CANS2D モデルパッケージ md_rt

Rayleigh-Taylor 不安定性

ver. 1

1 はじめに

このモデルパッケージは Rayleigh-Taylor 不安定性をシミュレーションするためのものである。Rayleigh-Taylor 不安定性は、重い流体が軽い流体の上にあるとき、重力によって対流が生じる不安定性である。密度の異なる 2 種類の流体が加速度運動する系も同様の状況下にあり、不安定性が生じる。天体では、超新星爆発で膨張するシェルなどでおこっていると考えられる。

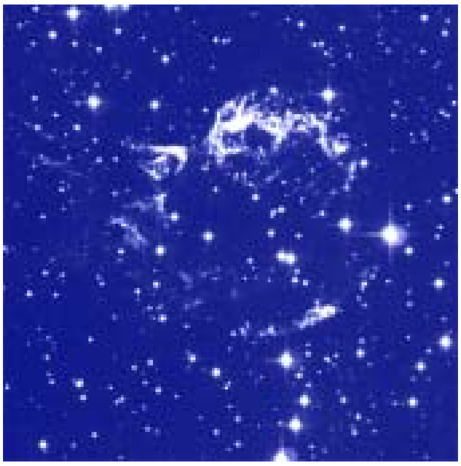

図 1: 超新星残骸 (MDM 天文台光学望遠鏡による)

2 仮定と基礎方程式

仮定は以下のとおり。(1) 2 次元の流体運動・エネルギー輸送を解く。(2) 流路は断面積一様。(3) 非粘性・圧縮性流体として扱う。計算領域は $-\pi H \leq x \leq \pi H, -\pi H \leq y \leq \pi H$ とする。$y = 0$ の面を境に、密度が不連続であるとする。ここで、不連続面より下側を領域 1、上側を領域 2 とし、物理量の添え字に用いる。

基礎方程式は流体方程式である。

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}\rho V_x + \frac{\partial}{\partial y}\rho V_y = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho V_x^2 + p\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho V_x V_y\right) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho V_y^2 + p\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho V_x V_y\right) = \rho g_y \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{p}{\gamma-1}+\frac{1}{2}\rho\left(V_x^2+V_y^2\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\left\{\frac{\gamma}{\gamma-1}p+\frac{1}{2}\rho\left(V_x^2+V_y^2\right)\right\}V_x\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\left\{\frac{\gamma}{\gamma-1}p+\frac{1}{2}\rho\left(V_x^2+V_y^2\right)\right\}V_x\right]=0 \tag{4}$$

ここで、γ は比熱比でパラメータ、他の記号は通常の意味。

3　初期条件と境界条件

初期条件として、$y=0$ の面を境に密度の不連続を考え、y 軸下向きに一様に重力 (g) がかかっている状況を考える。不連続面より下を領域 1 ($y < 0$)、上を領域 2 ($y > 0$) とする。領域 1 の密度 ρ_1 は領域 2 の密度 ρ_2 よりも大きいとし、y 軸方向には静水圧平衡を考える ($V = 0$)。境界 ($y = \pi H$) での圧力を p_0 とすると、圧力分布は

$$p(y) = p_0 + \int_{\pi H}^{y} \rho(y) g dy$$

とあたえられる。

境界条件として、x 方向は周期境界とし、y 方向は対称境界とする。この状態に不安定モードのゆらぎを加える。

4　無次元化

変数は、長さ、密度、速度の単位をそれぞれ H、ρ_2、C_{S0} とする。ここで H、ρ_2 は、単位長さ、領域 2 の密度である。音速 C_{S0} は境界 ($y = \pi H$) での値を採用する。これらを用いて無次元化をおこなう (表 1 参照)。

5　パラメータ

パラメータ	変数	無次元値
非熱比	γ	5.0/3.0
密度比	ρ_1/ρ_2	0.25/1.0
圧力	$p_0 = {C_{\mathrm{S0}}}^2\rho_2/\gamma$	3.0/5.0
領域長さ	$2\pi H$	2π
単位時間	H/C_{S0}	1
単位長	H	1
密度	ρ_2	1
音速	C_{S0}	1

表 1: パラメータと無次元化単位

6　不安定性の成長率について

不安定性の成長率は線形解析により一般に

$$\omega = k(\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2) + \sqrt{gk(\alpha_1 - \alpha_2) - k^2\alpha_1\alpha_2(V_1 - V_2)^2}$$

と与えられる。ここで、ω は振動数、k は波数である。また、

$$\alpha_1 = \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2},\ \alpha_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$$

である。式の導出について詳しくは宇宙流体力学を参照されたい。いま、$V_1 = V_2 = 0$ としたので、

$$\omega = \sqrt{gk(\alpha_1 - \alpha_2)} = \sqrt{gk\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}}$$

となる。よって、$\rho_2 > \rho_1$ ならば、ω は虚数になり、不安定性が成長することを意味する。

7　計算結果

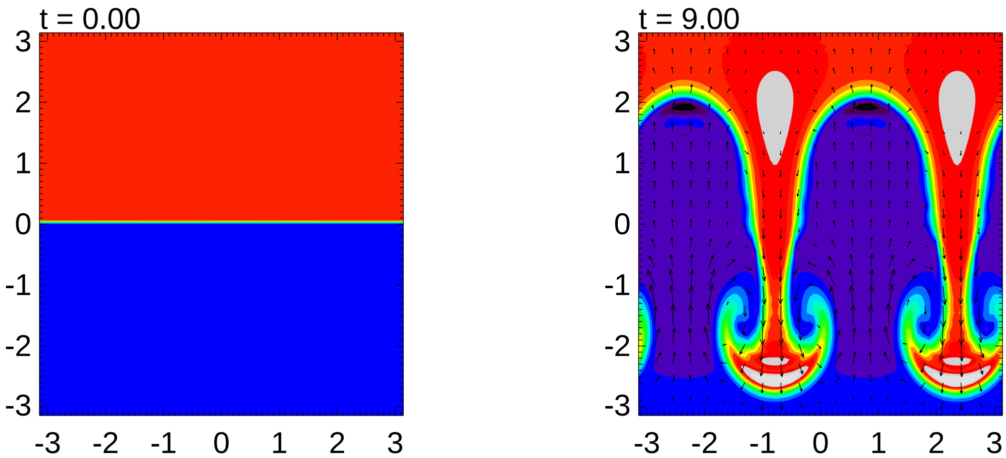

図 2: 色は密度を表す。左の図は初期状態。右の図は $t = 20$ の状態。

8　参考文献

坂下・池内「宇宙流体力学」