

衝撃波管

ver. 1

1 はじめに

このモデルパッケージは、衝撃波管問題を解くためのものである。

衝撃波管問題とは、一定の断面積をもった十分長い管の中に比熱比が等しく熱力学的状態の異なる流体を1枚の仕切りによって分けて入れておき、その仕切りを取り去った後の流体の状態を求める問題である。その解には衝撃波と接触不連続、膨張波という典型的な物理現象が含まれており、厳密解も求められているため、衝撃波管問題は計算コードの基本的なテストとして用いられる。本質的に1次元問題であるが、2次元または3次元の計算コードに対して仕切りを斜めに設定することにより、斜め方向の物理量の伝播に関するテストとしても用いられる。また、Godunov 法と呼ばれる流体計算法では、この衝撃波管問題の厳密解に基づいてセル境界の流束を評価して時間発展させる。

2 仮定と基礎方程式

ここで扱う衝撃波管問題では、非粘性・圧縮性流体を仮定し、管に沿った方向 (x 軸方向) 以外の方向の流体の速度は0と仮定する。本コードは、密度 ρ と圧力 p 、 x 軸方向の速度 u についての1次元 Euler 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}\rho u = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho u^2\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}p + \frac{1}{2}\rho u^2\right)u\right] = 0 \quad (3)$$

を解くことによって、初期値問題としてこれら流体変数の時間発展を計算するものである。ここで、 γ は比熱比であり、以下では音速を c と表す ($c = \sqrt{\gamma p/\rho}$)。

3 無次元化

衝撃波管問題は、元々無次元化された変数によって表されるテスト問題である。

4 初期条件と境界条件

仕切りを $x = x_0$ に設置し、その左側 (領域 L) に比熱比 γ の流体を ρ_L, p_L, u_L の状態で置き、同じ比熱比の流体を仕切りの右側 (領域 R) に ρ_R, p_R, u_R の状態で置く。時刻 $t = 0$ に仕切りを取り去る。

このパッケージでは、デフォルトとして $\gamma = 1.4$ と

$$\rho_L = 1, \quad p_L = 1, \quad u_L = 0, \quad \rho_R = 0.125, \quad p_R = 0.1, \quad u_R = 0 \quad (4)$$

という初期値を $t = 0$ に与えている。この初期条件は Sod [1] の用いたものとして知られている。仕切りの位置は $x = 0$ とし、管の右端 $x_L = -0.5$ と左端 $x_R = 0.5$ に境界条件

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad u = 0 \quad (5)$$

を課す。計算の終了時刻を $t = 0.14154$ とする。このときにはまだ $x = 0$ から発生した波は管の両端に到達していない。

5 シミュレーション

シミュレーションに必要な、物理量に関する設定以外のこのパッケージの主な設定のデフォルトを下に挙げる。

- グリッド数 : 1001
- グリッドは等間隔で、その x 座標は $x(1) = -0.5$ から $x(1001) = 0.5$ まで
- 初期領域のグリッドへの割り当て : 領域 L = [1, 500], 領域 R = [501, 1001]
- CFL 条件の係数 : 0.4
- 計算法 : 修正ラックス・ベンドロフ法

デフォルトの設定で行った計算の結果を厳密解とともに図 1 に示す。

6 厳密解

初期値が関係式

$$-2 \frac{c_L}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p_R}{p_L} \right)^{1/\alpha} \right] < u_L - u_R < (p_L - p_R) \sqrt{\frac{2u_R}{(\gamma - 1)p_R + (\gamma + 1)p_L}} \quad (6)$$

を満たす場合の厳密解を示す。ここで $\alpha = 2\gamma/(\gamma - 1)$ とした。なお、初期値 (4) と $\gamma = 1.4$ はこの関係を満たしている。

仕切りを取った後の流体の状態は、

1. 衝撃波面 (shock) より前方 (右側) の領域、
2. 接触不連続面 (contact discontinuity) より右側で衝撃波面までの領域、
3. 膨張波 (expansion fan) より右側で接触不連続面までの領域、
4. 膨張波の領域、

