CIP 法による MHD 解法

「天体とスペースプラズマのシミュレーションサマースクール」
2004 年 9 月 6 日-9 月 10 日
場所：千葉大学総合メディア基盤センター

1　CIP 法による MHD 解法：CIP-MOCCT 法

現在様々な MHD 解法が存在するが、CIP 法で MHD を解く場合に磁場項と誘導方程式をどの様に解くかが課題となる。その解決法として、誘導方程式の解法である MOCCT 法を組み合わせた CIP-MOCCT 法が Kudoh（国立天文台）によって提案された [1][2][3]。これを紹介する。

磁気流体の基礎方程式は次の様に書かれる。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho &= -\rho\nabla\cdot\mathbf{u} && (1)\\
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho}\nabla(p+\frac{B^2}{8\pi}) + \frac{1}{4\pi\rho}(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{Q_f} && (2)\\
\frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)p &= -\gamma p\nabla\cdot\mathbf{u} + \mathbf{Q_p} && (3)\\
\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{B}) &= 0 && (4)\\
\nabla\cdot\mathbf{B} &= 0 && (5)
\end{aligned}
$$

ここで $\mathbf{Q_f}$ は実粘性・人工粘性・重力等の外力項、$\mathbf{Q_p}$ は熱伝導・人工粘性等の項である。

式 (1)〜(3) 中の左辺は CIP 法で解き、右辺は非移流相として解けば良いのだが（圧力項を Poisson 方程式で解けば CCUP 法になる）、式 (4),(5) の解法に MOCCT 法を用いる。

2　MOCCT 法の概略

MOCCT 法は $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ を満たす様に式 (4) を解く CT 法と、アルフベン波特性曲線を安定に解く為の MOC 法を組み合わせた手法である。

2.1 MOC：Alfven 波特性曲線法

磁気流体方程式中の Maxwell 方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} \tag{6}$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{J} \tag{7}$$

であるが、ここでは $\eta = 0$ とする。まずは簡単の為、1 次元（X 方向）の場合

力

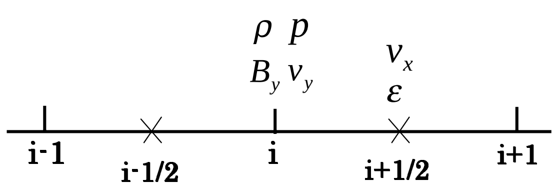

図 1: 1 次元の物理量配置。速度 X 成分と電場は格子の中心に定義。

式 (6),(7) より B_y の方程式は次の様に差分化する事が出来る。

$$\frac{B_{yi}^{n+1} - B_{yi}^{n}}{\Delta t} + \frac{(\varepsilon_z)_{i+1/2}^{*} - (\varepsilon_z)_{i-1/2}^{*}}{\Delta x} = 0 \tag{8}$$

$$\varepsilon_{zi+1/2}^{*} = u_{i+1/2} B_y^{*} - v^{*} B_x$$

ここで $*$ は中間の時刻 $(n+1/2)$ を表す。また、$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ より、$B_x =$const である。この ε_z^* を求める時にアルフベン波の特性曲線法 (Method of Characteristics : MOC) を用いる [4]。アルフベン波は非圧縮性 MHD に見られる波動であるので、特性曲線は次の 2 つの式、運動方程式と誘導方程式から導かれる。

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{B_x}{4\pi\rho}\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial (v_x v_y)}{\partial x} \tag{9}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = B_x \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial (v_x B_y)}{\partial x} \tag{10}$$

（※ $\rho, v_x, B_x =$constant）　式 (9),(10) を変形すると、別の 2 式が得られる。

$$\frac{Dv_y}{Dt} \mp \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}} \frac{DB_y}{Dt} = 0 \tag{11}$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(v_x \pm \frac{B_x}{\sqrt{4\pi\rho}} \right) \frac{\partial}{\partial x} \tag{12}$$

