Roe 法の理解のために

富阪幸治

1 Godunov 法

図 1(a) のように区間内で一様な分布を持つ初期分布に関して、双極型方程式（オイラー方程式）を考える。この問題を衝撃波管問題、あるいはリーマン問題という。

第２節で見たように、この問題の解は、書き下せないにしても計算で得ることができる。これを図 1(b) のような格子間隔内は一定の値を持っているとし $\boldsymbol{U}_L = \boldsymbol{U}_i$、$\boldsymbol{U}_R = \boldsymbol{U}_{i+1}$ として $x_{i+1/2}$ の境界での物理量の飛びにリーマン問題の解を適用する。図 1(c) のように、時間 t^n から t^{n+1} にかけて、右方向へは衝撃波が点線の方に接触不連続が左方向に膨張波が進行するとすると、$x_{i-1/2} < x < x_{i+1/2}$ の t^{n+1} での物理量を平均して、x_i の格子での物理量は、この区間の平均値、すなわち、

$$\boldsymbol{U}_i^{n+1} = \frac{1}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \tilde{\boldsymbol{U}}(x, t^{n+1}) dx, \tag{1}$$

で与えられる。ここで、$\tilde{\boldsymbol{U}}$ は格子内部で $\boldsymbol{U}$ を一定とした時のその後の解を表す。この方法を、Godunov の方法と呼ぶ。

1.1 Godunov の方法の第２の表式

式 (1) で表される Godunov の方法は以下で示すように、流束を用いて、

$$\boldsymbol{U}_i^{n+1} = \boldsymbol{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\boldsymbol{F}_{i+1/2} - \boldsymbol{F}_{i-1/2}\right), \tag{2}$$

ただし、格子境界上での数値流束は、

$$\boldsymbol{F}_{i+1/2} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_{i+1/2}(0)), \tag{3}$$

で与えられる。ここで $\boldsymbol{U}_{i+1/2}(0)$ は、$\boldsymbol{U}_L = \boldsymbol{U}_i$、$\boldsymbol{U}_R = \boldsymbol{U}_{i+1}$ のリーマン問題の解、$\boldsymbol{U}_{i+1/2}((x - x_{i+1/2})/(t - t_n))$ の解の $x = x_{i+1/2}$ での値を表す。

これは、保存系の方程式、

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

を、$[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t^n, t^{n+1}]$ の区間で積分した式が、

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \boldsymbol{U}(x, t^{n+1}) dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \boldsymbol{U}(x, t^n) dx + + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}(x_{i-1/2}, t)) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}(x_{i+1/2}, t)) dt \tag{5}$$

であり、リーマン問題の解、$\boldsymbol{U}(x_{i-1/2}, t)$ が $\boldsymbol{U}_{i-1/2}((x - x_{i-1/2})/(t - t_n))$ の形をしていること、また $\boldsymbol{U}(x_{i+1/2}, t)$ が $\boldsymbol{U}_{i+1/2}((x - x_{i+1/2})/(t - t_n))$ の形をしていること、すなわち、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{U}(x_{i-1/2}, t) &= \boldsymbol{U}_{i-1/2}(0) = const, & (6)\\
\boldsymbol{U}(x_{i+1/2}, t) &= \boldsymbol{U}_{i+1/2}(0) = const, & (7)
\end{aligned}
$$

であることに注意すると、理解できる。式 (5) を Δx で割ると、

$$
\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \boldsymbol{U}(x, t^{n+1})dx = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \boldsymbol{U}(x, t^{n})dx - \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_{i+1/2}(0)) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_{i-1/2}(0))\Big) \tag{8}
$$

となるが、式 (1) のように区間内の平均値で物理量を評価すると、

$$
\boldsymbol{U}_i^{n+1} = \boldsymbol{U}_i^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_{i+1/2}(0)) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_{i-1/2}(0))\Big), \tag{9}
$$

