CANS1D モジュール hdmlw

流体エンジン 改良 Lax-Wendroff 法＋人工粘性

ver. 0.3 （2004 年 4 月 15 日）

1 はじめに

このモジュールは、流体力学方程式・MHD 方程式を改良 Lax-Wendroff ＋人工粘性法（Rubin & Burstein 1967; Burstein 1966; Richtmyer & Morton 1967）で解くためのものです。

以下で、$\gamma(=$ 定数$)$ は比熱比、$c(=$ 定数$)$ は光速、他の記号は通常の意味。

2 移流

2.1 サブルーチン mlw_a；移流

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) = 0 \tag{1}$$

ただし、V_x は空間 x の関数。

3 流体

3.1 サブルーチン mlw_h；流体

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho V_x^2 + p\right] = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho V_x^2\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}p + \frac{1}{2}\rho V_x^2\right)V_x\right] = 0 \tag{4}$$

3.2 サブルーチン mlw_h_g；流体重力

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho V_x^2 + p\right] = \rho g \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho V_x^2\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}p + \frac{1}{2}\rho V_x^2\right)V_x\right] = \rho g V_x \tag{7}$$

ただし、重力加速度 g は空間 x の関数。

3.3 サブルーチン mlw_h_c；流体非一様断面

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho S) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x S) = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_x S) + \frac{\partial}{\partial x}\left[(\rho V_x^2 + p)S\right] = p\frac{dS}{dx} \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho V_x^2\right)S\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}p + \frac{1}{2}\rho V_x^2\right)V_x S\right] = 0 \tag{10}$$

ただし、断面積 S は空間 x の関数。方程式は、Sterling, Shibata, Mariska (1993) を参考にした。

3.4 サブルーチン mlw_h_cg；流体非一様断面重力

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho S) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x S) = 0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_x S) + \frac{\partial}{\partial x}\left[(\rho V_x^2 + p)S\right] = \rho g S + p\frac{dS}{dx} \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho V_x^2\right)S\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}p + \frac{1}{2}\rho V_x^2\right)V_x S\right] = \rho g V_x S \tag{13}$$

ただし、断面積 S・重力加速度 g は、ともに空間 x の関数。方程式は、Sterling, Shibata, Mariska (1993) を参考にした。

4 等温流体

等温流体では、エネルギー方程式を解かない。圧力 p は、状態方程式

$$p = \frac{k_{\mathrm{B}}}{m}\rho T \tag{14}$$

を用いて、ρ から求める。ここで、k_{B} は Boltzmann 定数、m は平均粒子質量、T は温度で、いずれも定数。

4.1 サブルーチン mlw_ht；等温流体

第 3.1 節の式から、エネルギー方程式を除き、状態方程式 (14) を入れたのが基礎方程式。

4.2 サブルーチン mlw_ht_g；等温流体重力

第 3.2 節の式から、エネルギー方程式を除き、状態方程式 (14) を入れたのが基礎方程式。

4.3 サブルーチン mlw_ht_c；等温流体非一様断面

第 3.3 節の式から、エネルギー方程式を除き、状態方程式 (14) を入れたのが基礎方程式。

4.4 サブルーチン mlw_ht_cg；等温流体非一様断面重力

第 3.4 節の式から、エネルギー方程式を除き、状態方程式 (14) を入れたのが基礎方程式。

5 MHD

5.1 サブルーチン mlw_m；MHD

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x^2 + p + \frac{B_y^2}{8\pi}) = 0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x V_y - \frac{B_x B_y}{4\pi}) = 0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(B_y) - \frac{\partial}{\partial x}(cE_z) = 0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho V^2 + \frac{B_y^2}{8\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[(\frac{\gamma}{\gamma - 1}p + \frac{1}{2}\rho V^2)V_x - \frac{cB_y E_z}{4\pi}\right] = 0 \tag{19}$$

