

第 2 章

磁気流体力学方程式の近似 Riemann 解法

千葉大学 佐藤 裕司

2.1 問題設定

2.1.1 背景

筆者は大質量星のコアが重力崩壊を起こして中性子星が形成する過程の3次元磁気流体力学シミュレーションを行ってきた。中性子星形成のシミュレーションを行うためには、縮退したガスの圧力、超新星爆発に至る衝撃波の発生、それと同時に生成する熱エネルギーを取り扱う必要がある。またパルサー形成を考慮すると磁場と回転を伴うので、磁気流体力学方程式を解く必要がある。特に衝撃波面での数値振動をなくすためには、近似 Riemann 解法が有効である。理想気体の磁気流体力学方程式に対する近似 Riemann 解法の数値流束 (eg. Fukuda & Hanawa 1999) は求められているが、一般のガスに対するものは求められていない。そこで私は、理想気体の場合の磁気流体力学方程式の近似 Riemann 解法の数値流束と、一般のガスの場合の流体力学方程式の近似 Riemann 解法の数値流束 (Nobuta & Hanawa 1999) を組み合わせて、縮退したガスの圧力を考慮した状態方程式に対する磁気流体力学方程式の近似 Riemann 解法の数値流束を新たに求めた。

この章では、その新たに求めた近似 Riemann 解の導出方法を紹介する。

2.1.2 磁気流体力学方程式

磁気流体力学方程式の基礎方程式系は保存系で以下のように表される。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ B_y \\ B_z \\ \rho E \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho v_x^2 + P + \frac{\rho v_x}{B_y^2 + B_z^2 - B_x^2} \\ \rho v_x v_y - \frac{B_x 8\pi}{B_y} \\ \rho v_x v_z - \frac{4\pi}{B_x B_z} \\ v_x B_y - v_y B_x \\ v_x B_z - v_z B_x \\ \rho H v_x - \frac{B_x (B_x v_x + B_y v_y + B_z v_z)}{4\pi} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

$$E = \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varepsilon_{\text{int}} + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi\rho} \quad (2.4)$$

$$H = \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varepsilon_{\text{int}} + \frac{\mathbf{B}^2}{4\pi\rho} + \frac{P}{\rho} \quad (2.5)$$

ただし、 ε_{int} は内部エネルギーである。理想気体の場合は、

$$\varepsilon_{\text{int}} = \frac{P}{(\gamma - 1)\rho} \quad (2.6)$$

である。中性子星形成では、

$$\varepsilon_{\text{int}} = \varepsilon_t + \varepsilon_c \quad (2.7)$$

のように Thermal part と Cold part の和になる。

2.1.3 中性子星形成過程の状態方程式

密度 ρ と熱エネルギー ε_t に比例する P_t と、密度の大きさによって指数が変化する、レプトンの縮退圧に相当する P_c の和で表される状態方程式を採用する。

$$P_{\text{int}}(\rho, \varepsilon_t) = P_c(\rho) + P_t(\rho, \varepsilon_t) \quad (2.8)$$

$$P_t(\rho, \varepsilon_t) = (\gamma_t - 1)\rho\varepsilon_t \quad (2.9)$$

$$P_c(\rho) = \kappa\rho^\gamma \quad (2.10)$$

ただし、 κ と γ は区間ごとに異なる。内部エネルギーは

$$\varepsilon_{\text{int}} = \int_0^\rho \frac{P_c}{\rho^2} d\rho + \varepsilon_t \quad (2.11)$$

で表される。

2.2 近似 Riemann 解の求め方

2.2.1 方針

本節では筆者が近似 Riemann 解を導いた過程の詳細を解説する。Roe 法自体の詳しい解説はここではしない。Roe 法の詳細は原論文 (Roe, 1981) や教科書 (藤井, 1994) を参照して欲しい。

Roe 法による数値流束を求めるための一般的な手順は、

1. 微分方程式を

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \quad (2.12)$$

の形に書き直し、「速度行列」 $\mathbf{A}$ を求める。

ここで $\mathbf{A}$ はヤコビアンであり、各成分は Roe 平均と呼ぶ平均量で評価する。

2. 速度行列 $\mathbf{A}$ の固有値 λ を求める。3. 速度行列 $\mathbf{A}$ の固有ベクトル $\mathbf{r}$ を求める。4. 固有値と固有ベクトルから振幅 δw を求め、以下の式で表される数値流束を求める。

$$\mathbf{F}_{j+1/2} = \frac{\mathbf{F}_j + \mathbf{F}_{j+1}}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m |\lambda_i| \delta w_i \mathbf{r}_i \quad (2.13)$$

である。一般の状態方程式の場合も以上の手続きによって数値流束を求めることができるが、状態方程式が複雑になると速度行列 $\mathbf{A}$ を求める事が大変になる。数値流束を求めるためには、固有値・固有ベクトル・振幅がわかれば良いので、行列 $\mathbf{A}$ の具体的な成分はわからなくても良い。従って今回は $\mathbf{A}$ を求める事はせずに、 $\mathbf{F}$ から直接7つの固有ベクトルを分離して求め、数値流束を構成する方針を取った。

2.2.2 座標変換

固有ベクトルを分離するのに見通しを良くするための作業変数として、保存量で表されるベクトル空間 $\mathbf{U}$ から、物理量で表されるベクトル空間 $\mathbf{U}'$ に移る。この際に軸の方向としてデカルト座標ではなく、磁場の方向に垂直な方向（下付き添字 $\perp$ で表す）と平行な方向（下付き添字 $\parallel$ で表す）を軸に選ぶ。後述するが、それによって横波と縦波、すなわち Alfvén 波とその他の波を分離する事が容易になる。

2つの座標系は行列 $\mathbf{B}$ で変換される。

$$\Delta \mathbf{U} = \mathbf{B} \Delta \mathbf{U}' \quad (2.14)$$

ただし、

$$\Delta \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \Delta \rho \\ \Delta(\rho v_x) \\ \Delta(\rho v_y) \\ \Delta(\rho v_z) \\ \Delta B_y \\ \Delta B_z \\ \Delta(\rho E) \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

$$\Delta \mathbf{U}' = \begin{pmatrix} \Delta \rho \\ \Delta v_x \\ \Delta v_{\parallel} \\ \Delta v_{\perp} \\ \Delta B_{\parallel} \\ \Delta B_{\perp} \\ \Delta \varepsilon_t \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{v}_x & \bar{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{v}_y & 0 & \bar{\rho}\beta_y & -\bar{\rho}\beta_z & 0 & 0 & 0 \\ \bar{v}_z & 0 & \bar{\rho}\beta_z & \bar{\rho}\beta_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_y & -\beta_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_z & \beta_y & 0 \\ B_{7,1} & \bar{\rho}\bar{v}_x & \bar{\rho}(\beta_y\bar{v}_y + \beta_z\bar{v}_z) & \bar{\rho}(-\beta_z\bar{v}_y + \beta_y\bar{v}_z) & \frac{\sqrt{\bar{B}_y^2 + \bar{B}_z^2}}{4\pi} & 0 & \bar{\rho} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

である。\$\Delta\$ がついた変数はその変数の差分を表し、文字の上に ‘-’ がついている変数はその Roe 平均を表す。ここで、

$$B_{7,1} = \bar{\varepsilon}_t + \bar{\varepsilon}_c + \frac{\gamma_t - 2}{\gamma_t - 1} \delta b^2 + \frac{\bar{v}^2}{2} + \frac{\Delta \varepsilon_c}{\Delta \rho} \bar{\rho} \quad (2.18)$$

$$\beta_y = \frac{\bar{B}_y}{\sqrt{\bar{B}_y^2 + \bar{B}_z^2}} \quad (2.19)$$

$$\beta_z = \frac{\bar{B}_z}{\sqrt{\bar{B}_y^2 + \bar{B}_z^2}} \quad (2.20)$$

$$\delta b^2 = \frac{\gamma_t - 1}{\gamma_t - 2} \frac{(B_{y,j+1} - B_{y,j})^2 + (B_{z,j+1} - B_{z,j})^2}{8\pi (\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j})^2} \quad (2.21)$$