が得られる。この式は、Godunov 法の数値流束は、$x = x_{i+1/2}$ における、リーマン問題の解を用いて表せることを意味している。

2 FDS 法

Godunov の方法はリーマン問題の厳密な解を要求するので、それを解く手間はばかにならない。そこで、リーマン問題の近似的な解を使って流束が評価できないかを考える。このような考えにもとづく計算法を近似リーマン解法に基づく方法と呼ぶ。

流束ヤコビアン $\boldsymbol{A}$ を用いて、オイラー方程式は

$$
\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} = 0, \tag{10}
$$

のように書ける。Roe が用いた方法は、ここで $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})$ を格子境界に接する左右の物理量 $\boldsymbol{U}_L$ と $\boldsymbol{U}_R$ の関数で、短い時間間隔では一定であると考える。もちろん、単に流束を $\boldsymbol{F}_{i+1/2} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{U}_i, \boldsymbol{U}_{i+1})\boldsymbol{U}$ としたのでは、リーマン解法を用いたという性質は持たない。

$$
\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{U}_L, \boldsymbol{U}_R)\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} = 0, \tag{11}
$$

を考える。

2.1 Property U

ここで、$\boldsymbol{U}_L$ と $\boldsymbol{U}_R$ の非線形関数である $\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{U}_L, \boldsymbol{U}_R)$ の具体的な形は後から検討するが、次の性質を持たなければばならない。

1. $\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{U}_L, \boldsymbol{U}_R)$ は $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})$ の同じ数 (m) の実固有値を持つこと。すなわち

$$
\tilde{\lambda}_1 \le \tilde{\lambda}_2 \le, \ldots, \le \tilde{\lambda}_m, \tag{12}
$$

でこれらは独立な右固有ベクトル

$$
\tilde{\boldsymbol{r}}^{(1)}, \tilde{\boldsymbol{r}}^{(2)}, \ldots, \tilde{\boldsymbol{r}}^{(m)}, \tag{13}
$$