$$cE_z = -V_x B_y + V_y B_x \tag{20}$$

$$p = \frac{k_{\mathrm{B}}}{m}\rho T \tag{21}$$

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 \tag{22}$$

考慮している空間座標 x 方向の磁場成分 B_x が一様・一定値のときに用いる。つまり、B_x は既知の定数。

5.2 サブルーチン mlw_m_g；MHD 重力

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) = 0 \tag{23}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x^2 + p + \frac{B_y^2}{8\pi}) = \rho g_x \tag{24}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x V_y - \frac{B_x B_y}{4\pi}) = \rho g_y \tag{25}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(B_y) - \frac{\partial}{\partial x}(cE_z) = 0 \tag{26}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho V^2 + \frac{B_y^2}{8\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[(\frac{\gamma}{\gamma - 1}p + \frac{1}{2}\rho V^2)V_x - \frac{cB_y E_z}{4\pi}\right] = \rho(g_x V_x + g_y V_y) \tag{27}$$

$$cE_z = -V_x B_y + V_y B_x \tag{28}$$

$$p = \frac{k_{\mathrm{B}}}{m}\rho T \tag{29}$$

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 \tag{30}$$

考慮している空間座標 x 方向の磁場成分 B_x が一様・一定値のときに用いる。つまり、B_x は既知の定数。重力加速度 g_x、g_y は空間 x の関数。

5.3 サブルーチン mlw_m_bg；MHD 非一様磁場・重力

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{B_s}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\rho V_s}{B_s}\right) = 0 \tag{31}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho V_s}{B_s}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[(\rho V_s^2 + p + \frac{B_\theta^2}{8\pi})\frac{1}{B_s}\right] = \frac{\rho}{B_s}\left[g_s + (V_\theta^2 - \frac{B_\theta^2}{4\pi\rho})\frac{1}{R}\frac{dR}{ds}\right] + (p + \frac{B_\theta^2}{8\pi})\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{B_s}\right) \tag{32}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho V_\theta R}{B_s}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left[(\rho V_s V_\theta - \frac{B_s B_\theta}{4\pi})\frac{R}{B_s}\right] = 0 \tag{33}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B_\theta}{RB_s}\right) - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{cE_\xi}{RB_s}\right) = 0 \tag{34}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho V^2 + \frac{B_\theta^2}{8\pi}\right)\frac{1}{B_s}\right] + \frac{\partial}{\partial s}\left\{\left[(\frac{\gamma}{\gamma-1}p + \frac{1}{2}\rho V^2)V_s - \frac{cB_\theta E_\xi}{4\pi}\right]\frac{1}{B_s}\right\} = \frac{\rho g_s V_s}{B_s} \tag{35}$$

$$cE_\xi = -V_s B_\theta + V_\theta B_s \tag{36}$$

$$V^2 = V_s^2 + V_\theta^2 \tag{37}$$

$$V_\xi = 0, \quad B_\xi = 0 \tag{38}$$

軸対称（$\partial/\partial\theta = 0$）な状況を考えていて、曲線直交座標系 (s, θ, ξ) をとる（図 1）。座標 s は、磁場のポロイダル成分に沿った方向。座標 θ は、対称軸のまわりの方位角。座標 ξ は、s と θ とに対して垂直な方向。$R(s)$ は対称軸からの距離、$B_s(s)$ は磁場のポロイダル成分。$R(s)$ と $B_s(s)$ は与えられた既知関数で、値はゼロにしてはいけない。Hollweg, Jackson, Galloway (1982) を参考にした。

5.4 サブルーチン mlw_m3；3 成分 MHD

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) = 0 \tag{39}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x^2 + p + \frac{B_y^2 + B_z^2}{8\pi}) = 0 \tag{40}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x V_y - \frac{B_x B_y}{4\pi}) = 0 \tag{41}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_z) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x V_z - \frac{B_x B_z}{4\pi}) = 0 \tag{42}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(B_y) - \frac{\partial}{\partial x}(cE_z) = 0 \tag{43}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(B_z) + \frac{\partial}{\partial x}(cE_y) = 0 \tag{44}$$

