

CIP 法入門

「天体とスペースプラズマのシミュレーションサマースクール」

2004年9月6日-9月10日

場所：千葉大学総合メディア基盤センター

1 CIP 法の基礎概念

双曲型の微分方程式を解く数値計算手法は、差分法だけでもこれまで様々な手法が提案されてきたが [1]、Yabe らによって提案された CIP (Cubic Interpolated Profile [2][3]) 法も高次精度差分法の一つであり、これまで流体力学を始め様々な分野で応用され、成果を上げている。本文ではこの CIP 法の導入とその応用、最後に最近提案された保存保証型 CIP 法について触れる事にする。関数 $f(x, t)$ に対する次の微分方程式を考える。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

例えば u が一定値の場合、この方程式の解析解は良く知られている様に次式で表される。

$$f(x, t) = f(x - ut, 0) \quad (2)$$

この解は初期条件のプロファイルが速度 u で平行移動する事を意味している。(図 1)

この方程式を差分法で解く時は、格子間を補間関数 (多項式) で近似する事から始める。

実際の系では、速度 u は時間的・空間的に一定値ではなく変化する事もあがるが、短い時間 Δt 内であれば各格子点 x_i 上の速度 u_i はそれぞれ一定値とみなせる。よって、式 (2) を用いて

$$f(x_i, t + \Delta t) \approx f(x_i - u_i \Delta t, t) \quad (3)$$

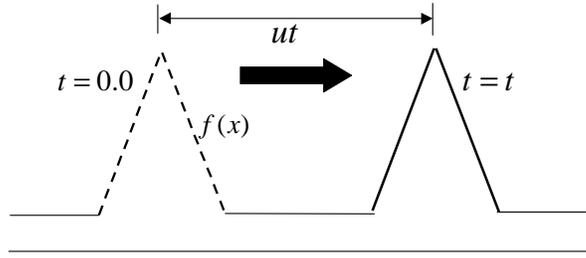


図 1: 関数の平行移動

としてよい。つまり、ある時刻 t における格子点 x_i 上の物理量が分かっているならば Δt 秒後の物理量は式 (3) で求まることになる。

最も簡単な例は 2 点間を 1 次関数で補間する「1 次風上差分法」である。しかしこの手法の場合、プロファイルが移動するに従って解が緩やかになってしまふ(図 2: 数値拡散)他にも 3 点を用いて 2 次関数で補間する「Lax-Wendroff 法」など様々な手法があるが、数値拡散・位相誤差による数値振動等が見ら

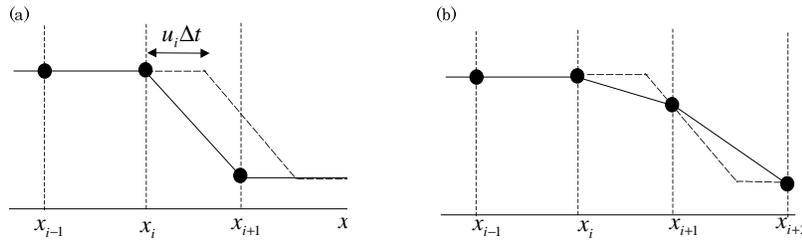


図 2: 1 次風上の例 (a) 初期条件 (実線) を $u\Delta t$ 動かす (点線)。 (b) 正しい解 (点線) と数値計算上の解 (実線)。

CIP 法は、格子 2 点間 $[i, i + 1]$ で 3 次補間関数 $F(x)$ を作る。この手法の大きな特徴として、従来の差分法は値のみを用いて格子点間を多項式で補間するが、CIP 法は格子点上の微分値も用いる。

$$F(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \quad X = x - x_i \quad (4)$$

補間関数の係数は条件「関数の値と微分値が格子点上で連続」という事を要

請すると (速度 $u < 0$ とする)

$$F(0) = f_i^n, F(\Delta x) = f_{i+1}^n, \partial_x F(0) = \partial_x f_i^n, \partial_x F(\Delta x) = \partial_x f_{i+1}^n \quad (5)$$

となる。式 (5) から、3 次関数の係数 a, b, c, d は次の様に求まる。

$$a = \frac{\partial_x f_i^n + \partial_x f_{i+1}^n}{\Delta x^2} + \frac{2(f_i^n - f_{i+1}^n)}{\Delta x^3} \quad (6)$$

$$b = \frac{3(f_{i+1}^n - f_i^n)}{\Delta x^2} - \frac{2(\partial_x f_i^n + \partial_x f_{i+1}^n)}{\Delta x} \quad (7)$$

$$c = \partial_x f_i^n \quad (8)$$

$$d = f_i^n \quad (9)$$

ここで n は n ステップ目における値もしくは微分値という事を表している。速度が正の場合は $i+1 \rightarrow i-1$, $\Delta x \rightarrow -\Delta x$ と変更するだけでよい。

CIP 法では値と共に微分値も時間発展させなくてはならないが、速度 u が一定値の場合は式 (1) を空間微分すると

$$\frac{\partial(\partial_x f)}{\partial t} + u \frac{\partial(\partial_x f)}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

となり、微分値は値と全く同じ方程式を満たす事が分かる。よって、 Δt 秒後 ($n+1$ ステップ目) における値と微分値は次の様に求める事ができる。

$$f_i^{n+1} = F(x_i - u\Delta t) = a\xi^3 + b\xi^2 + \partial_x f_i^n \xi + f_i^n \quad (11)$$

$$\partial_x f_i^{n+1} = \frac{dF(x_i - u\Delta t)}{dx} = 3a\xi^2 + 2b\xi + \partial_x f_i^n \quad (12)$$