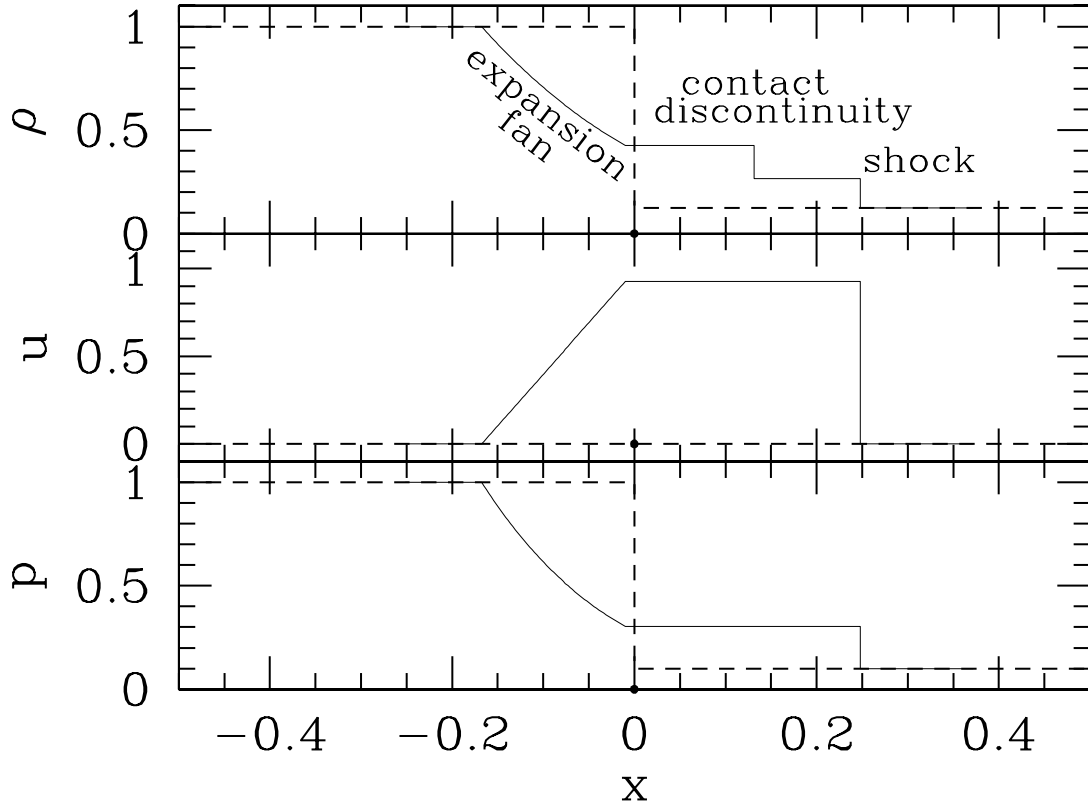


図 1: 衝撃波管の密度 ρ , 速度 u , 圧力 p の $t = 0.14154$ における解。点はシミュレーション結果で、実線は厳密解を表す。破線は初期状態 ($t = 0$)。

5. 膨張波より左側の領域

という 5 つの領域で互いに異なる性質を持つ。図 2 には、これらの領域および $t = 0$ に領域 L と領域 R に位置する 2 点を始点とした 3 種類の特性線 C_- ($dx/dt = u - c$ で伝わる波), C_0 ($dx/dt = u$), C_+ ($dx/dt = u + c$) を示した。不連続面 (衝撃波面と接触不連続面) を横切るとき以外では各特性線に沿って

$$C_- : u - \frac{2}{\gamma - 1} c, \quad C_0 : \frac{p}{\rho^\gamma}, \quad C_+ : u + \frac{2}{\gamma - 1} c$$

という量が保存される。領域 L と領域 R に始点を持つ任意の 2 つの C_+ は互いに衝突し、そこに衝撃波面を形成する。初期不連続面近傍の 2 点 $x_{0-} = x_0 - \delta$ と $x_{0+} = x_0 + \delta$ (δ は微小量) から出発した 2 つの特性線 C_0 は互いに平行線を辿り、接触不連続面として伝播する。接触不連続面の前後の流体は、相対速度が常に 0 であるため、混じりあうことはない。また、 x_{0-} と x_{0+} から出発した 2 つの特性線 C_- は互いに離れて行き、その間に膨張波の領域が形成される。膨張波領域とその前後の領域の間では密度、圧力、速度に不連続はなく、特性線に沿った保存則は満たされる。

以上のことと衝撃波の前後の流体の状態に関して成り立つランキン・ユゴニオ関係から、任意の時刻 $t > 0$ での厳密解は以下のようにして求められる [2]。なお、分割した各領域での物理量を添字 1, 2, 3, 4, 5 を付