である。上記の式を計算する際に以下の式が必要である。

$$\varepsilon_{\text{int}} = \varepsilon_c + \varepsilon_t \quad (2.22)$$

$$P = P_c + (\gamma_t - 1)\rho\varepsilon_t \quad (2.23)$$

$$\Delta P = \Delta P_c + (\gamma_t - 1)\bar{\rho}\Delta\varepsilon_t + (\gamma_t - 1)\bar{\varepsilon}_t\Delta\rho \quad (2.24)$$

$$= \left[\frac{\Delta P_c}{\Delta\rho} + (\gamma_t - 1)\bar{\varepsilon}_t \right] \Delta\rho + (\gamma_t - 1)\bar{\rho}\Delta\varepsilon_t \quad (2.25)$$

$$\Delta\varepsilon_{\text{int}} = \Delta\varepsilon_c + \Delta\varepsilon_t \quad (2.26)$$

$$= \frac{\Delta\varepsilon_c}{\Delta\rho}\Delta\rho + \Delta\varepsilon_t \quad (2.27)$$

また、Roe 平均は以下のように表される。

$$\bar{\rho} = \sqrt{\rho_{j+1}\rho_j} \quad (2.28)$$

$$\bar{v}_x = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}}v_{x,j+1} + \sqrt{\rho_j}v_{x,j}}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} \quad (2.29)$$

$$\bar{v}_y = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}}v_{y,j+1} + \sqrt{\rho_j}v_{y,j}}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} \quad (2.30)$$

$$\bar{v}_z = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}}v_{z,j+1} + \sqrt{\rho_j}v_{z,j}}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} \quad (2.31)$$

$$\bar{B}_y = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}}B_{y,j} + \sqrt{\rho_j}B_{y,j+1}}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} \quad (2.32)$$

$$\bar{B}_z = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}}B_{z,j} + \sqrt{\rho_j}B_{z,j+1}}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} \quad (2.33)$$

$$\bar{\varepsilon}_c = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}} \varepsilon_{c,j+1} + \sqrt{\rho_j} \varepsilon_{c,j}}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} \quad (2.34)$$

$$\bar{\varepsilon}_t = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}} \varepsilon_{t,j+1} + \sqrt{\rho_j} \varepsilon_{t,j}}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} \quad (2.35)$$

$$\bar{P}_c = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}} P_{c,j+1} + \sqrt{\rho_j} P_{c,j}}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} \quad (2.36)$$

$\mathbf{F}$ についても同様に、 $\mathbf{U}'$ で表すと、

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{C}' \Delta \mathbf{U}' \quad (2.37)$$

$$\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} \bar{v}_x & \bar{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C'_{2,1} & 2\bar{\rho}\bar{v}_x & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\bar{B}_y^2 + \bar{B}_z^2}}{4\pi} & 0 & (\gamma_t - 1)\bar{\rho} \\ \bar{v}_x\bar{v}_y & \bar{\rho}\bar{v}_y & \bar{\rho}\bar{v}_x\beta_y & -\bar{\rho}\bar{v}_x\beta_z & -\frac{B_x}{4\pi}\beta_y & \frac{B_x}{4\pi}\beta_z & 0 \\ \bar{v}_x\bar{v}_z & \bar{\rho}\bar{v}_z & \bar{\rho}\bar{v}_x\beta_z & \bar{\rho}\bar{v}_x\beta_y & -\frac{B_x}{4\pi}\beta_z & -\frac{B_x}{4\pi}\beta_y & 0 \\ 0 & \bar{B}_y & -B_x\beta_y & B_x\beta_z & \bar{v}_x\beta_y & -\bar{v}_x\beta_z & 0 \\ 0 & \bar{B}_z & -B_x\beta_z & -B_x\beta_y & \bar{v}_x\beta_z & \bar{v}_x\beta_y & 0 \\ C'_{7,1} & C'_{7,2} & C'_{7,3} & C'_{7,4} & C'_{7,5} & C'_{7,6} & \gamma_t\bar{\rho}\bar{v}_x \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

となる。ただし、

$$C'_{2,1} = \bar{v}_x^2 + \frac{\gamma_t - 2}{\gamma_t - 1} \delta b^2 + (\gamma_t - 1)\bar{\varepsilon}_t + \frac{\Delta P_c}{\Delta \rho} \quad (2.39)$$

$$C'_{7,1} = (\bar{\varepsilon}_t + \bar{\varepsilon}_c)\bar{v}_x + 2\bar{v}_x \frac{\gamma_t - 2}{\gamma_t - 1} \delta b^2 + \frac{\bar{v}_x \bar{\mathbf{v}}^2}{2} + \bar{\rho}\bar{v}_x \frac{\Delta \varepsilon_c}{\Delta \rho} \quad (2.40)$$

$$+ \bar{v}_x \left[\frac{\Delta P_c}{\Delta \rho} + (\gamma_t - 1)\bar{\varepsilon}_t \right] \quad (2.41)$$

$$C'_{7,2} = \bar{\rho}(\bar{\varepsilon}_c + \bar{\varepsilon}_t) + \bar{P}_c + \frac{\bar{\rho}\bar{\mathbf{v}}^2}{2} + \bar{\rho}\bar{v}^2 + \frac{\bar{B}_y^2 + \bar{B}_z^2}{4\pi} + (\gamma_t - 1)\bar{\rho}\bar{\varepsilon}_t \quad (2.42)$$

$$C'_{7,3} = -\frac{B_x \sqrt{\bar{B}_y^2 + \bar{B}_z^2}}{4\pi} + \bar{\rho}\bar{v}_x(\beta_y\bar{v}_y + \beta_z\bar{v}_z) \quad (2.43)$$

$$C'_{7,4} = \bar{\rho}\bar{v}_x(-\beta_z\bar{v}_y + \beta_y\bar{v}_z) \quad (2.44)$$

$$C'_{7,5} = \frac{\sqrt{\bar{B}_y^2 + \bar{B}_z^2}}{2\pi} \bar{v}_x - \frac{B_x}{4\pi}(-\beta_z\bar{v}_y + \beta_y\bar{v}_z) \quad (2.45)$$

$$C'_{7,6} = -\frac{B_x}{4\pi}(-\beta_z\bar{v}_y + \beta_y\bar{v}_z) \quad (2.46)$$

である。

ここで簡単のためにもう一回座標変換する。すべての固有ベクトルの固有値は $\bar{v}_x \pm C$ の形になると予想できるので、速度 $\bar{v}_x$ で移動する座標系に移る。これは、 $\Delta \mathbf{F}$ から $\bar{v}_x \Delta \mathbf{U}'$ を引く事に相当する。そこで新たに行列 $\mathbf{C}$ を次のように定義する。

$$\Delta \mathbf{F} - \bar{v}_x \Delta \mathbf{U}' = \mathbf{C} \Delta \mathbf{U}' \quad (2.47)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{2,1} & \bar{\rho}\bar{v}_x & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\bar{B}_y^2 + \bar{B}_z^2}}{4\pi} & 0 & (\gamma_t - 1)\bar{\rho} \\ 0 & \bar{\rho}\bar{v}_y & 0 & 0 & -\frac{\bar{B}_x}{4\pi}\beta_y & \frac{B_x}{4\pi}\beta_z & 0 \\ 0 & \bar{\rho}\bar{v}_z & 0 & 0 & -\frac{\bar{B}_x}{4\pi}\beta_z & -\frac{\bar{B}_x}{4\pi}\beta_y & 0 \\ 0 & \bar{B}_y & -B_x\beta_y & B_x\beta_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{B}_z & -B_x\beta_z & -B_x\beta_y & 0 & 0 & 0 \\ C_{7,1} & C_{7,2} & C_{7,3} & 0 & C_{7,5} & C_{7,6} & (\gamma_t - 1)\bar{\rho}\bar{v}_x \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

ただし、

$$C_{2,1} = \frac{\Delta P_c}{\Delta \rho} + (\gamma_t - 1)\bar{\varepsilon}_t + \frac{\gamma_t - 2}{\gamma_t - 1}\delta b^2 \quad (2.49)$$

$$C_{7,1} = \bar{v}_x \left[\frac{\gamma_t - 2}{\gamma_t - 1}\delta b^2 + \frac{\Delta P_c}{\Delta \rho} + (\gamma_t - 1)\bar{\varepsilon}_t \right] \quad (2.50)$$

$$C_{7,2} = \bar{\rho}\bar{\varepsilon}_c + \bar{P}_c + \frac{\bar{\rho}\bar{v}^2}{2} + \frac{\bar{B}_y^2 + \bar{B}_z^2}{4\pi} + \gamma_t\bar{\rho}\bar{\varepsilon}_t \quad (2.51)$$

$$C_{7,3} = -\frac{B_x\sqrt{\bar{B}_y^2 + \bar{B}_z^2}}{4\pi} \quad (2.52)$$

$$C_{7,5} = \frac{\sqrt{\bar{B}_y^2 + \bar{B}_z^2}}{4\pi}\bar{v}_x - \frac{B_x}{4\pi}(\beta_y\bar{v}_y + \beta_z\bar{v}_z) \quad (2.53)$$

$$C_{7,6} = -\frac{B_x}{4\pi}(-\beta_z\bar{v}_y + \beta_y\bar{v}_z) \quad (2.54)$$