ここで $\xi = -u\Delta t$ である。初期条件を与えれば式 (11),(12) から時間発展を求める事ができる。

矩形波が速度一定で移流する計算例を載せる。比較の為、1 次風上差分法と Lax-Wendroff 法の計算結果も載せた (図 3)。風上差分法は数値拡散が非常に大きい為、時間発展すると大きく崩れてしまう。また、Lax-Wendroff 法は数値振動が非常に大きい。それに対し、CIP 法は矩形が殆ど崩れる事がなく、解析解に近い形状を保っている事が分かる。

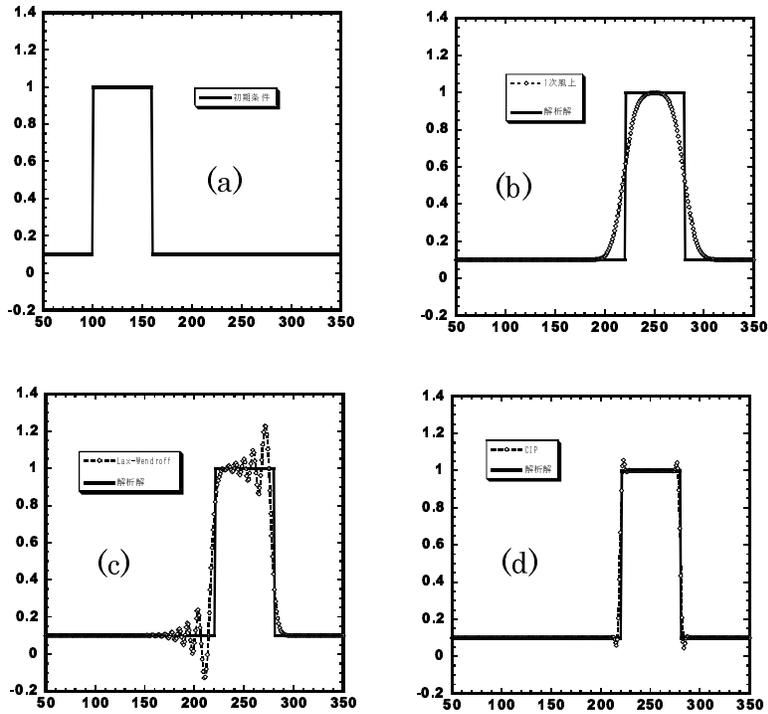


図 3: 矩形波の移流. $u = 1, \Delta x = 1, \Delta t = 0.2, 600$ ステップ計算した結果. (a) 初期条件、(b)1 次風上差分、(c)Lax-Wendroff、(d)CIP. 実線が解析解、白丸が数値解.

ここで、各手法の計算精度についてちょっと触れる事にする。速度一定の移流方程式 (1) で、例えば一次風上差分法 (速度 $u > 0$ とする) では $\partial f/\partial t \approx (f_i^{n+1} - f_i^n)/\Delta t$, $\partial f/\partial x \approx (f_i^n - f_{i-1}^n)/\Delta x$ と近似して解くので、次の様な時間発展の式が容易に導かれる。

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{u\Delta t}{\Delta x} (f_i^n - f_{i-1}^n) \quad (13)$$

この式が元の正しい式 (1) に対して、どの程度の誤差があるのかは式 (13) の差分式内にある f_i^{n+1} , f_{i-1}^n をそれぞれ $t = n\Delta t, x = i\Delta x$ の周りで Taylor 展開すれば良い。この事は数値計算の本には大概書いてあり導出も簡単なので詳細は省略するが、最終的に式 (13) は

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = \mathcal{O}(\Delta t, \Delta x) \quad (14)$$

の様に書く事が出来る。 $\mathcal{O}(\Delta t, \Delta x)$ は誤差が $\Delta t, \Delta x$ のオーダーである事を意味し (本当は右辺は 0)、一次風上差分法は "時間 1 次、空間 1 次精度" のスキームと言える。そこで、次の問題を解く事にする。

初期条件 $f(x, t = 0) = 2.0 + \sin(2\pi x)$, 速度 $c = 1.0$, $\Delta x = 1.0/NX$ (ここで NX は格子数), $CFL \equiv c\Delta t/\Delta x = 0.2$ (=一定: ここが大事), 境界は周期境界として格子数 NX (格子幅 Δx) を変えて解析解との誤差を取ったのが次の図 4 である。

誤差解析はテーラー展開をする事からも分かる様に、矩形波の様な "微分不連続" がある様な初期分布では意味が無い。

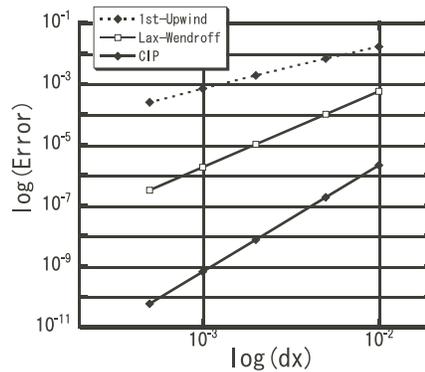


図 4: 各手法の誤差解析

グラフは誤差・格子幅を両対数軸で取っており、一次風上差分法は傾きが 1、Lax-Wendroff は傾きが 2、CIP は傾きが 3 である事が分かる。今、CFL を一定にしているのでこのグラフは時間刻みと誤差のグラフでもある事から、