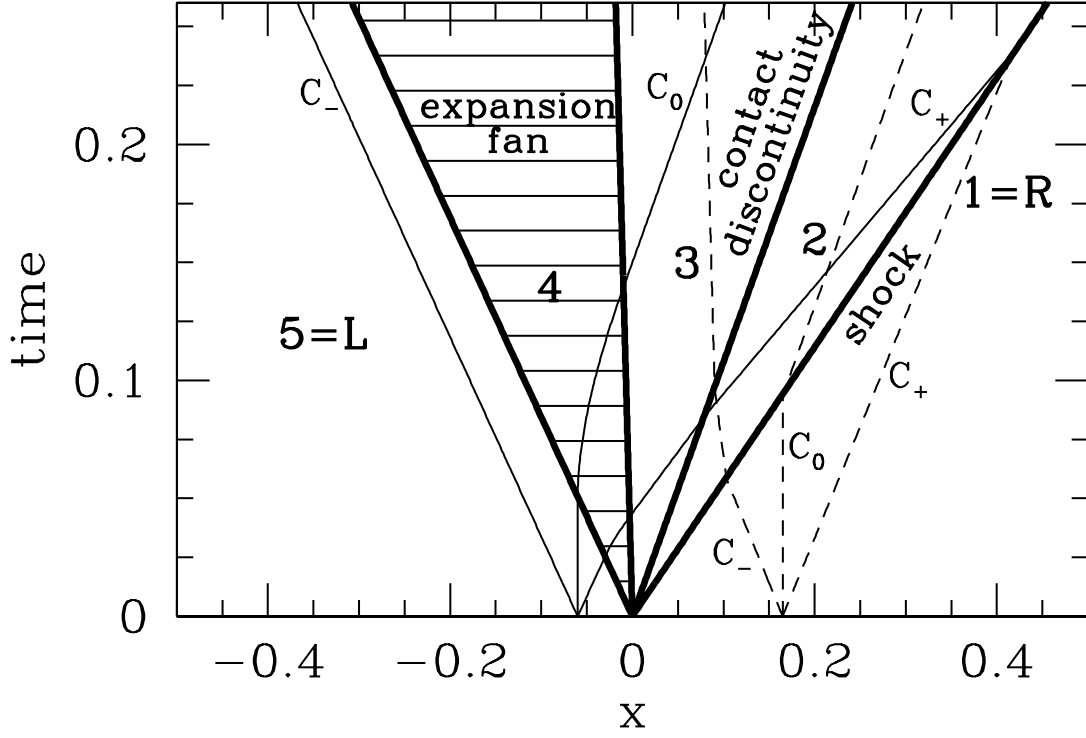


図 2: 衝撃波管における膨張波、接触不連続面、衝撃波面の伝播、および特性線。初期時刻 $t = 0$ での仕切りは $x = 0$ に置いた。

けて表す。

- 領域 1 : $x > x_0 + V_S t$

$$\rho_1 = \rho_R, \quad u_1 = u_R, \quad p_1 = p_R. \quad (7)$$

- 領域 2 : $x_0 + V_{CD} t < x \leq x_0 + V_S t$

$$\begin{aligned} p_2 &= p_R P, & u_2 &= u_R + c_R \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \frac{P-1}{\sqrt{\gamma-1+(\gamma+1)P}}, \\ \rho_2 &= \rho_R \frac{\gamma-1+(\gamma+1)P}{\gamma+1+(\gamma-1)P}, & V_S &= u_R + \frac{(P-1)c_R^2}{\gamma(u_2-u_R)}. \end{aligned} \quad (8)$$

- 領域 3 : $x_0 + (\frac{\gamma+1}{2}V_{CD} - c_L - \frac{\gamma-1}{2}u_L) t < x \leq x_0 + V_{CD} t$

$$p_3 = p_2, \quad \rho_3 = \rho_L \left(\frac{p_3}{p_L} \right)^{1/\gamma}, \quad u_3 = u_2 = V_{CD}. \quad (9)$$

- 領域 4 : $x_0 + (u_L - c_L) t \leq x \leq x_0 + (\frac{\gamma+1}{2} V_{CD} - c_L - \frac{\gamma-1}{2} u_L) t$

$$\begin{aligned} u_4 &= \frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{x-x_0}{t} + c_L + \frac{\gamma-1}{2} c_L \right), & p_4 &= p_L \left(\frac{c_4}{c_L} \right)^\alpha, \\ c_4 &= c_L - \frac{\gamma-1}{2} (u_4 - u_L), & \rho_4 &= \rho_L \left(\frac{p_4}{p_L} \right)^{1/\gamma}. \end{aligned} \quad (10)$$

- 領域 5 : $x < x_0 + (u_L - c_L) t$

$$\rho_5 = \rho_L, \quad u_5 = u_L, \quad p_5 = p_L. \quad (11)$$

ここで、 P は方程式

$$\sqrt{\frac{2}{\gamma}} \frac{P-1}{\sqrt{\gamma-1+(\gamma+1)P}} = \frac{2}{\gamma-1} \frac{c_L}{c_R} \left[1 - \left(\frac{p_R}{p_L} P \right)^{1/\alpha} \right] + \frac{u_L - u_R}{c_R} \quad (12)$$

の解である。

初期値が関係式 (6) を満たさない場合には方程式 (12) の解が存在しない。そのような場合は衝撃波か膨張波のいずれかが発生しないため、それに対応した領域を構成して厳密解を求めなければならない [3]。

参考文献

- [1] SOD, G.A., “A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws”, *Journal of Computational Physics* (1978), **27**, pp.1–31.
- [2] HIRSCH, C., “Numerical Computation of Internal and External Flows (Vol.2: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows)”, *A Wiley-Interscience Publication* (1992).
- [3] ランダウ, リフシッツ, “流体力学 2”, 東京図書, 1971.

(山下和之)