である。

2.2.3 固有値

ここまで計算できると、固有値を計算する事ができる。行列 $\mathbf{B}$ と $\mathbf{C}$ は以下の関係式を満たしている。

$$\Delta \mathbf{U} = \mathbf{B} \Delta \mathbf{U}' \quad (2.55)$$

$$\Delta \mathbf{F} - \bar{v}_x \Delta \mathbf{U}' = \mathbf{C} \Delta \mathbf{U}' \quad (2.56)$$

$$= \mathbf{C} \mathbf{B}^{-1} \Delta \mathbf{U} \quad (2.57)$$

従って、次の行列式を計算すれば固有値が求まる。

$$|\mathbf{C} \mathbf{B}^{-1} - \lambda| = 0 \quad (2.58)$$

両辺に右から $|\mathbf{B}|$ をかけると、次のように書ける。

$$|\mathbf{C} - \lambda \mathbf{B}| = 0 \quad (2.59)$$

7 次行列式の計算法は一意ではないので詳細は省くが、行列の成分を代入して行列式を計算すると、

$$\lambda(\lambda^2 - b_x^2)(\lambda^4 - a_*^2\lambda^2 + b_x^2a^2) = 0 \quad (2.60)$$

となる。従って、固有値は元々の座標系 $\mathbf{U}$ において、次のように求まる。

$$\lambda_0 = \bar{v}_x \quad (2.61)$$

$$\lambda_{A+} = \bar{v}_x + b_x \quad (2.62)$$

$$\lambda_{A-} = \bar{v}_x - b_x \quad (2.63)$$

$$\lambda_{f+} = \bar{v}_x + c_f \quad (2.64)$$

$$\lambda_{f-} = \bar{v}_x - c_f \quad (2.65)$$

$$\lambda_{s+} = \bar{v}_x + c_s \quad (2.66)$$

$$\lambda_{s-} = \bar{v}_x - c_s \quad (2.67)$$

ここで a は音速であり、

$$a^2 = (\gamma_t - 1) \left(\bar{H} - \frac{\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2}{2} - G + \frac{B_x^2 + \bar{B}_y^2 + \bar{B}_z^2}{4\pi\rho} - \delta b^2 \right) \quad (2.68)$$

$$a_*^2 = (\gamma_t - 1) \left(\bar{H} - \frac{\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2}{2} - G - \delta b^2 \right) \quad (2.69)$$

$$- (\gamma_t - 2) \left(\frac{B_x^2 + \bar{B}_y^2 + \bar{B}_z^2}{4\pi\rho} \right) \quad (2.70)$$

$$b_x = \frac{|B_x|}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad (2.71)$$

$$c_{f,s}^2 = \frac{a_*^2 \pm \sqrt{a_*^4 - 4a^2 b_x^2}}{2} \quad (2.72)$$

$$G = \bar{\varepsilon}_c + \bar{\rho} \frac{\Delta \varepsilon_c}{\Delta \rho} - \frac{1}{\gamma_t - 1} \frac{\Delta P_c}{\Delta \rho} \quad (2.73)$$

である。また解の公式から導かれる次の関係式は計算を進める上で有用なので指摘しておく。

$$\frac{c_f c_s}{b_x a} = 1 \quad (2.74)$$

このように理想気体の場合の磁気流体力学方程式の Roe 法の数値流束に対して、音速に G という補正項を加えた形で固有値が求まった。

2.2.4 固有ベクトル

Alfvén 波

最初に Alfvén 波を分離する事を考える。Alfvén 波は横波であり、磁場に垂直な方向の速度成分と磁場成分を運ぶ。従って、

$$\begin{pmatrix} \Delta \rho \\ \Delta v_x \\ \Delta v_{\parallel} \\ \Delta v_{\perp} \\ \Delta B_{\parallel} \\ \Delta B_{\perp} \\ \Delta \varepsilon_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ K_{\perp} \\ 0 \\ L_{\perp} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

のように2つの未知の成分を持つベクトルを考え、このベクトルが以下の固有値方程式を満たすように成分を決定できるかどうかを試みる。

$$\Delta \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\bar{\rho}\beta_z K_\perp \\ \bar{\rho}\beta_y K_\perp \\ -\beta_z L_\perp \\ \beta_y L_\perp \\ \bar{\rho}(\beta_y v_z + \beta_z v_y) K_\perp \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{F} - \bar{v}_x \Delta \mathbf{U}' &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{B_x}{4\pi} \beta_z L_\perp \\ -\frac{B_x}{4\pi} \beta_y L_\perp \\ B_x \beta_z K_\perp \\ -B_x \beta_y K_\perp \\ -\frac{B_x}{4\pi} (-\beta_z v_y + \beta_y v_z) L_\perp \end{pmatrix} \\ &= \pm \frac{B_x}{\sqrt{4\pi}\bar{\rho}} \Delta \mathbf{U} \end{aligned} \quad (2.77)$$

この連立方程式は解が存在し、以下のベクトルが Alfvén 速度を固有値とする固有ベクトルになっている事がわかる。

$$\mathbf{r}_{A\pm} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mp \beta_z \operatorname{sgn}(B_x) \\ \pm \beta_y \operatorname{sgn}(B_x) \\ \beta_z \sqrt{4\pi/\bar{\rho}} \\ -\beta_y \sqrt{4\pi/\bar{\rho}} \\ \mp (\beta_z \bar{v}_y - \beta_y \bar{v}_z) \operatorname{sgn}(B_x) \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

エントロピー波

エントロピー波についても同様にして固有ベクトルを求める。エントロピー波は密度とエネルギー成分のみを運ぶ波であるから、

$$\begin{pmatrix} \Delta \rho \\ \Delta v_x \\ \Delta v_\parallel \\ \Delta v_\perp \\ \Delta B_\parallel \\ \Delta B_\perp \\ \Delta \varepsilon_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ K_0 \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

のような形のベクトルが、以下の固有値方程式を満たすように成分を決定すればよい。

$$\Delta \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{v}_x \\ \bar{v}_y \\ \bar{v}_z \\ 0 \\ 0 \\ \bar{\varepsilon}_c + \bar{\varepsilon}_t + \frac{\bar{v}^2}{2} + \frac{\gamma_t - 2}{\gamma_t - 1} \delta b^2 + \frac{\Delta \varepsilon_c}{\Delta \rho} \bar{\rho} + \bar{\rho} K_0 \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

$$\Delta \mathbf{F} - \bar{v}_x \Delta \mathbf{U}' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\Delta P_c}{\Delta \rho} + (\gamma_t - 1) \bar{\varepsilon}_t + \delta b^2 + (\gamma_t - 1) \bar{\rho} K_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{v}_x \left[\frac{\Delta P_c}{\Delta \rho} + (\gamma_t - 1) \bar{\varepsilon}_t + \delta b^2 + (\gamma_t - 1) \bar{\rho} a \right] \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

$$= 0 \quad (2.83)$$

すると以下のようにエントロピー波の固有ベクトルを決定する事が出来る。

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{v}_x \\ \bar{v}_y \\ \bar{v}_z \\ 0 \\ 0 \\ \frac{(\bar{v})^2}{2} + \delta b^2 + G \end{pmatrix} \quad (2.84)$$

fast 波と slow 波

fast 波と slow 波についても同様にして計算する。fast 波の場合は、以下のような、垂直方向の成分だけが0である形のベクトルを探す。

$$\begin{pmatrix} \Delta \rho \\ \Delta v_x \\ \Delta v_{\parallel} \\ \Delta v_{\perp} \\ \Delta B_{\parallel} \\ \Delta B_{\perp} \\ \Delta \varepsilon_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_f \\ K_{\parallel} \\ L_{\parallel} \\ 0 \\ M_{\parallel} \\ 0 \\ N_{\parallel} \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