Lax-Wendroff は "時間空間 2 次精度"、CIP は "時間空間 3 次精度" のスキームである事が分かる。

例えば同じ誤差 ($error = 10^{-6}$) を得ようとする時、CIP と Lax-Wendroff では格子幅が約 1 桁、一次風上差分法では 2 桁以上 CIP は粗く出来る事が分かる。この事は 3 次元計算では大まかには CIP は Lax-Wendroff の $1/10^3$ の格子数で計算出来る事を意味し、特に天文分野の様な大規模な計算においては非常に有効な性質である事は容易に想像が付く。(更に言えば、格子を細かくすれば CIP は 3 乗の速さで誤差は小さくなるので、非常に高精度な計算が可能になる事を意味する。)

また、実際の計算では CFL 条件がある以上、CFL の値がほぼ一定になる様に時間刻みを決定して計算する事が多い。しかし例えば空間が高次精度でも時間が 1 次のスキームだと、結局 1 次精度になってしまう事から CIP の様に時間・空間共に高次精度である事が重要であると言える。

2 非線形方程式への応用

次の様な方程式を考える。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(uf)}{\partial x} = g \quad (15)$$

これは速度が空間・時間依存し、右辺 g も 0 ではない (f, x, t の関数)。このような場合、CIP 法では「移流相」「非移流相」と分ける事を行なう。式 (15) を変形すると

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = g - f \frac{\partial u}{\partial x} \equiv G \quad (16)$$

となり、また、式 (16) を空間微分すると

$$\frac{\partial(\partial_x f)}{\partial t} + u \frac{\partial(\partial_x f)}{\partial x} = \partial_x G - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (17)$$

式 (16),(17) の左辺は先述の移流部分であるが、ここに右辺の項の効果を加える。

移流相

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial(\partial_x f)}{\partial t} + u \frac{\partial(\partial_x f)}{\partial x} = 0 \quad (19)$$

非移流相

$$\frac{\partial f}{\partial t} = G \quad (20)$$

$$\frac{\partial(\partial_x f)}{\partial t} = \partial_x G - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (21)$$

計算手順はまず移流相を CIP 法で解いて $(f^n, \partial_x f^n) \rightarrow (f^*, \partial_x f^*)$ と中間の値を求める。(式 (11),(12) で $(f^{n+1}, \partial_x f^{n+1})$ ではなく、 $(f^*, \partial_x f^*)$ とする。)

次にその中間値を用いて、非移流相で単純な時間前進差分・空間中心差分により $(f^*, \partial_x f^*) \rightarrow (f^{n+1}, \partial_x f^{n+1})$ を求め、次ステップの値とする。具体的な計算については次節で述べる。

2.1 非移流相の計算法

移流計算については先述したので、ここでは非移流計算について述べる。式 (20) は差分化すると

$$f_i^{n+1} = f_i^* + G_i \Delta t \quad (22)$$

となる。(今後、上添字 * は移流相計算後の値を意味するものとする。) 次に式 (21) は差分化すると下式になる。

$$\partial_x f_i^{n+1} = \partial_x f_i^* + \frac{G_{i+1} - G_{i-1}}{2\Delta x} \Delta t - \partial_x f_i^* \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \Delta t \quad (23)$$

ここで G_i の計算であるが、直接 G の式を代入しても計算は出来るが、計算量を軽減する工夫として式 (22) を用いる事が出来る。つまり $G_i = (f_i^{n+1} - f_i^*)/\Delta t$ なので式 (23) は

$$\partial_x f_i^{n+1} = \partial_x f_i^* + \frac{(f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^*) - (f_{i-1}^{n+1} - f_{i-1}^*)}{2\Delta x \Delta t} \Delta t - \partial_x f_i^* \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \Delta t \quad (24)$$

と既に求まっている量で計算する事が出来る。

2.2 計算手順のまとめ

式 (16) の解き方を簡単に手順をまとめておくと

1. CIP 法 (式 (11),(12)) を用いて、移流相 (式 (18),(19)) の計算を行い $(f^n, \partial_x f^n) \rightarrow (f^*, \partial_x f^*)$ とする。

2. 式 (22),(24) を用いて非移流相の計算を行ない、 $(f^*, \partial_x f^*) \rightarrow (f^{n+1}, \partial_x f^{n+1})$ とし、時間発展させる。
3. 以下、繰り返し

この用にすれば、後述の流体方程式やその他の様々な双曲型方程式 (Vlasov-Boltzmann 方程式、等) に対して CIP 法が適用出来る事が分かる。

3 流体力学への応用

3.1 基礎方程式

1次元直交座標系での非粘性圧縮性流体の基礎方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} \quad (25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (26)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} = -\gamma p \frac{\partial u}{\partial x} \quad (27)$$

となる。ここで ρ は密度、 u は速度、 p は圧力、 e は単位質量当たりの内部エネルギーである。理想気体では

$$e = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \quad (28)$$

である。 γ は比熱比である。式 (25) ~ (27) はそれぞれ式 (16) と全く同形である。よってそれぞれを移流相・非移流相に分けて CIP 法を用いて計算する事が出来る。

ここで物理量の定義点についてであるが、大きく2つに分ける事が出来る。1つは (\dots) 全て同じ点に定義するシグマ格子、もう1つは ρ と u の定義点をずらす