を持つ。

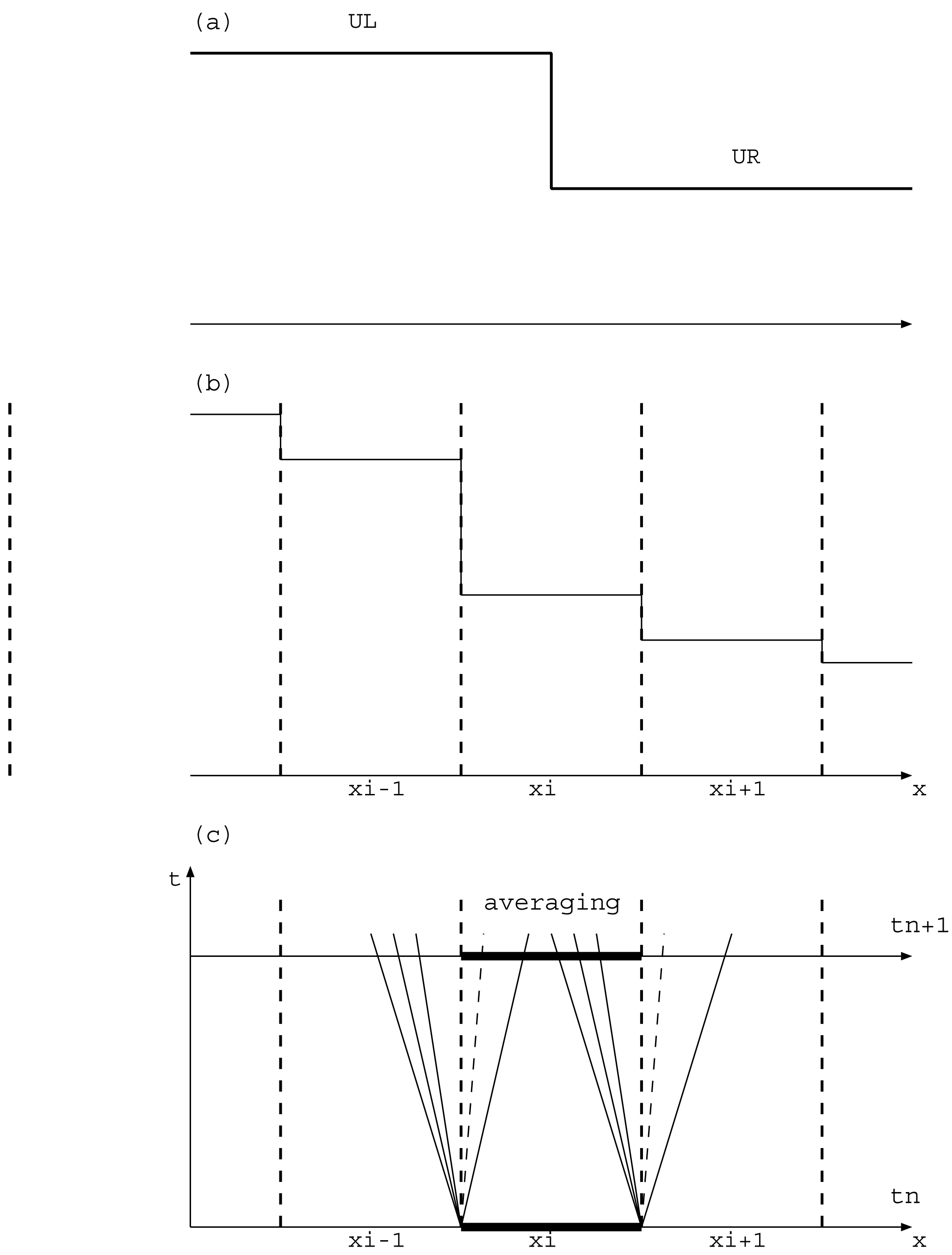

図 1: Godunov 法の説明

2. 近似ヤコビアンであること。すなわち、

$$\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{U}). \tag{14}$$

3. 流束の差が正しく評価できること。すなわち、

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_R) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_L) = \tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{U}_R,\boldsymbol{U}_L)\left[\boldsymbol{U}_R - \boldsymbol{U}_L\right]. \tag{15}$$

2.2 Roe の方法の数値流束

次に、流束をどのように書けば良いかを検討する。$\boldsymbol{U}_L$、$\boldsymbol{U}_R$ を $\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{U}_R,\boldsymbol{U}_L)$ の固有ベクトル $\tilde{\boldsymbol{r}}$ で展開すると、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_L &= \sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_i \tilde{\boldsymbol{r}}^{(i)} \\ \boldsymbol{U}_R &= \sum_{i=1}^{m} \tilde{b}_i \tilde{\boldsymbol{r}}^{(i)} \end{aligned} \tag{16}$$

のようになる。ここで、1 から I 番目の波が左に、$I+1$ から m 番目の波が右に伝搬するとすると、

$$\boldsymbol{U}_{i+1/2} = \sum_{i=1}^{I} \tilde{b}_i \tilde{\boldsymbol{r}}^{(i)} + \sum_{i=I+1}^{m} \tilde{a}_i \tilde{\boldsymbol{r}}^{(i)} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} &= \boldsymbol{U}_L + \sum_{i=1}^{I} (\tilde{b}_i - \tilde{a}_i)\tilde{\boldsymbol{r}}^{(i)} \\ &= \boldsymbol{U}_R - \sum_{i=I+1}^{m} (\tilde{b}_i - \tilde{a}_i)\tilde{\boldsymbol{r}}^{(i)} \end{aligned} \tag{18}$$

同じように、

$$\Delta \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_R - \boldsymbol{U}_L, \tag{19}$$

を、$\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{U}_R,\boldsymbol{U}_L)$ の固有ベクトル $\tilde{\boldsymbol{r}}$ で展開すると、

$$\Delta \boldsymbol{U} = \sum_{i=1}^{m} \tilde{\alpha}_i \tilde{\boldsymbol{r}}^{(i)}, \tag{20}$$

となる。ここで式 (16) から、$\tilde{\alpha}_i = \tilde{b}_i - \tilde{a}_i$ は波の強さを表す。つまり、$\Delta \boldsymbol{U}$ を固有ベクトルに分解した係数 $\tilde{\alpha}_i$ を用いて、式 (18) から、