ここで、

$$\alpha_f = \frac{\sqrt{c_f^2 - b_x^2}}{\sqrt{c_f^2 - c_s^2}} \quad (2.86)$$

$$\alpha_s = \frac{\sqrt{c_f^2 - a^2}}{\sqrt{c_f^2 - c_s^2}} = \frac{c_f}{b_x} \frac{\sqrt{b_x^2 - c_s^2}}{\sqrt{c_f^2 - c_s^2}} \quad (2.87)$$

$$\alpha_f^2 + \frac{b_x^2}{c_f^2} \alpha_s^2 = 1 \quad (2.88)$$

である。

これまでと同様にして、

$$\Delta \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \alpha_f \\ \bar{v}_x \alpha_f + \bar{\rho} K_{\parallel} \\ \bar{v}_y \alpha_f + \bar{\rho} \beta_y L_{\parallel} \\ \bar{v}_z \alpha_f + \bar{\rho} \beta_z L_{\parallel} \\ \beta_y M_{\parallel} \\ \beta_z M_{\parallel} \\ X \end{pmatrix} \quad (2.89)$$

$$X = \left(\bar{\varepsilon}_c + \bar{\varepsilon}_t + \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \delta b^2 + \frac{\Delta \varepsilon_c}{\Delta \rho} \bar{\rho} \right) \alpha_f \quad (2.90)$$

$$+ \bar{\rho} \bar{v}_x K_{\parallel} + \bar{\rho} (\beta_y v_y + \beta_z v_z) L_{\parallel} + \frac{\sqrt{\bar{B}_y^2 + \bar{B}_z^2}}{4\pi} M_{\parallel} + \bar{\rho} N_{\parallel} \quad (2.91)$$

$$\Delta \mathbf{F} - \bar{v}_x \Delta \mathbf{U}' = \begin{pmatrix} \bar{\rho} K_{\parallel} \\ Y \\ \bar{\rho} \bar{v}_y K_{\parallel} - \frac{B_x \beta_y}{4\pi} M_{\parallel} \\ \bar{\rho} \bar{v}_z K_{\parallel} - \frac{B_x \beta_z}{4\pi} M_{\parallel} \\ \bar{B}_y K_{\parallel} - B_x \beta_y L_{\parallel} \\ \bar{B}_z K_{\parallel} - B_x \beta_z L_{\parallel} \\ X \end{pmatrix} \quad (2.92)$$

$$= \pm c_f \Delta \mathbf{U} \quad (2.93)$$

$$(2.94)$$

ただし、

$$Y = \left[\frac{\Delta P_c}{\Delta \rho} + (\gamma_t - 1) \bar{\varepsilon}_t + \delta b^2 \right] \alpha_f + \bar{\rho} \bar{v}_x K_{\parallel} \quad (2.95)$$

$$+ \frac{\sqrt{\bar{B}_y^2 + \bar{B}_z^2}}{4\pi} M_{\parallel} + (\gamma_t - 1) \bar{\rho} N_{\parallel} \quad (2.96)$$

$$X = \alpha_f \bar{v}_x \left\{ \delta b^2 + \frac{\Delta P_c}{\Delta \rho} + (\gamma_t - 1) \bar{\varepsilon}_t \right\} \quad (2.97)$$

$$+ K_{\parallel} \left\{ \bar{\rho} (\bar{\varepsilon}_c + \bar{\varepsilon}_t) + \bar{P}_c + (\gamma_t - 1) \bar{\rho} \bar{\varepsilon}_t + \frac{\bar{\rho} \mathbf{v}^2}{2} + \frac{\bar{B}_y^2 + \bar{B}_z^2}{4\pi} \right\} \quad (2.98)$$

$$- \frac{B_x \sqrt{\bar{B}_y^2 + \bar{B}_z^2}}{4\pi} L_{||} + \left\{ \frac{\sqrt{\bar{B}_y^2 + \bar{B}_z^2}}{4\pi} \bar{v}_x - \frac{B_x}{4\pi} (\beta_y v_y + \beta_z v_z) \right\} M_{||} \quad (2.99)$$

$$+ \bar{\rho}(\gamma_t - 1) \bar{v}_x N_{||} \quad (2.100)$$

連立方程式を解くと、fast 波の固有ベクトルとして、

$$\mathbf{r}_{f\pm} = \begin{pmatrix} \alpha_f \\ \alpha_f (\bar{v}_x \pm c_f) \\ \alpha_f \bar{v}_y \mp \alpha_s \beta_y b_x \operatorname{sgn}(B_x) \\ \alpha_f \bar{v}_z \mp \alpha_s \beta_z b_x \operatorname{sgn}(B_x) \\ \alpha_s \beta_y c_f \sqrt{4\pi/\bar{\rho}} \\ \alpha_s \beta_z c_f \sqrt{4\pi/\bar{\rho}} \\ \alpha_f \left\{ \frac{(\bar{v})^2}{2} + \delta b^2 + G \pm c_f \bar{v}_x + \frac{c_f^2}{\gamma_t - 1} \right. \\ \left. + \frac{\gamma_t - 2}{\gamma_t - 1} (c_f^2 - a^2) \right\} \pm \alpha_s b_x \operatorname{sgn}(B_x) (\beta_y \bar{v}_y + \beta_z \bar{v}_z) \end{pmatrix} \quad (2.101)$$

が得られる。

slow 波についても同様の手続きにより、固有ベクトルが以下のように求まる。

$$\mathbf{r}_{s\pm} = \begin{pmatrix} \alpha_s \\ \alpha_s (\bar{v}_x \pm c_s) \\ \alpha_s \bar{v}_y \pm \alpha_f \beta_y a \operatorname{sgn}(B_x) \\ \alpha_s \bar{v}_z \pm \alpha_f \beta_z a \operatorname{sgn}(B_x) \\ - \frac{\alpha_f \beta_y a^2 \sqrt{4\pi}}{c_f \sqrt{\bar{\rho}}} \\ - \frac{\alpha_f \beta_z a^2 \sqrt{4\pi}}{c_f \sqrt{\bar{\rho}}} \\ \alpha_s \beta_z c_f \sqrt{4\pi/\bar{\rho}} \\ \alpha_s \left\{ \frac{(\bar{v})^2}{2} + \delta b^2 + G \pm c_s \bar{v}_x + \frac{c_s^2}{\gamma_t - 1} \right. \\ \left. + \frac{\gamma_t - 2}{\gamma_t - 1} (c_s^2 - a^2) \right\} \pm \alpha_f a \operatorname{sgn}(B_x) (\beta_y \bar{v}_y + \beta_z \bar{v}_z) \end{pmatrix} \quad (2.102)$$

2.2.5 振幅

固有値と固有ベクトルが完全に求まったので、振幅を求める事ができる。だが新たに計算しなくとも、G の補正項が打ち消されて理想気体の場合と変わらない式で書ける。

$$\delta w_{A+} = \frac{1}{2} \left[-\bar{\rho}(\beta_z \Delta v_y - \beta_y \Delta v_z) \operatorname{sgn}(B_x) + \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{4\pi}} (\beta_z \Delta B_y - \beta_y \Delta B_z) \right] \quad (2.103)$$

$$\delta w_{A-} = \frac{1}{2} \left[\bar{\rho}(\beta_z \Delta v_y - \beta_y \Delta v_z) \operatorname{sgn}(B_x) + \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{4\pi}} (\beta_z \Delta B_y - \beta_y \Delta B_z) \right] \quad (2.104)$$

$$\delta w_{f+} + \delta w_{f-} = \frac{\alpha_f}{c_f^2} \left(\Delta P + \frac{\bar{B}_y \Delta B_y + \bar{B}_z \Delta B_z}{4\pi} \right) \quad (2.105)$$

$$+ \left\{ \frac{\alpha_s}{a^2 c_f} [(\gamma_t - 1)c_s^2 - (\gamma_t - 2)a^2] \sqrt{4\pi\bar{\rho}} \right. \quad (2.106)$$

$$+ (\gamma_t - 2) \sqrt{\bar{B}_y^2 + \bar{B}_z^2} \frac{\alpha_f}{c_f^2} \left\} \frac{\beta_y \Delta B_y + \beta_z \Delta B_z}{4\pi} \quad (2.107)$$

$$\delta w_{f+} - \delta w_{f-} = \frac{\alpha_f}{c_f} \bar{\rho} \Delta v_x - \frac{\alpha_s c_s}{c_f a} \text{sgn}(B_x) \bar{\rho} (\beta_y \Delta v_y + \beta_z \Delta v_z) \quad (2.108)$$

$$\delta w_{s+} + \delta w_{s-} = \frac{\alpha_s}{a^2} \left(\Delta P + \frac{\tilde{B}_y \Delta B_y + \tilde{B}_z \Delta B_z}{4\pi} \right) \quad (2.109)$$

$$+ \left\{ \alpha_f \left[\frac{\gamma_t - 2}{c_f} - (\gamma_t - 1) \frac{c_f}{a^2} \right] \sqrt{4\pi\bar{\rho}} \right. \quad (2.110)$$

$$+ (\gamma_t - 2) \sqrt{\bar{B}_y^2 + \bar{B}_z^2} \frac{\alpha_s}{a^2} \left\} \frac{\beta_y \Delta B_y + \beta_z \Delta B_z}{4\pi} \quad (2.111)$$

$$\delta w_{s+} - \delta w_{s-} = \frac{\alpha_s b_x}{c_f a} \bar{\rho} \Delta v_x + \frac{\alpha_f}{a} \text{sgn}(B_x) \bar{\rho} (\beta_y \Delta v_y + \beta_z \Delta v_z) \quad (2.112)$$

$$\delta w_0 = \Delta \rho - \alpha_f (\delta w_1 + \delta w_7) - \alpha_s (\delta w_3 + \delta w_5) \quad (2.113)$$