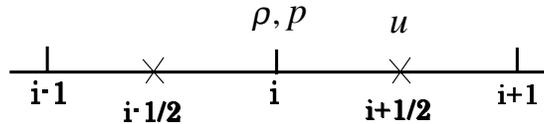


図 5: スタガード格子での、1次元での物理量配置。

3.2 人工粘性

圧縮性流体の計算では、超音速になると衝撃波が発生する。衝撃波は数学的には不連続面であるが、実際は流体に粘性がある為、衝撃波は分子の平均自由行程程度の厚さを持っている。数値解析では、衝撃波の厚さを格子幅 Δx 程度で捉える事が出来れば良いので、衝撃波面のみ作用する人工的な粘性を圧力項に加える事で衝撃波を捉える事が可能になる。ここでは Von-Neumann 型の人工粘性 [4][5] を用いる。

$$q_i = \begin{cases} \alpha[-\rho_i C_s (\frac{\partial u}{\partial x}) \lambda + \frac{\gamma+1}{2} (\frac{\partial u}{\partial x})^2 \lambda^2] & \text{if } \frac{\partial u}{\partial x} < 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

である。 q_i は圧力と同じ定義点なので、 $(\partial u / \partial x) = (u_{i+1/2} - u_{i-1/2}) / \Delta x$ であり、圧縮領域のみに人工粘性が加わる事になる。 λ は衝撃波の厚さであるが、ここでは格子幅 Δx とすればよい。また、 $C_s = \sqrt{\gamma p_i^n / \rho_i^n}$ は音速、 α は人工粘性係数で 0.6 から 1.0 の間程度の値である。

よって、人工粘性を入れた差分式は

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^*}{\Delta t} = -\rho_i^* \frac{u_{i+1/2}^* - u_{i-1/2}^*}{\Delta x} \quad (29)$$

$$\frac{u_{i+1/2}^{n+1} - u_{i+1/2}^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho_{i+1/2}^*} \frac{(p_{i+1}^* + q_{i+1}^*) - (p_i^* + q_i^*)}{\Delta x} \quad (30)$$

$$\frac{p_i^{n+1} - p_i^*}{\Delta t} = -\{\gamma p_i^* + (\gamma - 1) q_i^*\} \frac{u_{i+1/2}^* - u_{i-1/2}^*}{\Delta x} \quad (31)$$

となる。ここで $\rho_{i+1/2}^* = (\rho_{i+1}^* + \rho_i^*) / 2$ である。式 (31) 中で $(\gamma - 1) q_i^*$ となっているのは、元々は保存形の基礎方程式の圧力に人工粘性を加える事から導かれる為である。

3.3 応用：CCUP 法

前節で移流相に CIP、非移流相に式 (29) ~ (31) を用いて流体方程式が解ける事が分かった。ところで、この非移流相を次の様に書き換えてみる。

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^*}{\Delta t} = -\rho^* \nabla \cdot \vec{u}^{**} \quad (32)$$

$$\frac{\vec{u}^{**} - \vec{u}^*}{\Delta t} = -\frac{\nabla p^{**}}{\rho^*} \quad (33)$$

$$\frac{p_i^{**} - p_i^*}{\Delta t} = -\gamma p^* \nabla \cdot \vec{u}^{**} \quad (34)$$

ここで格子点の下添字は省略し、一般的なベクトルの形で書く事にする。式 (29) ~ (31) では右辺の時刻は全て * であったが、本手法では右辺にも ** がある陰解法になっている。式 (33) の両辺の div を取り、 $\gamma p = \rho C_s^2$ (C_s は音速) である事に注意して式 (34) を代入すると、次の圧力に関する poisson 方程式が導かれる。

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla p^{**}}{\rho^*} \right) = \frac{p^{**} - p^*}{\rho^* C_s^2 \Delta t^2} + \frac{\nabla \cdot \vec{u}^*}{\Delta t} \quad (35)$$

本手法を CIP-CUP 法 (CIP-Combined Unified Procedure) と呼ぶ [6]。式 (35) を反復法 (SOR, Bi-CGSTAB, etc) で p^{**} を求めてから式 (33) で \vec{u}^{**} を求め、式 (32) で ρ^{n+1} を求める。非圧縮性流体は音速の近似であるが、式 (35) で $C_s \rightarrow \infty$ とすると MAC 法のような式になる。この様に音速を変える事によって圧縮性・非圧縮性流体を統一的に解く事が出来る。実際には人工粘性・実粘性・熱伝導等の効果を入れる事になるので、

$$\frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^{**}}{\Delta t} = \vec{Q}_u \quad (36)$$

$$\frac{p^{n+1} - p^{**}}{\Delta t} = Q_p \quad (37)$$

(\vec{Q}_u, Q_p は先述の効果) の様に後でそれらの効果で時間発展させ、 p^{n+1} 、 \vec{u}^{n+1} を求める。

3.4 計算例

計算例として最も典型的な衝撃波管問題を CIP 法と CCUP 法で解いた結果を示す。初期条件は $p = 1, \rho = 1$ ($x < 1$), $p = 0.1, \rho = 0.125$ ($x > 1$)。比熱比 $\gamma = 1.4$ 、格子幅 $\Delta x = 0.1$ 時間刻み $\Delta t = 0.01$ とし、400 ステップまで計算を行なった。また、人工粘性係数 $\alpha = 0.7$ である。図 6 は密度の結果であるが、共に解析解とほぼ一致した解が得られている事が分かる。また、衝撃波面も sharp に捉えられている事が分かる。

