ここで  $G_i$  の計算であるが、直接  $G$  の式を代入しても計算は出来るが、計算量を軽減する工夫として式 (22) を用いる事が出来る。つまり  $G_i = (f_i^{n+1} - f_i^*)/\Delta t$  なので式 (23) は

$$\partial_x f_i^{n+1} = \partial_x f_i^* + \frac{(f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^*) - (f_{i-1}^{n+1} - f_{i-1}^*)}{2\Delta x \Delta t} \Delta t - \partial_x f_i^* \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \Delta t \quad (24)$$

と既に求まっている量で計算する事が出来る。

## 2.2 計算手順のまとめ

式 (16) の解き方を簡単に手順をまとめておくと

1. CIP 法 (式 (11),(12)) を用いて、移流相 (式 (18),(19)) の計算を行い  $(f^n, \partial_x f^n) \rightarrow (f^*, \partial_x f^*)$  とする。

2. 式 (22),(24) を用いて非移流相の計算を行ない、 $(f^*, \partial_x f^*) \rightarrow (f^{n+1}, \partial_x f^{n+1})$  とし、時間発展させる。
3. 以下、繰り返し

この用にすれば、後述の流体方程式やその他の様々な双曲型方程式 (Vlasov-Boltzmann 方程式、等) に対して CIP 法が適用出来る事が分かる。

### 3 流体力学への応用

#### 3.1 基礎方程式

1次元直交座標系での非粘性圧縮性流体の基礎方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} \quad (25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (26)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} = -\gamma p \frac{\partial u}{\partial x} \quad (27)$$

となる。ここで  $\rho$  は密度、 $u$  は速度、 $p$  は圧力、 $e$  は単位質量当たりの内部エネルギーである。理想気体では

$$e = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \quad (28)$$

である。 $\gamma$  は比熱比である。式 (25) ~ (27) はそれぞれ式 (16) と全く同形である。よってそれぞれを移流相・非移流相に分けて CIP 法を用いて計算する事が出来る。

ここで物理量の定義点についてであるが、大きく2つに分ける事が出来る。1つは  $(\dots)$  全て同じ点に定義するシグマ格子、もう1つは  $\rho$  と  $u$  は  $i$  格子、 $p$  は  $i+1/2$  格子と定義するスタガード格子である。

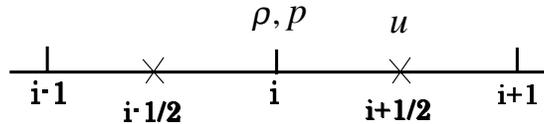


図 5: スタガード格子での、1次元での物理量配置。

### 3.2 人工粘性

圧縮性流体の計算では、超音速になると衝撃波が発生する。衝撃波は数学的には不連続面であるが、実際は流体に粘性がある為、衝撃波は分子の平均自由行程程度の厚さを持っている。数値解析では、衝撃波の厚さを格子幅  $\Delta x$  程度で捉える事が出来れば良いので、衝撃波面のみ作用する人工的な粘性を圧力項に加える事で衝撃波を捉える事が可能になる。ここでは Von-Neumann 型の人工粘性 [4][5] を用いる。

$$q_i = \begin{cases} \alpha[-\rho_i C_s (\frac{\partial u}{\partial x}) \lambda + \frac{\gamma+1}{2} (\frac{\partial u}{\partial x})^2 \lambda^2] & \text{if } \frac{\partial u}{\partial x} < 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

である。 $q_i$  は圧力と同じ定義点なので、 $(\partial u / \partial x) = (u_{i+1/2} - u_{i-1/2}) / \Delta x$  であり、圧縮領域のみに人工粘性が加わる事になる。 $\lambda$  は衝撃波の厚さであるが、ここでは格子幅  $\Delta x$  とすればよい。また、 $C_s = \sqrt{\gamma p_i^n / \rho_i^n}$  は音速、 $\alpha$  は人工粘性係数で 0.6 から 1.0 の間程度の値である。

よって、人工粘性を入れた差分式は

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^*}{\Delta t} = -\rho_i^* \frac{u_{i+1/2}^* - u_{i-1/2}^*}{\Delta x} \quad (29)$$

$$\frac{u_{i+1/2}^{n+1} - u_{i+1/2}^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho_{i+1/2}^*} \frac{(p_{i+1}^* + q_{i+1}^*) - (p_i^* + q_i^*)}{\Delta x} \quad (30)$$

$$\frac{p_i^{n+1} - p_i^*}{\Delta t} = -\{\gamma p_i^* + (\gamma - 1) q_i^*\} \frac{u_{i+1/2}^* - u_{i-1/2}^*}{\Delta x} \quad (31)$$

となる。ここで  $\rho_{i+1/2}^* = (\rho_{i+1}^* + \rho_i^*) / 2$  である。式 (31) 中で  $(\gamma - 1) q_i^*$  となっているのは、元々は保存形の基礎方程式の圧力に人工粘性を加える事から導かれる為である。

### 3.3 応用：CCUP 法

前節で移流相に CIP、非移流相に式 (29) ~ (31) を用いて流体方程式が解ける事が分かった。ところで、この非移流相を次の様に書き換えてみる。

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^*}{\Delta t} = -\rho^* \nabla \cdot \vec{u}^{**} \quad (32)$$

$$\frac{\vec{u}^{**} - \vec{u}^*}{\Delta t} = -\frac{\nabla p^{**}}{\rho^*} \quad (33)$$

$$\frac{p_i^{**} - p_i^*}{\Delta t} = -\gamma p^* \nabla \cdot \vec{u}^{**} \quad (34)$$

ここで格子点の下添字は省略し、一般的なベクトルの形で書く事にする。式 (29) ~ (31) では右辺の時刻は全て \* であったが、本手法では右辺にも \*\* がある陰解法になっている。式 (33) の両辺の div を取り、 $\gamma p = \rho C_s^2$  ( $C_s$  は音速) である事に注意して式 (34) を代入すると、次の圧力に関する poisson 方程式が導かれる。

$$\nabla \cdot \left( \frac{\nabla p^{**}}{\rho^*} \right) = \frac{p^{**} - p^*}{\rho^* C_s^2 \Delta t^2} + \frac{\nabla \cdot \vec{u}^*}{\Delta t} \quad (35)$$

本手法を CIP-CUP 法 (CIP-Combined Unified Procedure) と呼ぶ [6]。式 (35) を反復法 (SOR, Bi-CGSTAB, etc) で  $p^{**}$  を求めてから式 (33) で  $\vec{u}^{**}$  を求め、式 (32) で  $\rho^{n+1}$  を求める。非圧縮性流体は音速の近似であるが、式 (35) で  $C_s \rightarrow \infty$  とすると MAC 法のような式になる。この様に音速を変える事によって圧縮性・非圧縮性流体を統一的に解く事が出来る。実際には人工粘性・実粘性・熱伝導等の効果を入れる事になるので、

$$\frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^{**}}{\Delta t} = \vec{Q}_u \quad (36)$$

$$\frac{p^{n+1} - p^{**}}{\Delta t} = Q_p \quad (37)$$

( $\vec{Q}_u, Q_p$  は先述の効果) の様に後でそれらの効果で時間発展させ、 $p^{n+1}$ 、 $\vec{u}^{n+1}$  を求める。

### 3.4 計算例

計算例として最も典型的な衝撃波管問題を CIP 法と CCUP 法で解いた結果を示す。初期条件は  $p = 1, \rho = 1$  ( $x < 1$ ),  $p = 0.1, \rho = 0.125$  ( $x > 1$ )。比熱比  $\gamma = 1.4$ 、格子幅  $\Delta x = 0.1$  時間刻み  $\Delta t = 0.01$  とし、400 ステップまで計算を行なった。また、人工粘性係数  $\alpha = 0.7$  である。図 6 は密度の結果であるが、共に解析解とほぼ一致した解が得られている事が分かる。また、衝撃波面も sharp に捉えられている事が分かる。

接触不連続面で若干の overshoot, undershoot が見られるが、これらも単調性が保証されている有理関数 CIP 法 [7] を用いる事で改善する事が出来る。圧縮性流体の計算では CIP 法の方が Rarefaction Wave 等を見ても若干良い様であるが、CCUP 法は計算が安定であるという利点がある。

### 3.5 (Appendix) 円柱・球座標系の半径方向 1 次元 CIP

ここまで述べてきたのはデカルト 1 次元座標系だが、容易に他の座標系にも拡張出来る。例えば流体方程式は次の様に一般的に書き換えられる。

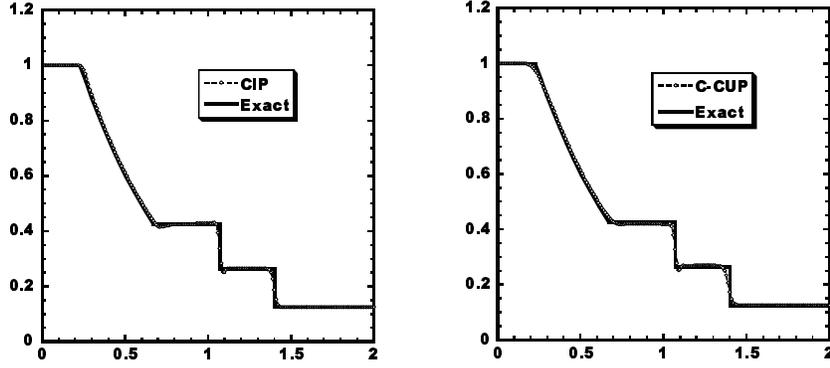


図 6: CIP 法 (左) と CCUP 法 (右) の計算結果 (密度)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^\delta} \frac{\partial(\rho u r^\delta)}{\partial r} = 0 \quad (38)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (39)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial r} = -\frac{p}{\rho r^\delta} \frac{\partial(u r^\delta)}{\partial r} \quad (40)$$

ここで、 $\delta = 0, 1, 2$  はそれぞれデカルト、円柱、球座標に対応する。よって、右辺の非移流項は

$$\mathbf{G} = \left( -\frac{\rho}{r^\delta} \frac{\partial(u r^\delta)}{\partial r}, -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, -\frac{p}{\rho r^\delta} \frac{\partial(u r^\delta)}{\partial r} \right) \quad (41)$$

と変えるだけで良い。

## 4 保存保証型 CIP 法

### 4.1 CIP-CSL2(Conservative Semi-Lagrangian) 法

第 1,2 章で述べた CIP 法は「非保存形」の方程式に適用するので、値の保存が数学的には保証されていない。(しかし、通常非保存形の差分法と比較しても保存の崩れは非常に小さい。)そこで近年、保存が保証される CIP 法が提案されている。これまで CIP-CSL4[8] 法と CIP-CSL2 [9] 法が提案されているが、本節では CIP-CSL2 法について述べる。

例えば次の様な方程式を考える。

$$\frac{\partial D}{\partial t} + u \frac{\partial D}{\partial x} = 0 \quad (42)$$

これは普通の移流方程式だが、式 (42) の空間微分を取り、 $D' \equiv \partial D / \partial x$  とすると次の保存方程式が得られる。

$$\frac{\partial D'}{\partial t} + \frac{\partial(uD')}{\partial x} = 0 \quad (43)$$

このことから、式 (43) で  $D' \equiv f(= \text{値})$ 、式 (42) で  $D = \int f dx$  とすれば CIP 法における値と微分値の関係をそのまま積分値と値に置き換える事が出来、第 1,2 章で述べた関係式をそのまま適用する事が出来る。

通常の CIP 法は値  $f$  と微分値  $\partial f / \partial x$  を用いて 3 次補間関数を構築するが、CIP-CSL2 法は値  $f$  と積分値  $\rho = \int f dx$  を用いて 2 次関数を構築する。その際、積分値  $\rho$  は格子の midpoint に定義する。値が 2 次関数なので、積分値の関数は 3 次関数になっている。そこで

$$D_i(x) = \int_{x_i}^x f(x') dx' \quad (44)$$

を導入し、

$$D_i(x) = A1_i X^3 + A2_i X^2 + f_i^n X \quad (45)$$

と積分値を 3 次関数で補間すれば、その微分に対応する値の関数は

$$F_i(x) = \frac{\partial D(x)}{\partial x} = 3A1_i X^2 + 2A2_i X + f_i^n \quad (46)$$

と書く事が出来る。ここで  $X \equiv x - x_i$  である。

補間関数  $D_i(x)$  の連続条件は、 $D_i(x)$  が値を与える事に注意すると CIP 法と同様に

$$\begin{aligned} D_i(x_i) &= 0, \quad D_i(x_{iup}) = -\text{sgn}(u_i) \rho_{icell}^n, \\ \partial_x D_i(x_i) &= f_i^n, \quad \partial_x D_i(x_{iup}) = f_{iup}^n \end{aligned} \quad (47)$$

ここで、 $\rho_{icell}^n$  は上流側の格子内の全質量 ( $icell = i - \text{sgn}(u_i)/2$ )、 $iup = i - \text{sgn}(u_i)$  である。よって、係数  $A1, A2$  は

$$A1 = \frac{f_i^n + f_{iup}^n}{\Delta x_i^2} + \frac{2\text{sgn}(u_i) \rho_{icell}^n}{\Delta x_i^3} \quad (48)$$

$$A2 = -\frac{3\text{sgn}(u_i) \rho_{icell}^n}{\Delta x_i^2} - \frac{2(f_i^n + f_{iup}^n)}{\Delta x_i} \quad (49)$$

$\Delta x_i \equiv x_{iup} - x_i$  であり、この様に一意に決定する事が出来る。

## 4.2 時間発展のまとめ

CIP 法が値  $f$  と微分値  $\partial_x f$  の時間発展が必要なのに対応して、CIP-CSL2 法は値  $f$  と積分値  $\rho$  の時間発展が必要である。よって、保存方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(uf)}{\partial x} = 0 \quad (50)$$

を CIP-CSL2 法で解く時は

1. 値  $f$  は、式 (50) を移流相と非移流相に分け、式 (18),(20) ( $g = 0$ ) の様に時間発展させる。つまり

(a) 移流相

$$f_i^* = F(x_i - u\Delta t) = 3A1\xi^2 + 2A2\xi + f_i^n \quad (51)$$

(b) 非移流相

$$f_i^{n+1} = f_i^* + G_i\Delta t \quad G_i = -f_i^* \frac{\partial u}{\partial x} \quad (52)$$

である。

2. 積分値  $\rho$  は、格子内の質量の流入出を考慮すればよいので (図 7 参照)

$$\rho_{i-1/2}^{n+1} = \rho_{i-1/2}^n + (\Delta\rho_{i-1}^n - \Delta\rho_i^n) \quad (53)$$

とすればよく、また  $\Delta\rho_i^n$  は格子点上での質量流束を表し、

$$\begin{aligned} \Delta\rho_i^n &= \int_{x_i+\xi}^{x_i} F(x')dx' = -D_i(x_i + \xi) \\ &= -(A1_i\xi^3 + A2_i\xi^2 + f_i^n\xi) \end{aligned} \quad (54)$$

と書く事が出来る。

3. 以下、繰り返し

ここで  $\xi = -u_i\Delta t$  である。式 (53),(54) は、各格子間での質量 (積分値) の収支を表しているので、計算領域全体で全質量が保存される事がわかる。

本手法は、例えば流体方程式の連続の式は CIP-CSL2 法で解いて質量保存させ、運動方程式・エネルギー式は通常の CIP 法で解くといった応用が出来る。

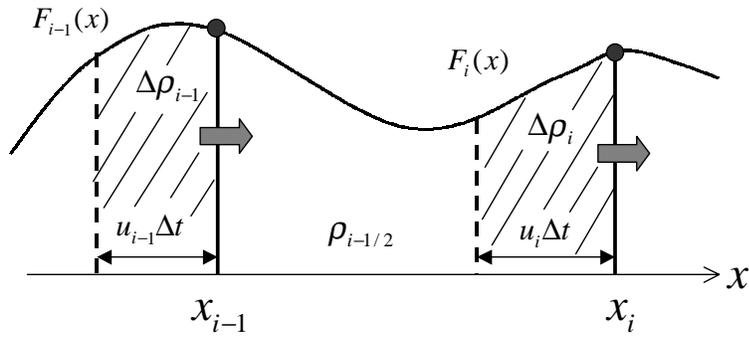


図 7:  $\Delta t$  内の格子内の質量流入・流出。

### 4.3 計算例

式 (50) の計算例として、次の計算を行なった。速度は

$$u(x) = 1.0 / (1.0 + 0.5 \sin(2\pi x)) \quad (55)$$

とし、値の初期条件は

$$f(x, t = 0) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0.25 < x < 0.45 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とした。格子幅  $\Delta x = 2.0/N$  ( $N$  は格子数)、時間幅  $\Delta t = \Delta x \times 0.2$  とし、格子数を変えてそれぞれ  $t = 0.8$  まで計算を行なった。また、積分値  $\rho$  の初期条件は格子間が直線補間されているとして

$$\rho_{i-1/2}^0 = \frac{f_{i-1}^0 + f_i^0}{2} (x_i - x_{i-1}) \quad (56)$$

とした。

図 8(a)(b) は計算結果と解析解との比較、図 8(c)(d) は Mass Error (最も粗い  $N = 200$ ) を表している。計算結果については、同じ格子数で従来の CIP 法とほぼ同等の結果を得る事が出来ている。保存については、値  $f$  については完全には保存はしていない。これは初期条件で積分値を直線補間したと仮定した為である。CIP 法も十分小さい範囲で  $f$  も保存されているが、CIP-CSL2 法は更にその保存が良くなっている。また、CIP-CSL2 法で用いられている積分値  $\rho$  については計算機の誤差 ( $\sim 10^{-14}$ ) 以内で質量が保存されている。格子内質量の正しい定義が  $f_i \Delta x$  ではなく  $\rho_{i-1/2}$  であることを考慮すれば、本手法は完全な保存保証スキームである事が分かる。

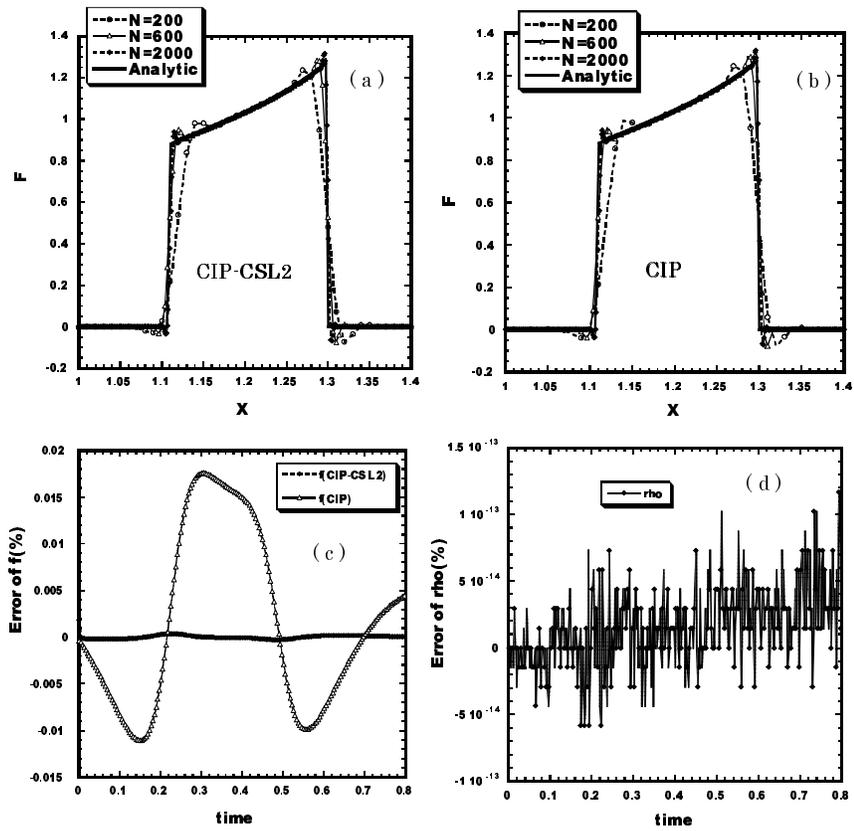


図 8: 計算結果。(a) 格子数  $N = 200, 600, 2000$  の結果と解析解 (CIP-CSL2)、(b) 同 CIP、(c) 値  $f$  の Mass Error(CIP、CIP-CSL2)、(d) 積分値  $\rho$  の Mass Error(CIP-CSL2)。

## 4.4 多次元化

### 4.4.1 2次元

多次元化する方法として、Directional Splitting[10]の方法を簡単に紹介する。例えば2次元の場合、方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(uf)}{\partial x} + \frac{\partial(vf)}{\partial y} = 0 \quad (57)$$

となるが、1次元の手法を活用する為に図9のような物理量を定義する。

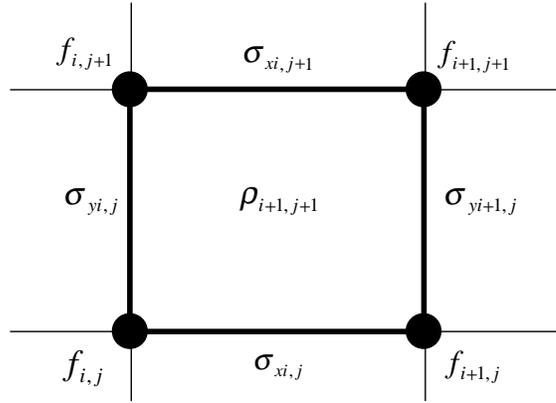


図9: CIP-CSL2の物理量(2次元)。線密度 $\sigma_x, \sigma_y$ と密度 $\rho$ 。

ここで、

$$\sigma_{xij}^n = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y_j, t) dx \quad (58)$$

$$\sigma_{yij}^n = \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x_i, y, t) dy \quad (59)$$

$$\rho_{ij}^n = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y, t) dy dx \quad (60)$$