式 (12) は特性速度（移流速度）が $C^{\pm} = v_x \pm \dfrac{B_x}{\sqrt{4\pi\rho}}$ を意味し、特性線：式 (11) に沿って $v_y \mp \dfrac{B_y}{\sqrt{4\pi\rho}}$ が保存される不変量になっている事を表している。

よって、式 (11) を特性線に沿って積分すると、特性曲線の始点（時刻 n）と $*$ の間には次の様な関係式が導かれる事になる。(図 2)

$$v_y^* - v_y^+ - \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho^+}} (B_y^* - B_y^+) = 0 \tag{13}$$

$$v_y^* - v_y^- + \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho^-}} (B_y^* - B_y^-) = 0 \tag{14}$$

ここで、$(B_y, v_y)^{\pm}$ は各特性線 $C^{\pm}$ の始点の値である。式 (13),(14) から、v_y^* と B_y^* は

$$v_y^* = \frac{v_y^+ \sqrt{4\pi\rho^+} + v_y^- \sqrt{4\pi\rho^-} - B_y^+ + B_y^-}{\sqrt{4\pi\rho^+} + \sqrt{4\pi\rho^-}} \tag{15}$$

$$B_y^* = \frac{-v_y^+ + v_y^- + B_y^+ / \sqrt{4\pi\rho^+} + B_y^- / \sqrt{4\pi\rho^-}}{1/\sqrt{4\pi\rho^+} + 1/\sqrt{4\pi\rho^-}} \tag{16}$$

の様に求める事が出来る。簡単の為、$\rho^+ = \rho_{i-1}^n$, $\rho^- = \rho_{i+1}^n$ とする。

始点の値 $f(= B_y, v_y)^{\pm}$ は、式 (12) を見ても分かるように移流の形をしているので、格子間を補間して求める事が出来る。補間方法には様々あるが、例えば van Leer の方法（$i - 1/2$ と $i + 1/2$ を直線補間する方法）では

$$f(= B_y, v_y)^{\pm} = \begin{cases} f_i^n + \frac{1}{2}(\Delta x - C_{i+1/2}^{\pm} \Delta t) \dfrac{\Delta f}{\Delta x}_{(i)} & \text{if} \quad C_{i+1/2}^{\pm} > 0 \\ f_{i+1}^n - \frac{1}{2}(\Delta x + C_{i+1/2}^{\pm} \Delta t) \dfrac{\Delta f}{\Delta x}_{(i+1)} & \text{otherwise} \end{cases}$$

ここで、

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}_{(i)} = \begin{cases} \dfrac{2\Delta f_{i-1/2} \Delta f_{i+1/2}}{\Delta f_{i-1/2} + \Delta f_{i+1/2}} & \text{if } \Delta f_{i-1/2} \Delta f_{i+1/2} > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\Delta f_{i+1/2} = (f_{i+1} - f_i)/\Delta x$ である。この補間方法にも CIP 法を適用する事も出来る。