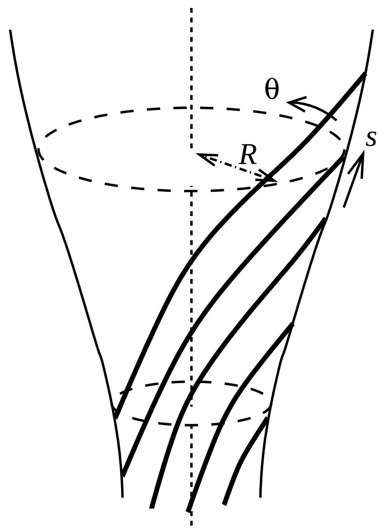

図 1: サブルーチン mlw_m_cg.f が想定している曲線座標系 (s, θ, ξ)。太線は磁力線を表す。点線は対称軸。

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\gamma-1}+\frac{1}{2}\rho V^2+\frac{B_y^2+B_z^2}{8\pi}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left[(\frac{\gamma}{\gamma-1}p+\frac{1}{2}\rho V^2)V_x-\frac{cB_yE_z}{4\pi}+\frac{cB_zE_y}{4\pi}\right]=0 \tag{45}$$

$$cE_y=-V_zB_x+V_xB_z, \quad cE_z=-V_xB_y+V_yB_x \tag{46}$$

$$p=\frac{k_{\rm B}}{m}\rho T \tag{47}$$

$$V^2=V_x^2+V_y^2+V_z^2 \tag{48}$$

考慮している空間座標 x 方向の磁場成分 B_x が一様・一定値のときに用いる。つまり、B_x は既知の定数。

5.5 サブルーチン mlw_m3_g；3 成分 MHD 重力

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x)=0 \tag{49}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_x)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x^2+p+\frac{B_y^2+B_z^2}{8\pi})=\rho g_x \tag{50}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_y)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho V_xV_y-\frac{B_xB_y}{4\pi})=\rho g_y \tag{51}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_z)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho V_xV_z-\frac{B_xB_z}{4\pi})=\rho g_z \tag{52}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(B_y)-\frac{\partial}{\partial x}(cE_z)=0 \tag{53}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(B_z)+\frac{\partial}{\partial x}(cE_y)=0 \tag{54}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{p}{\gamma-1}+\frac{1}{2}\rho V^2+\frac{By^2+B_z^2}{8\pi}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[(\frac{\gamma}{\gamma-1}p+\frac{1}{2}\rho V^2)V_x-\frac{cB_yE_z}{4\pi}+\frac{cB_zE_y}{4\pi}\right]=\rho(g_xV_x+g_yV_y+g_zV_z) \tag{55}$$

$$cE_y=-V_zB_x+V_xB_z, \quad cE_z=-V_xB_y+V_yB_x \tag{56}$$

$$p=\frac{k_{\mathrm{B}}}{m}\rho T \tag{57}$$

$$V^2=V_x^2+V_y^2+V_z^2 \tag{58}$$

考慮している空間座標 x 方向の磁場成分 B_x が一様・一定値のときに用いる。つまり、B_x は既知の定数。重力加速度 g_x、g_y、g_z は空間 x の関数。

6 等温 MHD

6.1 サブルーチン mlw_mt;

第 5.1 節の式から、エネルギー方程式を除き、状態方程式 (14) を入れたのが基礎方程式。

6.2 サブルーチン mlw_mt_g;

第 5.2 節の式から、エネルギー方程式を除き、状態方程式 (14) を入れたのが基礎方程式。

6.3 サブルーチン mlw_mt_bg;

第 5.3 節の式から、エネルギー方程式を除き、状態方程式 (14) を入れたのが基礎方程式。

6.4 サブルーチン mlw_m3t;

第 5.4 節の式から、エネルギー方程式を除き、状態方程式 (14) を入れたのが基礎方程式。

6.5 サブルーチン mlw_m3t_g;

第 5.5 節の式から、エネルギー方程式を除き、状態方程式 (14) を入れたのが基礎方程式。