である。計算手順は

$$STEP1 : \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(uf)}{\partial x} = 0 \quad (61)$$

$$STEP2 : \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(vf)}{\partial y} = 0 \quad (62)$$

を順次行なう。前節、式(50)~(54)の手順をCIPCSL1D( $u, f^n, f^{n+1}, \rho^n, \rho^{n+1}, x$ )と置くと、

$$\begin{aligned}
\text{STEP1} & : \text{CIPCSL1D}(u, f^n, f^{\text{step1}}, \sigma_x^n, \sigma_x^{\text{step1}}, x) \\
& \quad \bar{u} = \frac{u_{ij} + u_{i+1j}}{2} \\
& \quad \text{CIPCSL1D}(\bar{u}, \sigma_y^n, \sigma_y^{\text{step1}}, \rho^n, \rho^{\text{step1}}, x) \quad (63)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{STEP2} & : \text{CIPCSL1D}(v, f^{\text{step1}}, f^{n+1}, \sigma_y^{\text{step1}}, \sigma_y^{n+1}, y) \\
& \quad \bar{v} = \frac{v_{ij} + v_{i+1j}}{2} \\
& \quad \text{CIPCSL1D}(\bar{v}, \sigma_x^{\text{step1}}, \sigma_x^{n+1}, \rho^{\text{step1}}, \rho^{n+1}, y) \quad (64)
\end{aligned}$$

とすればよい。

#### 4.4.2 3次元

3次元では、線密度  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  と面密度  $S_{xy}, S_{yz}, S_{zx}$  (と密度  $\rho$ ) を用意する。ここで

$$S_{xyijk}^n = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y, z_k, t) dy dx \quad (65)$$

$$S_{yzijk}^n = \int_{z_k}^{z_{k+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x_i, y, z, t) dy dz \quad (66)$$

$$S_{zxijk}^n = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{z_k}^{z_{k+1}} f(x, y_j, z, t) dx dz \quad (67)$$

$$\rho_{ijk}^n = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{z_k}^{z_{k+1}} f(x, y, z, t) dx dy dz \quad (68)$$

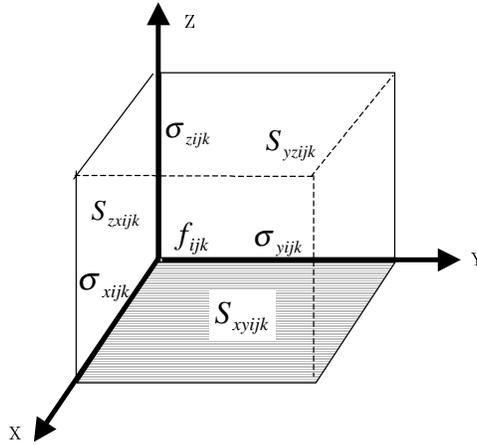


図 10: CIP-CSL2 の物理量 (3次元)。線密度  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  と面密度  $S_{xy}, S_{yz}, S_{zx}$

である。同様に計算手順は

$$STEP1 : \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(uf)}{\partial x} = 0 \quad (69)$$

$$STEP2 : \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(vf)}{\partial y} = 0 \quad (70)$$

$$STEP3 : \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(wf)}{\partial z} = 0 \quad (71)$$

であり、2次元と同様に

$$\begin{aligned}
STEP1 : & CIPCSL1D(u, f^n, f^{step1}, \sigma_x^n, \sigma_x^{step1}, x) \\
& \bar{u} = \frac{u_{ijk} + u_{ij+1k}}{2} \\
& CIPCSL1D(\bar{u}, \sigma_y^n, \sigma_y^{step1}, S_{xy}^n, S_{xy}^{step1}, x) \\
& \hat{u} = \frac{u_{ijk} + u_{ijk+1}}{2} \\
& CIPCSL1D(\hat{u}, \sigma_z^n, \sigma_z^{step1}, S_{zx}^n, S_{zx}^{step1}, x) \\
& \tilde{u} = \frac{u_{ijk} + u_{ijk+1} + u_{ij+1k} + u_{ij+1k+1}}{4} \\
& CIPCSL1D(\tilde{u}, S_{yz}^n, S_{yz}^{step1}, \rho^n, \rho^{step1}, x) \quad (72) \\
STEP2 : & CIPCSL1D(v, f^{step1}, f^{step2}, \sigma_y^{step1}, \sigma_y^{step2}, y) \\
& \bar{v} = \frac{v_{ijk} + v_{i+1jk}}{2} \\
& CIPCSL1D(\bar{v}, \sigma_x^{step1}, \sigma_x^{step2}, S_{xy}^{step1}, S_{xy}^{step2}, y) \\
& \hat{v} = \frac{v_{ijk} + v_{ijk+1}}{2} \\
& CIPCSL1D(\hat{v}, \sigma_z^{step1}, \sigma_z^{step2}, S_{yz}^{step1}, S_{yz}^{step2}, y) \\
& \tilde{v} = \frac{v_{ijk} + v_{ijk+1} + v_{i+1jk} + v_{i+1jk+1}}{4} \\
& CIPCSL1D(\tilde{v}, S_{zx}^{step1}, S_{zx}^{step2}, \rho^{step1}, \rho^{step2}, y) \quad (73) \\
STEP3 : & CIPCSL1D(w, f^{step2}, f^{n+1}, \sigma_z^{step2}, \sigma_z^{n+1}, z) \\
& \bar{w} = \frac{w_{ijk} + w_{i+1jk}}{2} \\
& CIPCSL1D(\bar{w}, \sigma_x^{step2}, \sigma_x^{n+1}, S_{zx}^{step2}, S_{zx}^{n+1}, z) \\
& \hat{w} = \frac{w_{ijk} + w_{ij+1k}}{2} \\
& CIPCSL1D(\hat{w}, \sigma_y^{step2}, \sigma_y^{n+1}, S_{yz}^{step2}, S_{yz}^{n+1}, z) \\
& \tilde{w} = \frac{w_{ijk} + w_{ij+1k} + w_{i+1jk} + w_{i+1j+1k}}{4} \\
& CIPCSL1D(\tilde{w}, S_{xy}^{step2}, S_{xy}^{n+1}, \rho^{step2}, \rho^{n+1}, z) \quad (74)
\end{aligned}$$

である。

## 参考文献

- [1] E.F.Toro, Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics (Springer, 1997)
- [2] T.Yabe, F.Xiao and T.Utsumi, The Constrained Interpolation Profile Method for Multiphase Analysis, *J.Comput.Phys.*,**169**,556 (2001).
- [3] T.Yabe and T.Aoki, A Universal Solver for Hyperbolic Equations by Cubic-Polynomial Interpolation. I. One-Dimensional Solver, *Comput.Phys.Commun.*,**66**,219 (1991).
- [4] J.Von Neumann, R.D.Richtmyer, *J.Appl.Phys.*,**21**,232 (1950).
- [5] Y.Ogata and T.Yabe, Shock capturing with improved numerical viscosity in primitive Euler representation, *Comput.Phys.Commun*,**119**,179 (1999)
- [6] T.Yabe and P.Y.Wang, Unified Numerical Procedure for Compressible and Incompressible Fluid, *J.Phys.Soc.Japan.*,**60**,No.7,2105 (1991).
- [7] F.Xiao,T.Yabe and T.Ito, *Comput.Phys.Commun.*,**93**,1 (1996).
- [8] R.Tanaka,T.Nakamura and T.Yabe, *Comput.Phys.Commun.*,**126**,232 (2000)
- [9] T.Yabe,R.Tanaka,T.Nakamura and F.Xiao, *Mon. Wea. Rev.*,**129**,332 (2001)
- [10] T.Nakamura,R.Tanaka,T.Yabe,and K.Takizawa, *J.Comput.Phys.*,**174**,171 (2001)

# CIP 法による MHD 解法

「天体とスペースプラズマのシミュレーションサマースクール」

2004 年 9 月 6 日-9 月 10 日

場所：千葉大学総合メディア基盤センター

## 1 CIP 法による MHD 解法：CIP-MOCCT 法

現在様々な MHD 解法が存在するが、CIP 法で MHD を解く場合に磁場項と誘導方程式をどのように解くかが課題となる。その解決法として、誘導方程式の解法である MOCCT 法を組み合わせた CIP-MOCCT 法が Kudoh (国立天文台) によって提案された [1][2][3]。これを紹介する。

磁気流体の基礎方程式は次の様に書かれる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla (p + \frac{B^2}{8\pi}) + \frac{1}{4\pi\rho} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{Q}_f \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) p = -\gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{Q}_p \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5)$$

ここで  $\mathbf{Q}_f$  は実粘性・人工粘性・重力等の外力項、 $\mathbf{Q}_p$  は熱伝導・人工粘性等の項である。

式 (1) ~ (3) 中の左辺は CIP 法で解き、右辺は非移流相として解けば良いのだが (圧力項を Poisson 方程式で解けば CCUP 法になる) 式 (4),(5) の解法に MOCCT 法を用いる。

## 2 MOCCT 法の概略

MOCCT 法は  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  を満たす様に式 (4) を解く CT 法と、アルフベン波特性曲線を安定に解く為の MOC 法を組み合わせた手法である。

## 2.1 MOC : Alfven 波特性曲線法

磁気流体方程式中の Maxwell 方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} \quad (6)$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{J} \quad (7)$$

であるが、ここでは  $\eta = 0$  とする。まずは簡単の為、1次元 (X 方向) の場合  
力

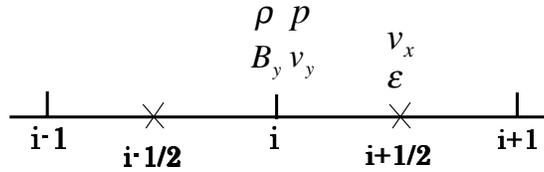


図 1: 1次元の物理量配置。速度 X 成分と電場は格子の中心に定義。

式 (6),(7) より  $B_y$  の方程式は次の様に差分化する事が出来る。

$$\frac{B_{yi}^{n+1} - B_{yi}^n}{\Delta t} + \frac{(\varepsilon_z)_{i+1/2}^* - (\varepsilon_z)_{i-1/2}^*}{\Delta x} = 0 \quad (8)$$

$$\varepsilon_{zi+1/2}^* = u_{i+1/2} B_y^* - v^* B_x$$

ここで \* は中間の時刻 ( $n + 1/2$ ) を表す。また、 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  より、 $B_x = \text{const}$  である。この  $\varepsilon_z^*$  を求める時にアルフベン波の特性曲線法 (Method of Characteristics : MOC) を用いる [4]。アルフベン波は非圧縮性 MHD に見られる波動であるので、特性曲線は次の 2 つの式、運動方程式と誘導方程式から導かれる。

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{B_x}{4\pi\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial (v_x v_y)}{\partial x} \quad (9)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = B_x \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial (v_x B_y)}{\partial x} \quad (10)$$

(  $\rho, v_x, B_x = \text{constant}$  ) 式 (9),(10) を変形すると、別の 2 式が得られる。

$$\frac{Dv_y}{Dt} \mp \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}} \frac{DB_y}{Dt} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left( v_x \pm \frac{B_x}{\sqrt{4\pi\rho}} \right) \frac{\partial}{\partial x} \quad (12)$$

式 (12) は特性速度 (移流速度) が  $C^\pm = v_x \pm \frac{B_x}{\sqrt{4\pi\rho}}$  を意味し、特性線 : 式 (11) に沿って  $v_y \mp \frac{B_y}{\sqrt{4\pi\rho}}$  が保存される不変量になっている事を表している。

よって、式 (11) を特性線に沿って積分すると、特性曲線の始点 (時刻  $n$ ) と \* の間には次の様な関係式が導かれる事になる。(図 2)

$$v_y^* - v_y^+ - \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho^+}} (B_y^* - B_y^+) = 0 \quad (13)$$

$$v_y^* - v_y^- + \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho^-}} (B_y^* - B_y^-) = 0 \quad (14)$$

ここで、 $(B_y, v_y)^\pm$  は各特性線  $C^\pm$  の始点の値である。式 (13),(14) から、 $v_y^*$  と  $B_y^*$  は

$$v_y^* = \frac{v_y^+ \sqrt{4\pi\rho^+} + v_y^- \sqrt{4\pi\rho^-} - B_y^+ + B_y^-}{\sqrt{4\pi\rho^+} + \sqrt{4\pi\rho^-}} \quad (15)$$

$$B_y^* = \frac{-v_y^+ + v_y^- + B_y^+ / \sqrt{4\pi\rho^+} + B_y^- / \sqrt{4\pi\rho^-}}{1/\sqrt{4\pi\rho^+} + 1/\sqrt{4\pi\rho^-}} \quad (16)$$

の様を求める事が出来る。簡単の為、 $\rho^+ = \rho_{i-1}^n$ ,  $\rho^- = \rho_{i+1}^n$  とする。

始点の値  $f(= B_y, v_y)^\pm$  は、式 (12) を見ても分かるように移流の形をしているので、格子間を補間して求める事が出来る。補間方法には様々あるが、例えば van Leer の方法 ( $i - 1/2$  と  $i + 1/2$  を直線補間する方法) では

$$f(= B_y, v_y)^\pm = \begin{cases} f_i^n + \frac{1}{2}(\Delta x - C_{i+1/2}^\pm \Delta t) \frac{\Delta f}{\Delta x^{(i)}} & \text{if } C_{i+1/2}^\pm > 0 \\ f_{i+1}^n - \frac{1}{2}(\Delta x + C_{i+1/2}^\pm \Delta t) \frac{\Delta f}{\Delta x^{(i+1)}} & \text{otherwise} \end{cases}$$

ここで、

$$\frac{\Delta f}{\Delta x^{(i)}} = \begin{cases} \frac{2\Delta f_{i-1/2} \Delta f_{i+1/2}}{\Delta f_{i-1/2} + \Delta f_{i+1/2}} & \text{if } \Delta f_{i-1/2} \Delta f_{i+1/2} > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\Delta f_{i+1/2} = (f_{i+1} - f_i) / \Delta x$  である。この補間方法にも CIP 法を適用する事も出来る。

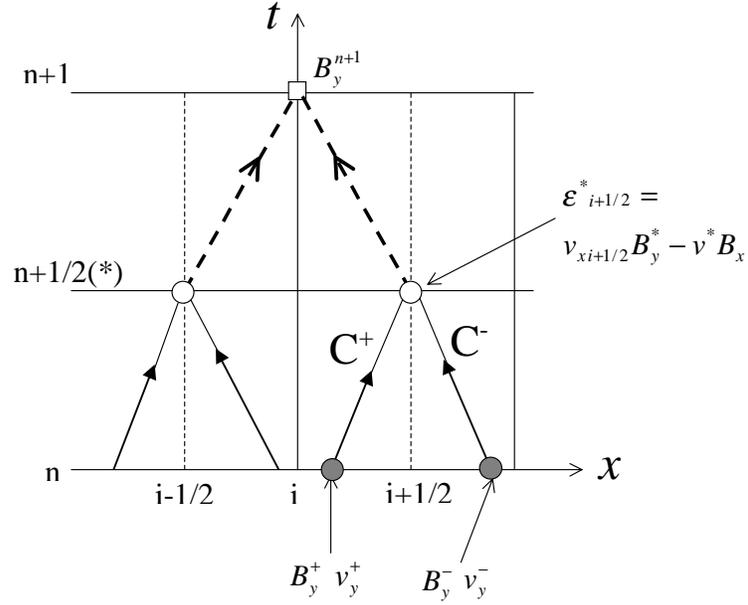


図 2: アルフベン波特性曲線と磁場の時間発展。実線矢印：特性曲線により起電力を求める。点線矢印：式 (8) を用いて  $B_y$  の時間発展を行なう。

## 2.2 多次元、CT 法

前節は 1 次元の場合だが、そのまま多次元に拡張する事も出来る。例えば 2 次元では磁場の各成分は

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \quad (17)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \quad (18)$$

$$\varepsilon = -(v_x B_y - v_y B_x) \quad (19)$$

であるが、各物理量の配置は図 3 の様にする。スタガード格子なので、スカラー量は格子中心、ベクトル量は格子境界、また起電力  $\varepsilon$  は格子の角に配置する。この様にすれば 1 次元の手法を用いて X 方向で  $B_y, v_y$ 、Y 方向で  $B_x, v_x$  を求め、式 (19) の  $\varepsilon$  が求まり、式 (17),(18) を差分化した式

$$\frac{B_{x(i+1/2,j)}^{n+1} - B_{x(i+1/2,j)}^n}{\Delta t} = -\frac{\varepsilon_{(i+1/2,j+1/2)}^{n+1/2} - \varepsilon_{(i+1/2,j-1/2)}^{n+1/2}}{\Delta y} \quad (20)$$

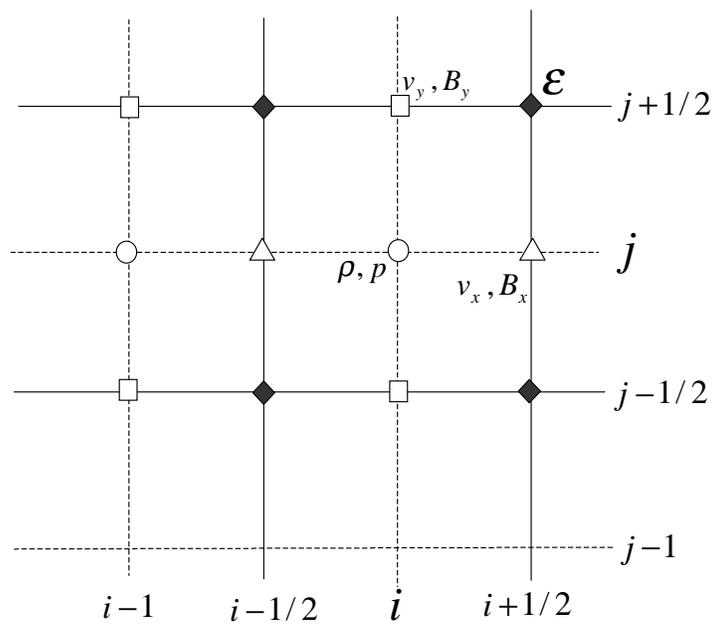


図 3: 2次元 MHD コードでの物理量の配置、CT 法

$$\frac{B_{y(i,j+1/2)}^{n+1} - B_{y(i,j+1/2)}^n}{\Delta t} = \frac{\varepsilon_{(i+1/2,j+1/2)}^{n+1/2} - \varepsilon_{(i-1/2,j+1/2)}^{n+1/2}}{\Delta x} \quad (21)$$

で磁場が時間発展される。これは3次元でも同様に拡張が出来る。

図3の様に物理量を配置する方法をCT法と呼ぶが、この様に磁場と電場を異なる場所で定義すると、式(20),(21)を用いて、初期条件で $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ が満たされていれば常に $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ になる事が示される[4]。

この事から分かるように、CT法は単に $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ を保証する手法であり、電場 $\varepsilon$ の求め方の規定はしていない。これにMOC法を組み合わせる事で安定なスキームになっている。

### 2.3 運動方程式中の磁気ストレス項

運動方程式の右辺にも磁気ストレス項が存在するが、この項にもMOC法を用いて値を評価する事になる。例えば、2次元MHDの運動方程式のy成分は次式である。

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( p + \frac{B_x^2}{8\pi} \right) + \frac{B_x}{4\pi\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x} \quad (22)$$

この内、磁気圧項(右辺第1項)は圧力と同様の差分を作ればよいが、第2項はストレス項でありこの項にMOC法を適用する。非移流相において第2項の差分のみ表記すると

$$\begin{aligned} & \frac{(v_y)_{i,j+1/2}^* - (v_y)_{i,j+1/2}^n}{\Delta t} = \dots \\ & + \left( \frac{1}{4\pi\bar{\rho}} \right) \langle B_x \rangle_{i,j+1/2}^n \frac{(B_y)_{i+1/2,j+1/2}^* - (B_y)_{i-1/2,j+1/2}^*}{\Delta x} \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、 $\bar{\rho}, \langle B_x \rangle_{i,j+1/2}^n$  はそれぞれ  $v_y$  の定義点  $(i, j + 1/2)$  上での平均値である。例えば

$$\langle B_x \rangle_{i,j+1/2}^n = \frac{1}{4} [(B_x)_{i+1/2,j} + (B_x)_{i+1/2,j+1} + (B_x)_{i-1/2,j} + (B_x)_{i-1/2,j+1}] \quad (24)$$

等である。式(23)における、 $B_y^*$ の値の見積りにMOC法を用いる。しかし、この計算は非移流相の計算であり、移流部分はCIP法で別に計算する事にな

るので特性速度は

$$C^{\pm} = \pm \frac{B_x}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad (25)$$