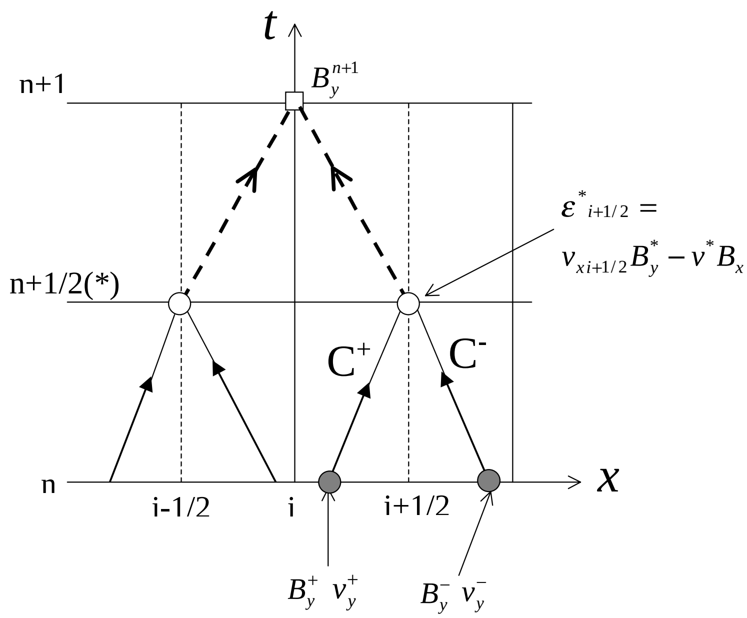

図 2: アルフベン波特性曲線と磁場の時間発展。実線矢印：特性曲線により起電力を求める。点線矢印：式 (8) を用いて B_y の時間発展を行なう。

2.2 多次元、CT 法

前節は 1 次元の場合だが、そのまま多次元に拡張する事も出来る。例えば 2 次元では磁場の各成分は

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \tag{17}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \tag{18}$$

$$\varepsilon = -(v_x B_y - v_y B_x) \tag{19}$$

であるが、各物理量の配置は図 3 の様にする。スタガード格子なので、スカラー量は格子中心、ベクトル量は格子境界、また起電力 ε は格子の角に配置する。この様にすれば 1 次元の手法を用いて X 方向で B_y, v_y、Y 方向で B_x, v_x を求め、式 (19) の ε が求まり、式 (17),(18) を差分化した式

$$\frac{B^{n+1}_{x(i+1/2,j)} - B^{n}_{x(i+1/2,j)}}{\Delta t} = -\frac{\varepsilon^{n+1/2}_{(i+1/2,j+1/2)} - \varepsilon^{n+1/2}_{(i+1/2,j-1/2)}}{\Delta y} \tag{20}$$

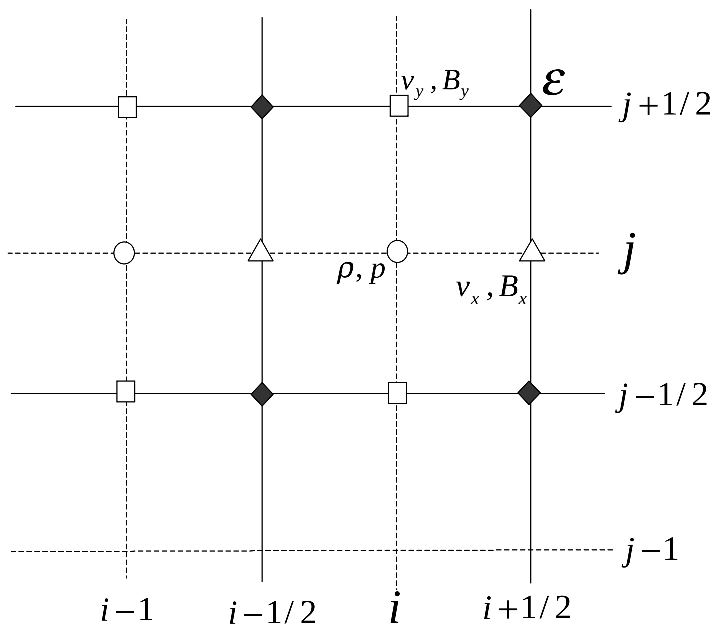

図 3: 2 次元 MHD コードでの物理量の配置、CT 法

$$\frac{B^{n+1}_{y(i,j+1/2)} - B^{n}_{y(i,j+1/2)}}{\Delta t} = \frac{\varepsilon^{n+1/2}_{(i+1/2,j+1/2)} - \varepsilon^{n+1/2}_{(i-1/2,j+1/2)}}{\Delta x} \tag{21}$$

で磁場が時間発展される。これは 3 次元でも同様に拡張が出来る。

図 3 の様に物理量を配置する方法を CT 法と呼ぶが、この様に磁場と電場を異なる場所で定義すると、式 (20),(21) を用いて、初期条件で $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ が満たされていれば常に $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ になる事が示される [4]。

この事から分かるように、CT 法は単に $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ を保証する手法であり、電場 ε の求め方の規定はしていない。これに MOC 法を組み合わせる事で安定なスキームになっている。

2.3 運動方程式中の磁気ストレス項

運動方程式の右辺にも磁気ストレス項が存在するが、この項にも MOC 法を用いて値を評価する事になる。例えば、2 次元 MHD の運動方程式の y 成分は次式である。