接触不連続面で若干の overshoot, undershoot が見られるが、これらも単調性が保証されている有理関数 CIP 法 [7] を用いる事で改善する事が出来る。圧縮性流体の計算では CIP 法の方が Rarefaction Wave 等を見ても若干良い様であるが、CCUP 法は計算が安定であるという利点がある。

3.5 (Appendix) 円柱・球座標系の半径方向 1 次元 CIP

ここまで述べてきたのはデカルト 1 次元座標系だが、容易に他の座標系にも拡張出来る。例えば流体方程式は次の様に一般的に書き換えられる。

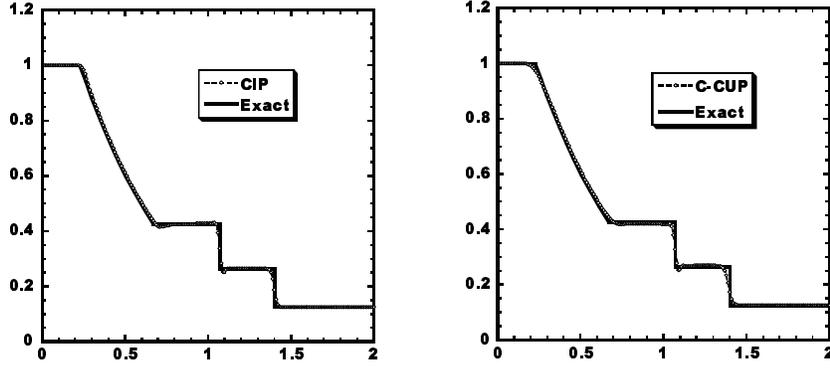


図 6: CIP 法 (左) と CCUP 法 (右) の計算結果 (密度)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^\delta} \frac{\partial(\rho u r^\delta)}{\partial r} = 0 \quad (38)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (39)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial r} = -\frac{p}{\rho r^\delta} \frac{\partial(u r^\delta)}{\partial r} \quad (40)$$

ここで、 $\delta = 0, 1, 2$ はそれぞれデカルト、円柱、球座標に対応する。よって、右辺の非移流項は

$$\mathbf{G} = \left(-\frac{\rho}{r^\delta} \frac{\partial(u r^\delta)}{\partial r}, -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, -\frac{p}{\rho r^\delta} \frac{\partial(u r^\delta)}{\partial r} \right) \quad (41)$$

と変えるだけで良い。

4 保存保証型 CIP 法

4.1 CIP-CSL2(Conservative Semi-Lagrangian) 法

第 1,2 章で述べた CIP 法は「非保存形」の方程式に適用するので、値の保存が数学的には保証されていない。(しかし、通常非保存形の差分法と比較しても保存の崩れは非常に小さい。)そこで近年、保存が保証される CIP 法が提案されている。これまで CIP-CSL4[8] 法と CIP-CSL2 [9] 法が提案されているが、本節では CIP-CSL2 法について述べる。

例えば次の様な方程式を考える。

$$\frac{\partial D}{\partial t} + u \frac{\partial D}{\partial x} = 0 \quad (42)$$

これは普通の移流方程式だが、式 (42) の空間微分を取り、 $D' \equiv \partial D / \partial x$ とすると次の保存方程式が得られる。

$$\frac{\partial D'}{\partial t} + \frac{\partial(uD')}{\partial x} = 0 \quad (43)$$

この事から、式 (43) で $D' \equiv f(= \text{値})$ 、式 (42) で $D = \int f dx$ とすれば CIP 法における値と微分値の関係をそのまま積分値と値に置き換える事が出来、第 1,2 章で述べた関係式をそのまま適用する事が出来る。

通常の CIP 法は値 f と微分値 $\partial f / \partial x$ を用いて 3 次補間関数を構築するが、CIP-CSL2 法は値 f と積分値 $\rho = \int f dx$ を用いて 2 次関数を構築する。その際、積分値 ρ は格子の midpoint に定義する。値が 2 次関数なので、積分値の関数は 3 次関数になっている。そこで

$$D_i(x) = \int_{x_i}^x f(x') dx' \quad (44)$$

を導入し、

$$D_i(x) = A1_i X^3 + A2_i X^2 + f_i^n X \quad (45)$$

と積分値を 3 次関数で補間すれば、その微分に対応する値の関数は

$$F_i(x) = \frac{\partial D(x)}{\partial x} = 3A1_i X^2 + 2A2_i X + f_i^n \quad (46)$$

と書く事が出来る。ここで $X \equiv x - x_i$ である。

補間関数 $D_i(x)$ の連続条件は、 $D_i(x)$ が値を与える事に注意すると CIP 法と同様に

$$\begin{aligned} D_i(x_i) &= 0, \quad D_i(x_{iup}) = -\text{sgn}(u_i) \rho_{icell}^n, \\ \partial_x D_i(x_i) &= f_i^n, \quad \partial_x D_i(x_{iup}) = f_{iup}^n \end{aligned} \quad (47)$$

ここで、 ρ_{icell}^n は上流側の格子内の全質量 ($icell = i - \text{sgn}(u_i)/2$)、 $iup = i - \text{sgn}(u_i)$ である。よって、係数 $A1, A2$ は

$$A1 = \frac{f_i^n + f_{iup}^n}{\Delta x_i^2} + \frac{2\text{sgn}(u_i) \rho_{icell}^n}{\Delta x_i^3} \quad (48)$$

$$A2 = -\frac{3\text{sgn}(u_i) \rho_{icell}^n}{\Delta x_i^2} - \frac{2(f_i^n + f_{iup}^n)}{\Delta x_i} \quad (49)$$