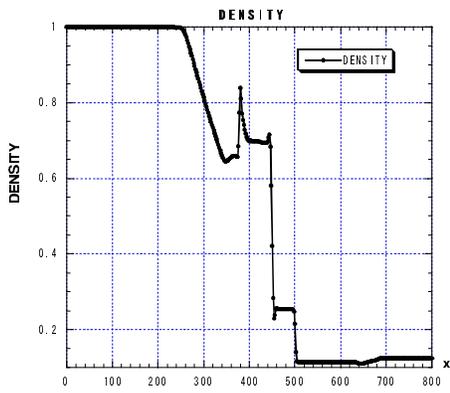
を用いて計算する。(式(11),(12)は移流項も含めて特性線を出していた)  
これは運動方程式の x 成分も同様に計算を行なう。

## 2.4 計算手順

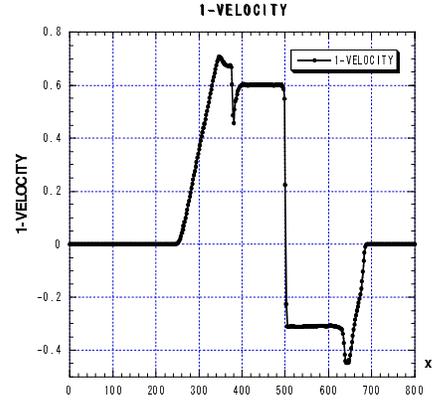
CIP 法と MOCCT 法をまとめた手順は次の様になる。

1. 初期条件  $(\rho^n, \mathbf{u}^n, p^n, \mathbf{B}^n)$  を設定。
2. 非移流項の計算  $(\rho^n, \mathbf{u}^n, p^n) \rightarrow (\rho^*, \mathbf{u}^*, p^*)$ 
  - (a) この時、運動方程式のストレス項の計算は MOC 法で求める。(式(23)~(25))
3. 移流相と磁場の時間発展
  - (a) CIP 法で  $\rho, \mathbf{u}, p$  の移流相の計算を行なう。 $(\rho^*, \mathbf{u}^*, p^*) \rightarrow (\rho^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1})$
  - (b) MOC 法で電場  $\varepsilon$  を計算し、CT 法で磁場  $\mathbf{B}^{n+1}$  を計算。(式(20),(21))
4. 以下、繰り返し

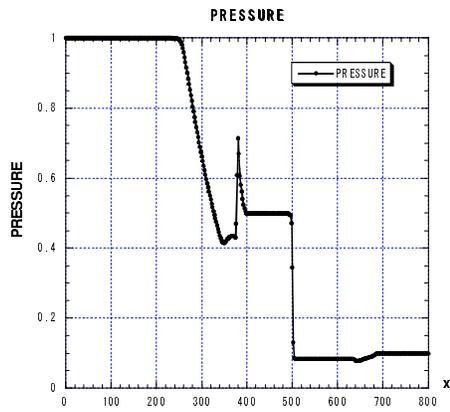
典型的な計算例として、1.5次元衝撃波管問題の計算例を CIP-MOCCT 法で解いた結果を示す。1.5次元なので磁場・速度の y 成分はあるが、 $\partial/\partial y = 0$  である(勿論、z 成分は値・微分共に 0)。初期条件は  $p = 1, \rho = 1, B_y = 1.0$  ( $x < 400$ ),  $p = 0.1, \rho = 0.125, B_y = -1.0$  ( $x > 400$ )。比熱比  $\gamma = 1.4$ 、格子幅  $\Delta x = 2.0$  とし、 $t = 80.0$  の結果を示す。人工粘性係数は 0.7 である。



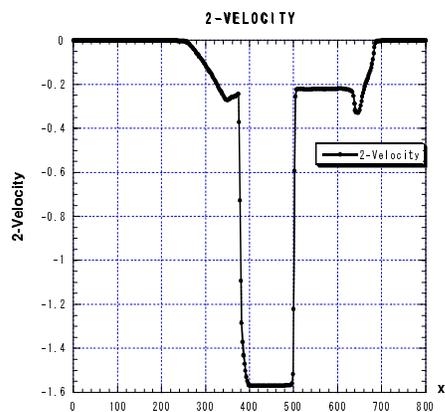
密度



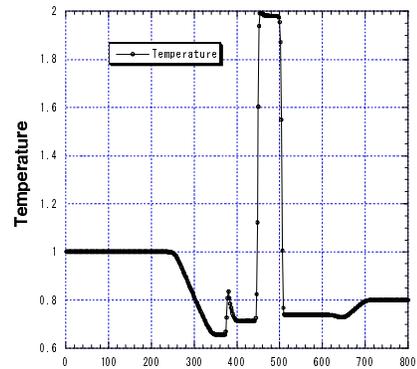
X 方向速度



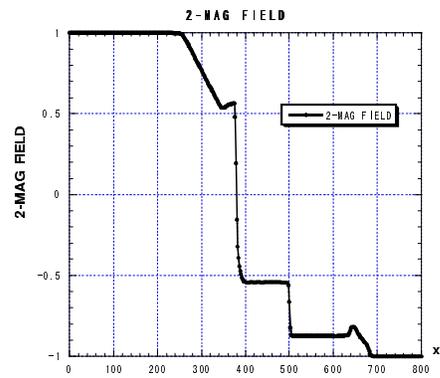
压力



Y 方向速度



温度



磁場 Y 成分

图 4: 1 次元 MHD 衝擊波管問題。

## 参考文献

- [1] T.Kudoh and K.Shibata, Numerical MHD Simulation of Astrophysical Problems by Using CIP-MOCCT Method; *CFD Journal*,**8**, 56 (1999)
- [2] T.Kudoh and K.Shibata, Alfvén Wave Model of Spicules and Coronal Heating, *Astrophysical Journal*,**514**,493 (1999)
- [3] T.Kudoh and K.Shibata, Magnetically Driven Jets from Accretion Disks. II. Nonsteady Solutions and Comparison with Steady Solutions, *Astrophysical Journal*,**476**,612 (1997)
- [4] J.F.Hawley and J.M.Stone, MOCCT: A Numerical technique for astrophysical MHD, *Comput.Phys.Commun*,**89**,127 (1995)

# 地球磁気圏の MHD シミュレーションと可視化・並列化

荻野竜樹 ( 名古屋大学太陽地球環境研究所 )

「天体とスペースプラズマのシミュレーションサマースクール」

2004 年 9 月 6-11 日

場所：千葉大学総合メディア基盤センター

## 1 はじめに

太陽風と地球磁気圏相互作用の 3 次元グローバル電磁流体力学的 ( MHD ) シミュレーションは、約 20 年前に、力が釣り合った平均的な磁気圏の形をやっと再現できることから出発して、コンピュータと IT 技術の長足の進歩に相まって発展を続け、最近では、衛星・地上観測と比較して磁気圏のダイナミクスを議論できる程度にまで成長してきた。こうして、上流の太陽風や惑星間磁場 ( IMF ) の変化に対する磁気圏・電離圏の応答や、磁気圏での大きな擾乱現象であるサブストームや磁気嵐を直接シミュレーションから調べようとする試みも行われるようになってきた。これらの太陽風磁気圏相互作用のグローバル MHD シミュレーションを精度よく実行するためには、計算方法の改良が一方で必要であると同時に、最大級のスーパーコンピュータの利用、それも効率的な並列計算法の利用は不可欠である。

そのような並列計算共通プログラム言語の候補として、High Performance Fortran ( HPF ) と Message Passing Interface ( MPI ) があると言われてきた。HPF は、米国の共同研究者が共通プログラム言語として優れていると言っている反面、多くの大型プログラムで性能が十分に出ないという批判の声も出ていた。こうした中、2000 年から HPF/JA ( JAHPF による HPF の日本拡張版 ) が使えるようになり、VPP Fortran でフルベクトル化フル並列化されている流体コードや MHD コードは、比較的容易に HPF/JA に書き換えることができ、更にその HPF/JA のプログラムは VPP Fortran と同等の性能を得ることが示された。しかし、HPF/JA の成功にもかかわらず、HPF の普及は進んでいないのが現状である。こうして、世界標準並列化言語として最後に残った MPI に対する期待が高まることになる。この講義と実習では、VPP Fortran と HPF/JA で書かれた地球磁気圏の 3 次元 MHD コードとの比較をしながら、MPI を用いた並列計算 3 次元 MHD コードの作成と使用方法を主として解説する。

太陽風磁気圏相互作用などの複雑なシミュレーション結果を理解するためには可視化は必須である。特に、重要でかつ面倒な 2 つの機能にアニメーション動画作成と 3 次元可視化があるが、アニメーション動画は時間変化を示すことによって磁気圏ダイナミクスの理解を助け、3 次元可視化は磁気圏の流線、磁力線及び電流構造の特徴を明らかにするのに威力を発揮する。さらに、最近話題になっているインターネットによる情報公開は、簡単にはできないような自己矛盾のないシミュレーション結果を誰もが即座に見ることができ、現象をよりよく理解する上で強力な手段となりつつある。

そうした中で、VRML ( Virtual Reality Modeling Language ) の登場によって、3 次元画像処理専用機と 3 次元画像処理専用ソフトウェアを持たなくても、誰でも VRML のビューアさえあれば 3 次元画像を自分の好きなように見ることができるようになった。自分のコンピュータの処理能力に依存するが、ネットスケープやインターネットエクスプローラなどのブラウザを使えば、VRML2.0 対応の

cosmoplayer 等のビューアを無償で利用できる。パーソナルコンピュータも最近高速になってきたので、高速の cpu とグラフィックアクセラレータを積み、更に十分なメモリ ( 256 MB 以上 ) を載せれば、可視化に十分な性能を発揮できる。また、精度の高い 3 次元画像を快適に見たいのであれば Webspacer や Cosmoworlds の利用が更に有効である。

## 2 太陽風磁気圏相互作用の 3 次元グローバル MHD モデル

太陽風磁気圏相互作用の 3 次元 MHD モデルでは、MHD 方程式とマックスウェル方程式を初期値境界値問題として、様々な方法でその時間発展を解いている。偏微分方程式を差分法で 2 step Lax-Wendroff 法で解く方法などはその例である。空間分解能を上げるための計算方法における様々な工夫として、非一様格子法、非構造格子法、自動調節格子法、時空間多重格子法の導入などが行われている。以下では、私達が 3 次元 MHD シミュレーションに用いている高精度計算法の一つである modified leap-frog 法について述べる [1 - 4]。

### 2.1 基礎方程式

MHD モデルの基礎となる規格された MHD 方程式と Maxwell 方程式を以下に示す。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{v}\rho) + D\nabla^2 \rho \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{\rho}\mathbf{J} \times \mathbf{B} + \mathbf{g} + \frac{1}{\rho}\Phi \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla)p - \gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} + D_p \nabla^2 p \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (4)$$

$$\mathbf{J} = \nabla \times (\mathbf{B} - \mathbf{B}_d) \quad (5)$$

式 ( 1 ) ~ ( 4 ) はそれぞれ、連続の式、運動方程式、エネルギー保存則より求まる圧力変化の式、インダクション方程式と呼ばれる磁場変化を示す式である。ただし、 $\rho$  はプラズマ密度、 $\mathbf{v}$  は速度ベクトル、 $p$  はプラズマ圧力、 $\mathbf{B}$  は磁場ベクトルである。この 8 つのパラメータを未知数として求めていく。ただし、差分法の数値誤差により、 $\mathbf{B}_d$  に対する  $\mathbf{J}$  が有限値になるため、式 ( 5 ) を用いてその数値誤差を除去している。ここでの  $\mathbf{B}_d$  は地球の固有磁場としての双極子磁場である。また、 $\Phi \equiv \mu \nabla^2 \mathbf{v}$  は粘性項である。 $\eta = \eta_0 (T/T_0)^{-3/2}$  は温度に依存した電気抵抗である。ここでの  $T = p/\rho$  はプラズマ温度であり、 $T_0$  は電離層における値で、 $\eta_0 = 0.0005 - 0.002$  の範囲にとる。重力項は、 $\mathbf{g} = -g_0/\zeta^3 (\zeta^2 = x^2 + y^2 + z^2)$ 、 $g_0 = 1.35 \times 10^{-7} (9.8 \text{ m/s}^2)$  は重力加速度であり、 $\gamma = 5/3$  は 3 次元空間における比熱比である。また、粒子の拡散係数  $D$ 、圧力の拡散係数  $D_p$ 、 $\mu$  の各係数は、初期値や急激な磁場変化に起因する短波長の数値的振動を抑制するために人工的に与えたものであり、 $D = D_p = \mu/\rho_{sw} = 0.001$  (ただし、 $\rho_{sw}$  は太陽風の密度) とした。また、各パラメータは次のものにより規格化した。距離は地球半径  $Re = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$ 、密度は電離層における値  $\rho_s = mn_s (n_s = 10^{10} \text{ m}^{-3})$ 、磁場は赤道における現在の双極子磁場強度  $B_s = 3.12 \times 10^4 \text{ nT}$ 、速度は赤道におけるアルフベン速度  $V_A = 6.80 \times 10^6 \text{ m/s}$ 、時間はアルフベン通過時間  $t_s = Re/V_A = 0.937s$  である。

## 2.2 座標系と境界条件

シミュレーションには、図1に示すような太陽方向x軸正、夕方向y軸正、磁気北極方向z軸正とした太陽地球磁気圏座標系を用いて、MHD方程式とマクスウェル方程式を時空間で差分して、MHD方程式系における8個の物理変数、プラズマ密度 $\rho$ 、速度 $\mathbf{v}$ 、圧力 $p$ 及び磁場 $\mathbf{B}$ の時間発展を解く。ここでは、朝夕と南北で対称性を仮定した1/4領域の地球磁気圏モデルを考える。

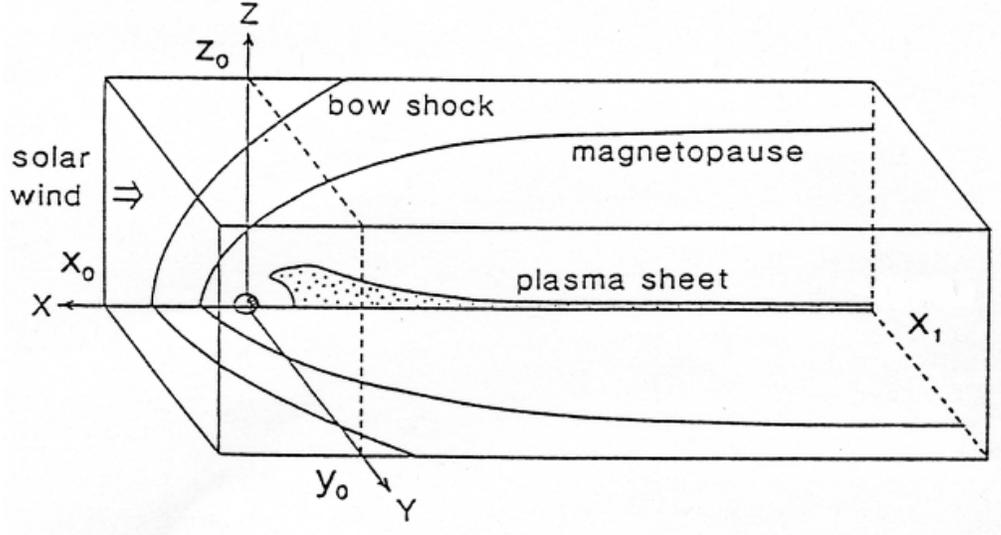


図1: 3次元MHDシミュレーションに用いる太陽地球磁気圏座標系

従って、それぞれの物理量 $\phi = (\rho, \mathbf{v}, p, \mathbf{B})$ に対して次の境界条件が課せられる。

- (1) 固定境界条件  $x = x_0$  で  $\phi = const$ ;
- (2) 自由境界条件  $x = x_1$  で  $\partial\phi/\partial x = 0$ ;
- (3)  $x$  軸に対して  $45^\circ$  の角度を持った自由境界条件  $y = y_0$  で  $\partial\phi/\partial y = 0$  ,  $z = z_0$  で  $\partial\phi/\partial z = 0$ ;
- (4)  $z = 0$  に対するミラー境界条件 ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \\ v_z = B_x = B_y = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

- (5)  $y = 0$  に対するミラー境界条件 ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial B_z}{\partial y} = 0 \\ v_y = B_y = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

- (6) すべての物理量は  $\xi = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \leq \xi_a (= 3.5)$  に対して一定

初期状態の内部解 $\phi_{in}$ とシミュレーション結果から得られる外部解 $\phi_{ex}$ は滑らかな形状関数 $f \equiv a_0 h^2 (a_0 h^2 + 1)$ を導入することによって、時間ステップごと次式を用いて接続される。

$$\phi = f\phi_{ex} + (1-f)\phi_{in} \quad (8)$$

ここに  $a_0 = 100$ ,  $\xi \leq \xi_a$  に対しては  $h = (\xi/\xi_a)^2 - 1$  で  $\xi < \xi_a$  に対しては  $h = 0$  である。

## 2.3 初期条件

初期条件には、「対称面より上流で零のミラーダイポール磁場」と「重力とプラズマ圧力が静的に釣り合った球対称の電離層」を仮定し、シミュレーション箱の上流から一定の密度、速度、温度を持つ太陽風を流し始めて、定常状態に近い磁気圏の構造を求める。初期にミラーダイポール磁場を用いる理由は、上流で流れに平行な磁場成分を含めないためである。前述したように、境界条件としては、上流は固定端、側面と上下面は磁気圏前面に形成される衝撃波の形状を考慮して、 $x$ 軸と45度の角度を持たせた自由端、下流は面に垂直な方向に自由端、地球の中心を通る $y = 0$ 又は $z = 0$ の面では磁場と速度のベクトルと矛盾の無い鏡像の境界条件を課す。更に、太陽風やIMFのパラメータを時間変化させて、磁気圏・電離圏の応答や擾乱現象を調べる。

初期条件の具体的な関数は次の様に与える。

密度

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \xi^{-3} & \rho &\geq 0.2\rho_{sw} \\ \rho_0 &= 0.2\rho_{sw} & \rho &< 0.2\rho_{sw} \end{aligned} \quad (9)$$

プラズマ圧力

$$\begin{aligned} p_0 &= p_{00}\xi^{-2} & p_0 &\geq p_{sw} \\ p_0 &= p_{sw} & p_0 &< p_{sw} \end{aligned} \quad (10)$$

重力

$$\mathbf{g} = -\frac{g_0}{\xi^3}(x, y, z) \quad (11)$$

ダイポール固有磁場

$$\mathbf{B}_d = \frac{1}{\xi^5}(-3xz, -3yz, x^2 + y^2 - 2z^2) \quad (12)$$

ここで $g_0 = 1.35 \times 10^{-6}$ で $p_{00} = (\gamma - 1)g_0/\gamma = 5.4 \times 10^{-7}$ である。

太陽風のパラメータは、密度 $\rho_{sw} = 5 \times 10^{-4}$  ( $5/\text{cm}^{-3}$ に相当)、 $x = x_0$ で $\mathbf{v}_{sw} = (v_{sw}, 0, 0)$ 、 $v_{sw} = 0.0441 - 0.118$  ( $300 - 800\text{km/s}$ )、 $p_{sw} = 3.56 \times 10^{-8}$  ( $T_{sw} = 2 \times 10^5\text{K}$ )。また、惑星間磁場は $B_{IMF} = 0$ または $\pm 1.5 \times 10^{-4}$  ( $\pm 5\text{nT}$ )で $B_{IMF}$ は太陽風によって運ばれる一様なIMFの $z$ 成分を示す。

## 2.4 Modified Leap-Frog 法の導入

数値計算法としては、図2に示すようなModified leap-frog法を用いる。最初の1回をtwo step Lax-Wendroff法で解き、続く $(\ell - 1)$ 回をleap-frog法で解き、その一連の手続きを繰り返す。 $\ell$ の値は数値的に安定の範囲で大きい方が望ましいので、2次精度の中心空間差分を採用するとき、数値精度の線形計算と予備的シミュレーションから $\ell = 8$ に選んでいる。Modified leap-frog法は、two step Lax-Wendroff法の数値的安定化効果を一部取り入れて、leap-frog法の数値的減衰と分散の小さい効果をより多く取り入れた、数値的減衰と分散にバランスの良くとれた一種の組み合わせ計算方法となっている。また、