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(p + \frac{B_x^2}{8\pi}\right) + \frac{B_x}{4\pi\rho}\frac{\partial B_y}{\partial x} \tag{22}$$

この内、磁気圧項（右辺第 1 項）は圧力と同様の差分を作ればよいが、第 2 項はストレス項でありこの項に MOC 法を適用する。非移流相において第 2 項の差分のみ表記すると

$$\frac{(v_y)^{*}_{i,j+1/2} - (v_y)^{n}_{i,j+1/2}}{\Delta t} = \dots$$

$$+\left(\frac{1}{4\pi\bar{\rho}}\right) < B_x >^{n}_{i,j+1/2} \frac{(B_y)^{*}_{i+1/2,j+1/2} - (B_y)^{*}_{i-1/2,j+1/2}}{\Delta x} \tag{23}$$

ここで、$\bar{\rho}, < B_x >^{n}_{i,j+1/2}$ はそれぞれ v_y の定義点 $(i, j+1/2)$ 上での平均値である。例えば

$$< B_x >^{n}_{i,j+1/2} = \frac{1}{4}[(B_x)_{i+1/2,j} + (B_x)_{i+1/2,j+1} + (B_x)_{i-1/2,j}(B_x)_{i-1/2,j+1}] \tag{24}$$

等である。式 (23) における、B_y^{*} の値の見積りに MOC 法を用いる。しかし、この計算は非移流相の計算であり、移流部分は CIP 法で別に計算する事にな

るので特性速度は

$$C^{\pm} = \pm \frac{B_x}{\sqrt{4\pi\rho}} \tag{25}$$

を用いて計算する。(※式 (11),(12) は移流項も含めて特性線を出していた))
これは運動方程式の x 成分も同様に計算を行なう。

2.4 計算手順

CIP 法と MOCCT 法をまとめた手順は次の様になる。

1. 初期条件 $(\rho^n, \mathbf{u}^n, p^n, \mathbf{B}^n)$ を設定。
2. 非移流項の計算 $(\rho^n, \mathbf{u}^n, p^n) \rightarrow (\rho^*, \mathbf{u}^*, p^*)$
   (a) この時、運動方程式のストレス項の計算は MOC 法で求める。(式 (23)〜(25))
3. 移流相と磁場の時間発展
   (a) CIP 法で $\rho, \mathbf{u}, p$ の移流相の計算を行なう。$(\rho^*, \mathbf{u}^*, p^*) \rightarrow (\rho^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1})$
   (b) MOC 法で電場 ε を計算し、CT 法で磁場 $\mathbf{B}^{n+1}$ を計算。(式 (20),(21))
4. 以下、繰り返し

典型的な計算例として、1.5 次元衝撃波管問題の計算例を CIP-MOCCT 法で解いた結果を示す。1.5 次元なので磁場・速度の y 成分はあるが、$\partial/\partial y = 0$ である(勿論、z 成分は値・微分共に 0)。初期条件は $p = 1, \rho = 1, B_y = 1.0$ $(x < 400)$, $p = 0.1, \rho = 0.125, B_y = -1.0$ $(x > 400)$。比熱比 $\gamma = 1.4$、格子幅 $\Delta x = 2.0$ とし、$t = 80.0$ の結果を示す。人工粘性係数は 0.7 である。