$\Delta x_i \equiv x_{iup} - x_i$ であり、この様に一意に決定する事が出来る。

4.2 時間発展のまとめ

CIP 法が値 f と微分値 $\partial_x f$ の時間発展が必要なのに対応して、CIP-CSL2 法は値 f と積分値 ρ の時間発展が必要である。よって、保存方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(uf)}{\partial x} = 0 \quad (50)$$

を CIP-CSL2 法で解く時は

1. 値 f は、式 (50) を移流相と非移流相に分け、式 (18),(20) ($g = 0$) の様に時間発展させる。つまり

(a) 移流相

$$f_i^* = F(x_i - u\Delta t) = 3A1\xi^2 + 2A2\xi + f_i^n \quad (51)$$

(b) 非移流相

$$f_i^{n+1} = f_i^* + G_i\Delta t \quad G_i = -f_i^* \frac{\partial u}{\partial x} \quad (52)$$

である。

2. 積分値 ρ は、格子内の質量の流入出を考慮すればよいので (図 7 参照)

$$\rho_{i-1/2}^{n+1} = \rho_{i-1/2}^n + (\Delta\rho_{i-1}^n - \Delta\rho_i^n) \quad (53)$$

とすればよく、また $\Delta\rho_i^n$ は格子点上での質量流束を表し、

$$\begin{aligned} \Delta\rho_i^n &= \int_{x_i+\xi}^{x_i} F(x')dx' = -D_i(x_i + \xi) \\ &= -(A1_i\xi^3 + A2_i\xi^2 + f_i^n\xi) \end{aligned} \quad (54)$$

と書く事が出来る。

3. 以下、繰り返し

ここで $\xi = -u_i\Delta t$ である。式 (53),(54) は、各格子間での質量 (積分値) の収支を表しているので、計算領域全体で全質量が保存される事がわかる。

本手法は、例えば流体方程式の連続の式は CIP-CSL2 法で解いて質量保存させ、運動方程式・エネルギー式は通常の CIP 法で解くといった応用が出来る。

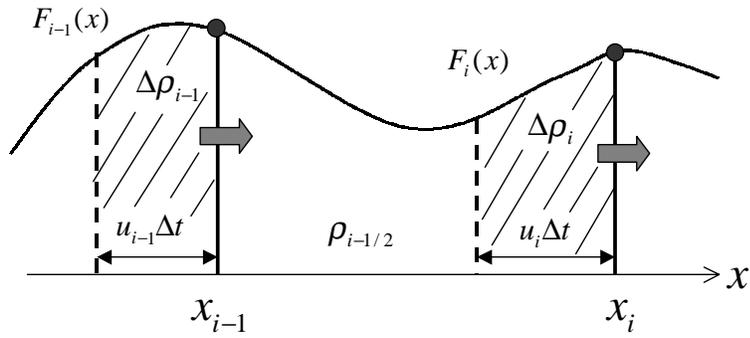


図 7: Δt 内の格子内の質量流入・流出。

4.3 計算例

式 (50) の計算例として、次の計算を行なった。速度は

$$u(x) = 1.0/(1.0 + 0.5\sin(2\pi x)) \quad (55)$$

とし、値の初期条件は

$$f(x, t = 0) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0.25 < x < 0.45 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とした。格子幅 $\Delta x = 2.0/N$ (N は格子数)、時間幅 $\Delta t = \Delta x \times 0.2$ とし、格子数を変えてそれぞれ $t = 0.8$ まで計算を行なった。また、積分値 ρ の初期条件は格子間が直線補間されているとして

$$\rho_{i-1/2}^0 = \frac{f_{i-1}^0 + f_i^0}{2} (x_i - x_{i-1}) \quad (56)$$

とした。

図 8(a)(b) は計算結果と解析解との比較、図 8(c)(d) は Mass Error (最も粗い $N = 200$) を表している。計算結果については、同じ格子数で従来の CIP 法とほぼ同等の結果を得る事が出来ている。保存については、値 f については完全には保存はしていない。これは初期条件で積分値を直線補間したと仮定した為である。CIP 法も十分小さい範囲で f も保存されているが、CIP-CSL2 法は更にその保存が良くなっている。また、CIP-CSL2 法で用いられている積分値 ρ については計算機の誤差 ($\sim 10^{-14}$) 以内で質量が保存されている。格子内質量の正しい定義が $f_i \Delta x$ ではなく $\rho_{i-1/2}$ であることを考慮すれば、本手法は完全な保存保証スキームである事が分かる。