以上で固有値・固有ベクトル・振幅が完全に求まったので、数値流束を構成する事ができる。

2.2.6 補正項 G についての考察

ここで補正項 G について説明する。 G はもともと次の式で表される量である。

$$\Delta(\rho E)_{\text{New}} - \Delta(\rho E)_{\text{Org}} = \Delta(\rho \varepsilon_c + \rho \varepsilon_t) - \Delta \left(\frac{P}{\gamma_t - 1} \right) \quad (2.114)$$

$$= \Delta \left(\rho \varepsilon_c - \frac{P_c}{\gamma_t - 1} \right) \quad (2.115)$$

$$= \Delta \rho \left(\bar{\varepsilon}_c + \bar{\rho} \frac{\Delta \varepsilon_c}{\Delta \rho} - \frac{1}{\gamma_t - 1} \frac{\Delta P_c}{\Delta \rho} \right) \quad (2.116)$$

$$= (\Delta \rho) G \quad (2.117)$$

ただし、New の添字は今回採用した状態方程式を用いる場合のエネルギー成分の式に代入する事を意味し、Org は理想気体の状態方程式を用いる場合のエネルギー成分の式に代入する事を意味する（圧力 P には新しい状態方程式を代入する事に注意）。すなわち、状態方程式を変えた事によるエネルギー成分の増加量に対応している。

これまで述べてきたように、状態方程式を変更した事による効果は全て G の項で表される。従って、今回採用している状態方程式以外の場合は、行列を計算し直す事なく、この G を新たに計算するだけで新たな数値流束を求める事ができる。

従って今回新たに求めた数値流束は、状態方程式が、

$$P_{\text{tot}}(\rho, \varepsilon_t) = (\gamma_t - 1) \rho \varepsilon_t + f(\rho) \quad (2.118)$$

と表される場合にまで一般化されている。

物理量としての G は、密度変化 $\Delta \rho$ が微小の場合以下の式で表される。

$$G = \varepsilon_c + \frac{P_c}{\rho} - \frac{1}{\gamma_t - 1} \frac{dP_c}{d\rho} \quad (2.119)$$

2.3 テスト計算

2.3.1 衝撃波管問題

コードのテストとして (Ryu & Jones, 1995) のテスト問題を基に、縮退圧を加えた場合のテストを実行した。以下にその結果を掲載する。3つのモデルを計算し、それらを比較している。モデル 1 は Ryu & Jones のモデル、モデル 2 はモデル 1 に縮退圧を $\kappa = 1$ 、 $\gamma = 4/3$ として加えたモデル、モデル 3 はモデル 1 に縮退圧を $\rho \leq 1$ のとき $\kappa = 1$ 、 $\gamma = 1.3$ 、 $\rho \geq 1$ のとき $\kappa = 1$ 、 $\gamma = 2.0$ として加えたモデルである。また各モデルで $\gamma_t = 1.3$ 、クーラン数を 0.5 とした。

Ryu & Jones の初期条件は、

$$\begin{pmatrix} \rho \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \\ P_t \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} 1.08 \\ 1.2 \\ 0.01 \\ 0.5 \\ 2 \\ 3.6 \\ 2 \\ 0.95 \end{pmatrix} \quad (2.120)$$

$$\begin{pmatrix} \rho \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \\ P_t \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.121)$$

である。添字 L は不連続面の左側の値、添字 R は不連続面の右側の値である事を示す。

以下の図は $t = 0.17$ における各物理量の分布図である。

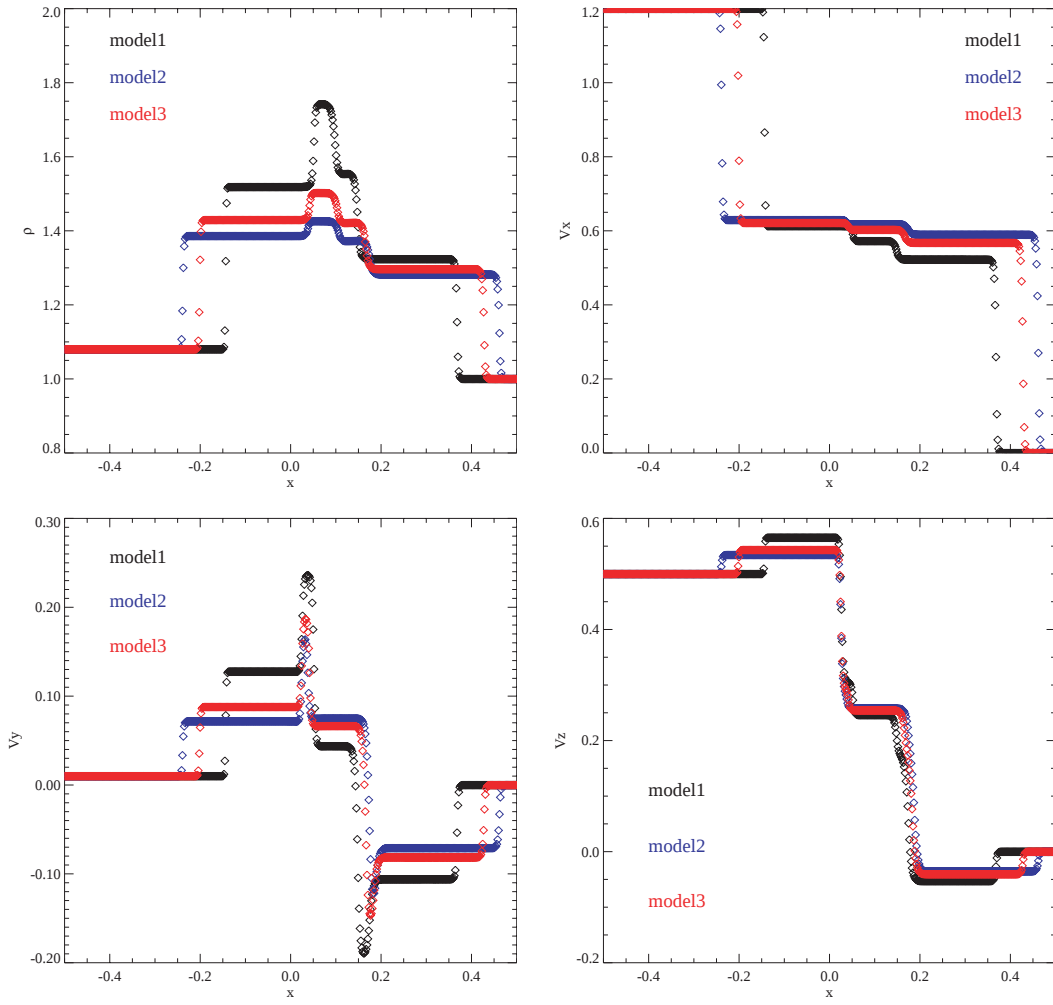


図 2.1: テスト問題の計算結果。上段左が密度、上段右が v_x 、下段左が v_y 、下段右が v_z の時刻 0.17 での分布図である。黒線が model1、青線が model2、赤線が model3 の結果を表している。