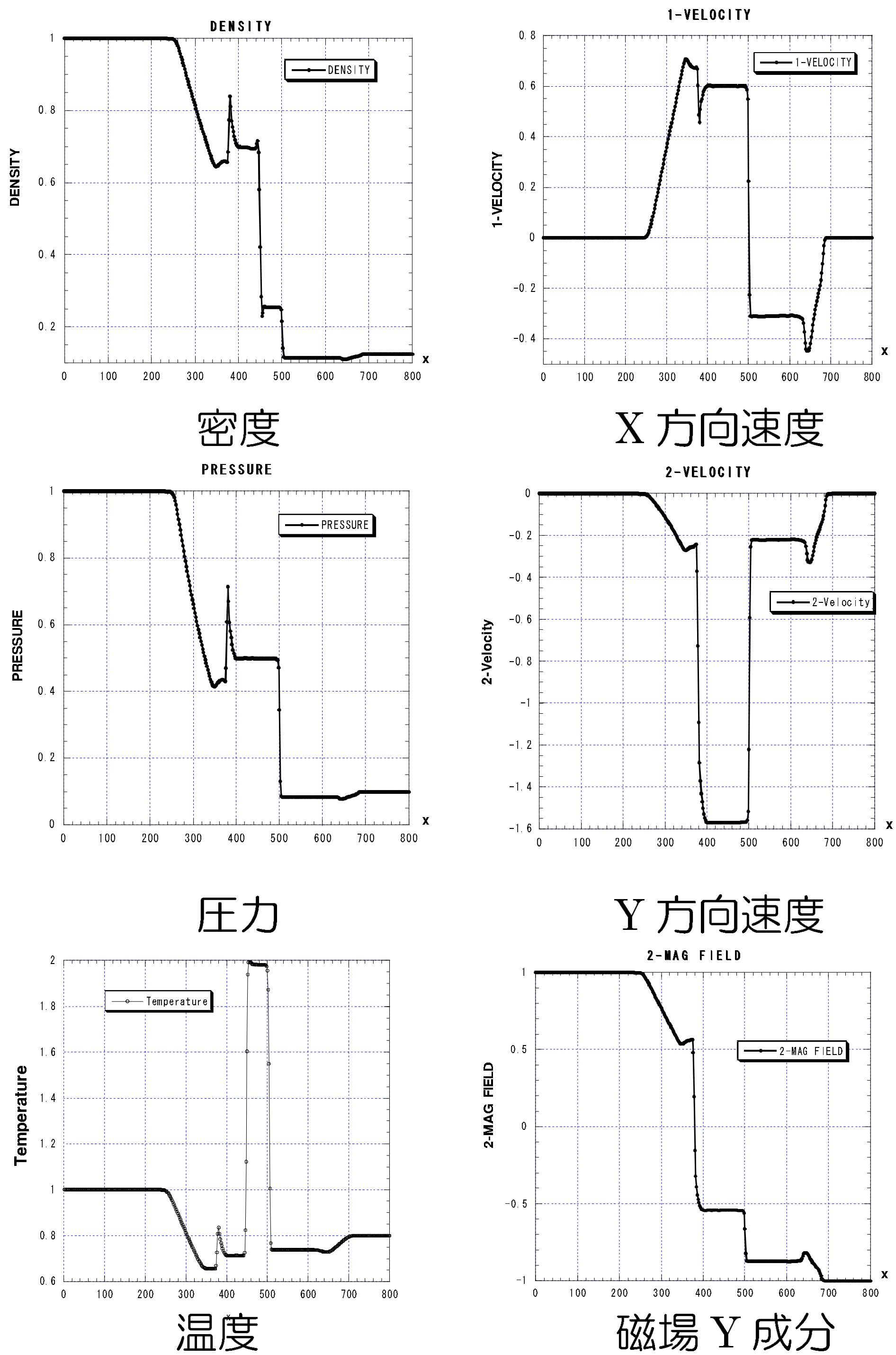

図 4: 1 次元 MHD 衝撃波管問題。

参考文献

[1] T.Kudoh and K.Shibata, Numerical MHD Simulation of Astrophysical Problems by Using CIP-MOCCT Method; *CFD Journal*,**8**, 56 (1999)

[2] T.Kudoh and K.Shibata, Alfven Wave Model of Sppicules and Coronal Heating, *Astrophysical Journal*,**514**,493 (1999)

[3] T.Kudoh and K.Shibata, Magnetically Driven Jets from Accretion Disks. II. Nonsteady Solutions and Comparison with Steady Solutions, *Astrophysical Journal*,**476**,612 (1997)

[4] J.F.Hawley and J.M.Stone, MOCCT: A Numerical technique for astrophysical MHD, *Comput.Phys.Commun*,**89**,127 (1995)