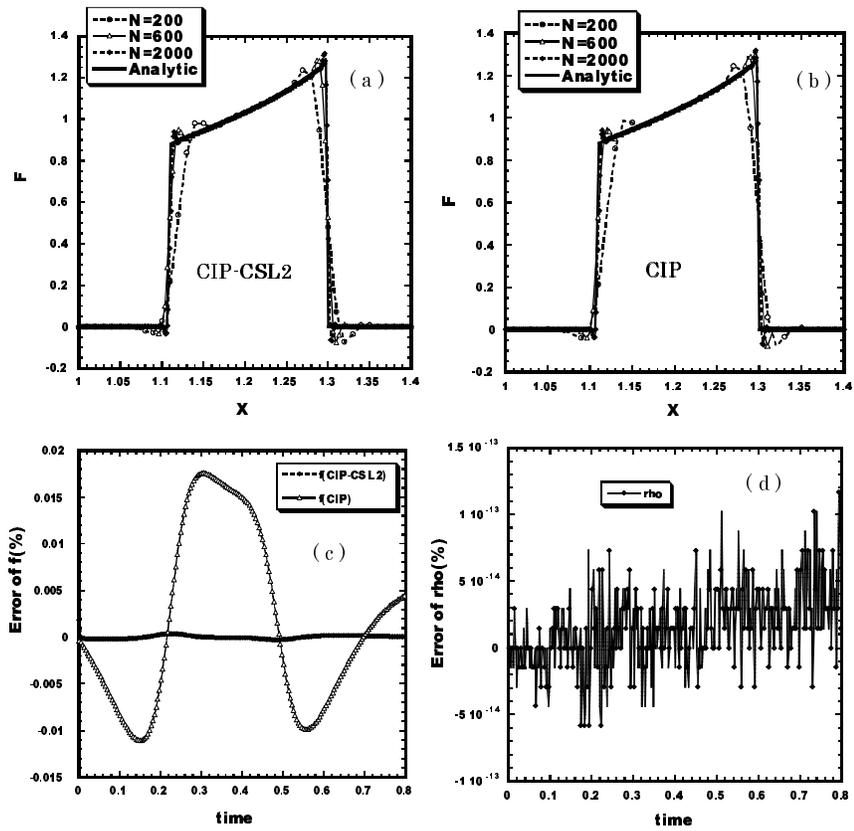


図 8: 計算結果。(a) 格子数 $N = 200, 600, 2000$ の結果と解析解 (CIP-CSL2)、(b) 同 CIP、(c) 値 f の Mass Error(CIP、CIP-CSL2)、(d) 積分値 ρ の Mass Error(CIP-CSL2)。

4.4 多次元化

4.4.1 2次元

多次元化する方法として、Directional Splitting[10]の方法を簡単に紹介する。例えば2次元の場合、方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(uf)}{\partial x} + \frac{\partial(vf)}{\partial y} = 0 \quad (57)$$

となるが、1次元の手法を活用する為に図9のような物理量を定義する。

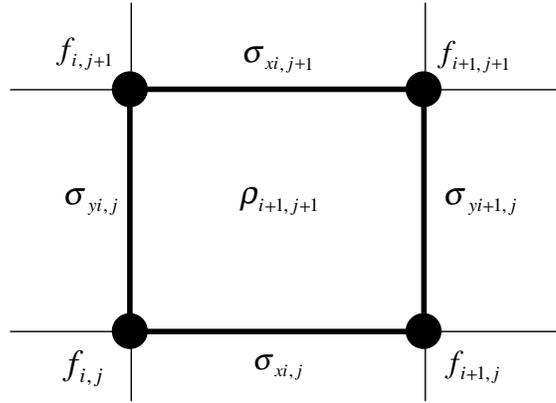


図9: CIP-CSL2の物理量(2次元)。線密度 σ_x, σ_y と密度 ρ 。

ここで、

$$\sigma_{xij}^n = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y_j, t) dx \quad (58)$$

$$\sigma_{yij}^n = \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x_i, y, t) dy \quad (59)$$

$$\rho_{ij}^n = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y, t) dy dx \quad (60)$$

である。計算手順は

$$STEP1 : \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(uf)}{\partial x} = 0 \quad (61)$$

$$STEP2 : \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(vf)}{\partial y} = 0 \quad (62)$$

を順次行なう。前節、式(50)~(54)の手順をCIPCSL1D($u, f^n, f^{n+1}, \rho^n, \rho^{n+1}, x$)と置くと、

$$\begin{aligned}
\text{STEP1} & : \text{CIPCSL1D}(u, f^n, f^{\text{step1}}, \sigma_x^n, \sigma_x^{\text{step1}}, x) \\
& \quad \bar{u} = \frac{u_{ij} + u_{i+1j}}{2} \\
& \quad \text{CIPCSL1D}(\bar{u}, \sigma_y^n, \sigma_y^{\text{step1}}, \rho^n, \rho^{\text{step1}}, x) \quad (63)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{STEP2} & : \text{CIPCSL1D}(v, f^{\text{step1}}, f^{n+1}, \sigma_y^{\text{step1}}, \sigma_y^{n+1}, y) \\
& \quad \bar{v} = \frac{v_{ij} + v_{i+1j}}{2} \\
& \quad \text{CIPCSL1D}(\bar{v}, \sigma_x^{\text{step1}}, \sigma_x^{n+1}, \rho^{\text{step1}}, \rho^{n+1}, y) \quad (64)
\end{aligned}$$

とすればよい。

4.4.2 3次元

3次元では、線密度 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ と面密度 S_{xy}, S_{yz}, S_{zx} (と密度 ρ) を用意する。ここで

$$S_{xyijk}^n = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y, z_k, t) dy dx \quad (65)$$

$$S_{yzijk}^n = \int_{z_k}^{z_{k+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x_i, y, z, t) dy dz \quad (66)$$

$$S_{zxijk}^n = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{z_k}^{z_{k+1}} f(x, y_j, z, t) dx dz \quad (67)$$

$$\rho_{ijk}^n = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{z_k}^{z_{k+1}} f(x, y, z, t) dx dy dz \quad (68)$$