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{U}}_{i+1/2} &= \boldsymbol{U}_L + \sum_{\tilde{\lambda}_i<0} \tilde{\alpha}_i \tilde{\boldsymbol{r}}^{(i)} \\ &= \boldsymbol{U}_R - \sum_{\tilde{\lambda}_i>0} \tilde{\alpha}_i \tilde{\boldsymbol{r}}^{(i)} \end{aligned} \tag{21}$$

これに、$\tilde{\boldsymbol{A}}$ を乗じてできる流束 $\tilde{\boldsymbol{F}}(\tilde{\boldsymbol{U}}_{i+1/2})$ は式 (11) の流束ではあるが、正しい解の流束ではない。正しい解の流束 $\boldsymbol{F}_{i+1/2\,L}$ および $\boldsymbol{F}_{i+1/2\,R}$ が

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{i+1/2\,L} &= \tilde{\boldsymbol{F}}(\tilde{\boldsymbol{U}}_{i+1/2}) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_L) - \tilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{U}_L) \\ \boldsymbol{F}_{i+1/2\,R} &= \tilde{\boldsymbol{F}}(\tilde{\boldsymbol{U}}_{i+1/2}) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_R) - \tilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{U}_R) \end{aligned} \tag{22}$$

で与えられることを用いて左辺を計算する。式 (21) を用いると、式 (22) の右辺第１項は以下のように書き直せる。

$$\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{U}}_{i+1/2} = \begin{cases} \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{U}_L + \sum_{\tilde{\lambda}_i<0} \tilde{\lambda}_i \tilde{\alpha}_i \tilde{\boldsymbol{r}}^{(i)} \\ \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{U}_R - \sum_{\tilde{\lambda}_i>0} \tilde{\lambda}_i \tilde{\alpha}_i \tilde{\boldsymbol{r}}^{(i)} \end{cases} \tag{23}$$

この右辺第１項は式 (22) の右辺第３項に当たる。ここの変形で、$\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{r}}^{(i)} = \tilde{\lambda}_i \tilde{\boldsymbol{r}}^{(i)}$ を用いた。

式 (22) は、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{i+1/2\,L} &= \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_L) + \sum_{\tilde{\lambda}_i<0} \tilde{\lambda}_i \tilde{\alpha}_i \tilde{\boldsymbol{r}}^{(i)} \\ \boldsymbol{F}_{i+1/2\,R} &= \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_R) - \sum_{\tilde{\lambda}_i>0} \tilde{\lambda}_i \tilde{\alpha}_i \tilde{\boldsymbol{r}}^{(i)} \end{aligned} \tag{24}$$

で与えられる。このままでも良いが、実質は同じだがこの２つの表現を加え合わせて対称化したもの

$$\boxed{\boldsymbol{F}_{i+1/2} = \frac{\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{i+1}}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} |\tilde{\lambda}_i| \tilde{\alpha}_i \tilde{\boldsymbol{r}}^{(i)}} \tag{25}$$

が、求める Roe 法の数値流束の表式である。

2.2.1 もう一つの数値流束の表現

さらに、波の振幅を消去した表現に直すことを行なうと、右辺第２項の

$$\sum_{i=1}^{m} |\tilde{\lambda}_i| \tilde{\alpha}_i \tilde{\boldsymbol{r}}^{(i)} = \begin{pmatrix} r_1^{(1)} & r_1^{(2)} & \dots & r_1^{(m)} \\ r_2^{(1)} & r_2^{(2)} & \dots & r_2^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_m^{(1)} & r_m^{(2)} & \dots & r_m^{(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\lambda_1|\alpha_1 \\ |\lambda_2|\alpha_2 \\ \vdots \\ |\lambda_m|\alpha_m \end{pmatrix} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} r_1^{(1)} & r_1^{(2)} & \dots & r_1^{(m)} \\ r_2^{(1)} & r_2^{(2)} & \dots & r_2^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_m^{(1)} & r_m^{(2)} & \dots & r_m^{(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\lambda_1| & 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & |\lambda_2| & 0 & \ddots \\ \ddots & 0 & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & |\lambda_m| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{R} \begin{pmatrix} |\lambda_1| & 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & |\lambda_2| & 0 & \ddots \\ \ddots & 0 & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & |\lambda_m| \end{pmatrix} \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{R} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{R}|\Lambda|\boldsymbol{R}^{-1}\Delta\boldsymbol{U} \end{aligned} \tag{27}$$