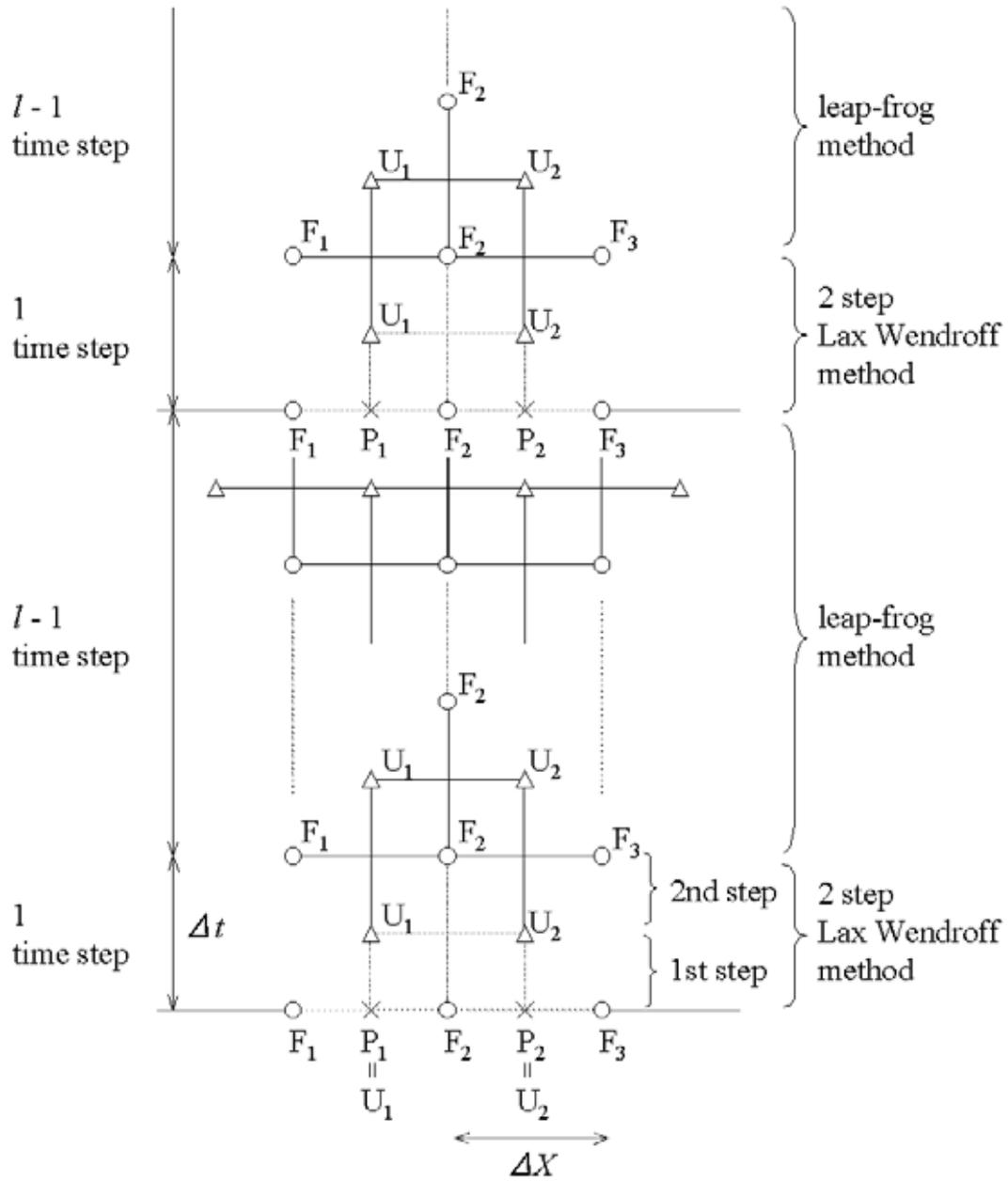


図 2: Modified Leap-Frog 法の計算スキーム

パラメータ  $\ell$  を変化させることによって、性質の良く分かった2つの計算方法に一致させることができるので、結果に与える数値誤差の影響も理解し易い利点を持っている。

Modified leap-frog 法の具体的な計算スキームを次に示す。先ず次の形の偏微分方程式を導入する。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} - f \quad (13)$$

(1) First step

$$f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^t = \frac{1}{8}(f_{i,j,k}^t + f_{i+1,j,k}^t + f_{i,j+1,k}^t + f_{i+1,j+1,k}^t + f_{i,j,k+1}^t + f_{i+1,j,k+1}^t + f_{i,j+1,k+1}^t + f_{i+1,j+1,k+1}^t) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} = & f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^t - \frac{1}{2}\Delta t f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^t \\ & - \frac{\Delta t}{8\Delta x}(f_{i+1,j,k}^t + f_{i+1,j+1,k}^t + f_{i+1,j,k+1}^t + f_{i+1,j+1,k+1}^t \\ & - f_{i,j,k}^t - f_{i,j+1,k}^t - f_{i,j,k+1}^t - f_{i,j+1,k+1}^t) \\ & - \frac{\Delta t}{8\Delta y}(f_{i,j+1,k}^t + f_{i+1,j+1,k}^t + f_{i,j+1,k+1}^t + f_{i+1,j+1,k+1}^t \\ & - f_{i,j,k}^t - f_{i+1,j,k}^t - f_{i,j,k+1}^t - f_{i+1,j,k+1}^t) \\ & - \frac{\Delta t}{8\Delta z}(f_{i,j,k+1}^t + f_{i+1,j,k+1}^t + f_{i,j+1,k+1}^t + f_{i+1,j+1,k+1}^t \\ & - f_{i,j,k}^t - f_{i+1,j,k}^t - f_{i,j+1,k}^t - f_{i+1,j+1,k}^t) \end{aligned} \quad (15)$$

(2) Second step

$$\begin{aligned} f_{i,j,k}^{t+\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} & ( f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} + f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} + f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} + f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \\ & + f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} + f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} + f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} + f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} ) \end{aligned} \quad (16)$$

$$f_{i,j,k}^{t+1} = f_{i,j,k}^t - \Delta t f_{i,j,k}^{t+\frac{1}{2}} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\Delta t}{4\Delta x}(f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} + f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} + f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} + f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \\ & - f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \\ & - \frac{\Delta t}{4\Delta y}(f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} + f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} + f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} + f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \\ & - f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} - f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} - f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \\ & - \frac{\Delta t}{4\Delta z}(f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} + f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} + f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} + f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \\ & - f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} - f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} - f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (18)$$

$$(19)$$

3次元 MHD コードに対して two step Lax-Wendroff 法を具体的に適用する手続きは次の様になる。

1.  $f(i, j, k)$  is given for  $2 \leq i \leq nx1, 2 \leq j \leq ny1$  and  $2 \leq k \leq nz1$
2.  $f(i, j, k)$  for  $i = 1, nx2, j = 1, ny2$ , and  $k = 1, nz2$  is determined from boundary condition

### 3. 1st interpolation

$$p(i, j, k) = \frac{1}{8}(f(i, j, k) + f(i+1, j, k) + f(i, j+1, k) + f(i+1, j+1, k) + f(i, j, k+1) + f(i+1, j, k+1) + f(i, j+1, k+1) + f(i+1, j+1, k+1)) \quad (20)$$

$$u(i, j, k) = p(i, j, k) \quad (21)$$

### 4. Calculation of 1st step

$$\begin{aligned} u(i, j, k) = & u(i, j, k) - \frac{1}{2}\Delta t p(i, j, k) \\ & - \frac{\Delta t}{8\Delta x}(f(i+1, j, k) + f(i+1, j+1, k) + f(i+1, j, k+1) + f(i+1, j+1, k+1) \\ & - f(i, j, k) - f(i, j+1, k) - f(i, j, k+1) - f(i, j+1, k+1)) \\ & - \frac{\Delta t}{8\Delta y}(f(i, j+1, k) + f(i+1, j+1, k) + f(i, j+1, k+1) + f(i+1, j+1, k+1) \\ & - f(i, j, k) - f(i+1, j, k) - f(i, j, k+1) - f(i+1, j, k+1)) \\ & - \frac{\Delta t}{8\Delta z}(f(i, j, k+1) + f(i+1, j, k+1) + f(i, j+1, k+1) + f(i+1, j+1, k+1) \\ & - f(i, j, k) - f(i+1, j, k) - f(i, j+1, k) - f(i+1, j+1, k)) \end{aligned} \quad (22)$$

### 5. 2nd interpolation

$$p(i, j, k) = \frac{1}{8}(u(i-1, j-1, k-1) + u(i, j-1, k-1) + u(i-1, j, k-1) + u(i, j, k-1) + u(i-1, j-1, k) + u(i, j-1, k) + u(i-1, j, k) + u(i, j, k)) \quad (23)$$

### 6. Calculation of 2nd step

$$\begin{aligned} f(i, j, k) = & f(i, j, k) - \Delta t p(i, j, k) \\ & - \frac{\Delta t}{4\Delta x}(u(i, j, k) + u(i, j-1, k) + u(i, j, k-1) + u(i, j-1, k-1) \\ & - u(i-1, j, k) - u(i-1, j-1, k) - u(i-1, j, k-1) - u(i-1, j-1, k-1)) \\ & - \frac{\Delta t}{4\Delta y}(u(i, j, k) + u(i-1, j, k) + u(i, j, k-1) + u(i-1, j, k-1) \\ & - u(i, j-1, k) - u(i-1, j-1, k) - u(i, j-1, k-1) - u(i-1, j-1, k-1)) \\ & - \frac{\Delta t}{4\Delta z}(u(i, j, k) + u(i-1, j, k) + u(i, j-1, k) + u(i-1, j-1, k) \\ & - u(i, j, k-1) - u(i-1, j, k-1) - u(i, j-1, k-1) - u(i-1, j-1, k-1)) \end{aligned} \quad (24)$$

この計算スキームは、 $u(i, j, k) = p(i, j, k)$  とおく場合 two step Lax-Wendroff 法となるが、 $u(i, j, k)$  に前のステップから計算した値をそのまま使用し、時間幅を  $\frac{1}{2}\Delta t$  から  $\Delta t$  と 2 倍すれば、Leap-frog 法になる。Modified leap-frog 法は、1 回目を two-step Lax-Wendroff 法、継続する  $(\ell-1)$  回を Leap-frog 法を用いて計算する方法である ( 図 2 参照 )

次に伝達方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (25)$$

を用いて、Modified leap-frog 法の数値的安定性を議論する。

時空間の差分を  $u_i^j = u(x_i, t_j)$ ,  $u_{i\pm 1}^{j\pm 1} = u(x_i \pm \Delta x, t_j \pm \Delta t)$  と書き、フーリエ級数

$$u_i^j = u_0^j e^{ikx}, \quad u_{i\pm 1}^j = u_0^j e^{ik(x \pm \Delta x)} = u_i^j e^{\pm k\Delta x} \equiv u_i^j e^{\pm i\kappa} \quad (26)$$

を用いると、two step Lax-Wendroff 法の増幅率  $A = u_i^{j+1}/u_i^j$  は、

$$A_{2LW} = 1 + i\delta \sin \kappa + \delta^2 (\cos \kappa - 1) \quad (27)$$

$$|A_{2LW}|^2 = 1 + (\delta^4 - \delta^2)(\cos \kappa - 1)^2 \quad (28)$$

となる。従って、 $0 \leq \delta \equiv \Delta t / \Delta x \leq 1$  の時、すべての  $\kappa = k\Delta x$  に対して  $|A_{2LW}| \leq 1$  が成立し、数値的に安定となる。

leap-frog 法は

$$A_{LF}^{\frac{1}{2}} = \pm \sqrt{1 + \delta^2 \sin^2 \frac{\kappa}{2}} - i\delta \sin \frac{\kappa}{2} \quad (29)$$

となり、 $|A_{LF}| = 1$  となって、限界的に安定である。

従って、Modified leap-frog 法の増幅率は次式で与えられる。

$$A_{MLW} = A_{2LW}^{1/\ell} A_{LF}^{(\ell-1)/\ell} \quad (30)$$

Modified leap-frog 法 (MLF)、2 step Lax-Wendroff 法 (2LW) 及び Runge-Kutta-Gill 法 (RKG) に対する増幅率の絶対値と位相速度の波数依存性を図 3 に、 $\ell$  を変化したときの Modified leap-frog 法 (MLF) に対する増幅率の絶対値と位相速度の波数依存性を図 4 に示す。Modified leap-frog 法は絶対値と同様に位相速度に対しても数値精度が大幅に改善されるのが理解される。

Modified leap-frog 法、two step Lax-Wendroff 法及び leap-frog 法などの種々の計算方法を波動方程式に適用した結果を図 5 に、電磁流体力学の非線形現象である MHD 衝撃波のシミュレーションに適用した結果を図 6 に示す。線形な波動方程式でパルス波の伝搬を差分法で解く場合、波長の短い波ほど数値的減衰が大きくかつ位相速度が遅いので、パルス波が崩れて後に波列が現れる。その数値的な減衰と分散が modified leap-frog 法では大幅に改善されているのが見られる。非線形な現象の場合も two step Lax-Wendroff 法では、数値的分散によって衝撃波の後ろに振動が発生し、modified leap-frog 法では、それが小さく抑えられて衝撃波の形がよく得られているのが分かる。一方、leap-frog 法では、振動が深くなって衝撃波がパルス列に分離しているのが見られる。これは、数値的減衰は無いが数値的分散は存在する leap-frog 法の数値的特性に依存する現象で物理的には意味のないものである。

### 3 MPI を用いた並列計算 MHD コード

1995 年に Fujitsu VPP500 が使用できるようになって、太陽風と地球磁気圏相互作用のグローバル MHD シミュレーションを実行するためのフルベクトル化されていた 3 次元 MHD コード (earthb) を VPP Fortran 用に書き換えた。コードの全面的な書き換えを行って、VPP Fortran で計算効率の高い、ほぼフルベクトル化フル並列化された 3 次元 MHD コード (pearthb) を作成した [荻野, 1997]。その後、2000 年に 3 次元 MHD コードを VPP Fortran から HPF/JA へ書き換えた (heartb) [荻野, 2000;

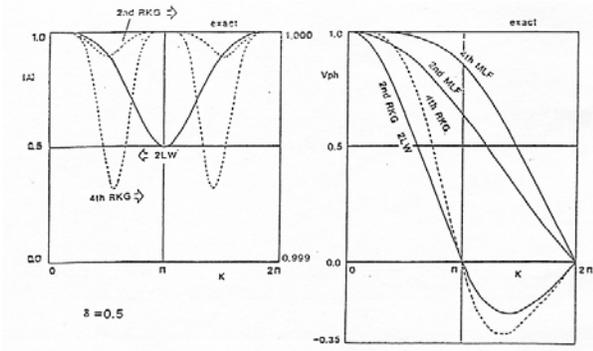


図 3: Modified leap-frog 法 ( MLF )、2 step Lax-Wendroff 法 ( 2LW ) 及び Runge-Kutta-Gill 法 ( RKG ) に対する増幅率の絶対値と位相速度の波数依存性。

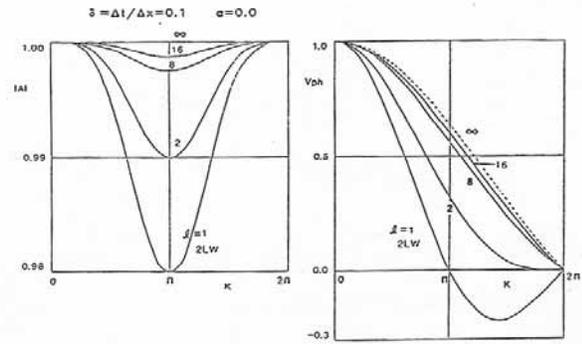


図 4:  $l$  を変化したときの Modified leap-frog 法 ( MLF ) に対する増幅率の絶対値と位相速度の波数依存性。

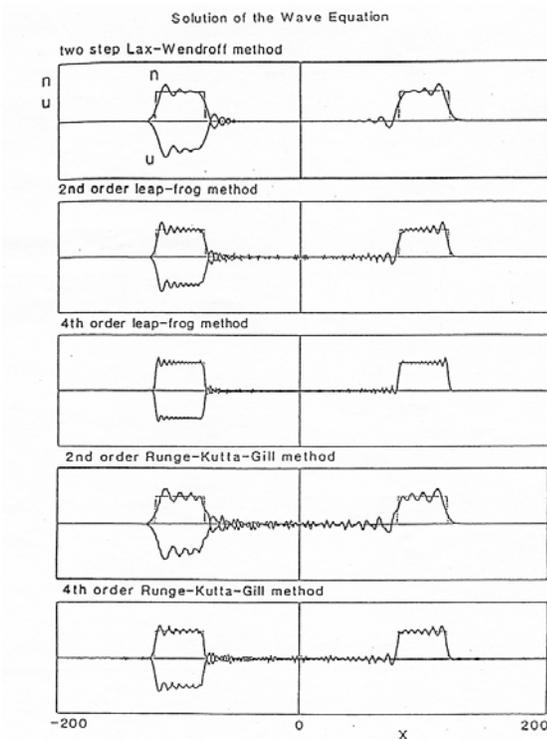


図 5: 種々の計算方法を用いた場合の波動方程式のシミュレーション結果の比較。数値的分散の結果、パルス波の立ち上がりと立ち下がり数値的振動が現れる。2 次精度、4 次精度は空間差の精度のオーダーを示す。

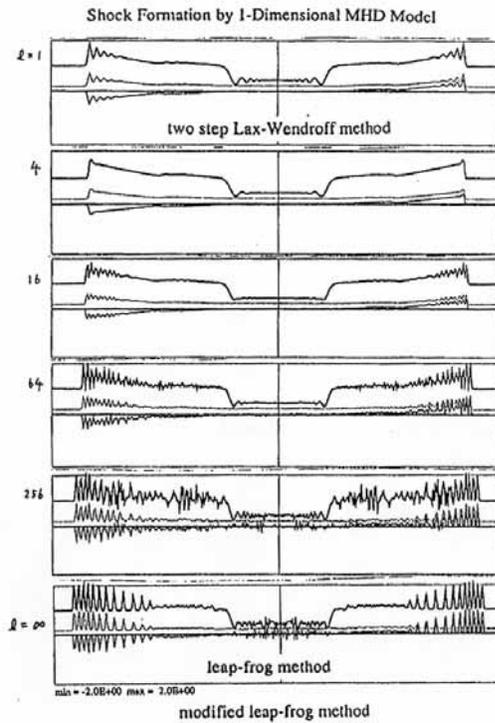


図 6: Modified Leap-Frog 法でパラメータ  $l$  を変化した場合の 1 次元 MHD 衝撃波のシミュレーション結果。 $l = 1$  の場合 2-Step Lax-Wendroff 法に、 $l = \infty$  の時 Leap-Frog 法になる。Leap-Frog 法では、衝撃波が数値的原因でパルス列に分解するのが見られる。

Ogino, 2002]。結果的には、HPF/JA で書いた 3 次元 MHD コード ( hearthb ) も VPP Fortran の 3 次元 MHD コードと同様にフルベクトル化フル並列化することができ、計算速度も VPP Fortran と同等の性能を得ることができた。VPP Fortran でも、HPF/JA でもベクトル並列化 MHD コードとしては、ほとんど同等のものであるが、ベクトル化 MHD コード ( earthb ) とは全く別物である。その最も大きな違いは、ベクトル化 MHD コードは、プログラムサイズを最小化しているのに対し、ベクトル並列化 MHD コードでは並列計算の性質上プログラムサイズの最小化が不可能だったことである。このため、同じ格子点数の MHD シミュレーションをする場合、ベクトル化コードに比べて、ベクトル並列化コードは約 3 ~ 4 倍のコンピュータメモリが必要である [荻野、2000; Ogino, 2002]。

2002 年になって、周りの人の協力を得て HPF/JA から MPI へと VPP Fortran から MPI への書き換えを行い、MPI でほぼフルベクトル化フル並列化された 3 次元 MHD コード ( meartb ) を作成することができた。その計算速度は、VPP Fortran と HPF/JA の MHD コードと同等以上の高計算効率を得ることができた。書き換えの労力だが、VPP Fortran か HPF/JA でフルベクトル化フル並列化された 3 次元 MHD コードがあれば比較的容易に MPI 利用の Fortran コードに書き換えることが可能である。もちろん、コードによってはフルベクトル化フル並列化を保つために工夫しなければならないことが生じることがある。MPI での問題点や大規模計算で MPI をどう使用すべきかは、後の補足説明で行う。

ベクトル化や並列化した場合、非ベクトル化コードや非並列化コードに比べて何倍の速度向上率が得られるかを示すものに、アムダールの法則がある。その法則によると、多数の PE ( Processing Element ) を用いて高い速度向上率を得るためには、並列化率が 100 % に限りなく近いことが極めて重要となる。従って、高効率のシミュレーションコードを作成するためには、どうやってフルベクトル化とフル並列化を実現するかにかかっている。実際には、内側の do roop でベクトル化されているので、そのベクトル化を維持したまま外側の do roop で並列化をすればよいことになる。よく、「計算時間のかかっている do roop から並列化せよ」と言われるが、その方法だとある程度までは並列化効率が上がるが、100 % に近い並列化効率を得ることはほとんど不可能である。これまでのベクトル化と並列化の経験からすると、プログラムの構造をきちんと決めることが最も重要であると確信している。分散メモリ型並列計算機を用いる場合の並列計算の基本は単純なことで、計算する前に計算に必要な変数を全て各 PE に集めればよいわけで、それもできるだけ一括して転送し、転送回数をできるだけ少なくすればよい。即ち、プログラムの構造とは、領域分割の変数 ( 方向 ) を軸とした計算の流れを示すフローチャートに、効率的な配列の利用内容を割り付けたものである。並列計算プログラムでは通常作業配列を多く取る必要が生じるので、プログラムの構造を決める時に作業配列の量を最小にすることが同時に必要となる。

具体的なベクトル並列計算の 3 次元 MHD コード VPP Fortran ( pearthb )、HPF/JA ( hearthb )、MPI ( meartb ) を見てもらうと分かるように、その 3 種類の Fortran プログラムの基本的構造はほとんど変わっていない。プログラムの構造をほとんど変えずに、VPP Fortran、HPF/JA、MPI の並列化指示行を挿入することでプログラムの大半の部分を書き換えることができる。それに、それぞれのコンパイラに特有の部分をユニットとして追加すれば、プログラムの大部分ができあがる。後に残される問題は、大まかに言えば境界条件と入出力である。これらも通常の場合はそれほど深刻な問題とはならない。しかし、MPI で超大型計算まで目標としている場合には、境界条件と入出力には注意が必要である。場合にもよるが、MPI の導入書や解説書に通常書いてある方法はほとんど通用しないと考えておいた方が無難である。