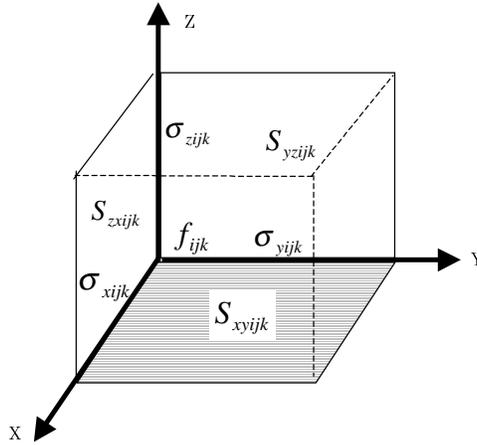


図 10: CIP-CSL2 の物理量 (3次元)。線密度 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ と面密度 S_{xy}, S_{yz}, S_{zx}

である。同様に計算手順は

$$STEP1 : \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(uf)}{\partial x} = 0 \quad (69)$$

$$STEP2 : \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(vf)}{\partial y} = 0 \quad (70)$$

$$STEP3 : \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(wf)}{\partial z} = 0 \quad (71)$$

であり、2次元と同様に

$$\begin{aligned}
STEP1 : & CIPCSL1D(u, f^n, f^{step1}, \sigma_x^n, \sigma_x^{step1}, x) \\
& \bar{u} = \frac{u_{ijk} + u_{ij+1k}}{2} \\
& CIPCSL1D(\bar{u}, \sigma_y^n, \sigma_y^{step1}, S_{xy}^n, S_{xy}^{step1}, x) \\
& \hat{u} = \frac{u_{ijk} + u_{ijk+1}}{2} \\
& CIPCSL1D(\hat{u}, \sigma_z^n, \sigma_z^{step1}, S_{zx}^n, S_{zx}^{step1}, x) \\
& \tilde{u} = \frac{u_{ijk} + u_{ijk+1} + u_{ij+1k} + u_{ij+1k+1}}{4} \\
& CIPCSL1D(\tilde{u}, S_{yz}^n, S_{yz}^{step1}, \rho^n, \rho^{step1}, x) \quad (72) \\
STEP2 : & CIPCSL1D(v, f^{step1}, f^{step2}, \sigma_y^{step1}, \sigma_y^{step2}, y) \\
& \bar{v} = \frac{v_{ijk} + v_{i+1jk}}{2} \\
& CIPCSL1D(\bar{v}, \sigma_x^{step1}, \sigma_x^{step2}, S_{xy}^{step1}, S_{xy}^{step2}, y) \\
& \hat{v} = \frac{v_{ijk} + v_{ijk+1}}{2} \\
& CIPCSL1D(\hat{v}, \sigma_z^{step1}, \sigma_z^{step2}, S_{yz}^{step1}, S_{yz}^{step2}, y) \\
& \tilde{v} = \frac{v_{ijk} + v_{ijk+1} + v_{i+1jk} + v_{i+1jk+1}}{4} \\
& CIPCSL1D(\tilde{v}, S_{zx}^{step1}, S_{zx}^{step2}, \rho^{step1}, \rho^{step2}, y) \quad (73) \\
STEP3 : & CIPCSL1D(w, f^{step2}, f^{n+1}, \sigma_z^{step2}, \sigma_z^{n+1}, z) \\
& \bar{w} = \frac{w_{ijk} + w_{i+1jk}}{2} \\
& CIPCSL1D(\bar{w}, \sigma_x^{step2}, \sigma_x^{n+1}, S_{zx}^{step2}, S_{zx}^{n+1}, z) \\
& \hat{w} = \frac{w_{ijk} + w_{ij+1k}}{2} \\
& CIPCSL1D(\hat{w}, \sigma_y^{step2}, \sigma_y^{n+1}, S_{yz}^{step2}, S_{yz}^{n+1}, z) \\
& \tilde{w} = \frac{w_{ijk} + w_{ij+1k} + w_{i+1jk} + w_{i+1j+1k}}{4} \\
& CIPCSL1D(\tilde{w}, S_{xy}^{step2}, S_{xy}^{n+1}, \rho^{step2}, \rho^{n+1}, z) \quad (74)
\end{aligned}$$

である。

参考文献

- [1] E.F.Toro, Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics (Springer, 1997)
- [2] T.Yabe, F.Xiao and T.Utsumi, The Constrained Interpolation Profile Method for Multiphase Analysis, *J.Comput.Phys.*,**169**,556 (2001).
- [3] T.Yabe and T.Aoki, A Universal Solver for Hyperbolic Equations by Cubic-Polynomial Interpolation. I. One-Dimensional Solver, *Comput.Phys.Commun.*,**66**,219 (1991).
- [4] J.Von Neumann, R.D.Richtmyer, *J.Appl.Phys.*,**21**,232 (1950).
- [5] Y.Ogata and T.Yabe, Shock capturing with improved numerical viscosity in primitive Euler representation, *Comput.Phys.Commun*,**119**,179 (1999)
- [6] T.Yabe and P.Y.Wang, Unified Numerical Procedure for Compressible and Incompressible Fluid, *J.Phys.Soc.Japan.*,**60**,No.7,2105 (1991).
- [7] F.Xiao,T.Yabe and T.Ito,*Comput.Phys.Commun.*,**93**,1 (1996).
- [8] R.Tanaka,T.Nakamura and T.Yabe,*Comput.Phys.Commun.*,**126**,232 (2000)
- [9] T.Yabe,R.Tanaka,T.Nakamura and F.Xiao,*Mon. Wea. Rev.*,**129**,332 (2001)
- [10] T.Nakamura,R.Tanaka,T.Yabe,and K.Takizawa,*J.Comput.Phys.*,**174**,171 (2001)