と書き直せる。ここで

$$\Delta\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_R - \boldsymbol{U}_L = \sum_{i=1}^{m} \tilde{\alpha}_i \tilde{\boldsymbol{r}}^{(i)}, \tag{28}$$

を用いた。したがって、求める波の振幅を消去した表現は、

$$\boldsymbol{F}_{i+1/2} = \frac{\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{i+1}}{2} - \frac{1}{2}\left[R|\Lambda|R^{-1}\right]_{i+1/2}(\boldsymbol{U}_{i+1} - \boldsymbol{U}_i) \tag{29}$$

で与えられる。

2.3 Roe 平均

式 (29) で、$\left[R|\Lambda|R^{-1}\right]_{i+1/2}$ の部分をどのような平均値を用いて評価するべきかを考える。そのために、ここでは $\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{U}_L, \boldsymbol{U}_R)$ の具体的な形を考えることにする。

$$\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{U}_L, \boldsymbol{U}_R) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{U}_{ave}(\boldsymbol{U}_L, \boldsymbol{U}_R)), \tag{30}$$

のような、平均値 $\boldsymbol{U}_{ave}$ が $\boldsymbol{U}_L$ と $\boldsymbol{U}_R$ のどのような関数になっていなければならないかを考える。結果のみを書くと、

$$\rho_{ave} = \sqrt{\rho_L \rho_R}, \tag{31}$$

$$u_{ave} = \frac{\sqrt{\rho_L}u_L + \sqrt{\rho_R}u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \tag{32}$$

$$H_{ave} = \frac{\sqrt{\rho_L}H_L + \sqrt{\rho_R}H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \tag{33}$$

$$c_{s,ave} = \sqrt{(\gamma - 1)(H_{ave} - u_{ave}^2/2)}, \tag{34}$$

のようになるが、これがどのようにして得られるかを、等温ガスの場合について、見てみることにする。

2.3.1 等温ガスの場合

基礎方程式は、

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} = 0, \tag{35}$$

で

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \rho \\ m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - u^2 & 2u \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \rho \\ m \end{pmatrix} = 0, \tag{36}$$

のようになる。$\boldsymbol{A}$ の固有値は

$$\lambda_1 = \frac{m}{\rho} - a = u - a, \tag{37}$$

$$\lambda_2 = \frac{m}{\rho} + a = u + a, \tag{38}$$

であり、それぞれの固有値に属する固有ベクトルは、

$$\boldsymbol{r}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ u - a \end{pmatrix}, \boldsymbol{r}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ u + a \end{pmatrix}, \tag{39}$$

である。

2.3.2 線形化を用いた波の振幅の表現

線形化可能、すなわち左右の物理量の差 $\Delta\boldsymbol{U}$ が小さく、その「平均量 $\boldsymbol{U}_{ave}$ で」書かれた流束ヤコビアン $\boldsymbol{A}_{ave}$ をもち、線形化されたリーマン問題を考える。すなわち、

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{A}_{ave}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} = 0, \tag{40}$$

$$\boldsymbol{U}(x,t=0) = \begin{cases} \boldsymbol{U}_L, & x<0 \\ \boldsymbol{U}_R, & x>0 \end{cases} \tag{41}$$

まず、左右の物理量の差 $\Delta\boldsymbol{U}$ を $\boldsymbol{A}_{ave}$ の右固有ベクトル $\boldsymbol{r}^{(i)}_{ave}$ で展開した時の係数を求める。

$$\Delta\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_R - \boldsymbol{U}_L = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i \boldsymbol{r}^{(i)}_{ave}, \tag{42}$$