### 3.1 MPIによるMHDコードの作成(具体例)

MPI ( Message Passing Interface ) の使い方を分かりやすくかつ具体的に解説したものとして、青山幸也著「並列プログラミング虎の巻 MPI版」がある。その中で、青山氏は、メッセージ交換サブルーチンについて、「並列化にともなう矛盾(副作用)を解消するために、必要最小限仕方なしに行うもの」と言明しているが、全く、達観だと思う。これを私なりに具体的に書くと、「計算する前に、できるだけ一括してかつできるだけ転送回数を少なくして、計算に必要な変数を全て各 PE ( Processing Element ) に集めて計算する」となる。

それでは、MPIによるMHDコードの作成の重要な部分を見つけていくことにする。MPIバージョンのディレクトリ mearthb には、二つの基本的な Fortran プログラムがある。どちらもこのスクール用のものである。

mearthb\_send.f : ブロッキング通信 mpi\_send と mpi\_recv を利用

mearthb\_isend.f : 非ブロッキング通信 mpi\_isend と mpi\_irecv を利用した改良版

3次元MHDコードは、HPF/JAからMPIへ移植しているので、!hpf\$ で示されるHPF/JAの指示行がそのまま残っているが、MPIではそれらは全てコメント行として扱われる。また、MPIへの移植で変更した部分は全て、CC MPI START と CC MPI END のコメント行で挟まれている。以下では、mearthb\_send.fの説明をする。

数値計算法としては、Modified leap-frog法を用いて、k(z)方向に領域分割を行う。プログラムの計算のパラメータなどは、後の4.1の計算パラメータの設定で詳しく説明しているので、ここでは省略する。PE ( Processing Element ) 数は npe=2 で、isize は PE 数、irank はランク ( PE ) の番号で、この場合、isize=npe=2、irank=0,1となる。ks と ke は irank での通常の k の初期値と終期値を示し、各 irank のローカルな k=k\_local とグローバルな k=k\_global の関係は、k\_global=k\_local+kss で与えられる。従って、k(z)方向のグローバル変数と並列化後のローカル変数の対応は、

```
k=1,nz2    -> k=ks,ke
k=1,nz2-1  -> k=ks,ke1
k=2,nz2-1  -> k=ks1,ke1
```

となる。また、recvcount と displs は gather する時の各ランクのデータの大きさと各ランクのデータの先頭番地を示す。

```
CC MPI START
  include 'mpif.h'
  integer istatus(mpi_status_size)
  common /para_info/ks,ks1,ke,ke1,kss,irank, isize
c for mpi_gatherv
  parameter (npe=2)
  integer recvcount(npe), displs(npe)
CC MPI END
```

よく使われる1次元方向の分割方法は2種類ある。分割方法1は、あるランクまで同数の ko が入り、それ以後のランクも同数の ko-1 が入る方法である。分割方法2は、同数の ko が入るランクをできるだけ多く取り、それ以後のランクは順次減らす方法である。ここでは、分割方法1を採用する。この場合あるランクまでに入る同数は、ko=nzz=(nz2-1)/npe+1となる。ここに両側の境界を含めて nz2=nz+2 となっている。k(z)方向に分割した両側にのりしろが1個ずつ必要なので、各PEに必要なk(z)方向の配列の範囲は k=(0:nzz+1) で与えられ、大きさは nzz+2 と取ればよいことになる。また、fg(nx2,ny2,nz2) はファイル read と write のために利用する作業配列である。

```

CC MPI START
    parameter(nzz=(nz2-1)/npe+1)
    dimension f(nx2,ny2,0:nzz+1,nb),u(nx2,ny2,0:nzz+1,nb),
1          ff(nx2,ny2,0:nzz+1,nb),p(nx2,ny2,0:nzz+1,nbb),
2          pp(nx2,ny2,0:nzz+1,3)
c for all_gather
    dimension fg(nx2,ny2,nz2)
CC MPI END

```

分割方法 1 を用いた、具体的なパラメータは次の部分で与えられる。この計算で、`isize` と `irank` に対する、`ks,ke,kss,recvcount(npe),displs(npe)` の値が決められる。`recvcount(npe)` を計算するのに、`mpi_gather` を用いている。この部分はそのまま他のプログラムにも利用できて、それが、理解できると MPI の 1 次元方向の分割方法は主な部分が分かったことになる。

```

CC MPI START
    call mpi_init(ier)
    call mpi_comm_rank(mpi_comm_world,irank,ier)
    call mpi_comm_size(mpi_comm_world,isize,ier)
c
    kk=nz2/isize
    kmod=mod(nz2,isize)
c
    ks=1
    kss=irank*kk+min(kmod,irank)
c
    if (irank.lt.kmod) kk=kk+1
    ke=ks+kk-1
    ks1=ks
    ke1=ke
    if (irank.eq.0) ks1=2
    if (irank.eq.isize-1) ke1=ke-1
c
    nword=(ke-ks+1)*nx2*ny2
    call mpi_gather(nword,1,mpi_integer,recvcount,
*           1,mpi_integer,0,mpi_comm_world,ier)
    displs(1)=0
    do i=2,isize
        displs(i)=displs(i-1)+recvcount(i-1)
    end do
c
CC MPI END

```

次の 2 つは、単純なことでデータの `read`、`write` 及びファイルの入出力は `irank=0` で実行することを宣言している。

```

CC MPI START
    if (irank.eq.0) then
        open(11,file='./school/mearthb/meart01.data',

```

```

1          access='sequential',form='unformatted')
    end if
CC MPI END

```

```

CC MPI START
    if (irank.eq.0)
    * write (6,12) iii,last,nx,ny,nz,n1,n2,n3,n4,n5,n6,eat0,rmu0,aru,
1    eud,rrat,hx,hy,hz,t,t1,ro01,pr01,gra,dx2,dy2,dz2,dx4,dy4,dz4,
2    bis,(cp(i),i=1,11),(cj(j),j=1,10)
CC MPI END

```

また、 $k$  ( $z$ ) 方向には領域分割されているので、 $k$  ( $z$ ) 方向のグローバルな変数  $k=1,nz2$  は必ずローカルな変数  $k=ks,ke$  に変更しなければならない。

```

CC MPI START
    do 22 k=ks,ke
CC MPI END

```

次の部分は、ブロッキング通信を用いて、 $irank$  の  $ks$  のデータを  $irank-1$  に `mpi_send` で送り、そのデータを  $irank+1$  から  $irank$  の  $ke+1$  に転送することで、のりしろのデータを一つ若いランクの PE に送る。`mpi_barrier` は同期を取るためである。

```

CC MPI START
    do m=1,nb
        len=nx2*ny2
        if (irank.gt.0) then
            call mpi_send(f(1,1,ks,m),n2,mpi_real,irank-1,
&                100,mpi_comm_world,ier)
        end if
        if (irank.lt.isize-1) then
            call mpi_recv(f(1,1,ke+1,m),n2,mpi_real,irank+1,
&                100,mpi_comm_world,istatus,ier)
        end if
    end do
    call mpi_barrier(mpi_comm_world,ier)
CC MPI END

```

次は、`mpi_gatherv` でデータを  $irank=0$  に全て集めて、 $irank=0$  でファイルに書き出している。この時、書き出しの前に `mpi_barrier` で同期を取る必要がある。

```

    do 173 m=1,nb
CC MPI START
c    do m=1,nb
        call mpi_barrier(mpi_comm_world,ier)
        call mpi_gatherv(f(1,1,1,m),nword,mpi_real,fg(1,1,1),
*                recvcount,displs,mpi_real,0,
*                mpi_comm_world,ier)
c    end do
        call mpi_barrier(mpi_comm_world,ier)

```

```

CC MPI END
CC MPI START
    if(irank.eq.0) then
CC MPI END
        do 1732 k=1,nz2
            write(ntap) fg(1:nx2,1:ny2,k)
        1732 continue
CC MPI START
        end if
CC MPI END
    173 continue

```

また、MHDシミュレーションを続ける時、常に速度の絶対値の最大値をモニターすることによって、数値不安定が生じたかどうかを判定していて、vmaxが規格化した値で1を越えたら、その時のデータを書き出して計算を終了するようにしている。そのvmaxの計算には、mpi\_allreduceを用いる。

```

CC MPI START
    call mpi_allreduce(vmax,vmax1,1,mpi_real,mpi_max,
*                      mpi_comm_world,ier)
    vmax=vmax1
CC MPI END

```

以上みてきたように、HPF/JAのプログラムをMPIに書き換える場合、CC MPI STARTとCC MPI ENDで挟まれるテンプレート(モジュール)を追加・置き換えすれば、ほとんどそのまま書き換えることができる。VPP FortranからMPIへの書き換えもほとんど同じである。こうして、MPIに書き換えられた3次元MHDコードは、ほとんどベクトル化と並列化がされていると考えてよい。もちろん、時々、境界条件の部分で新たな工夫が必要なことがある。また、中規模までの計算では効率的な計算が行えたとしても、超大規模計算(3次元MHDで約1億以上の格子点を使用)の場合は、更なる注意と考慮が必要である。

### 3.2 MPI 利用についての補足説明

MPI 利用で、並列計算効率の高いプログラムの作成、境界条件の扱い方、ファイルの read と write について、補足説明を行う。

#### (1) ワイルドカードと一括送受信

ワイルドカードとブロッキング通信を用いて、irank-1のksのデータをirank+1のke+1にmpi\_sendrecvでまとめて送受信する方法を示す。ワイルドカードの利用は、領域分割の両端の処理で生じる特別な作業をdoループの外に出せるために計算効率がかかなり改善される。また、mpi\_sendとmpi\_recvを用いて送信と受信を分離する場合よりも早くなることが多い。実際、利用した全ての計算機で最大効率を出したのはこの方法の採用であった。

```

CC MPI START
    ibright = irank + 1
    illeft  = irank - 1
    if(irank.eq.0) then
        illeft = MPI_PROC_NULL

```

```

else if(irank.eq.isize-1) then
  irect = MPI_PROC_NULL
end if
do m=1,nb
  call mpi_sendrecv(f(1,1,ks,m),n2,mpi_real,ileft,100,
&                  f(1,1,ke+1,m),n2,mpi_real,irect,100,
&                  mpi_comm_world,istatus,ier)
end do

```

CC MPI END

## (2) 非ブロッキング通信の使用

前の節では、ブロッキング通信 `mpi_send` と `mpi_recv` を利用していたが、非ブロッキング通信 `mpi_isend` と `mpi_irecv` を使用するとプログラムの計算効率が向上する。その使用方法は簡単で、使用例は `mearthb.isend.f` にあるのでご覧頂きたい。この場合、非ブロッキング通信を用いるので、送信 `mpi_isend` と受信 `mpi_irecv` コマンドと同時に送信・受信の完了を待つ `mpi_wait` をセットにして用いる必要がある。しかし、非ブロッキング通信を実用コードに適用する場合は、計算効率上の向上を得られないこともあるので必ず確認することが必要である。

## (3) 周期的境界条件

周期的境界条件は、次のように最後の番号の PE、`irank=isize-1` の `k=ke-1` から、最初の番号の PE、`irank=0` の `k=ks` へと転送し、更に、最初の番号の PE、`irank=0` の `k=ks+1` から最後の番号の PE、`irank=isize-1` の `k=ke` へと転送すればよい。その具体的な例は、次に示すような Modified leap-frog 法で 3 次元の波動方程式を解くプログラム、ディレクトリ `mwave` の `mwave3.f.send` と `mwave3.f.isend` を参照して頂きたい。

CC MPI START

```

if (irank.eq.isize-1) then
  call mpi_send(f(1,1,ke-1,m),n2,mpi_real,0,
&              110,mpi_comm_world,ier)
elseif (irank.eq.0) then
  call mpi_recv(f(1,1,ks,m),n2,mpi_real, isize-1,
&              110,mpi_comm_world,istatus,ier)
end if

c
if (irank.eq.0) then
  call mpi_send(f(1,1,ks+1,m),n2,mpi_real, isize-1,
&              115,mpi_comm_world,ier)
elseif (irank.eq.isize-1) then
  call mpi_recv(f(1,1,ke,m),n2,mpi_real,0,
&              115,mpi_comm_world,istatus,ier)
end if
call mpi_barrier(mpi_comm_world,ier)

```

CC MPI END

## (4) 特殊な境界条件を MPI でどう解くか

次の例のように、分割の  $k(z)$  方向の変数を逆に並び替える場合は、効率のよい MPI のプログラムをどのように作るか、考えてみて下さい。ここに、 $nz2=nz+2$  ,  $nz3=nz+3$  とする。( ヒント : 必要最小

の変数を `mpi_gatherv` で `irank=0` に集めて、並び替え、続いて `mpi_scatterv` で各 PE に配信する方法が考えられる。)

```
do k=1,nz2
  f(2:nx1,1,k,1:nb) = f(2:nx1,2,-k+nz3,1:nb)
end do
```

#### (5) read と write のファイル入出力をどうするか

地球磁気圏の3次元MHDコード `mearthb_send.f` では、データ入出力の作業配列 `fg(nx2,ny2,nz2)` を用意して、`mpi_gatherv` でデータを `irank=0` に全て集めて、`irank=0` でファイルに書き出している。これは、配列を増やしてプログラムサイズを大きくする時、大きな問題となる。まず、送受信のバッファの制限内に収まっているか、次に `irank=0` の `fg(nx2,ny2,nz2)` にデータを全て集めるので、`irank=0` のメモリ制限がある。通常の計算(3次元MHDコードでの格子点が約1億個以下)では、ここで書いていることは深刻な問題とはならない。しかし、プログラムサイズを極端に大きくする時は作業配列 `fg` は使用せず、かつデータを `irank=0` に全て集めることも止める必要がある。この場合は、個々のランク(PE)からそれぞれ名前を区別して個々にファイルを書き出し、後でその個々のファイルをまとめるなど編集して利用することになる。

#### (6) MPI のプログラム作成のまとめ

これまでみてきたように、MPI のプログラム作成は簡単だと思って間違いはないと思う。それも、VPP Fortran や HPF/JA で効率的に書かれたプログラムならなおさらである。そして、フルベクトル化とフル並列化も多くの場合、容易に達せられるであろう。問題が生じるとすれば、境界条件で発生することが時々ある。また、MPI プログラムの効率化は使用している並列計算機の特徴や機能とも関係している。従って、問題が生じたり、効率化が出ない場合は、センターなどのプログラム相談者に質問や相談するのがよいであろう。それと並行して、MPI プログラムを利用している研究者が MPI の使用知識を公開して共有化することも極めて現実的で有効な方法である。この目的で私達は次の Homepage (<http://center.stelab.nagoya-u.ac.jp/kaken/kakenhi.html>) を設けて、個々の研究者が得た並列計算の知識を共有化しようと計画している。

### 3.3 並列計算法の効率

3次元MHDシミュレーションなどの大型シミュレーションを実行するためには、スーパーコンピュータの利用と、ベクトル化や並列化による計算速度の効率化は必須である。表1に、講義と実習で使用する3次元MHDコードをSUNとVPP-5000(VP Fortran, VPP Fortran, HPF/JA, MPI)で実行した時の速度の比較を示している。計算時間(sec)は、Modified leap-frog法で1回時間ステップを進めるのに要する時間を示している。SUN(GR720)に比べて、VPP5000(2PE)ではいずれも約70倍の計算速度がでていることが分かる。実際の太陽風地球磁気圏相互作用の3次元MHDシミュレーションでは、約1万回の繰り返し計算をするので、SUN(GR720)で約20時間、VPP5000(2PE,MPI)で約20分の計算時間がかかることが分かる。PEを増やすと更にその差は更に大きくなる。

表1. 計算機実習で用いる1/4領域の地球磁気圏シミュレーション3次元MHDコードの計算速度の比較: earthb、格子点数  $(nx,ny,nz)=(180,60,60)$

Table 1. Comparison of computer processing capability of 3-dimensional global MHD code with a quarter volume: earthb with  $(nx,ny,nz)=(180,60,60)$ .

Computer Processing Capability

A Quarter Model of the Earth's Magnetosphere (nx,ny,nz)=(180,60,60); earthb

computer	number of PEs	compiler	sec	(MFLOPS)	GF/PE	(date)
Fujitsu GR720	(1PE)	Fortran 90 (frt)	7.72998	( 136)	0.14	(2002.08.01)
Fujitsu VPP-5000	(1PE)	VP Fortran	0.19342	( 5,428)	5.43	(2002.08.01)
Fujitsu VPP-5000	(2PE)	VPP Fortran	0.10509	( 9,990)	5.00	(2002.08.01)
Fujitsu VPP-5000	(2PE)	HPF/JA	0.11064	( 9,489)	4.74	(2002.08.01)
Fujitsu VPP-5000	(2PE)	MPI	0.09899	( 10,606)	5.30	(2002.08.01)
Fujitsu VPP-5000	(2PE)	MPI (isend)	0.09774	( 10,797)	5.40	(2002.08.08)

frt: Fujitsu VPP Fortran 90      HPF: High Performance Fortran

MPI; Message Passing Interface

: MFLOPS is an estimated value in comparison with the computation by  
1 processor of CRAY Y-MP C90.

並列計算の有効性を示すために、VPP Fortran と HPF/JA と MPI で書かれた太陽風地球磁気圏相互作用の 3次元 MHD コードによる Fujitsu VPP5000/64 を用いての計算速度の比較を示す。VPP Fortran, HPF/JA 及び MPI で同等の計算速度がでていて、その計算効率もかなり高いことが分かる。これらの並列計算 MHD コードはフルベクトル化とフル並列化ができていて、VPP Fortran と HPF/JA の大規模計算では 400 Gflops 程度以上の高効率も実現している。こうして、ワークステーションや PC の最速のものに対して、最大規模のスーパーコンピュータは大体千倍以上の計算速度を有していることが理解できると思う。

配列が ( 800x200x478, 800x200x670 ) のようになって、計算の規模が大きくなった場合、MPI は通常の実行モードではまだ必ずしも十分な高効率の計算速度を実現していない。表 2 では、MPI Fortran ジョブも高効率を得られているが、これはシングルモードでのテスト結果を示している。通常の実行モードで必ずしも高効率を得られない理由は、当該の MPI Fortran コードの問題、ベクトル並列型スーパーコンピュータ VPP5000 とのマッチングの問題、MPI の計算時間計測のみが他と異なっている問題などいくつかの原因があるようなので、目下調査中である。問題がはっきりすれば、上述の Homepage などですす予定である。VPP Fortran と HPF/JA では cpu 使用時間の累計を計算時間計測に用いているが、MPI では cpu 使用時間の累計を計る方法が無いので単にジョブの経過時間を用いている。従って、MPI の計測では多重のジョブが同時に実行されているとそれだけ遅く出てしまう。いずれにせよ、MPI は使用開始して日が浅いので、解決すべき問題が多くある。MPI は最後の共通並列計算方法である点からも、その問題解決のためにも MPI の使用知識の共有化は重要であると考えている。

表 2 . VPP Fortran と HPF/JA と MPI で書かれた太陽風地球磁気圏相互作用の 3次元 MHD コードによる Fujitsu VPP5000/64 での計算速度の比較

Table 2. Comparison of computer processing capability between VPP Fortran and HPF/JA and MPI in a 3-dimensional global MHD code of the solar wind-magnetosphere interaction by using Fujitsu VPP5000/64.

