CANS2D モデルパッケージ md_kh

Kelvin-Helmholtz 不安定性

ver. 1

1 はじめに

このモデルパッケージは Kelvin-Helmholtz 不安定性をシミュレーションするためのものである。Kelvin-Helmholtz 不安定性は、速度の異なる不連続面に生じる不安定性である。例えば、木星に観測される大赤斑などの渦上の模様はこの不安定性によって形成されていると考えられている。

図 1: 木星の大赤班 (HST Homepage より)

2 仮定と基礎方程式

仮定は以下のとおり。(1) 2 次元の流体運動・エネルギー輸送を解く。(2) 流路は断面積一様。(3) 非粘性・圧縮性流体として扱う。(4) y 方向の重力を場合によっては考慮する。計算領域は $-\pi H \leq x \leq \pi H, -\pi H \leq y \leq \pi H$ とする。

基礎方程式は流体方程式である。

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}\rho V_x + \frac{\partial}{\partial y}\rho V_y = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho V_x^2 + p\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho V_x V_y\right) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho V_y^2 + p\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho V_x V_y\right) = \rho g_y \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho\left(V_x^2 + V_y^2\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\left\{\frac{\gamma}{\gamma - 1}p + \frac{1}{2}\rho\left(V_x^2 + V_y^2\right)\right\}V_x\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left\{\frac{\gamma}{\gamma - 1}p + \frac{1}{2}\rho\left(V_x^2 + V_y^2\right)\right\}V_x\right] = 0 \tag{4}$$

ここで、γ は比熱比でパラメータ、他の記号は通常の意味。

3 初期条件と境界条件

初期条件として、$y = 0$ の面を境に密度や速度が不連続であるとする。ここで、不連続面より下を領域 $1(y < 0)$、上を領域 $2(y > 0)$ とし、物理量の添え字に用いる。領域 1 と領域 2 の密度と速度を、それぞれ、ρ_1, ρ_2, V_1, V_2 とする。圧力は領域 1 と領域 2 で平衡であり、$p_1 = p_2$ とする。

ここで簡単のために、領域 2 にだけ x 軸方向の流れを考え、重力 $g = 0$ とする。これに不安定モードのゆらぎ $(k = 2)$ とランダムなゆらぎを加える。境界条件として、x 方向は周期境界とし、y 方向は対称境界とする。

4 無次元化

変数は、長さ、密度、速度の単位をそれぞれ H、ρ_1、C_{S1} とする。ここで H、ρ_1、C_{S1} は、単位長さ、領域 1 の密度、領域 1 の音速である。これらを用いて無次元化をおこなう (表 1 参照)。

5 パラメータ

パラメータ	変数	無次元値
非熱比	γ	5.0/3.0
密度比	ρ_2/ρ_1	0.25/1.0
圧力比	p_2/p_1	1.0
領域 $1x$ 速度	V_{x1}/C_{S1}	0
領域 $2x$ 速度	V_{x2}/C_{S1}	0.5
圧力	$p_1 = {C_{\mathrm{S0}}}^2\rho_1/\gamma$	3.0/5.0
領域長さ	$2\pi H$	2π
単位時間	H/C_{S1}	1
単位長	H	1
密度	ρ_1	1
音速	C_{S1}	1

表 1: パラメータと無次元化単位

6　不安定性の成長率について

不安定性の分散関係式は線形解析により一般に

$$\omega = k(\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2) + \sqrt{gk(\alpha_1 - \alpha_2) - k^2\alpha_1\alpha_2(V_1 - V_2)^2}$$

と与えられる。ここで、ω は振動数、k は波数である。また、

$$\alpha_1 = \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2}, \alpha_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$$

である。式の導出について詳しくは宇宙流体力学を参照されたい。いま、$g = 0$、$V_1 = 0$ としたので、

$$\omega = k\alpha_2 V_2 + \sqrt{-k^2\alpha_1\alpha_2 {V_2}^2}$$

となる。第 2 項は常に負であり、ω は複素数であり、不安定性が成長することを意味する。

7　計算結果

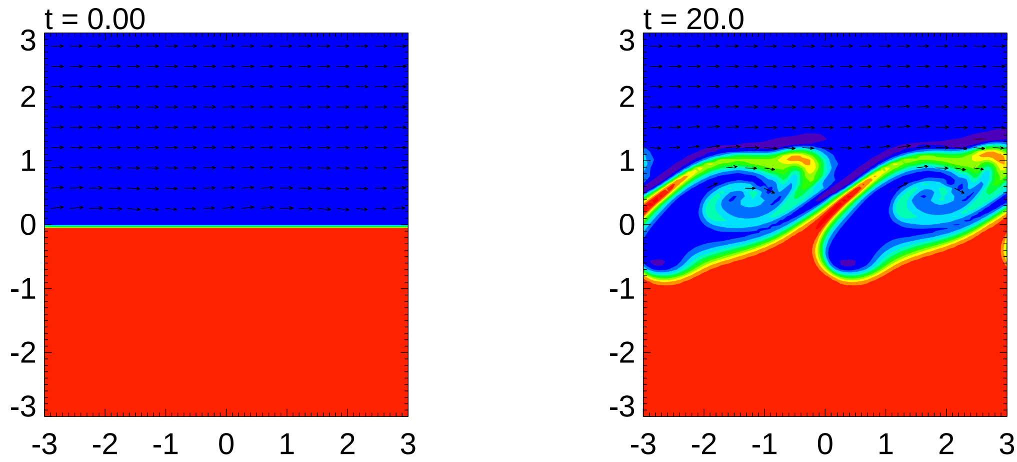

図 2: 色は密度を表す。左の図は初期状態。右の図は $t = 20$ の状態。

8　参考文献

坂下・池内「宇宙流体力学」