$\boldsymbol{r}^{(i)}_{ave}$ の具体的な形から、

$$\Delta\rho \equiv \rho_R - \rho_L = \alpha_1 + \alpha_2, \tag{43}$$

$$\Delta(\rho u) \equiv (\rho u)_R - (\rho u)_L = \alpha_1(u_{ave} - a) + \alpha_2(u_{ave} + a), \tag{44}$$

となる。線形化可能、$|\Delta\boldsymbol{U}| \ll |\boldsymbol{U}|$ であると、式 (44) は

$$u_{ave}\Delta\rho + \rho_{ave}\Delta u = \alpha_1(u_{ave} - a) + \alpha_2(u_{ave} + a), \tag{45}$$

となる。式 (43) と (45) から、α_1 と α_2 を $\Delta\rho$ と Δu で書くと、

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\left(\Delta\rho - \frac{\rho_{ave}}{a}\Delta u\right), \tag{46}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\left(\Delta\rho + \frac{\rho_{ave}}{a}\Delta u\right), \tag{47}$$

となる。この表式が、一般的になり立つとする。

2.3.3 Roe 平均の表式

1. 適当な平均量を用いることによって、式 (46) と (47) が、必ずしも左右の物理量の差が微小ではない時にもなり立ち、
2. 固有値と固有ベクトルが、元の表式に $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_{ave}$ を代入したものを用いて、$\lambda_{ave} = \lambda(\boldsymbol{U}_{ave})$ や $\boldsymbol{r}^{(i)}_{ave} = \boldsymbol{r}^{(i)}(\boldsymbol{U}_{ave})$ の様に書ける。すなわち、

$$\lambda_{ave\,1} = u_{ave} - a, \quad \lambda_{ave\,2} = u_{ave} + a, \tag{48}$$

および

$$\boldsymbol{r}^{(1)}_{ave} = \begin{pmatrix} 1 \\ u_{ave} - a \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r}^{(2)}_{ave} = \begin{pmatrix} 1 \\ u_{ave} + a \end{pmatrix}, \tag{49}$$

3. これらを用いて、

$$\Delta \boldsymbol{U} \equiv \boldsymbol{U}_R - \boldsymbol{U}_L = \sum_{i=1}^{2} \alpha_{ave\,i} \boldsymbol{r}_{ave}^{(i)} \tag{50}$$

および

$$\Delta \boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{F}_R - \boldsymbol{F}_L = \sum_{i=1}^{2} \alpha_{ave\,i} \lambda_{ave\,i} \boldsymbol{r}_{ave}^{(i)} \tag{51}$$

がなり立つように、必要な $\boldsymbol{U}_{ave}$ の形を求める。

以下にその導出の細かい計算を掲げる。式 (50) は

$$\begin{aligned} \Delta\rho &= \alpha_1 + \alpha_2, & (52) \\ \Delta(\rho u) &= \alpha_1(u_{ave} - a) + \alpha_2(u_{ave} + a), & (53) \end{aligned}$$

であるが、式 (52) の方は、式 (46) と (47) によって自動的に満足する。次に、式 (51) は、

$$\begin{aligned} \Delta(\rho u) &= \lambda_{ave\ 1}\alpha_1 + \lambda_{ave\,2}\alpha_2, & (54) \\ \Delta(\rho u^2 + a^2\rho) &= \lambda_{ave\ 1}\alpha_1(u_{ave} - a) + \lambda_{ave\,2}\alpha_2(u_{ave} + a), & (55) \end{aligned}$$

となるが、式 (54) は式 (53) と同等だから、第 3 番目の条件は、式 (54) と (55) を満足する $\boldsymbol{U}_{ave}$ の表式はなにか？という問題になる。