Number of PE	Number of grids	VPP Fortran		HPF/JA		MPI	
		cpu time	Gflops Gf/PE	cpu time	Gflops Gf/PE	cpu time	Gflops Gf/PE

1PE	200x100x478	119.607 ( 0.17)	0.17 (scalar)				
1PE	200x100x478	2.967 ( 6.88)	6.88	3.002 ( 6.80)	6.80		
2PE	200x100x478	1.458 ( 14.01)	7.00	1.535 ( 13.30)	6.65	1.444 ( 14.14)	7.07
4PE	200x100x478	0.721 ( 28.32)	7.08	0.761 ( 26.85)	6.71	0.714 ( 28.60)	7.15
8PE	200x100x478	0.365 ( 55.89)	6.99	0.386 ( 52.92)	6.62	0.361 ( 56.55)	7.07
16PE	200x100x478	0.205 ( 99.38)	6.21	0.219 ( 93.39)	5.84	0.191 (107.19)	6.70
24PE	200x100x478	0.141 (144.49)	6.02	0.143 (143.02)	5.96	0.1302(157.24)	6.55
32PE	200x100x478	0.107 (191.23)	5.98	0.110 (186.13)	5.82	0.1011(202.50)	6.33
48PE	200x100x478	0.069 (297.96)	6.21	0.074 (276.96)	5.77	0.0679(301.51)	6.28
56PE	200x100x478	0.064 (319.53)	5.71	0.068 (299.27)	5.34	0.0639(320.39)	5.72
64PE	200x100x478	0.0662(308.91)	4.83	0.0627(324.57)	5.07	0.0569(359.80)	5.62
1PE	500x100x200	2.691 ( 7.94)	7.94	2.691 ( 7.94)	7.94		
2PE	500x100x200	1.381 ( 15.47)	7.73	1.390 ( 15.37)	7.68	1.355 ( 15.77)	7.89
4PE	500x100x200	0.715 ( 29.97)	7.47	0.712 ( 29.99)	7.50	0.688 ( 31.03)	7.76
8PE	500x100x200	0.398 ( 53.65)	6.71	0.393 ( 54.38)	6.80	0.372 ( 57.50)	7.19
16PE	500x100x200	0.210 (101.87)	6.37	0.202 (105.74)	6.61	0.193 (110.70)	6.92
24PE	500x100x200	0.160 (133.70)	5.57	0.150 (142.40)	5.93	0.135 (158.26)	6.59
32PE	500x100x200	0.131 (163.55)	5.11	0.120 (175.50)	5.48	0.1084(197.10)	6.15
48PE	500x100x200	0.100 (214.48)	4.46	0.091 (231.69)	4.82	0.0811(263.44)	5.49
56PE	500x100x200	0.089 (239.48)	4.28	0.086 (244.85)	4.37	0.0688(310.54)	5.55
64PE	500x100x200	0.0956(222.95)	3.48	0.0844(249.49)	3.90	0.0687(310.99)	4.86
2PE	800x200x478	10.659 ( 15.33)	7.66	10.742 ( 15.21)	7.60	10.428 ( 15.67)	7.83
4PE	800x200x478	5.351 ( 30.53)	7.63	5.354 ( 30.52)	7.63	5.223 ( 31.28)	7.82
8PE	800x200x478	2.738 ( 59.67)	7.46	2.730 ( 59.85)	7.48	2.696 ( 60.61)	7.58
12PE	800x200x478	1.865 ( 87.58)	7.30	1.911 ( 85.49)	7.12	1.771 ( 92.25)	7.68
16PE	800x200x478	1.419 (115.12)	7.19	1.389 (117.66)	7.35	1.342 (121.81)	7.61
24PE	800x200x478	0.975 (167.54)	6.98	0.976 (167.45)	6.98	0.905 (180.59)	7.52
32PE	800x200x478	0.722 (226.33)	7.07	0.717 (227.72)	7.12	0.690 (236.63)	7.39
48PE	800x200x478	0.534 (305.70)	6.36	0.515 (317.26)	6.61	0.469 (348.38)	7.25
56PE	800x200x478	0.494 (330.95)	5.91	0.464 (352.49)	6.29	0.433 (377.73)	7.74
64PE	800x200x478	0.465 (351.59)	5.49	0.438 (373.41)	5.83	0.389 (420.45)	6.57
4PE	800x200x670	7.618 ( 30.06)	7.52	8.001 ( 28.62)	7.16	7.433 ( 30.81)	7.70
8PE	800x200x670	3.794 ( 60.36)	7.54	3.962 ( 57.81)	7.23	3.683 ( 62.17)	7.77
12PE	800x200x670	2.806 ( 81.61)	6.80	3.005 ( 76.21)	6.35	2.696 ( 84.95)	7.08
16PE	800x200x670	1.924 (119.00)	7.44	2.012 (113.85)	7.12	1.854 (123.53)	7.72
24PE	800x200x670	1.308 (175.10)	7.30	1.360 (168.44)	7.02	1.254 (182.61)	7.60
32PE	800x200x670	0.979 (233.85)	7.31	1.032 (221.88)	6.93	0.955 (239.77)	7.49
48PE	800x200x670	0.682 (335.62)	6.99	0.721 (317.80)	6.62	0.662 (346.21)	7.21
56PE	800x200x670	0.595 (384.61)	6.87	0.628 (364.87)	6.52	0.572 (400.59)	7.15
16PE	1000x500x1118	9.668 (123.52)	7.72	9.619 (125.50)	7.84		
32PE	1000x500x1118	5.044 (236.73)	7.40	4.992 (241.83)	7.56		

```

48PE 1000x500x1118 3.550 (336.40) 7.01 3.479 (346.97) 7.23
56PE 1000x500x1118 2.985 (400.04) 7.14 2.935 (411.36) 7.35
32PE 1000x1000x1118 9.979 (239.33) 7.48 9.813 (243.37) 7.61
48PE 1000x1000x1118 7.177 (332.79) 6.93 7.028 (339.85) 7.08
56PE 1000x1000x1118 5.817 (410.55) 7.33 5.794 (412.23) 7.36

```

-----  
: Mflops is an estimated value in comparison with the computation by  
1 processor of CRAY Y-MP C90.

## 4 太陽風磁気圏相互作用の3次元MHDコードの実行

ここでは、計算機実習で用いる1/4領域の太陽風と地球磁気圏相互作用の3次元グローバルMHDシミュレーションコードで用いているパラメータの説明をして、ワークステーションなどの普通の計算機で計算するメモリ節約型のベクトル化コード(earthb10.f)、及び、VPP Fortran, HPF/JA 及びMPIの3つのバージョンの並列計算3次元MHDコードの計算実行方法とその具体例を示す。更に、PostScriptファイルを用いたシミュレーション結果の図形出力及びVRML (Virtual Reality Modeling Language)を用いた3次元可視化の方法とそれらの具体例を示す。

### 4.1 計算パラメータの設定

ベクトル化された3次元MHDコードearthb(earthb10.f)で使用しているパラメータの設定を次にまとめて示す。ベクトル並列化3次元MHDコードでのパラメータの設定内容は同じである。

```

main program : earthb10.f
  earthb10.f using modified leap-frog scheme
  3D MHD simulation of 1/4 earth's magnetosphere
  Cartesian coordinate  finite resistivity  45 degree boundary

(nx,ny,nz)=(180,60,60)      : grid number without boundary
npx=30                      : parameter to determine earth position
last=1024                  : number of time steps
iiq0=8                     : a unit of modified leap-frog scheme
iip0= 32                   : adjust upstream boundary condition
iis0= 1024                 : sampling step of data
thx=4.00                   : parameter to adjust time step

(xl,y1,z1)=(90.5,30.5,30.5)Re: length in each direction
hx=xl/float(nx+1)=0.5Re    : grid interval in x direction
hy=y1/float(ny+1)=0.5Re    : grid interval in y direction
hz=z1/float(nz+1)=0.5Re    : grid interval in z direction
t=0.5*hx*thx               : time interval
t(real)=t*ts               : real time to one time step advance
                          =0.5*0.5*4.00*0.937 : ts is normalization value in time
                          =0.937 sec

```

```
x=0.5*hx*float(2*i-nx2-1+2*nxp) : x position versus grid number
y=0.5*hy*float(2*j-3)           : y position versus grid number
z=0.5*hz*float(2*k-3)           : z position versus grid number
```

where  $nx2=nx+2$ ,  $ny2=ny+2$  and  $nz2=nz+2$

```
ro01=5.0E-4 (5/cc)              : mass density of solar wind
pr01=3.56E-8                     : pressure of solar wind
vsw=0.044 (300km/s)             : speed of solar wind
bis=CP(11)=1.5E-4 (5nT)         : amplitude of IMF

eatt                             : resistivity
rmuu                             : viscosity
eud0                             : friction or collision term
```

1-dimensional array variable  $f(i1)=f(i,j,k,m)$

```
n1=nx+2,n2=n1*(ny+2),n3=n2*(nz+2)
nb=8,nbb=11,n4=n3*nb,n5=n3*nbb
```

```
i1=i+n1*(j-1)+n2*(k-1)+n3*(m-1)
```

```
m=1 : rho, plasma density
m=2 : Vx, x-component of velocity
m=3 : Vy, y-component of velocity
m=4 : Vz, z-component of velocity
m=5 : P, plasma pressure
m=6 : Bx, x-component of magnetic field
m=7 : By, y-component of magnetic field
m=8 : Bz, z-component of magnetic field
```

## 4.2 計算実行例

ベクトル化された 3 次元 MHD コード `earthb(earthb10.f)` とベクトル並列化 3 次元 MHD コード、MPI(`mearthb`)、HPF/JA(`hearthb`)、VPP Fortran(`peartb`) での計算実行例を次に示す。ベクトル並列化 3 次元 MHD コードの実行でコンパイルと実行のシェルは、それぞれのディレクトリの中に置いてあり、実行コマンドの例は `readme` ファイルに書かれている。

### 4.2.1. <<execution of main program>>

1. `f77 -O earthb10.f`
2. `a.out &`

where file must be defined in open statement like

```
c      open(10,file='earthb10.data',
```

```

c      1      access='sequential',form='unformatted')
      open(11,file='earthb11.data',
      1      access='sequential',form='unformatted')
c
or
1. f77 -o earthb10 -O earthb10.f
2. earthb10 &

```

#### 4.2.2. <<compile and execution using by supercomputer, Fujitsu VPP5000>>

##### (1) MPI (Message Passing Interface): mearthb

All the comand shells are in "readme" file.

###### (1a) TSS

```

mpifrt progmpi.f :compile to make execution file, a.out
jobexec -vp 2 ~/school/mearthb/a.out :execution of a.out by 2 PEs

```

###### (1b) Batch

```

qsub -q c -eo -o pconpmpi2.out pcompmpi2.sh :compile
qsub mpi_lim02e.sh :execution of progmpi by 2 PEs

```

##### (2) HPF/JA (High Performance Fortran): hearthb

```

qsub -q c -eo -o pconphpf2.out pcompmpf2.sh :compile
qsub -q z -eo -lPv 2 -o pexechpf.out pexechpf.sh :execution by 2 PEs

```

```

qsub -q c -eo -o comp.out comp.sh :compile vector mode only

```

```

qsub -q x -eo -o exec.out exec.sh :execution by 1 PE

```

##### (3) VPP Fortran (Fortran 90): pearthb

```

qsub -q c -eo -o pcomp90.out pcomp90.sh :compile
qsub -q z -eo -lPv 2 -o pexec90.out pexec90.sh :execution by 2 PEs

```

## 4.3 図形処理

図形処理を統一的行うためには、次の3つの条件が満たされる必要がある。

- 1 . コンピュータの種類に依存しない方法の確立
- 2 . ソフトウェアなど全てを自分たちでコントロールする
- 3 . プログラムなどできるだけ統一的に(共通に)扱う方法の確立

これを逆にいえば、コンピュータに依存したソフトウェアや言語・仕様は使わない、また、特定の業者のみが販売する図形処理応用ソフトウェアは使わない、ということになる。紆余曲折したが、画像処理と図形出力の統一的な扱いのためには、Fortranなどを用いて PostScript 画像ファイルを直接作成することが有効な方法であるという結論に達した。その結果として、私達が現在行っているコンピュータシミュレーションの画像処理の統一的な方法を項目としてまとめると以下のようなになる。

- (1) シミュレーションデータを IEEE Binary 形式で保存
- (2) Fortran プログラムで PostScript 画像ファイルを直接に作成  
PostScript ファイルを作成するための Interface Subroutine Package を作成
- (3) PostScript ファイルからファイル変換ツール(xv, pstogifなど)で圧縮された

画像ファイル ( gif など ) を作成

(4) 圧縮画像ファイル ( gif など ) を WWW で公開

この方法により、Fortran が使えて、その中で大文字と小文字の区別ができれば、コンピュータの種類によらずに PostScript 画像ファイルを作って図形出力を取り出すことが可能になった。また、C 言語でもできるように C 言語用の Interface Subroutine Package も用意している。

<http://gedas.stelab.nagoya-u.ac.jp/simulation/jst2k/hpf02.html>

#### 4.3.1. graphics program to make PostScript files

1. gm150b.f (main) + gsub150.f (subroutine)  
noon-midnight meridian and equatorial plots (black and white)
2. gm220b.f (main) + gsub220.f (subroutine)  
energy distribution of cross section
3. gm480b.f (main) + gsub480.f (subroutine)  
3-dimensional magnetic field lines

<<execution of PostScript graphics program>>

1. f77 -c -0 gsub150.f
2. f77 -0 gm150b.f gsub150.o
3. a.out > gm150b.ps &
4. gs gm150b.ps
5. lp gm150b.ps

1. f77 -c -0 gsub220.f
2. f77 -0 gm220b.f gsub220.o
3. a.out > gm220b.ps &

1. f77 -c -0 gsub480b.f
2. f77 -0 gm480b.f gsub480b.o
3. a.out & : output is written in fort.10
4. mv fort-10 gm480b.ps

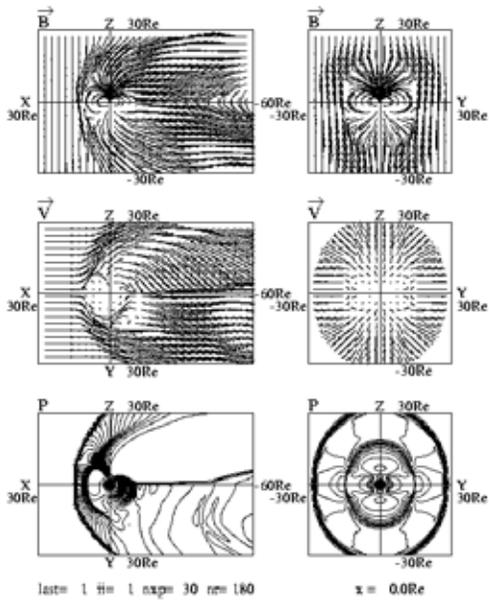
太陽風と地球磁気圏相互作用の 3 次元グローバル MHD シミュレーションから得られた地球磁気圏の構造を示す図を、図 7 . 子午面と赤道面及び尾部断面図 ( 白黒 : gm150b.ps )、図 8 . 子午面と赤道面及び尾部断面図 ( カラー図 : gm220b.ps )、図 9 . 磁力線の 3 次元構造 ( gm480b.ps ) に示す。

## 5 VRML による 3 次元可視化

VRML ( Virtual Reality Modeling Language ) の登場のよって、VRML のビューアさえあれば誰でも 3 次元画像を自分の好きなように見ることが出来る状況が実現した。自分のコンピュータの処理能力に依存して 3 次元画像処理 ( 回転、拡大縮小など ) の速度は決まるが、最近のネットスケープやインターネットエクスプローラなどを使えば、VRML 2.0 対応の cosmo player 等のビューアを利用して、3 次元可視化がいつでもどこでも実現できる。

VRML ファイルの作成をどう実現するかであるが、私達は、VRML ファイル作成のための Fortran

3D MHD Simulation of Earth's Magnetosphere  
Incoming Southward IMF,  $B_z = -5 \text{ nT}$



3D MHD Simulation of Earth's Magnetosphere  
Density and energy of cross section  
Incoming Southward IMF,  $B_z = -5 \text{ nT}$

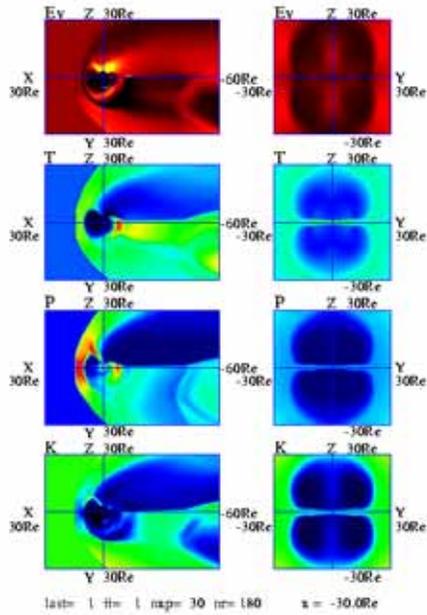
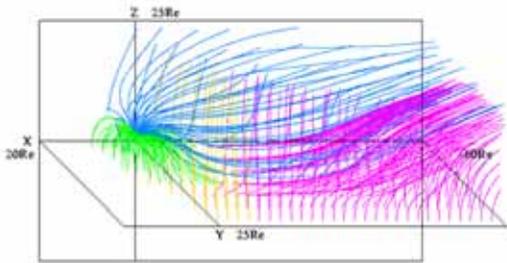


図 7: 太陽と地球を結ぶ子午面と赤道面の地球磁気圏の構造と磁気圏尾部の断面図 (白黒図: gm150b.ps)

図 8: 太陽と地球を結ぶ子午面と赤道面の地球磁気圏の構造と磁気圏尾部の断面図 (カラー図: gm220b.ps)

3D MHD Simulation of Earth's Magnetosphere  
Incoming Southward IMF  $B_z = -5 \text{ nT}$



3D MHD Simulation of Earth's Magnetosphere  
 $B_z = -5.0 \text{ nT}$   $N_{\text{max}} = 512$   $N_{\text{min}} = 2048$   $\alpha = 1.2 \text{ hr}^{-1} \text{ day}$

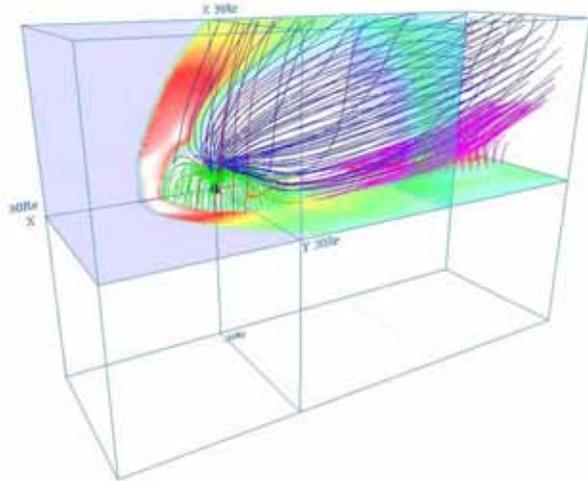


図 9: 地球磁気圏の磁力線の 3 次元構造 (gm480b.ps)

図 10: VRML を用いた地球磁気圏の可視化 (zvrml01.wrl)

Interface Subroutine Package を準備し、フォートランプログラムを用いて、3次元シミュレーションデータから直接にVRMLファイル(\*.wrl)を作っている。これは3次元と2次元の違いはあるが、PostScript 画像ファイルを作成する方法と同様の方法である。VRMLのビューアには通常視点を移動する walk モードと対象物を移動・回転・拡大縮小する examine モードがあり、磁気リコネクションなどの微細構造の関係を見るのに大変有効である。

## 5.1 Fortran を用いたサブルーチンパッケージ

`ftp://gedas.stelab.nagoya-u.ac.jp/sramp/simulation/vrml/`

VRML (Virtual Reality Modeling Language) and PostScript Fortran programs

1. vrml  
3-dimensional visualization Fortran program by using VRML
2. PostScript  
Fortran test program to make PostScript graphic files
3. PostScript2  
Fortran test program to make PostScript graphic files with subroutine

## 5.2 地球磁気圏の3次元MHDシミュレーションへの適用

`ftp://gedas.stelab.nagoya-u.ac.jp/sramp/simulation/earthb/`

3-dimensional graphics program by VRML files  
<Virtual Reality Modeling Language>

1. zvrmagb.f (main) + zvrsubb.f (subroutine)  
3-dimensional magnetic field lines
2. zvrprob.f (main) + zvrsubb.f (subroutine)  
cross sectional pattern by pixel image

<<execution of VRML graphics program>>

1. f77 -c -0 zvrsubb.f
2. f77 -0 zvrmagb.f zvrsubb.o
3. a.out & : output is written in fort.10
4. mv fort.10 fort.102

1. f77 -c -0 zvrsubb.f
5. f77 -0 zvrprob.f zvrsubb.o
6. a.out & : output is written in fort.10
7. mv fort.10 fort.101
8. cat fort.101 fort.102 > zvrml01.wrl

VRMLを用いて、シミュレーションから得られた地球磁気圏構造を3次元可視化した例を図10に示す。

## 6 おわりに

C 富士通 VP-2600、日立 S820、NEC SX-3、CRAY Y-MP などのベクトル計算機の時代までは、フルベクトル化された 3 次元 MHD コードを用いて Fortran コンパイラが載っている全ての計算機を利用して、太陽風と地球磁気圏相互作用の 3 次元グローバル MHD シミュレーションを実行することができた。この Fortran プログラムの汎用性のために、私達は 3 次元 MHD コードを世界中どこでも動かすことができ、MHD コードの配布などを通して世界中の多くの研究者と共同研究を行うことができた。しかし、ベクトル並列機と超並列機がコンピュータ シミュレーションの世の中に現れてくるや否や、Fortran プログラムの並列化の効率を上げるためにコンピュータに依存した様々の異なった手法を採らなければならなくなった。多くのシミュレーション研究者は共通のプログラム言語を失い、特定のメーカーの機種でしか並列化の効率を上げられない、方言の並列化指示文と Fortran プログラム言語を使わざるを得ない状況が発生した。

そのような閉塞的な状況を打開する並列計算共通プログラム言語の候補として、HPF (High Performance Fortran) と MPI (Message Passing Interface) がある。HPF で書かれたコードは、日米のほとんどのスーパーコンピュータで高効率の計算が期待できないし、その改良版の HPF/JA (日本で開発改良された HPF の改良版) は高効率を実現できるが、それも現在は日本の富士通と NEC のスーパーコンピュータに限定され、日立のマシンでは高効率を得ることはできない。こうして、共通並列計算法としての MPI に対する期待は益々大きくなっていった。こうした状況下、MPI を用いた 3 次元 MHD コード作成の具体的方法を例示し、VPP Fortran や HPF/JA と同等以上の高効率計算が実現できることを具体的に示してきた。MPI は、今後画像処理なども含めて、多くの種類の計算機で広く並列計算に使われる方法として期待されている。