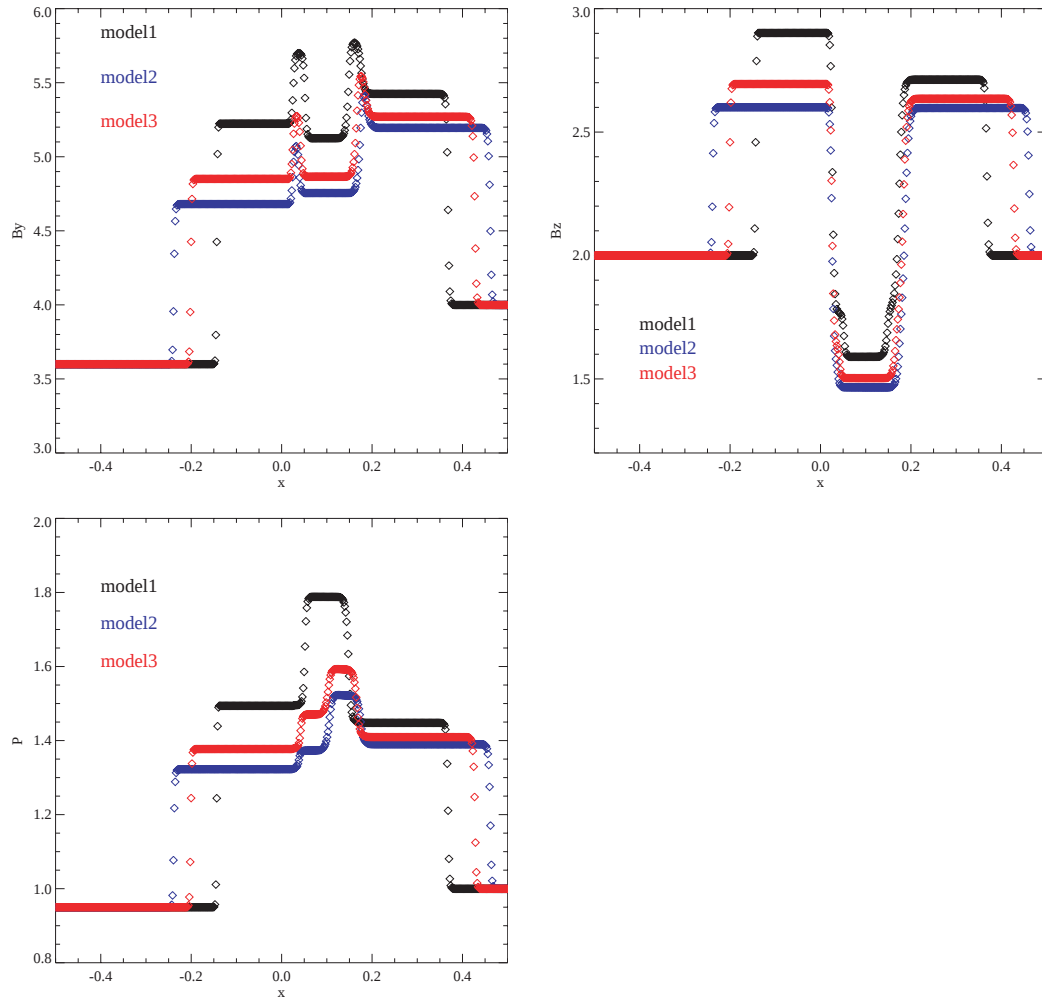


図 2.2: テスト問題の計算結果。上段左が B_y 、上段右が B_z 、下段左が P の時刻 0.17 での分布図である。黒線が model1、青線が model2、赤線が model3 の結果を表している。

2.4 公式のまとめ

基礎方程式系

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \quad (2.122)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ B_y \\ B_z \\ \rho E \end{pmatrix} \quad (2.123)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho v_x^2 + P + \frac{\rho v_x}{B_y^2 + B_z^2 - B_x^2} \\ \rho v_x v_y - \frac{B_x B_y}{4\pi} \\ \rho v_x v_z - \frac{B_x B_z}{4\pi} \\ v_x B_y - v_y B_x \\ v_x B_z - v_z B_x \\ \rho H v_x - \frac{B_x (B_x v_x + B_y v_y + B_z v_z)}{4\pi} \end{pmatrix} \quad (2.124)$$

Roe 平均

$$\bar{\rho} = \sqrt{\rho_{j+1} \rho_j} \quad (2.125)$$

$$\bar{v}_x = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}} v_{x,j+1} + \sqrt{\rho_j} v_{x,j}}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} \quad (2.126)$$

$$\bar{v}_y = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}} v_{y,j+1} + \sqrt{\rho_j} v_{y,j}}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} \quad (2.127)$$

$$\bar{v}_z = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}} v_{z,j+1} + \sqrt{\rho_j} v_{z,j}}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} \quad (2.128)$$

$$\bar{B}_y = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}} B_{y,j} + \sqrt{\rho_j} B_{y,j+1}}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} \quad (2.129)$$

$$\bar{B}_z = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}} B_{z,j} + \sqrt{\rho_j} B_{z,j+1}}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} \quad (2.130)$$

$$\bar{\varepsilon}_c = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}} \varepsilon_{c,j+1} + \sqrt{\rho_j} \varepsilon_{c,j}}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} \quad (2.131)$$

$$\bar{\varepsilon}_t = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}} \varepsilon_{t,j+1} + \sqrt{\rho_j} \varepsilon_{t,j}}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} \quad (2.132)$$

$$\bar{P}_c = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}} P_{c,j+1} + \sqrt{\rho_j} P_{c,j}}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} \quad (2.133)$$

固有値

$$\lambda_0 = \bar{v}_x \quad (2.134)$$

$$\lambda_{A+} = \bar{v}_x + b_x \quad (2.135)$$

$$\lambda_{A-} = \bar{v}_x - b_x \quad (2.136)$$

$$\lambda_{f+} = \bar{v}_x + c_f \quad (2.137)$$

$$\lambda_{f-} = \bar{v}_x - c_f \quad (2.138)$$

$$\lambda_{s+} = \bar{v}_x + c_s \quad (2.139)$$

$$\lambda_{s-} = \bar{v}_x - c_s \quad (2.140)$$

$$\delta b^2 = \frac{\gamma_t - 1}{\gamma_t - 2} \frac{(B_{y,j+1} - B_{y,j})^2 + (B_{z,j+1} - B_{z,j})^2}{8\pi (\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j})^2} \quad (2.141)$$

$$a^2 = (\gamma_t - 1) \left(\bar{H} - \frac{\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2}{2} - G + \frac{B_x^2 + \bar{B}_y^2 + \bar{B}_z^2}{4\pi\rho} - \delta b^2 \right) \quad (2.142)$$

$$a_*^2 = (\gamma_t - 1) \left(\bar{H} - \frac{\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2}{2} - G - \delta b^2 \right) \quad (2.143)$$

$$- (\gamma_t - 2) \left(\frac{B_x^2 + \bar{B}_y^2 + \bar{B}_z^2}{4\pi\rho} \right) \quad (2.144)$$

$$b_x = \frac{|B_x|}{\sqrt{4\pi\bar{\rho}}} \quad (2.145)$$

$$c_{f,s}^2 = \frac{a_*^2 \pm \sqrt{a_*^4 - 4a^2 b_x^2}}{2} \quad (2.146)$$

固有ベクトル (entropy)

$$\boldsymbol{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{v}_x \\ \bar{v}_y \\ \bar{v}_z \\ 0 \\ 0 \\ \frac{(\bar{\boldsymbol{v}})^2}{2} + \delta b^2 + G \end{pmatrix} \quad (2.147)$$

固有ベクトル (Alfvén)

$$\mathbf{r}_{A+} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\beta_z \operatorname{sgn}(B_x) \\ \beta_y \operatorname{sgn}(B_x) \\ \beta_z \sqrt{4\pi/\bar{\rho}} \\ -\beta_y \sqrt{4\pi/\bar{\rho}} \\ -(\beta_z \bar{v}_y - \beta_y \bar{v}_z) \operatorname{sgn}(B_x) \end{pmatrix} \quad (2.148)$$

$$\mathbf{r}_{A-} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_z \operatorname{sgn}(B_x) \\ -\beta_y \operatorname{sgn}(B_x) \\ \beta_z \sqrt{4\pi/\bar{\rho}} \\ -\beta_y \sqrt{4\pi/\bar{\rho}} \\ (\beta_z \bar{v}_y - \beta_y \bar{v}_z) \operatorname{sgn}(B_x) \end{pmatrix} \quad (2.149)$$