式 (54) または式 (53) は、式 (46) と (47) を用いると、

$$\Delta(\rho u) = \rho_{ave}\Delta u + u_{ave}\Delta\rho, \tag{56}$$

がなり立つことになる。式 (55) より

$$\begin{aligned} \Delta(\rho u^2) &= (\alpha_1 + \alpha_2)(u_{ave}^2 + a^2) + 2a u_{ave}(\alpha_2 - \alpha_1) - a^2\Delta\rho, \\ &= u_{ave}^2\Delta\rho + 2u_{ave}\rho_{ave}\Delta u & (57) \end{aligned}$$

となるが、ここで、α_{ave} の表式 (46) と (47) を用いた。式 (56) に $2u_{ave}$ を掛けて、式 (57) から引いて ρ_{ave} を消去すると、

$$\Delta\rho \cdot u_{ave}^2 - 2\Delta(\rho u)\cdot u_{ave} + \Delta(\rho u^2) = 0, \tag{58}$$

よって、u_{ave} について解くと、

$$u_{ave} = \frac{\Delta(\rho u) \pm \sqrt{[\Delta(\rho u)]^2 - \Delta\rho\Delta(\rho u^2)}}{\Delta\rho}, \tag{59}$$

判別式の部分は、

$$\begin{aligned} D &= (\rho_R u_R - \rho_L u_L)^2 - (\rho_R - \rho_L)(\rho_R u_R^2 - \rho_L u_L^2) \\ &= \rho_R\rho_L(u_R - u_L)^2, & (60) \end{aligned}$$

ゆえ、

$$\begin{aligned} u_{ave} &= \frac{(\rho_R u_R - \rho_L u_L) \pm |\Delta u|\sqrt{\rho_R\rho_L}}{\rho_R - \rho_L}, \\ &= \frac{(\sqrt{\rho_R} - \sqrt{\rho_L})(\sqrt{\rho_R}u_R + \sqrt{\rho_L}u_L) + \sqrt{\rho_R\rho_L}(u_R - u_L) \pm \sqrt{\rho_R\rho_L}|(u_R - u_L)|}{\rho_R - \rho_L}, \\ &= \frac{\sqrt{\rho_R}u_R + \sqrt{\rho_L}u_L}{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}} & (61) \end{aligned}$$

ここで、$\pm$ は、第２項目と第３項目が消えるようにとることにする。
式 (61) を式 (56) に代入して整理すると、密度の平均値に対する表式

$$\rho_{ave} = \sqrt{\rho_R \rho_L}, \tag{62}$$

が得られる。

2.4 Roe の方法のプログラム例

プログラムは、第１に

```
for j:=0 to jm-1 do  // Roe Average
begin
  rhop[j]:=Sqrt(rho[j]*rho[j+1]);
  up[j]:=(Sqrt(rho[j])*u[j]+Sqrt(rho[j+1])*u[j+1])/(Sqrt(rho[j])+Sqrt(rho[j+1]));
  Hp[j]:=(Sqrt(rho[j])*H[j]+Sqrt(rho[j+1])*H[j+1])/(Sqrt(rho[j])+Sqrt(rho[j+1]));
  cp[j]:=Sqrt(gam1*(Hp[j]-up[j]*up[j]/2))
end;
```