太陽風と地球磁気圏相互作用のシミュレーション結果などを理解し、更に、人によりよく理解してもらうためには可視化は必須であり、アニメーション動画の作成と 3 次元可視化 / 3 次元画像解析は極めて強力な威力を発揮する。動画によってその複雑な振る舞いを一目瞭然にすることができ、更に、インターネット 3 次元言語、VRML の登場によって 3 次元画像解析を誰にでもすぐに手にすることができるようになった。即ち、ネットワークを通して 3 次元可視化コンテンツの共有化が実現できるようになったといえる。

世界最高速の性能を誇る国産の新世代並列型スーパーコンピュータを用い、スペースプラズマ現象を効率よく並列計算できる、HPF や MPI の共通コンピュータ言語を用いた電磁流体コード、粒子コード、及びハイブリッドコードを作成・普及させて、世界に先駆けた大規模シミュレーションとそれらのコードを連携した大規模シミュレーションから太陽風磁気圏電離圏ダイナミクスやスペースプラズマの非線形物理に新しい知見をもたらすことが期待される。

### 謝辞

本稿のコンピュータシミュレーションは名古屋大学情報連携基盤センターのスーパーコンピュータ、Fujitsu VPP5000/64 を利用してなされたものです。また、VPP Fortran から HPF/JA と MPI への書き換えでは多くの助言を頂いた名古屋大学情報連携基盤センターの津田知子助手と富士通株式会社の方に、更に、MPI への原型の書き換えではお世話と指導頂いた国立極地研究所の岡田雅樹助手と日立製作所の方に感謝いたします。

## 参考文献

- [1] T. Ogino, A three-dimensional MHD simulation of the interaction of the solar wind with the earth's magnetosphere: The generation of field-aligned currents, *J. Geophys. Res.*, 91, 6791-6806 (1986).
- [2] T. Ogino, R.J. Walker and M. Ashour-Abdalla, A global magnetohydrodynamic simulation of the magnetosheath and magnetopause when the interplanetary magnetic field is northward, *IEEE Transactions on Plasma Science*, Vol.20, No.6, 817-828 (1992).
- [3] T. Ogino, Two-Dimensional MHD Code, (in *Computer Space Plasma Physics*), Ed. by H. Matsumoto and Y. Omura, Terra Scientific Publishing Company, 161-215, 411-467 (1993).
- [4] T. Ogino, R.J. Walker and M. Ashour-Abdalla, A global magnetohydrodynamic simulation of the response of the magnetosphere to a northward turning of the interplanetary magnetic field, *J. Geophys. Res.*, Vol.99, No.A6, 11,027-11,042 (1994).
- [5] 荻野竜樹、「太陽風と磁気圏相互作用の電磁流体力学的シミュレーション」,  
プラズマ・核融合学会誌, CD-ROM 特別企画(解説論文), Vol.75, No.5, CD-ROM 20-30, 1999.  
<http://gedas.stelab.nagoya-u.ac.jp/simulation/mhd3d01/mhd3d.html>
- [6] 荻野竜樹、「太陽風磁気圏相互作用の計算機シミュレーション」,  
名古屋大学大型計算機センターニュース, Vol.28, No.4, 280-291, 1997.
- [7] 荻野竜樹、「コンピュータシミュレーションと可視化」,  
愛媛大学総合情報処理センター広報, Vol.6, 4-15, 1999.  
<http://gedas.stelab.nagoya-u.ac.jp/simulation/simua/ehime985.html>
- [8] 荻野竜樹「VPP Fortran から HPF へ」, 名古屋大学大型計算機センターニュース 解説, 372-405,  
Vol.31, No.4, (2000).  
<http://gedas.stelab.nagoya-u.ac.jp/simulation/hpfja/hpf013.html>
- [9] Ogino, T., Global MHD Simulation Code for the Earth's Magnetosphere Using HPF/JA,  
*Special Issues of Concurrency: Practice and Experience*, 14, 631-646, 2002.  
<http://gedas.stelab.nagoya-u.ac.jp/simulation/hpfja/mhd00.html>
- [10] 津田知子、「新スーパーコンピュータ VPP5000/56 の利用について」,  
名古屋大学大型計算機センターニュース, Vol.31, No.1, 18-33, 2000.
- [11] 津田知子、「MPIによる並列化」, 名古屋大学情報連携基盤センター MPI 講習会資料,  
2002年2月
- [12] High Performance Fortran Forum, 「High Performance Fortran 2.0 公式マニュアル」,  
Springer, 1999.
- [13] 富士通株式会社、「HPFプログラミング ~並列プログラミング(HPF編) UXP/V 第1.0版、2000年6月.
- [14] 富士通株式会社、「VPP FORTRANプログラミング」, UXP/V, UXP/M  
第1.2版、1997年4月.
- [15] 富士通株式会社、「MPIプログラミング ~Fortran, C~」第1.3版、2001年4月.

- [16] 富士通株式会社、「MPI 使用手引き書 V20 用」、UXP/V 初版 1999 年 9 月
- [17] 青山幸也（日本アイ・ビーエム株式会社）、「並列プログラミング虎の巻 MPI 版」  
虎の巻シリーズ 2、2001 年 1 月。
- [18] 株式会社日立製作所、「スーパーテクニカルサーバ SR8000 プログラム移植報告書」  
国立極地研究所、2002 年 3 月。
- [19] 名古屋大学情報連携基盤センター、「スーパーコンピュータ VPP5000 利用の手引き」  
2002 年 4 月。  
「VPP5000 利用の手引きの pdf ファイル」  
[http://nucc.cc.nagoya-u.ac.jp/CENT/vpp\\_tebiki.pdf](http://nucc.cc.nagoya-u.ac.jp/CENT/vpp_tebiki.pdf)  
「スーパーコンピュータ VPP5000/64 利用案内」の Homepage  
[http://www2.itc.nagoya-u.ac.jp/sys\\_riyou/vpp/vppteiki.htm](http://www2.itc.nagoya-u.ac.jp/sys_riyou/vpp/vppteiki.htm)

# MPIを用いた並列化

「天体とスペースプラズマのシミュレーションサマースクール」

野澤 恵 (茨城大学理学部) snozawa@env.sci.ibaraki.ac.jp

## 1 はじめに

ネットワークに接続された計算機群 (クラスター) を、単一の並列計算機として利用するライブラリーの一つとして、MPIがある。MPIはMessage Passing Interface[2]の略である。MPIは仕様を定めているだけで、その実装にはMPICH[3],LAM/MPI[4]などがある。

クラスターは、分散メモリー型並列計算機 (MIMD:Multiple Instruction Multipule Data) の一種で、個々の計算機のメモリーは共有されず独立し、Message Passing (メッセージパッシング) 方式により、ノード (MPIではプロセス、ランク (rank)、PE(Processing Element) などともいう) 間で通信を行う。ここでメッセージとは、データと制御情報から成り立っている。

図1では、その簡単な模式図を示した。送信側のノード (A:Machine(CPU,OS,,)) で動作するものは、送信側の計算機のメモリーから送ろうとするデータ (a:Memoryにある $x(i)$ という変数) を含むメッセージ ( $x(i)+\alpha$ ) を作り、受信側のノード (B:Machine(CPU,OS,,)) で動作するものに渡す (network)。受け取った受信側のノードはメッセージからデータを取り出し、受信側の計算機のメモリー (b:Memory) に書き込む。よって、メッセージを送受信する時に、送信側 (a:Memory) または受信側のメモリー (b:Memory) を直接アクセスしないのが特徴である。

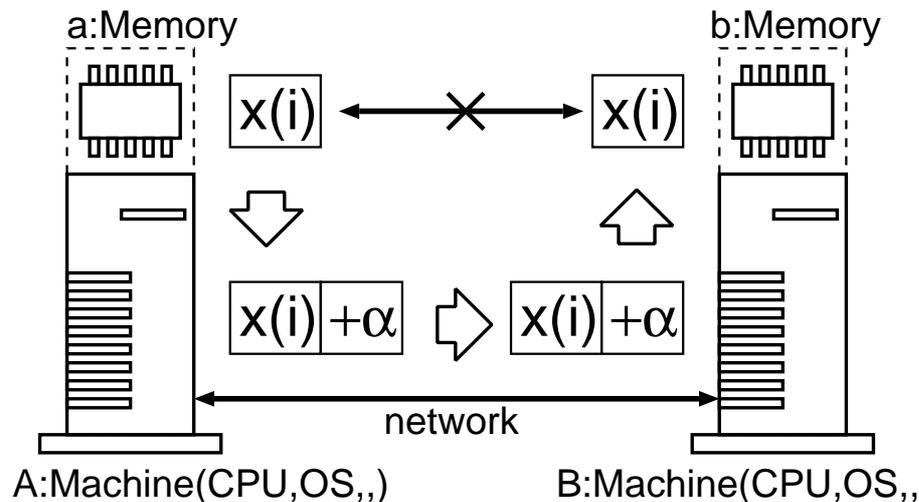


図1: メッセージパッシングの模式図

この原理的のよると、必ずしもネットワークに接続されている必要はない。例えば単一のCPUの計算機であっても、複数のノードが動作する環境であれば、実際に数値計算やそのデバックなどを行なえる。しかし、メッセージの送受信によるオーバーヘッドが発生するために、並列化しない場合に比べて基本的に速度は低下する。

また、計算機やオペレーティングシステム (以下 OS) が異なると、エンディアン (メモリーの配置方法) の違いにより整数や浮動小数点数の表現が一般的に異なる。MPIはこの違いをソフトウェアで吸収する。また、メッセージを作り出すプロセスの起動や停止、及びネットワークでのデータのやりとりも自動化されている。

実装としては、C/C++ の関数または FORTRAN のサブルーチンとして、外部ライブラリーを提供している。具体的には、FORTRAN ではヘッダーファイルの宣言と MPI を呼び出すサブルーチンを記述し、コンパイル時にリンクする。

このため、既存のプログラムを「そのまま」では MPI 化することができない。そこで、既存のプログラムを「手動」で MPI 化するしかないのが現状である。

動作環境は、スーパーコンピューターから UNIX 環境、Windows でも動作している。インストールや設定、実際の起動の方法はここでは省き、プログラムだけに注目する。

世の中には共有メモリー型並列計算機 (SIMD: Single Instruction Multipule Data) もあり、スーパーコンピューターの一部や、パソコンでも SMP (Symmetric Multi Processor) と呼ばれるものである。その場合は MPI ではなくスレッド (thread) や OpenMP[5] などの並列化の方法があるが、ここでは触れない。

## 2 どのように並列化させるか

「天体とスペースプラズマのシミュレーションサマースクール」の「流体・磁気流体コース」で用いる方法は、主に格子を使った差分法のため、隣合う格子との計算を行う方法が多い。そこで、並列化は領域を分割する方法が単純でよく用いられている。例えば三次元の問題の場合では図 2 のように分割を一次元的にするのか、二次元、三次元的にする方法がある。一般的に分割する次元が多いほどプログラムは複雑化するが、並列計算の効果は大きくなる。

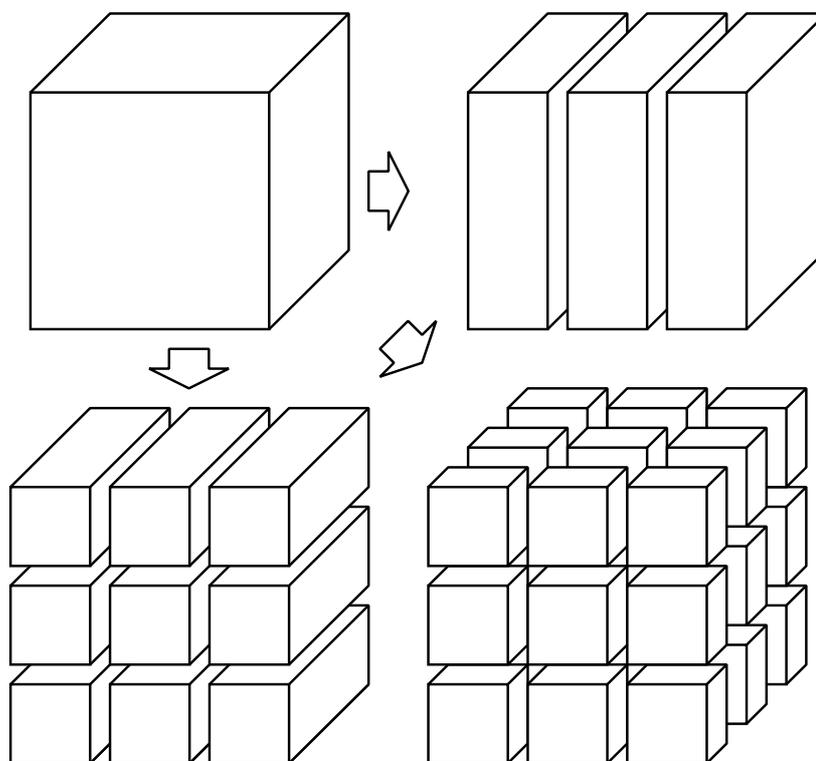


図 2: 三次元モデルの分割方法

簡単のために一方向の分割とした場合を図 3 に示した。初期値を設定し、分割された領域が受け持つ各ノードに分配し、各々のノード毎に閉じて計算を行う。しかし、流体計算では境界条件が発生するために、図 3 の「のりしろ」を考慮に入れて、通信を行い並列計算する必要がある。

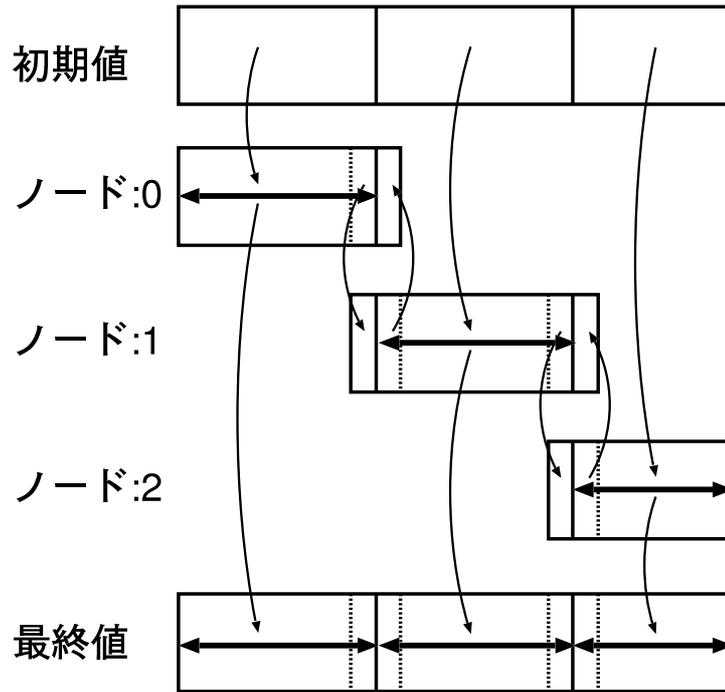


図 3: 領域分割の例、流体計算では各ノードに「のりしろ」が必要となる

また、計算後ノード毎の計算結果を、どう処理するのも問題となる。そこで、以下は CANS の例を取り、MPI のサブルーチンを紹介する。以下では、特別に断らない限り、FORTRAN の暗黙の了解に従い、i-n で始まる変数は整数とする。

### 3 CANS1D の並列化の部分

#### 3.1 main.f

cans(or cans-current)/cans1d/mdp\_shktb にある main.f の MPI に関するサブルーチンを取り出してみる。

```

:      include "mpif.h"
:
:-----
c      for MPI
:      call mpi_init(merr)
:      call mpi_comm_size(mpi_comm_world,npe ,merr)
:      call mpi_comm_rank(mpi_comm_world,myrank,merr)
:
:      call mpi_allreduce(dt,dtg,1,mpi_double_precision,mpi_min
:      &                    ,mpi_comm_world,merr)
:
:      call mpi_finalize(merr)
:

```

たったこれだけで、main.f の並列化が行なわれる (CANS は並列化が最初から考えられているため、それほど並列化は難しくない)。ここで、最初の部分の

```

:      include "mpif.h"
:      call mpi_init(merr)

```

は初期化である。最初の include "mpif.h" は mpif.h というヘッダー (インクルード)

ファイルを使うということで、MPI を使用するには必ず必要なものである\*1。

次の `mpi_init` は、今から MPI を始めるという宣言部である。 `merr` は一つの整数変数で、戻り値が入る。終了には

```
call mpi_finalize(merr)
```

とする必要がある。 `mpi_init` と同じように `merr` は一つの整数変数で、戻り値が入る。他の MPI のサブルーチンにも同じように使用されている。そして、この間に MPI のサブルーチンを記述して、並列化のプログラムを作成する必要がある。上のプログラムでは、

```
call mpi_comm_size(mpi_comm_world,npe ,merr)
:
call mpi_comm_rank(mpi_comm_world,myrank,merr)
&
call mpi_allreduce(dt,dtg,1,mpi_double_precision,mpi_min
,mpi_comm_world,merr)
```

がある。最初の `mpi_comm_size` 全ノード数を与えるもので `npe` にその値が入る。そして、`mpi_comm_rank` は実行している自分のノード番号を与えるもので `myrank` にその値が入る。ここで `mpi_comm_world` は、変更の必要はない。 `npe,myrank` は、それぞれ一つの整数変数である。また `myrank` は `0,1,2,...` と `0` から始まるので注意が必要である。

次の `mpi_allreduce` は図 4 にあるように、各々のノードで異なる `dt` から最小値を見つけ (`mpi_min`)、その値を再び各々のノードに `dtg` として分配するものである。

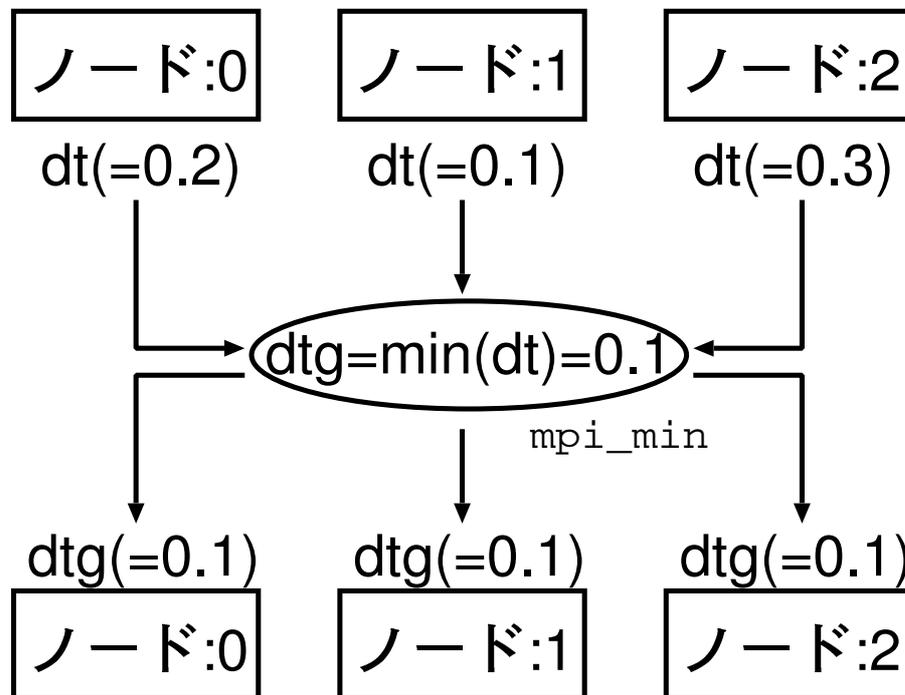


図 4: `mpi_allreduce` は各ノードの異った `dt` から最小値 `dtg` を求め (`mpi_min`)、配布する

この理由は、領域を分割する並列化を行なったために、ノードが受け持つ領域はそれぞれ物理

\*1 ヘッダーファイルにパスが通っていない場合は `include "/opt/usr/local/mpi/mpif.h"` のように絶対アドレスを用いて書く必要がある

量が異なり、結果的に CFL 条件である時間の刻み幅も異ってしまうからである。そこで、毎ステップに時間の刻み幅を各領域で同じ値になるように、各領域毎に最小値である時間の刻み幅を求めてから、その領域毎の時間の刻み幅の最小値を求める必要がある。そして求められた時間の刻み幅を各領域に再び転送する。このように領域分割した場合は同期を図る必要がある。

### 3.2 exc\_h.f

次に `cans(or cans-current)/cans1d/commonmpi` にある `/exc_h.f` の MPI に関するサブルーチンを取り出す。これは差分法のために境界条件が発生し、隣との領域でその境界の値をやりとりするものである。いわゆる「のりしろ」部分の処理である。

```

c=====
      subroutine exc_h(margin,ro,pr,vx,ix,myrank,npe)
c=====
c-----
c  from PE(myrank) to PE(myrank+1) for new da(1)
c-----
      mright= myrank+1
      mleft = myrank-1
      if (myrank.eq.npe-1) mright = mpi_proc_null
      if (myrank.eq.0      ) mleft  = mpi_proc_null
      do i=1,margin
        bufsnd(i,1)=ro(ix-2*margin+i)
        bufsnd(i,2)=pr(ix-2*margin+i)
        bufsnd(i,3)=vx(ix-2*margin+i)
      enddo
      call mpi_sendrecv
&      (bufsnd,mmx,mpi_double_precision,mright ,1
&      ,bufrcv,mmx,mpi_double_precision,mleft,1
&      ,mpi_comm_world,mstatus,merr)
      if (myrank.ne.0) then
        do i=1,margin
          ro(i)=bufrcv(i,1)
          pr(i)=bufrcv(i,2)
          vx(i)=bufrcv(i,3)
        enddo
      endif
:

```

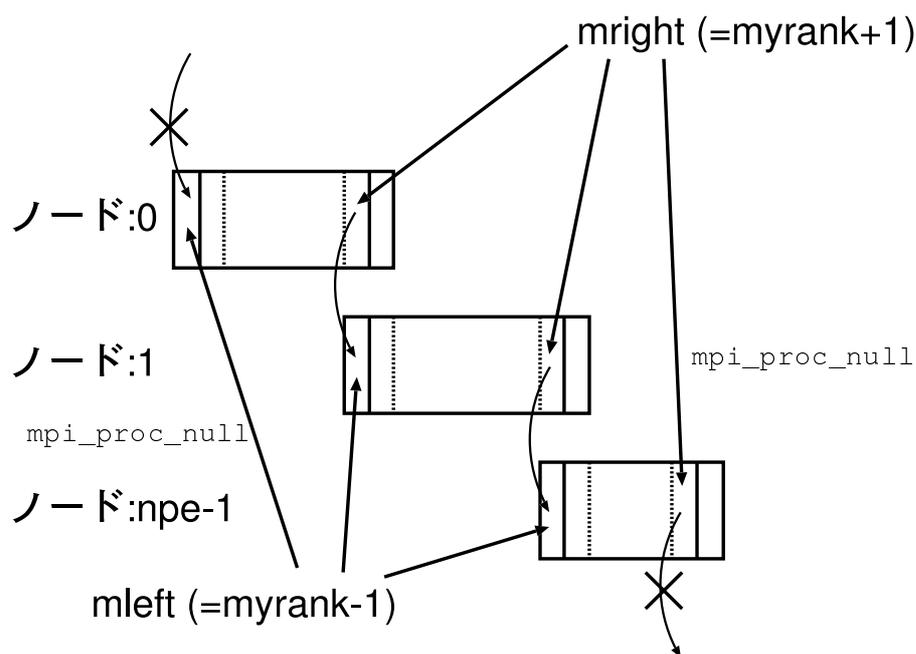


図 5: `mpi_sendrecv` はここでは「のりしろ」の送受信を行なう

図5のあるノードは、隣り合うノードから境界条件として物理量の転送が必要なため、

```

mright= myrank+1
mleft = myrank-1
if (myrank.eq.npe-1) mright = mpi_proc_null
if (myrank.eq.0      ) mleft  = mpi_proc_null

```

mright,mleft では自分の右側と左側のノード番号の指定を自分のノード番号から +1,-1 とすることで指定を行なう。しかし、myrank,h=0,npe-1 の両端では送受信が発生しない(周期境界は除く)ため、mpi\_proc\_null という値を入れて、送受信の抑制を行なう。それが

```

call mpi_sendrecv
& (bufsnd,mmx,mpi_double_precision,mright ,1
& ,bufrcv,mmx,mpi_double_precision,mleft,1
& ,mpi_comm_world,mstatus,merr)

```

という形となる。実際には bufsnd,bufrcv を用いているのは、図6に示すように複数の物理量を、一つの配列に直し、mpi\_sendrecv で一気に送受信を行ない、その後、分配を行う。

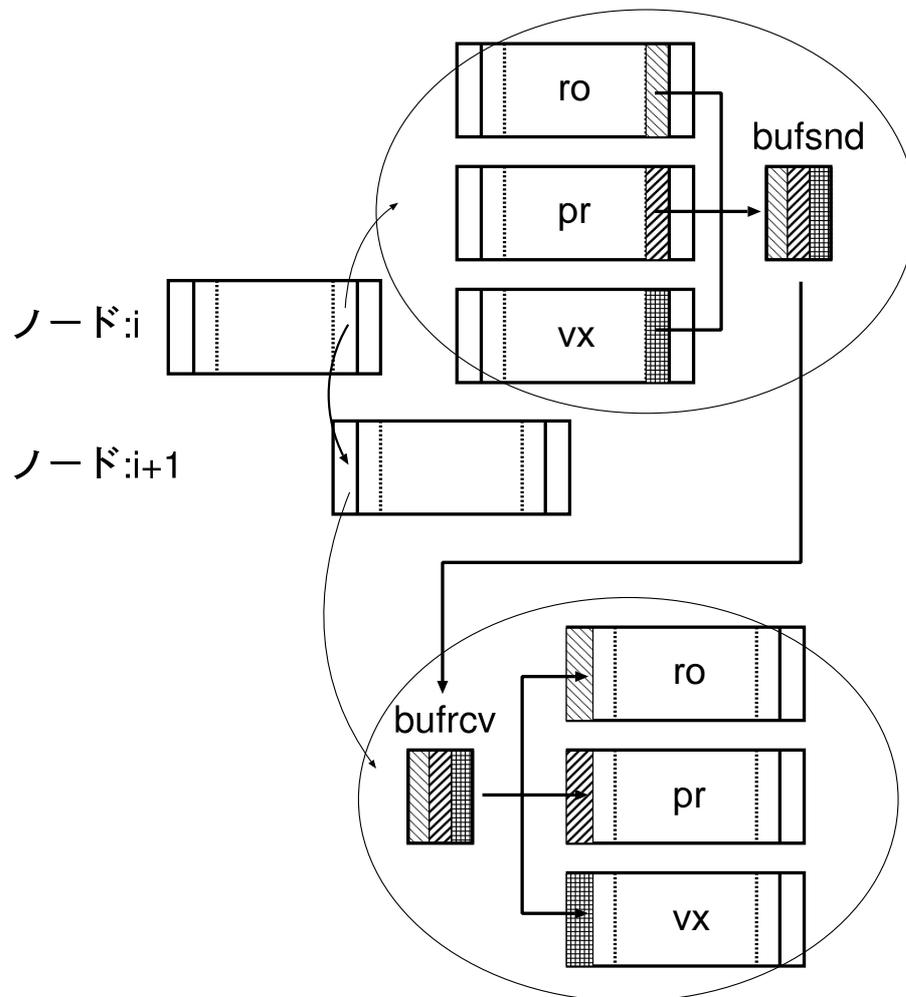


図6: 各物理量の「のりしろ」の部分を一度一つ配列にして送受信、配布

## 4 MPI の主なサブルーチンの使い方

MPI のサブルーチンとして主なものを紹介する。これ以外にもあるので是非とも調べて、使ってほしい。

## 4.1 mpi\_comm\_size : 全ノード数を求める

`mpi_comm_size(communicator,size,ierr)`

引数	型	入出力	役割
communicator	integer	入力	通常は <code>mpi_comm_world</code>
size	integer	出力	全ノード数を返す
merr	integer	出力	終了コード

ex.call `mpi_comm_size(mpi_comm_world,npe,merr)`

## 4.2 mpi\_comm\_rank : 自分のノード番号を求める

`mpi_comm_rank(communicator,rank,ierr) : 0 ≤ rank ≤ size-1`

引数	型	入出力	役割
communicator	integer	入力	通常は <code>mpi_comm_world</code>
rank	integer	出力	自分のノード番号を返す
merr	integer	出力	終了コード

ex.call `mpi_comm_rank(mpi_comm_world,myrank,merr)`

## 4.3 mpi\_send : ブロッキング送信

`mpi_send(buf,count,datatype,dest,tag,comm,ierr)`

引数	型	入出力	役割
buf	変数	入力	変数、配列
count	integer	入力	要素の個数
datatype	integer	入力	変数、配列のデータタイプ
dest	integer	入力	受信する相手のノード番号
tag	integer	入力	メッセージのタグ
comm	integer	入力	通常は <code>mpi_comm_world</code>
ierr	integer	出力	終了コード

ex.call `mpi_send( x,1,mpi_real,0,itag,mpi_comm_world,merr)`

## 4.4 mpi\_recv : ブロッキング受信

`mpi_recv(buf,count,datatype,dest,tag,comm,status,ierr) : mpi_send に比べ status が必要`

引数	型	入出力	役割
buf	変数	入力	変数、配列
count	integer	入力	要素の個数
datatype	integer	入力	変数、配列のデータタイプ
dest	integer	入力	送信された相手のノード番号
tag	integer	入力	メッセージのタグ
comm	integer	入力	通常は <code>mpi_comm_world</code>
status	integer	出力	通信結果
ierr	integer	出力	終了コード

ex.call `mpi_recv( x,1,mpi_real,i,itag,mpi_comm_world,mstatus,merr)`

## 4.5 mpi\_isend : ノンブロッキング送信

mpi\_send はブロッキング送信といわれ、デッドロックを起こす可能性がある。そこで、デッドロックを起さないノンブロッキング送信が別に mpi\_isend として用意されている。しかし同期を行うために、後に mpi\_wait を用いる必要がある\*<sup>2</sup>。

mpi\_isend(buf,count,datatype,dest,tag,comm,ireq,ierr) : mpi\_send に比べ ireq が増加

引数	型	入出力	役割
buf	変数	入力	変数、配列
count	integer	入力	要素の個数
datatype	integer	入力	変数、配列のデータタイプ
dest	integer	入力	送信する相手のノード番号
tag	integer	入力	メッセージのタグ
comm	integer	入力	通常は mpi_comm_world
ireq	integer	入力	メッセージのリクエスト
ierr	integer	出力	終了コード

```
ex. call mpi_isend( x,1,mpi_real,0,itag,mpi_comm_world,ireq,merr)
```

## 4.6 mpi\_irecv : ノンブロッキング受信

mpi\_recv はブロッキング送信といわれ、デッドロックを起こす可能性がある。そこで、デッドロックを起さないノンブロッキング送信が別に mpi\_irecv として用意されている。しかし同期を行うために、後に mpi\_wait を用いる必要がある\*<sup>3</sup>。

mpi\_irecv(buf,count,datatype,dest,tag,comm,ireq,ierr) : mpi\_recv の status が ireq に変更

引数	型	入出力	役割
buf	変数	入力	変数、配列
count	integer	入力	要素の個数
datatype	integer	入力	変数、配列のデータタイプ
dest	integer	入力	送信する相手のノード番号
tag	integer	入力	メッセージのタグ
comm	integer	入力	通常は mpi_comm_world
ireq	integer	入力	メッセージのリクエスト
ierr	integer	出力	終了コード

```
ex. call mpi_irecv( x,1,mpi_real,i,itag, mpi_comm_world,ireq,merr)
```

## 4.7 mpi\_wait : ノンブロッキング通信終了

mpi\_wait(ireq,status,ierr) : ireq,status が必要

引数	型	入出力	役割
ireq	integer	入力	メッセージのリクエスト
status	integer	出力	通信結果
ierr	integer	出力	終了コード

```
ex. call mpi_wait(ireq, mstatus, merr)
```

\*<sup>2</sup> 送信に isend を使用したら irecv で受信する必要はなく recv で受信しても良いが、mpi\_wait は必要である

\*<sup>3</sup> isend と同様に、受信に irecv を使用したら isend で送信する必要はなく send で送信しても良いが、mpi\_wait は必要である

## 4.8 mpi\_sendrecv : ブロッキング送受信

送信と受信を一緒にするためにデッドロックが発生しない。

`mpi_sendrecv(buf1,count1,datatype1,dest1,tag1,buf2,count2,datatype2,dest2,tag2,comm,status,ierr)`

引数	型	入出力	役割
buf1	変数	入力	送信する変数、配列
count1	integer	入力	要素の個数
datatype1	integer	入力	送信する変数、配列のデータタイプ
dest1	integer	入力	送信する相手のノード番号
tag1	integer	入力	メッセージのタグ
buf2	変数	入力	受信する変数、配列
count2	integer	入力	要素の個数
datatype2	integer	入力	受信する変数、配列のデータタイプ
dest2	integer	入力	受信する相手のノード番号
tag2	integer	入力	メッセージのタグ
comm	integer	入力	通常は <code>mpi_comm_world</code>
status	integer	出力	通信結果
ierr	integer	出力	終了コード

ex. call `mpi_sendrecv(x,1,mpi_real,0,1,x0,1,mpi_real,i,1,mpi_comm_world,mstatus,merr)`

## 4.9 mpi\_reduce : 集団通信により演算の結果をあるノードに送信

`mpi_reduce(buf1,buf2,count,datatype,op,dest,comm,ierr)` : `op` は演算

引数	型	入出力	役割
buf1	変数	入力	送信する変数、配列
buf2	変数	入力	受信する変数、配列
count	integer	入力	要素の個数
datatype	integer	入力	変数、配列のデータタイプ
op	integer	入力	演算
dest	integer	入力	送信する相手のノード番号
comm	integer	入力	通常は <code>mpi_comm_world</code>
ierr	integer	出力	終了コード

ex. call `mpi_reduce(dt,dtg,1,mpi_double_precision,mpi_min,0,mpi_comm_world,merr)`

## 4.10 mpi\_allreduce : 集団通信により演算の結果を全ノードに送信

`mpi_allreduce(buf1,buf2,count,datatype,op,comm,ierr)` : `op` は演算、`mpi_reduce` に比べ `dest` が無い

引数	型	入出力	役割
buf1	変数	入力	送信する変数、配列
buf2	変数	入力	受信する変数、配列
count	integer	入力	要素の個数
datatype	integer	入力	変数、配列のデータタイプ
op	integer	入力	演算
comm	integer	入力	通常は <code>mpi_comm_world</code>
ierr	integer	出力	終了コード

ex. call `mpi_allreduce(dt,dtg,1,mpi_double_precision,mpi_min,mpi_comm_world,merr)`

#### 4.11 mpi\_bcast : 集団通信により、あるノードの値を全てのノードに送信

`mpi_bcast(buf,count,datatype,dest,comm,ierr)`

引数	型	入出力	役割
buf	変数	入力	変数、配列
count	integer	入力	要素の個数
datatype	integer	入力	変数、配列のデータタイプ
dest	integer	入力	送信するノード番号
comm	integer	入力	通常は <code>mpi_comm_world</code>
ierr	integer	出力	終了コード

ex. call `mpi_bcast(x,1,mpi_real,0,mpi_comm_world,merr)`

#### 4.12 mpi\_gather : 集団通信 全てのノードからあるノードに収集

この仲間に `mpi_gatherv`, `mpi_allgather`, `mpi_allgatherv` がある。

`mpi_gather(buf1,count1,datatype1,buf2,count2,datatype2,dest,comm,ierr)`

引数	型	入出力	役割
buf1	変数	入力	送信する変数、配列
count1	integer	入力	要素の個数
datatype1	integer	入力	送信する変数、配列のデータタイプ
buf2	変数	入力	受信する変数、配列
count2	integer	入力	要素の個数
datatype2	integer	入力	受信する変数、配列のデータタイプ
dest	integer	入力	受信する相手のノード番号
comm	integer	入力	通常は <code>mpi_comm_world</code>
ierr	integer	出力	終了コード

ex. call `mpi_gather(x,1,mpi_real,x0,1,0,mpi_comm_world,merr)`

#### 4.13 mpi\_scatter : 集団通信 あるノードから全てノードに分配

`mpi_bcast` と違う点は、ノード毎に違うものを転送できることである。この仲間に `mpi_scatterv` がある。

`mpi_scatter(buf1,count1,datatype1,buf2,count2,datatype2,dest,comm,ierr)`

引数	型	入出力	役割
buf1	変数	入力	送信する変数、配列
count1	integer	入力	要素の個数
datatype1	integer	入力	送信する変数、配列のデータタイプ
buf2	変数	入力	受信する変数、配列
count2	integer	入力	要素の個数
datatype2	integer	入力	受信する変数、配列のデータタイプ
dest	integer	入力	送信するノード番号
comm	integer	入力	通常は <code>mpi_comm_world</code>
ierr	integer	出力	終了コード

ex. call `mpi_scatter(x,1,mpi_real,x0,1,0,mpi_comm_world,merr)`

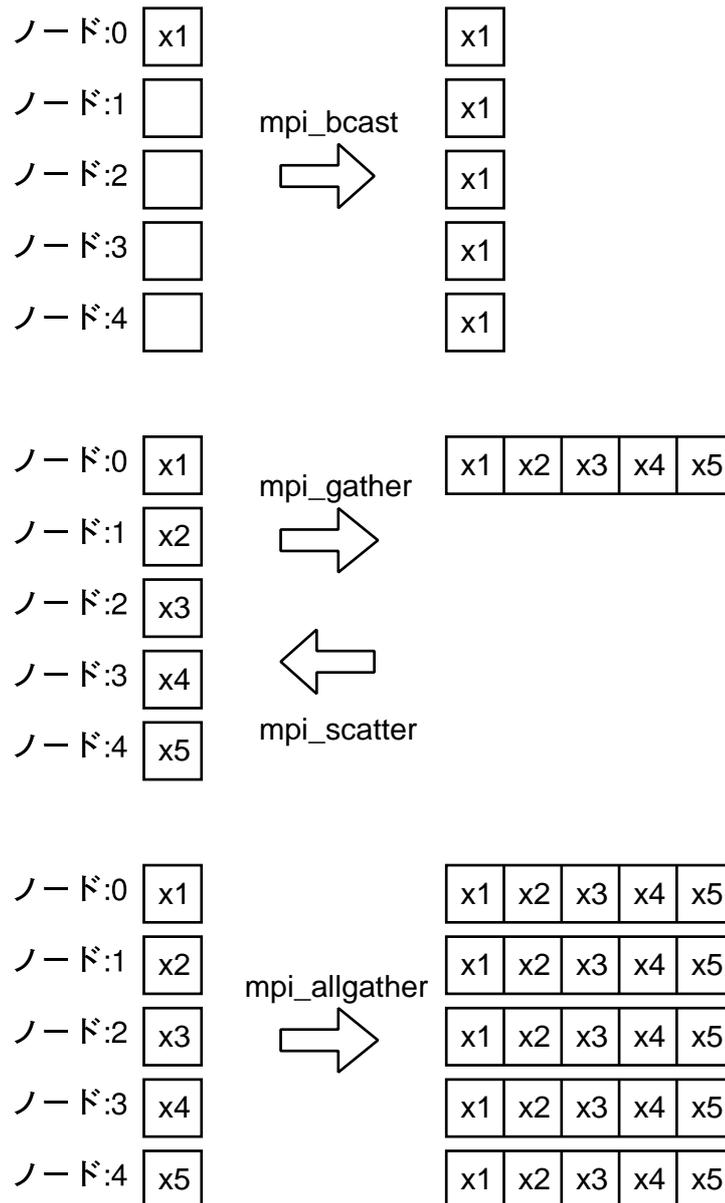


図 7: mpi\_bcast, mpi\_gather, mpi\_scatter, mpi\_allgather

#### 4.14 変数、配列のデータタイプ

datatype に用いることができるもの以下がある。

データタイプ	byte 数	MPI のデータタイプ
integer, integer*4	4	mpi_integer
real, real*4	4	mpi_real
double precision, real*8	8	mpi_real8, mpi_double_precision
complex	8	mpi_complex
double complex, complex*16	16	mpi_complex16
character	1	mpi_character
byte	1	mpi_byte
logical, logical*4	4	mpi_logical

## 4.15 MPI で提供される演算 (op)

mpi\_reduce, mpi\_allreduce 等で使用できる演算に以下がある。また、mpi\_op\_create で独自の演算を作ることできる。

演算のタイプ	演算	可能なデータタイプ
mpi_sum	和	mpi_integer, mpi_real, mpi_real8, mpi_complex
mpi_pro	積	mpi_integer, mpi_real, mpi_real8, mpi_complex
mpi_max	最大	mpi_integer, mpi_real, mpi_real8
mpi_min	最小	mpi_integer, mpi_real, mpi_real8
mpi_maxloc	最大と位置	mpi_2integer, mpi_2real, mpi_2double_precision
mpi_minloc	最小と位置	mpi_2integer, mpi_2real, mpi_2double_precision
mpi_land	論理積	mpi_logical
mpi_lor	論理和	mpi_logical
mpi_lxor	xor(排他的論理和)	mpi_logical
mpi_band	ビット論理積	mpi_integer, mpi_byte
mpi_bor	ビット論理和	mpi_integer, mpi_byte
mpi_bxor	ビット xor	mpi_integer, mpi_byte

## 5 最後に

実行として、例えば Unix に MPI 環境を構築しているならば、

```
mpif77 (or mpif90) test.f
```

でコンパイルすることができる。実行は

```
mpirun -np n(ここにノード数が入る) a.out (ex. mpirun -np 2 ./a.out)
```

とする。ただし、デッドロックが起った場合は、シェルに戻らないので、C-c 等で強制的に実行を中止させ、ps でプロセスを確認し、

```
kill -9 (プロセス番号) or killall -9 a.out
```

などとプロセスを無くすようにしないと、残ったプロセスが次の実行に影響を与えることがあるので注意する。また以下に

```
http://www.env.sci.ibaraki.ac.jp/~snozawa/mpi/
```

この文書と、例題として簡単なプログラムと解説を載せている。参考になれば幸いである。

## 6 参考文献

- [1] <http://www.env.sci.ibaraki.ac.jp/~snozawa/mpi/summer03/>
- [2] <http://www.mpi-forum.org/>
- [3] <http://www-unix.mcs.anl.gov/mpi/mpich/>
- [4] <http://www.lam-mpi.org/>
- [5] <http://www.openmp.org/>