固有ベクトル (fast)

$$\mathbf{r}_{f+} = \begin{pmatrix} \alpha_f \\ \alpha_f (\bar{v}_x + c_f) \\ \alpha_f \bar{v}_y - \alpha_s \beta_y b_x \operatorname{sgn}(B_x) \\ \alpha_f \bar{v}_z - \alpha_s \beta_z b_x \operatorname{sgn}(B_x) \\ \alpha_s \beta_y c_f \sqrt{4\pi/\bar{\rho}} \\ \alpha_s \beta_z c_f \sqrt{4\pi/\bar{\rho}} \\ \alpha_f \left\{ \frac{(\bar{\mathbf{v}})^2}{2} + \delta b^2 + G + c_f \bar{v}_x + \frac{c_f^2}{\gamma_t - 1} \right. \\ \left. + \frac{\gamma_t - 2}{\gamma_t - 1} (c_f^2 - a^2) \right\} - \alpha_s b_x \operatorname{sgn}(B_x) (\beta_y \bar{v}_y + \beta_z \bar{v}_z) \end{pmatrix} \quad (2.150)$$

$$\mathbf{r}_{f-} = \begin{pmatrix} \alpha_f \\ \alpha_f (\bar{v}_x - c_f) \\ \alpha_f \bar{v}_y + \alpha_s \beta_y b_x \operatorname{sgn}(B_x) \\ \alpha_f \bar{v}_z + \alpha_s \beta_z b_x \operatorname{sgn}(B_x) \\ \alpha_s \beta_y c_f \sqrt{4\pi/\bar{\rho}} \\ \alpha_s \beta_z c_f \sqrt{4\pi/\bar{\rho}} \\ \alpha_f \left\{ \frac{(\bar{\mathbf{v}})^2}{2} + \delta b^2 + G - c_f \bar{v}_x + \frac{c_f^2}{\gamma_t - 1} \right. \\ \left. + \frac{\gamma_t - 2}{\gamma_t - 1} (c_f^2 - a^2) \right\} + \alpha_s b_x \operatorname{sgn}(B_x) (\beta_y \bar{v}_y + \beta_z \bar{v}_z) \end{pmatrix} \quad (2.151)$$

固有ベクトル (slow)

$$\mathbf{r}_{s+} = \begin{pmatrix} \alpha_s \\ \alpha_s (\bar{v}_x + c_s) \\ \alpha_s \bar{v}_y + \alpha_f \beta_y a \operatorname{sgn}(B_x) \\ \alpha_s \bar{v}_z + \alpha_f \beta_z a \operatorname{sgn}(B_x) \\ - \frac{\alpha_f \beta_y a^2 \sqrt{4\pi}}{c_f \sqrt{\bar{\rho}}} \\ - \frac{\alpha_f \beta_z a^2 \sqrt{4\pi}}{c_f \sqrt{\bar{\rho}}} \\ \alpha_s \beta_z c_f \sqrt{4\pi/\bar{\rho}} \\ \alpha_s \left\{ \frac{(\bar{\mathbf{v}})^2}{2} + \delta b^2 + G + c_s \bar{v}_x + \frac{c_s^2}{\gamma_t - 1} \right. \\ \left. + \frac{\gamma_t - 2}{\gamma_t - 1} (c_s^2 - a^2) \right\} + \alpha_f a \operatorname{sgn}(B_x) (\beta_y \bar{v}_y + \beta_z \bar{v}_z) \end{pmatrix} \quad (2.152)$$

$$\mathbf{r}_{s+} = \begin{pmatrix} \alpha_s \\ \alpha_s (\bar{v}_x - c_s) \\ \alpha_s \bar{v}_y - \alpha_f \beta_y a \operatorname{sgn}(B_x) \\ \alpha_s \bar{v}_z - \alpha_f \beta_z a \operatorname{sgn}(B_x) \\ - \frac{\alpha_f \beta_y a^2 \sqrt{4\pi}}{c_f \sqrt{\bar{\rho}}} \\ - \frac{\alpha_f \beta_z a^2 \sqrt{4\pi}}{c_f \sqrt{\bar{\rho}}} \\ \alpha_s \beta_z c_f \sqrt{4\pi/\bar{\rho}} \\ \alpha_s \left\{ \frac{(\bar{\mathbf{v}})^2}{2} + \delta b^2 + G - c_s \bar{v}_x + \frac{c_s^2}{\gamma_t - 1} \right. \\ \left. + \frac{\gamma_t - 2}{\gamma_t - 1} (c_s^2 - a^2) \right\} - \alpha_f a \operatorname{sgn}(B_x) (\beta_y \bar{v}_y + \beta_z \bar{v}_z) \end{pmatrix} \quad (2.153)$$

$$\alpha_f = \frac{\sqrt{c_f^2 - b_x^2}}{\sqrt{c_f^2 - c_s^2}} \quad (2.154)$$

$$\alpha_s = \frac{\sqrt{c_f^2 - a^2}}{\sqrt{c_f^2 - c_s^2}} = \frac{c_f}{b_x} \frac{\sqrt{b_x^2 - c_s^2}}{\sqrt{c_f^2 - c_s^2}} \quad (2.155)$$

$$c_{f,s}^2 = \frac{a_*^2 \pm \sqrt{a_*^4 - 4a^2 b_x^2}}{2} \quad (2.156)$$

$$\beta_y = \frac{\bar{B}_y}{\sqrt{\bar{B}_y^2 + \bar{B}_z^2}} \quad (2.157)$$

$$\beta_z = \frac{\bar{B}_z}{\sqrt{\bar{B}_y^2 + \bar{B}_z^2}} \quad (2.158)$$

$$\beta_y^2 + \beta_z^2 = 1 \quad (2.159)$$

$$\alpha_f^2 + \frac{b_x^2}{c_f^2} \alpha_s^2 = 1 \quad (2.160)$$

振幅

$$\delta w_2 = \frac{1}{2} \left[-\bar{\rho}(\beta_z \Delta v_y - \beta_y \Delta v_z) \text{sgn}(B_x) + \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{4\pi}} (\beta_z \Delta B_y - \beta_y \Delta B_z) \right] \quad (2.161)$$

$$\delta w_6 = \frac{1}{2} \left[\bar{\rho}(\beta_z \Delta v_y - \beta_y \Delta v_z) \text{sgn}(B_x) + \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{4\pi}} (\beta_z \Delta B_y - \beta_y \Delta B_z) \right] \quad (2.162)$$

$$\delta w_1 + \delta w_7 = \frac{\alpha_f}{c_f^2} \left(\Delta P + \frac{\tilde{B}_y \Delta B_y + \tilde{B}_z \Delta B_z}{4\pi} \right) \quad (2.163)$$

$$+ \left\{ \frac{\alpha_s}{a^2 c_f} [(\gamma_t - 1)c_s^2 - (\gamma_t - 2)a^2] \sqrt{4\pi \bar{\rho}} \right. \quad (2.164)$$

$$+ (\gamma_t - 2) \sqrt{\bar{B}_y^2 + \bar{B}_z^2} \frac{\alpha_f}{c_f^2} \left. \right\} \frac{\beta_y \Delta B_y + \beta_z \Delta B_z}{4\pi} \quad (2.165)$$

$$\delta w_1 - \delta w_7 = \frac{\alpha_f}{c_f} \bar{\rho} \Delta v_x - \frac{\alpha_s c_s}{c_f a} \text{sgn}(B_x) \bar{\rho} (\beta_y \Delta v_y + \beta_z \Delta v_z) \quad (2.166)$$

$$\delta w_3 + \delta w_5 = \frac{\alpha_s}{a^2} \left(\Delta P + \frac{\tilde{B}_y \Delta B_y + \tilde{B}_z \Delta B_z}{4\pi} \right) \quad (2.167)$$

$$+ \left\{ \alpha_f \left[\frac{\gamma_t - 2}{c_f} - (\gamma_t - 1) \frac{c_f}{a^2} \right] \sqrt{4\pi \bar{\rho}} \right. \quad (2.168)$$

$$+ (\gamma_t - 2) \sqrt{\bar{B}_y^2 + \bar{B}_z^2} \frac{\alpha_s}{a^2} \left. \right\} \frac{\beta_y \Delta B_y + \beta_z \Delta B_z}{4\pi} \quad (2.169)$$

$$\delta w_3 - \delta w_5 = \frac{\alpha_s b_x}{c_f a} \bar{\rho} \Delta v_x + \frac{\alpha_f}{a} \text{sgn}(B_x) \bar{\rho} (\beta_y \Delta v_y + \beta_z \Delta v_z) \quad (2.170)$$

$$\delta w_4 = \Delta \rho - \alpha_f (\delta w_1 + \delta w_7) - \alpha_s (\delta w_3 + \delta w_5) \quad (2.171)$$