でrhop[j] などに Roe 平均 $j+1/2$ の評価値を求める。次に、右固有行列 R をR[l,m] に、その逆行列 R^{-1} をL[l,m] に求める。w[n1,n2] は $R|\Lambda|R^{-1}$ が格納される。最後に数値流束をE[j] に求めている。

```
for j:=0 to jm-1 do
begin
  Lambda[1]:=Abs(up[j]-cp[j]);
  Lambda[2]:=Abs(up[j]);
  Lambda[3]:=Abs(up[j]+cp[j]);

  R[1,1]:= 1;
  R[1,2]:= 1;
  R[1,3]:= 1;
  R[2,1]:= up[j]-cp[j];
  R[2,2]:= up[j];
  R[2,3]:= up[j]+cp[j];
  R[3,1]:= Hp[j]-up[j]*cp[j];
  R[3,2]:= Sqr(up[j])/2;
  R[3,3]:= Hp[j]+up[j]*cp[j];

  b1:=gam1/2*Sqr(up[j]/cp[j]);
  b2:=gam1/Sqr(cp[j]);

  L[1,1]:= 0.5*(b1+up[j]/cp[j]);
  L[1,2]:= -0.5*(1/cp[j]+b2*up[j]);
```

```
    L[1,3]:= 0.5*b2;
    L[2,1]:= 1-b1;
    L[2,2]:= b2*up[j];
    L[2,3]:= -b2;
    L[3,1]:= 0.5*(b1-up[j]/cp[j]);
    L[3,2]:= 0.5*(1/cp[j]-b2*up[j]);
    L[3,3]:= 0.5*b2;

    for n1:=1 to 3 do
    begin
      for n2:=1 to 3 do
      begin
        w[n1,n2]:=0.0;
        for k:=1 to 3 do
        begin
          w[n1,n2]:=w[n1,n2]+R[n1,k]*Lambda[k]*L[k,n2];
        end;
      end;
    end;
    E1[j]:=0.5*(m[j+1]+m[j]
                        -w[1,1]*(rho[j+1]-rho[j])
                        -w[1,2]*(m[j+1]-m[j])
                        -w[1,3]*(e[j+1]-e[j]));
    E2[j]:=0.5*(gam1*(e[j+1]+e[j])+gam3/2*(Sqr(m[j+1])/rho[j+1]+Sqr(m[j])/rho[j])
                        -w[2,1]*(rho[j+1]-rho[j])
                        -w[2,2]*(m[j+1]-m[j])
                        -w[2,3]*(e[j+1]-e[j]));
    E3[j]:=0.5*(gamma*(e[j+1]*m[j+1]/rho[j+1]+e[j]*m[j]/rho[j])
          -gam1/2*(Sqr(m[j+1]/rho[j+1])*m[j+1]+Sqr(m[j]/rho[j])*m[j])
                        -w[3,1]*(rho[j+1]-rho[j])
                        -w[3,2]*(m[j+1]-m[j])
                        -w[3,3]*(e[j+1]-e[j]));
  end;
```

この数値流束を用いて時間進化を計算すれば良い。これを使って得られた解を図 2 に掲げた。

```
  for j:=1 to jm-1 do
  begin
    rho[j]:=rho[j]-nu*(E1[j]-E1[j-1]);
    m[j]:=m[j]-nu*(E2[j]-E2[j-1]);
    e[j]:=e[j]-nu*(E3[j]-E3[j-1]);
```

```
end;
```

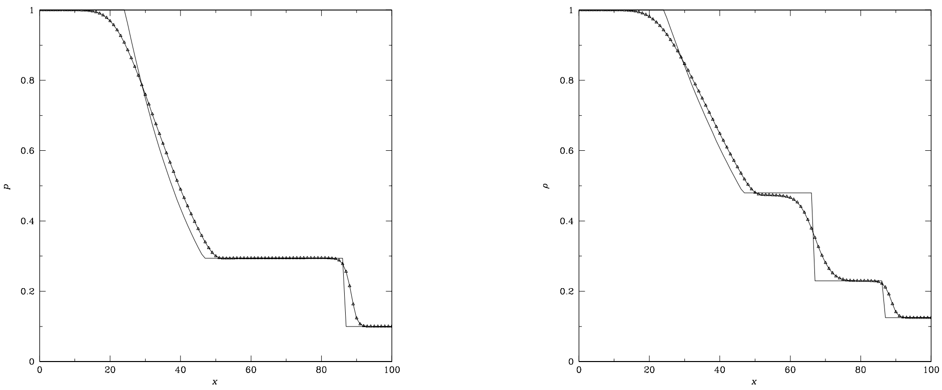

図 2: Roe の Flux Difference Splitting 法による衝撃波管問題の解。初期条件は、$x < 50$ は $p = 1$、$\rho = 1$ で、$x > 50$ は $p = 0.125$、$\rho = 0.1$ にとった。$\gamma = 5/3$ で、$\Delta t = 0.25$、$\Delta x = 1$ で８０ステップ後の解を示した。