2.5 参考

参考のために、1次元と3次元の流体の場合に今回の状態方程式を採用した場合の公式を掲載する。

2.5.1 1次元流体力学方程式の場合

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \quad (2.172)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix} \quad (2.173)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + P \\ \rho H v \end{pmatrix} \quad (2.174)$$

$$\Delta \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho_{j+1} - \rho_j \\ \rho_{j+1} v_{j+1} - \rho_j v_j \\ \rho_{j+1} E_{j+1} - \rho_j E_j \end{pmatrix} \quad (2.175)$$

$$= \begin{pmatrix} \rho_{j+1} - \rho_j \\ \rho_{j+1} v_{j+1} - \rho_j v_j \\ \rho_{j+1} H_{j+1} - \rho_j H_j + P_{j+1} - P_j \end{pmatrix} \quad (2.176)$$

$$\Delta \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho_{j+1} v_{j+1} - \rho_j v_j \\ \rho_{j+1} v_{j+1}^2 + P_{j+1} - \rho_j v_j^2 - P_j \\ \rho_{j+1} H_{j+1} v_{j+1} - \rho_j H_j v_j \end{pmatrix} \quad (2.177)$$

Roe 平均

$$\bar{\rho} = \sqrt{\rho_{j+1} \rho_j} \quad (2.178)$$

$$\bar{v} = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}} v_{j+1} + \sqrt{\rho_j} v_j}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} \quad (2.179)$$

$$\bar{H} = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}} H_{j+1} + \sqrt{\rho_j} H_j}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} \quad (2.180)$$

$$\bar{c}^2 = (\gamma_t - 1) \left(\bar{H} - \frac{(\bar{v})^2}{2} - G \right) \quad (2.181)$$

$$G = (\Delta \rho)^{-1} \Delta \left(\rho \varepsilon_c - \frac{P_c}{\gamma_t - 1} \right) \quad (2.182)$$

$$= \bar{\varepsilon}_c + \bar{\rho} \frac{\Delta \varepsilon_c}{\Delta \rho} - \frac{1}{\gamma_t - 1} \frac{\Delta P_c}{\Delta \rho} \quad (2.183)$$

固有値

$$\lambda_+ = \bar{v} + \bar{c} \quad (2.184)$$

$$\lambda_- = \bar{v} - \bar{c} \quad (2.185)$$

$$\lambda_0 = \bar{v} \quad (2.186)$$

右固有ベクトル

$$\mathbf{r}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{v} + \bar{c} \\ \bar{H} + \bar{c}\bar{v} \end{pmatrix} \quad (2.187)$$

$$\mathbf{r}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{v} - \bar{c} \\ \bar{H} - \bar{c}\bar{v} \end{pmatrix} \quad (2.188)$$

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{(\bar{v})^2}{2} + G \end{pmatrix} \quad (2.189)$$

振幅

$$\delta w_+ = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta P}{\bar{c}^2} + \frac{\bar{\rho}}{\bar{c}} \Delta v \right) \quad (2.190)$$

$$\delta w_- = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta P}{\bar{c}^2} - \frac{\bar{\rho}}{\bar{c}} \Delta v \right) \quad (2.191)$$

$$\delta w_0 = \Delta \rho - \frac{\Delta P}{\bar{c}^2} \quad (2.192)$$

固有モードへの分解

$$\Delta \mathbf{U} = \delta w_+ \mathbf{r}_+ + \delta w_- \mathbf{r}_- + \delta w_0 \mathbf{r}_0 \quad (2.193)$$

$$\Delta \mathbf{F} = \delta w_+ \lambda_+ \mathbf{r}_+ + \delta w_- \lambda_- \mathbf{r}_- + \delta w_0 \lambda_0 \mathbf{r}_0 \quad (2.194)$$

2.5.2 3次元流体力学方程式の場合

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ \rho E \end{pmatrix} \quad (2.195)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v_x^2 + P \\ \rho v_x v_y \\ \rho v_x v_z \\ \rho H v_x \end{pmatrix} \quad (2.196)$$

Roe 平均

$$\bar{\rho} = \sqrt{\rho_{j+1}\rho_j} \quad (2.197)$$

$$\bar{v}_x = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}} v_{x,j+1} + \sqrt{\rho_j} v_{x,j}}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} \quad (2.198)$$

$$\bar{v}_y = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}} v_{y,j+1} + \sqrt{\rho_j} v_{y,j}}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} \quad (2.199)$$

$$\bar{v}_z = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}} v_{z,j+1} + \sqrt{\rho_j} v_{z,j}}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} \quad (2.200)$$

$$\bar{H} = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}} H_{j+1} + \sqrt{\rho_j} H_j}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} \quad (2.201)$$

$$\bar{c}^2 = (\gamma_t - 1) \left(\bar{H} - \frac{(\bar{\mathbf{v}})^2}{2} - G \right) \quad (2.202)$$

$$G = (\Delta\rho)^{-1} \Delta \left(\rho \varepsilon_c - \frac{P_c}{\gamma_t - 1} \right) \quad (2.203)$$

$$= \bar{\varepsilon}_c + \bar{\rho} \frac{\Delta \varepsilon_c}{\Delta \rho} - \frac{1}{\gamma_t - 1} \frac{\Delta P_c}{\Delta \rho} \quad (2.204)$$

固有値

$$\lambda_+ = \bar{v}_x + \bar{c} \quad (2.205)$$

$$\lambda_- = \bar{v}_x - \bar{c} \quad (2.206)$$

$$\lambda_0 = \bar{v}_x \quad (2.207)$$

$$\lambda_y = \bar{v}_x \quad (2.208)$$

$$\lambda_z = \bar{v}_x \quad (2.209)$$

右固有ベクトル

$$\mathbf{r}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{v}_x + \bar{c} \\ \bar{v}_y \\ \bar{v}_z \\ \bar{H} + \bar{c}\bar{v}_x \end{pmatrix} \quad (2.210)$$

$$\mathbf{r}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{v}_x - \bar{c} \\ \bar{v}_y \\ \bar{v}_z \\ \bar{H} - \bar{c}\bar{v}_x \end{pmatrix} \quad (2.211)$$

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{v}_x \\ \bar{v}_y \\ \bar{v}_z \\ \frac{(\bar{v})^2}{2} + G \end{pmatrix} \quad (2.212)$$

$$\mathbf{r}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \bar{v}_y \end{pmatrix} \quad (2.213)$$

$$\mathbf{r}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \bar{v}_z \end{pmatrix} \quad (2.214)$$

振幅

$$\delta w_+ = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta P}{\bar{c}^2} + \frac{\bar{\rho}}{\bar{c}} \Delta v_x \right) \quad (2.215)$$

$$\delta w_- = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta P}{\bar{c}^2} - \frac{\bar{\rho}}{\bar{c}} \Delta v_x \right) \quad (2.216)$$

$$\delta w_0 = \Delta \rho - \frac{\Delta P}{\bar{c}^2} \quad (2.217)$$

$$\delta w_y = \bar{\rho} \Delta v_y \quad (2.218)$$

$$\delta w_z = \bar{\rho} \Delta v_z \quad (2.219)$$

$$(2.220)$$

固有モードへの分解

$$\Delta U = \delta w_+ \mathbf{r}_+ + \delta w_- \mathbf{r}_- + \delta w_0 \mathbf{r}_0 + \delta w_y \mathbf{r}_y + \delta w_z \mathbf{r}_z \quad (2.221)$$

$$\Delta \mathbf{F} = \delta w_+ \lambda_+ \mathbf{r}_+ + \delta w_- \lambda_- \mathbf{r}_- + \delta w_0 \lambda_0 \mathbf{r}_0 \quad (2.222)$$

$$+ \delta w_y \lambda_y \mathbf{r}_y + \delta w_z \lambda_z \mathbf{r}_z \quad (2.223)$$

参考文献

- [1] Fukuda, N., & Hanawa, T., 2000, ApJ, 533, 911
- [2] Nobuta, K., & Hanawa, T., 1999, ApJ, 510, 614
- [3] Roe, P. L. 1981, J. Comput. Phys., 43, 357
- [4] Ryu, D., & Jones, T. W., 1995, ApJ, 442, 228
- [5] 藤井孝藏, 1994, 流体力学の数値計算法, 東大出版会